Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С. Сковороди

Кафедра математики

ЗБІРНИК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тест 3

Застосування теорем диференціального числення. Дослідження функцій методами диференціального числення

Харків

2016

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161
Д 30

Затверджено на засіданні кафедри математики
Харківського національного педагогічного університету
імені Г.С. Сковороди

Протокол № 14 від 23 лютого 2016 року

Рецензенти:

Долгова О.Є. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Яцинiна Н.О. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри інформатики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Укладачі:

Сушко Ю.С., Процай В.Ф.

Сушко Ю.С., Процай В.Ф.

Д 30 Збірник тестових завдань з математичного аналізу. Тест 3. Застосування теорем диференціального числення. Дослідження функцій методами диференціального числення. – Х. : ХНПУ імені Г.С. Сковороди, 2016. – 20 с.

Видано за кошти авторів

Навчальне видання

Сушко Юлія Сергіївна
Процай Валерій Федорович

Збірник тестових завдань з математичного аналізу.
Тест 3. Застосування теорем диференціального числення.
Дослідження функцій методами диференціального числення.

Відповідальний за випуск: Нелін Є.П.

Підписано до друку 23.02.2016 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times ET. Друк ризографічний.
Умов. друк. арк. 0,9. Наклад 100 прим. Замов. № 0223/9-16.

Надруковано з готового оригінал-макету у друкарні ФОП Петров В. В.
Єдиний державний реєстр юридичних осіб та фізичних осіб-підприємців.
Запис № 24800000000106167 від 08.01.2009 р.
61144, м. Харків, вул. Гв. Широнинців, 79в, к.137, тел. (057) 778-60-34
e-mail:bookfabrik@mail.ua

Тест 3. Застосування теорем диференціального числення. Дослідження функцій методами диференціального числення

Мета тесту – поточний контроль рівня засвоєння студентами навчального матеріалу теми.

№ зав-дан-ня	*Мета тестового завдання*	*Форма тестового завдання*	*Рівень складності завдання*	*Кількість балів за виконання завдання*
1.	Перевірити вміння студента застосовувати похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції	Вибір однієї правильної відповіді	I	1
2.	Перевірити вміння студента складати рівняння дотичної, визначати кутовий коефіцієнт дотичної	Вибір однієї правильної відповіді	I	1
3.	Перевірити вміння студента знаходити границю функції за правилом Лопіталя	Вибір однієї правильної відповіді	I	1
4.	Перевірити вміння студента використовувати формули Маклорена для елементарних функцій	Встановлення відповідності	II	4
5.	Перевірити знання і розуміння студентом основних теоретичних відомостей з теми	Встановлення відповідності	II	4
6.	Перевірити вміння студента розв'язувати задачі на знаходження найбільшого/найменшого значення	Завдання з короткою відповіддю	II	2
7.	Перевірити вміння студента знаходити проміжки зростання/спадання (опуклості вгору/опуклості вниз)	Завдання з короткою відповіддю	II	2
8.	Перевірити вміння студента знаходити асимптоти графіка функції	Завдання з короткою відповіддю	II	2
9.	Перевірити вміння студента розкладати функцію за формулою Тейлора / застосовувати формулу Тейлора до обчислення границь	Завдання з розгорнутою відповіддю	III	3
10.	Перевірити вміння студента досліджувати функцію засобами диференціального числення та будувати її графік	Завдання з розгорнутою відповіддю	III	3

Інструкції щодо виконання завдань тесту:

- *в завданнях 1–4 виберіть одну правильну на вашу думку відповідь із запропонованих.*
- *в завданні 5 встановіть відповідність між елементами I стовпчика та елементами II стовпчика, зробивши відповідні позначки у відведеному місці.*
- *в завданнях 6–8 впишіть правильну відповідь у відповідне місце.*
- *в завданні 9–10 напишіть повну відповідь.*

ВАРІАНТ 1

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = x^4 - 2x^2 - 5$

   А. $(-\infty; +\infty)$ **Б**. $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ **В**. $(-1; 1)$ **Г**. $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$.

2. Задано функцію $f(x) = 3x^2 - 5x$. Рівняння дотичної до графіку цієї функції в точці $x_0 = -2$ має вигляд:

   А. $y = 17x - 12$. **Б**. $y = -17x + 12$. **В**. $y = 7x - 12$. **Г**. $y = x + 12$.

