**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ Г.С. СКОВОРОДИ**

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Сінопальнікова Н.М.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Харків- 2024

УДК 373.3.016:51

Рецензенти:
Сіра І.Т. - кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди
Лук'янова В. А. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету радіоелектроніки.

Затверджено редакційно-видавничою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди
протокол № 5 від 25.04.2024

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Сінопальнікова Н.М.

Теоретичні основи математики. Навчальний посібник. – Харків, 2024. - 78с.

Навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня галузі знань 01 «Освіта/Педагогіка» спеціальності 016 «Спеціальна освіта». До посібника включено теоретичний матеріал п'яти розділів початкового курсу математики: «Множини та операції над ними», «Бінарні відповідності та відношення», «Числові вирази. Рівняння та нерівності», «Величини. Властивості величин», «Основи геометрії».

Навчальний посібник надає здобувачам вищої педагогічної освіти можливість усвідомити сутність та практично опрацювати основні поняття теоретичних основ початкового курсу математики.

Видано за рахунок укладачів

ВСТУП

Зазначений навчальний посібник рекомендований для здобувачів вищої педагогічної освіти, які навчаються за спеціальністю 016 «Спеціальна освіта».

Відповідно до навчальної програми посібник містить 5 розділів: «Множини та операції над ними», «Бінарні відповідності та відношення», «Числові вирази. Рівняння та нерівності», «Величини. Властивості величин», «Основи геометрії».

У першому розділі поряд з висвітленням основних понять теорії множин значна увага приділяється використанню цього матеріалу у формуванні поняття натурального числа, а також пропонується теоретичне обґрунтування низки вправ і завдань з підручників математики для початкових класів, що дозволяє студентам пов'язати вивчену тему зі шкільним курсом математики.

У розділі «Бінарні відповідності та відношення» увага спрямована на ознайомлення з основними положеннями теми і на виявлення теоретичної основи таких понять, як «рівність», «нерівність», «більше-менше», які формуються у початкових класах.

Матеріали третього розділу дають можливість студентам поглибити і узагальнити уявлення про числові вирази та їх значення, про рівняння та нерівності, ознайомитися з поняттям алгоритму та алгоритмічним підходом до розв’язання рівнянь і нерівностей.

У розділі «Величини. Властивості величин» увага приділяється основним величинам, що вивчаються у початковій школі, та їх властивостям. Всі ці поняття складають теоретичну основу методики вивчення величин в курсі математики початкової школи.

Матеріали розділу «Основи геометрії» дають можливість студентам повторити і систематизувати свої знання з основ геометрії, зокрема про геометричні фігури, їх елементи, деякі властивості, про систему аксіом планіметрії, про елементарні геометричні побудови.

Навчальний посібник буде корисний здобувачам вищої освіти як денної, так і заочної форм навчання в їх самостійній роботі на факультеті природничої, спеціальної і здоров’язбережувальної освіти та всіх інших, де викладаються дисципліни за спеціальністю 016 «Спеціальна освіта». Даний навчальний посібник не тільки дає можливість краще зрозуміти запропонований курс, але усвідомити теоретичну основу елементарних математичних понять, що формуються в учнів початкової школи.

Розділ І. МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

§1. ПОНЯТТЯ ПРО МНОЖИНУ

Поняття про множину є основним у шкільному курсі математики і широко в ньому використовується. Формування таких важливих понять, як натуральне число, дії додавання, множення, віднімання, ділення натуральних чисел, їх властивості у початковому курсі математики здійснюється на теоретико-множинній основі. Тому потрібно з'ясувати, що таке «множина», відрізняти множину будь-яких предметів від просто купи цих предметів і т.п.

Поняття «множина» є основним неозначуваним поняттям математики. Пояснимо це прикладами. Можна говорити про множину учнів у деякому класі, про множину планет у всесвіті, про множину голосних букв українського алфавіту. Слово «множина» в математиці вживається замість таких слів, як «клас», «набір», «збірка», слів, що характеризують деяку сукупність, до того ж ця сукупність може містити лише один предмет, або й жодного. Наприклад: множина коренів рівняння x-3=0 є одноелементна множина {3}; множина голосних букв у слові "гай" також має один елемент {а}. Прикладом порожньої множини може бути множина людей на Сонці.