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$ дорівнює:

   А. $-\frac{4}{9}$. **Б**. 0. **В**. $\frac{4}{9}$. **Г**. 1.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x) = e^x$	**А.**	$1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$
2.	$f(x) = \cos x$	**Б.**	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$
3.	$f(x) = \sin x$	**В.**	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \bar{o}(x^{2n})$
4.	$f(x) = \ln(1+x)$	**Г.**	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$
		Д.	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$	**А.**	Теорема Коші
2.	Якщо функція $f(x)$, визначена на множині R, диференційовна у внутрішній точці $x_0 \in R$ і досягає в цій точці свого найбільшого або найменшого значення, то похідна цієї функції в точці x_0 дорівнює 0.	**Б.**	Теорема Лагранжа
3.	Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.	**В.**	Теорема Ферма
4.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна у внутрішніх точках $(a; b)$, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка x_0, яка належить інтервалу $(a; b)$, в якій $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.	**Г.**	Теорема про зв'язок диференційовності функції та існування похідної
		Д.	Теорема Ролля

6. Знайдіть найбільше значення функції на заданому відрізку:

$$y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59, \quad x \in [2; 4]$$

Відповідь:______________________________________

7. Задано функцію $y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:______________________________________

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$.

Відповідь:______________________________________

9. Запишіть розклад функції за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $f(x) = Chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

10. Задано функцію: $y = \frac{x^3+4}{x^2}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 2

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = x^3 - 3$

А. $(-\infty; +\infty)$ **Б**. $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ **В**. $(-1; 1)$ **Г**. $(1; +\infty)$.

2. Задано функцію $f(x) = x^2 - x$. Рівняння дотичної до графіку цієї функції в точці $x_0 = 5$ має вигляд:

А. $y = 9x - 25$. **Б**. $y = 9x + 25$. **В**. $y = 9x - 5$. **Г**. $y = 25x - 9$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{sin 5x}$ дорівнює:

А. $-\frac{3}{5}$. **Б**. 0. **В**. $\frac{1}{5}$. **Г**. $\frac{3}{5}$.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

А. $f(x) = \cos x$ **1.** $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}\,(x^{2n-1})$

Б. $f(x) = e^x$ **2.** $1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$

В. $f(x) = \ln(1 + x)$

Г. $f(x) = \sin x$

3. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \bar{o}(x^{2n})$

4. $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n)$

5. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$; мають скінчені похідні на інтервалі $(a; b)$; $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; $g(a) \neq g(b)$, то $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2. Якщо: функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $f'(x) \neq 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;b)$; $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$; існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.

4. Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$

А. Правило Лопіталя

Б. Теорема Коші

В. Теорема про зв'язок диференційовності функції та існування похідної

Г. Ознака монотонності функції

Д. Теорема Ферма

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, \quad x \in [1; 4]$

Відповідь:_______________________________________

7. Задано функцію $y = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:_______________________________________

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Відповідь:_______________________________________

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^4, якщо $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.

10. Задано функцію: $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 3

1. Вкажіть проміжки спадання функції $y=\frac{4x}{4+x^2}$

А. $(-\infty; -2)$ **Б**. $(-2; 2)$ **В**. $(2; 4)$ **Г**. $(-\infty; -2)$ і $(2; +\infty)$.

2. Задано функцію $f(x)=x^3+2x-2$. Рівняння дотичної до графіку цієї функції в точці $x_0=1$ має вигляд:

А. $y=4x-5$. **Б**. $y=-4x+5$. **В**. $y=5x-4$. **Г**. $y=5x+4$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x}$ дорівнює:

А. $-\frac{4}{9}$. **Б**. 0. **В**. $\frac{4}{9}$. **Г**. 1.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

А.	$f(x)=\ln(1+x)$	**1.**	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\bar{o}(x^n)$
Б.	$f(x)=\cos x$	**2.**	$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\bar{o}(x^{2n-1})$
В.	$f(x)=e^x$	**3.**	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\bar{o}(x^{2n})$
Г.	$f(x)=\sin x$	**4.**	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\bar{o}(x^n)$
		5.	$1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\dots+\frac{x^n}{n!}+\bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо функція $f(x)$, визначена на множині R, диференційовна у внутрішній точці $x_0 \in R$ і досягає в цій точці свого найбільшого або найменшого значення, то похідна цієї функції в точці x_0 дорівнює 0.	**А.**	Теорема Лагранжа
2.	Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.	**Б.**	Теорема Коші
3.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна у внутрішніх точках $(a; b)$, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка x_0, яка належить інтервалу $(a; b)$, в якій $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.	**В.**	Правило Лопіталя
4.	Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$; мають скінчені похідні на інтервалі $(a; b)$; $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; $g(a) \neq g(b)$, то $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.	**Г.**	Теорема Ролля
		Д.	Теорема Ферма

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$, $\quad x \in [1; 4]$

Відповідь:____

7. Задано функцію $y = \dfrac{e^x}{x+1}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:____

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Відповідь:____

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^{13}, якщо $\quad f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$.

10. Задано функцію: $y = \dfrac{e^x}{1+x}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 4

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = (x - 1)\,e^{3x+1}$

   А. $(-\infty; +\infty)$ **Б.** $(-\infty; 0)$ і $(\frac{2}{3}; +\infty)$ **В.** $(0; \frac{2}{3};)$ **Г.** $(\frac{2}{3};; +\infty)$.

2. Задано функцію $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$. Рівняння дотичної до графіку цієї функції в точці $x_0 = 1$ має вигляд:

   А. $y = -2x - 2$. **Б.** $y = -2x + 2$. **В.** $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. **Г.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$ дорівнює:

   А. $-\frac{7}{2}$. **Б.** 0. **В.** 1. **Г.** $\frac{7}{2}$.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x) = \cos x$	**А.**	$1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$
2.	$f(x) = \sin x$	**Б.**	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}\,(x^{2n-1})$
3.	$f(x) = \ln(1 + x)$	**В.**	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \bar{o}\,(x^{2n})$
4.	$f(x) = e^x$	**Г.**	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \bar{o}\,(x^n)$
		Д.	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо: функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $f'(x) \neq 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;b)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$; існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.	**А.**	Теорема Лагранжа

2.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.	**Б.**	Правило Лопіталя
3.	Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$	**В.**	Ознака монотонності функції
4.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна у внутрішніх точках $(a; b)$, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка x_0, яка належить інтервалу $(a; b)$, в якій $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.	**Г.**	Теорема про зв'язок диференційовності функції та існування похідної
		Д.	Теорема Ферма

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1, \quad x \in [0; 6]$
Відповідь:____

7. Задано функцію $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.
Відповідь:____

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{x}{x^2 - x + 2}$.
Відповідь:____

9. Запишіть розклад функції за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано $f(x) = Chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

10. Задано функцію: $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 5

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = ln\,(x^2 + 1)$
А. $(-\infty; +\infty)$ **Б.** $(-\infty; 0)$ **В.** $(0; +\infty)$ **Г.** $(-1; 1)$.

2. Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графику функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$ дорівнює
А. –2. **Б.** 0. **В.** 1. **Г.** 3.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ дорівнює:
А. $-\frac{1}{3}$. **Б.** 0. **В.** $\frac{1}{3}$. **Г.** 1.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x) = \cos x$	**А.**	$1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$
2.	$f(x) = \ln(1 + x)$	**Б.**	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \bar{o}(x^{2n})$
3.	$f(x) = e^x$	**В.**	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$
4.	$f(x) = \sin x$	**Г.**	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n)$
		Д	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.	**А.**	Правило Лопіталя
2.	Якщо: функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $f'(x) \neq 0$, $\varphi'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$; існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.	**Б.**	Ознака монотонності функції
3.	Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$; мають скінчені похідні на інтервалі $(a; b)$; $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; $g(a) \neq g(b)$, то $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.	**В.**	Теорема Лагранжа
4.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна у внутрішніх точках $(a; b)$, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка x_0, яка належить інтервалу $(a; b)$, в якій $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.	**Г.**	Теорема Коші
		Д.	Теорема Ролля

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:

$y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $x\in[-3;3]$

Відповідь:____

7. Задано функцію $y=\frac{x+1}{(x-1)^2}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:____

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y=\frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$.

Відповідь:____

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^5, якщо $f(x)=e^{2x-x^2}$.

10. Задано функцію: $y=\frac{x^3+1}{x^2}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 6

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y=\frac{x}{9-x}$

А. $(-\infty;+\infty)$ **Б**. $(-\infty;9)$ **В**. $(9;+\infty)$ **Г**. $(-\infty;9)$ і $(9;+\infty)$.