Засновник теорії множин, видатний німецький математик Георг Кантор (1845-1918), під множиною розумів «сукупність явищ, предметів, фактів, мислимих як одне ціле».

Об'єкт будь-якої природи (люди, будинки, книги, числа, геометричні фігури тощо), що утворюють множину, називаються її ***елементами***. Для запису різних висловлювань про множини та їх елементів прийнята така символіка: множини позначаються великими літерами латинського алфавіту, їх елементи — малими, слово «належить» замінюють символом $\in$. Запис «$a \in A$» читають так: «об'єкт a є елементом множини A», або «об'єкт a належить множині A». Якщо множина A складається з елементів a, $в$, c, то записують це так:

$$A=\{a, в, c\}$$

Для деяких числових множин введені спеціальні позначення:

N - множина натуральних чисел;

Z - множина цілих чисел;

Z_+ - множина цілих додатніх чисел;

Z_- - множина цілих від'ємних чисел;

Q - множина раціональних чисел;

R - множина дійсних чисел.

У школі предметом вивчення є такі множини: N; Q_+; Q_-; R.

Множини можуть містити як скінченну кількість елементів, так і нескінченну. Так, множини предметів, з якими працюють у школі, скінченна. Множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ — скінченна, тому що корені даного рівняння $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ складають множину A = {2; 3}. Прикладами нескінченних множин можуть бути: множина натуральних чисел, множина геометричних фігур тощо.

У 1 класі початкової школи за допомогою скінченних множин формується поняття «натуральне число». Тому край важливо розуміти, що означає термін «множина задана», вміти задавати множину переліком її елементів або вказівкою характеристичної властивості.

Множина вважається заданою, якщо про будь-який об’єкт можна сказати: належить він чи ні цій множині. Запис *P(x)* означає, що елемент множини *x* має властивість *P* і позначають це так: $M=\{x \mid P(x)\}$.

Наприклад:

а) $A = \{x \mid x \in N \quad x<6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

б) $B = \{x \mid x \in R\}$.

в) C = {x | x - мешканці Землі}.

г) $D = \{x \mid x^2+1=0\}= \varnothing$;

д) $M = \{x \mid x-5=0\}=\{5\}$.

Багато задач, що розв’язуються при вивченні математики, пов’язані із знаходженням множини, характеристична властивість елементів якої відома. Розглянемо декілька прикладів, в яких потрібно перелічити елементи множини або зобразити їх на числовій осі.

а) $E = \{x \mid x \in N \quad -1< x < 5 \} = \{1, 2, 3, 4 \}$

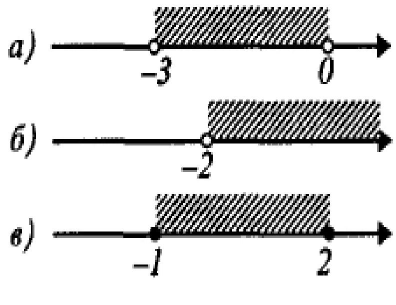
б) $A = \{x \mid x \in R, -3 < x < 0\}$ (мал.1а)

в) $B = \{x \mid x \in R, x > -2\}$ (мал.1б)

г) $C = \{x \mid x \in R, -1\le x \le 2\}$ (мал.1в)

д) $T = \{x \mid x \in Z, x^2 = 2\} = \varnothing$

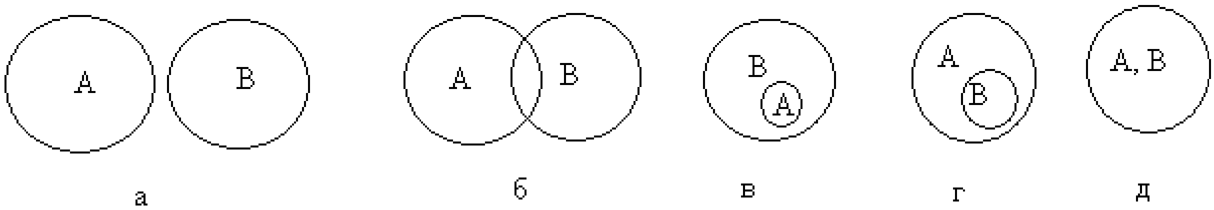
е) $M =\{x \mid 5x -7=3(x-7)\}=\{- 7\}$.