2. Задано функцію $f(x)=x^2+2x$. Тангенс кута нахилу до вісі абсцис дотичною, що проходить через точку (1; 3) дорівнює:

А. 1. **Б**. 4. **В**. 6. **Г**. 8.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{tg3x}$ дорівнює:

А. $-\frac{3}{7}$. **Б**. 0. **В**. 1. **Г**. $\frac{7}{3}$.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x)=e^x$	**А.**	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\bar{o}(x^{2n})$
2.	$f(x)=\cos x$	**Б.**	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\bar{o}(x^n)$

3.	$f(x) = \ln(1+x)$	**В.**	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n)$
4.	$f(x) = \sin x$	**Г.**	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$
		Д.	$1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.	**А.**	Теорема Ферма
2.	Якщо функція $f(x)$, визначена на множині R, диференційовна у внутрішній точці $x_0 \in R$ і досягає в цій точці свого найбільшого або найменшого значення, то похідна цієї функції в точці x_0 дорівнює 0.	**Б.**	Теорема Ролля
3.	Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$	**В.**	Ознака монотонності функції
4.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.	**Г.**	Достатня умова екстремуму
		Д.	Теорема про зв'язок диференційованості функції та існування похідної

6. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:

$y = 2\sqrt{x} - x, \quad x \in [0; 4]$

Відповідь:______________________________________

7. Задано функцію $y = \dfrac{x^3}{x^4 - 1}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:______________________________________

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

Відповідь:______________________________________

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^3, якщо $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^3}$

10. Задано функцію $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 7

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

   А. $(-\infty; +\infty)$ **Б**. $(-\infty; 0)$ і $(1; 2)$ **В**. $(-\infty; 0)$ і $(2; +\infty)$ **Г**. $(0; 2)$

2. Тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до графіку функції $y = 5x^2 - 7x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$ дорівнює:

   А. 5. **Б**. 7. **В**. 8. **Г**. 13.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lnx}\right)$ дорівнює:

   А. $-\frac{1}{2}$. **Б**. 0. **В**. $\frac{1}{2}$. **Г**. 1.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x) = e^x$	**А.**	$1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$
2.	$f(x) = \ln(1 + x)$	**Б.**	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}\,(x^{2n-1})$
3.	$f(x) = \cos x$	**В.**	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + \bar{o}\,(x^{2n})$
4.	$f(x) = \sin x$	**Г.**	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \bar{o}\,(x^n)$
		Д.	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$; мають скінчені похідні на інтервалі $(a; b)$; $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; $g(a) \neq g(b)$, то $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.	**А.**	Теорема про зв'язок диференційовності функції та існування похідної
2.	Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$	**Б.**	Теорема Ролля

3.	Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.	**В.**	Теорема Ферма
4.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.	**Г.**	Ознака монотонності функції
		Д.	Теорема Коші

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $\quad x \in [1; 9]$

Відповідь:______________________________

7. Задано функцію $y = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:______________________________

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{2x^2+1}{x}$.

Відповідь:______________________________

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^2, якщо $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$ $(a > 0)$.

10. Задано функцію $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 8

1. Вкажіть проміжки спадання функції $y = x\sqrt[3]{x-1}$

А. $(-\infty; 0{,}75)$ **Б.** $(0{,}75; 1)$ **В.** $(0{,}75; +\infty)$ **Г.** $(-\infty; +\infty)$.

2. Пряма $y = 6x + 9$ паралельна дотичній до графіку функції $y = x^2 + 7x - 6$. Абсциса точки дотику дорівнює

А. –1. **Б.** –0,5. **В.** 0,5. **Г.** 1.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$ дорівнює:

А. -2. **Б.** 0. **В.** $\frac{1}{2}$. **Г.** 1.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

А.	$f(x) = \ln(1+x)$	**1.**	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\bar{o}(x^{2n})$
Б.	$f(x) = e^x$	**2.**	$1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\dots+\frac{x^n}{n!}+\bar{o}(x^n)$
В.	$f(x) = \cos x$	**3.**	$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\bar{o}(x^{2n-1})$
Г.	$f(x) = \sin x$	**4.**	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\bar{o}(x^n)$
		5.	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо: функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $f'(x)\neq 0$, $\varphi'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$; існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.	**А.**	Теорема про зв'язок диференційовності функції та існування похідної
2.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.	**Б.**	Теорема Ферма
3.	Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$	**В.**	Правило Лопіталя
4.	Якщо функція $f(x)$, визначена на множині R, диференційовна у внутрішній точці $x_0 \in R$ і досягає в цій точці свого найбільшого або найменшого значення, то похідна цієї функції в точці x_0 дорівнює 0.	**Г.**	Ознака монотонності функції
		Д.	Теорема Лагранжа

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y=\frac{10x}{1+x^2}$, $x\in[0; 3]$

Відповідь:____________________________________

7. Задано функцію $y = (x-1)e^{3x+1}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.
Відповідь:_______________________________________

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.
Відповідь:_____________________________________

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^2, якщо $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$.

10. Задано функцію: $y = \dfrac{x}{x^2-1}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 9

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = arctg\, x - 0{,}5 \ln(1 + x^2)$
А. $(-\infty; +\infty)$ **Б**. $(-\infty; -1)$ **В**. $(-\infty; 1)$ **Г**. $(1; +\infty)$.
2. Задано функцію $f(x) = (x+1)^2$. Рівняння дотичної до графіку цієї функції в точці $x_0 = 1{,}5$ має вигляд:
А. $y = 6{,}25 - 5\,(x + 1{,}5)$.
Б. $y = 6{,}25 - 5\,(x - 1{,}5)$.
В. $y = 6{,}25 + 5\,(x + 1{,}5)$.
Г. $y = 6{,}25 + 5\,(x - 1{,}5)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x - x}{x - \sin x}$ дорівнює:

А. -1. **Б**. 0. **В**. 1. **Г**. 2.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x) = e^x$	**А.**	$1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$
2.	$f(x) = \cos x$	**Б.**	$1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \bar{o}\,(x^n)$
3.	$f(x) = \ln(1 + x)$	**В.**	$1 + \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} - \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \bar{o}\,(x^n)$

4.	$f(x) = \sin x$	**Г.**	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\bar{o}\,(x^{2n})$
		Д.	$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\bar{o}\,(x^{2n-1})$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.	**А.**	Теорема Лагранжа
2.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна у внутрішніх точках $(a; b)$, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка x_0, яка належить інтервалу $(a; b)$, в якій $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.	**Б.**	Теорема Коші
3.	Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$; мають скінчені похідні на інтервалі $(a; b)$; $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; $g(a) \neq g(b)$, то $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.	**В.**	Теорема Ферма
4.	Якщо функція $f(x)$, визначена на множині R, диференційовна у внутрішній точці $x_0 \in R$ і досягає в цій точці свого найбільшого або найменшого значення, то похідна цієї функції в точці x_0 дорівнює 0.	**Г.**	Ознака монотонності функції
		Д.	Теорема Ролля

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$, $x \in [-1; 2]$

Відповідь:____

7. Задано функцію $y = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:____

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = \frac{x^2}{x-3}$.

Відповідь:____

9. Запишіть розклад функції за цілими невід'ємними степенями x до x^4, якщо $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

10. Задано функцію: $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.

ВАРІАНТ 10

1. Вкажіть проміжки зростання функції $y = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$

   А. $(-\infty; +\infty)$ **Б.** $(-\infty; 0)$ і $(0,5; +\infty)$ **В.** $(0; 0,5)$ **Г.** $(-1; 0,5)$

2. Знайдіть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = 2x^4 + 5x^2 - 3$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$:

   А. –18. **Б.** 2. **В.** $\frac{5}{2}$. **Г.** 18.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$ дорівнює:

   А. -1. **Б.** $\frac{4}{5}$. **В.** $\frac{16}{13}$. **Г.** 16.

4. Встановіть відповідність між елементарною функцією та відповідним їй розкладом за формулою Маклорена

1.	$f(x) = \ln(1 + x)$	**А.**	$1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$
2.	$f(x) = \sin x$	**Б.**	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(x^{2n-1})$
3.	$f(x) = \cos x$	**В.**	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \bar{o}(x^{2n})$
4.	$f(x) = e^x$	**Г.**	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \bar{o}(x^n)$
		Д.	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$

5. Встановіть відповідність між теоремою та її назвою.

1.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і у всіх його внутрішніх точках має додатню (від'ємну) похідну, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $[a; b]$.	**А.**	Ознака монотонності функції
2.	Функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує $f'(x_0)$	**Б.**	Теорема Ролля

3.	Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна на інтервалі $(a; b)$ і $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $x_0 \in (a; b)$, в якій $f'(x_0) = 0$.	**В.**	Теорема Лагранжа
4.	Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційовна у внутрішніх точках $(a; b)$, то знайдеться принаймні одна внутрішня точка x_0, яка належить інтервалу $(a; b)$, в якій $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.	**Г.**	Теорема про зв'язок диференційовності функції та існування похідної
		Д.	Теорема Коші

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку: $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{8}{x} + 8, \quad x \in [-4; -1]$

Відповідь:____

7. Задано функцію $y = \frac{4x}{x^2+4}$. Визначте проміжки, на яких функція опукла вгору та проміжки, на яких функція опукла вниз.

Відповідь:____

8. Запишіть рівняння асимптот графіка функції $y = x + arctgx$.

Відповідь:____

9. Знайдіть три члени розкладу функції $f(x) = \sqrt{x}$ за цілими невід'ємними степенями різниці $x - 1$.

10. Задано функцію: $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x-3}$. Проведіть повне дослідження функції засобами диференціального числення та побудуйте її графік. Запишіть всі етапи дослідження.