Мал.1

<u>Означення.</u> Дві скінченних множини A і B вважаються ***рівними***, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Наприклад, множини $A= \{a \mid a^2- 4=0\}$ і $B= \{- 2; 2\}$ є рівними, тобто A=B, тому що обидві множини складаються з чисел 2 і -2.

Поняття рівності скінченних множин лежить у основі формування поняття конкретного натурального числа. Корисно знати, що наочне зображення множин називають ***кругами Ейлера*** або ***діаграмами Ейлера-Венна*** (Леонард Ейлер (1707-1783) — швейцарський математик, член Петербурзької Академії наук; Джон Венн (1834-1923) — англійський математик). Співвідношення між елементами двох множин за допомогою кругів Ейлера можна зобразити так (мал. 2):



Мал.2

Вчитель початкових класів повинен розуміти, що натуральне число, як всі математичні поняття, виникло з практичної діяльності людини. Так, у глибоку давнину, щоб поділити порівну, потрібно було вміти порівнювати скінченні множини, потім для порівняння множин стали використовувати множини-посередники (пальці, камінці, зарубки, вузлики). Цей процес абстрагування зумовив виникнення загального уявлення про число. Потім числа стали розміщувати в один ряд, додаючи кожного разу по одному елементу. Так виникло поняття «натуральний ряд чисел». Термін «натуральне число» вперше використав римський вчений Боецій (475-524 рр. до н.е.).

Тому, розглядаючи, наприклад, число 3 як 2+1, ми формуємо не поняття натурального числа 3, а його склад. Для формування ж поняття натурального числа вчитель повинен показати учням різні предметні множини однакової потужності (три іграшки, три будинки, три тістечка тощо) (мал.3), підкресливши, що всі вони містять різні предмети, і поставити запитання «Яка характеристика є однаковою для цих множин?». Потім, звертаючи увагу на те, що кількість елементів у цих множинах однакова, вводиться абстрактне число 3.

Мал.3

Без числа нуль неможливо уявити сучасної письмової та усної нумерації, тому це число, яке не є натуральним, вводиться в 1 класі. Оскільки натуральне число у початкових класах вводиться як потужність скінченної множини, то з'являється можливість формувати поняття числа нуль як потужність порожньої множини. Наприклад, показуючи учням порожню вазу, можна запитати: «Скільки у вазі фруктів?» і сказати, що в такому випадку ми одержуємо число нуль.

Корисно знати, що сучасна позиційна десяткова система числення була створена в Індії на початку нашої ери, а торгівці з арабських та азійських країн поширили її Європою у XII-XIII ст.. Слов'яни почали користуватися позиційною системою числення у XVII-XVIII століттях.

З усіх чисел пізніше за всі було введене число нуль. Важливим досягненням Індійської науки було введення особливого знака для позначення цього числа. З введенням цифри нуль десяткова система запису чисел була остаточно сформована. Оскільки історично введення числа нуль було найскладнішим, то природно, що й у методичному плані формування уявлення про число 0 у 1 класі є досить складним завданням. Тут вчителю допоможе поняття множини, потрібно добрати достатньо велику кількість дидактичних прикладів різноманітних способів задання порожніх множин.

§2. ВІДНОШЕННЯ ВКЛЮЧЕННЯ

Відношення включення є теоретичною основою низки питань шкільного курсу математики. Множина *B* ***включена*** у множину *A*, якщо кожний елемент множини *B* належить і множині *A* $(B \subseteq A)$. Необхідно відрізняти два випадки включення (мал.4).

а) $B \subset A$ б) $B \subseteq A$

Мал.4

Звідси випливають <u>основні властивості включення:</u>

1) $A \subseteq A$; 2) $\varnothing \subseteq A$;

3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивність);

4) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$ (принцип об’ємності множини).

З властивості 4) випливає один зі способів доведення рівності двох множин: якщо доведено, що будь-який елемент множини B є елементом множини A і будь-який елемент A є елементом множини B, то A=B.

Якщо $B \subset A$ (мал.4а), то говорять, що B є ***підмножиною*** множини A. Поняттям підмножини ми користуємось постійно, виділяючи частини різних сукупностей предметів і понять. Так, наприклад, в українській мові розглядаємо різні підмножини множини всіх слів у реченні. У географії та історії вивчаємо різні підмножини множин всіх країн, міст і т. ін. Широко використовується поняття підмножини в математиці. Так, наприклад, множина чисел першого десятка є підмножиною множини натуральних чисел, яку в свою чергу можна розглядати як підмножину множини всіх цілих чисел. Множина ромбів, квадратів, прямокутників – це різні підмножини множини паралелограмів.

Поняття «множина» і «підмножина» дозволяють уточнити деякі геометричні поняття. Найважливішим поняттям геометрії є поняття геометричної фігури, яке визначається через поняття «точка» і «множина». *Геометричною фігурою* називається будь-яка непорожня множина точок. Оскільки множина може складатися лише з одного елемента, тому окремо взята точка також є геометричною фігурою, як і будь-яка скінченна множина точок. Отже, відрізок, промінь, пряма, трикутник, куля, куб і т. ін. - все це геометричні фігури.

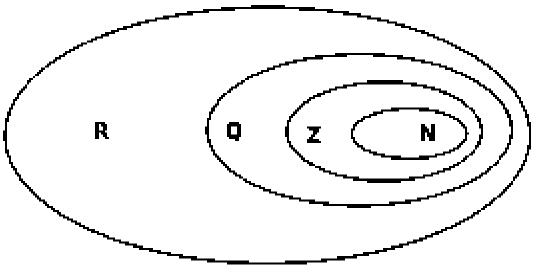
Часто буває так, що розглядаємо підмножини однієї й тієї ж множини *У*. Така множина називається ***універсальною множиною***. Так, для учнів 1 класу універсальною множиною чисел є числа першого десятка, потім двох десятків і т. д.

Поняття включення широко використовується в школі. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. При розв'язанні будь-якого рівняння (нерівності) зазвичай дане рівняння (нерівність) замінюємо іншим, еквівалентним. Тут дуже важливо стежити за тим, щоб множини коренів вихідного рівняння (нерівності) та одержаного збігалися, тобто щоб виконувались тотожні перетворення (які не призводять ні до втрати, ні до виникнення зайвих коренів).

Приклад 2. Відношення включення є теоретичною основою методики вивчення числових множин (мал.5). Розглянемо історичну схему розвитку поняття про число:

$N \subset Z \subset Q \subset R$



Мал.5

Існуюча у шкільній практиці методика поширення поняття про число має такі недоліки:

1) учні не завжди розуміють відношення між різними класами чисел;

2) не розуміють основної ідеї необхідності поширення відомої їм числової множини;

3) мають поверхневе уявлення про порядкову і алгебраїчну структуру даної числової множини, оскільки зазвичай предметом вивчення в школі є самі числа як об'єкти, а не структура числової множини, яка визначається відношенням порядку і введеними операціями.

Нагадаємо, що побудова поширеної числової множини повинна задовольняти таким умовам. Нехай множина B поширюється до множини A, тоді 1) $B \subset A$; 2) усі операції та властивості операцій, що виконуються у множині B, повинні виконуватися у множині A; 3) у множині A виконується операція, яка не може виконуватися у множині B (мал.5); 4) множина A повинна бути мінімальною серед усіх можливих розширень множини B, що цілком задовольняє перші три вимоги.

Найважливішим моментом процесу поширення поняття про число у шкільному навчанні є розкриття основної його мети: з’ясування питання навіщо нам потрібні нові числа.

Отже, відношення включення дозволяє визначити спільну для всіх класів школи схему введення нових чисел, що дозволяє здійснити принцип наступності у навчанні математики дітей молодшого і середнього віку:

1. Повторити операції відомої учням універсальної числової множини та її властивості.

2. На спеціально підібраних задачах показати недостатність відомої їм універсальної числової множини.

3. У процесі аналізу цих задач ввести нові числа.

Так, наприклад, перед введенням у 2 класі поняття частки та дробу потрібно спочатку узагальнити знання учнів про відому їм універсальну числову множину — множину натуральних чисел: можливість виконання операції додавання і множення; додавання нуля і множення на 1; переставна (комутативна), сполучна (асоціативна), розподільна (дистрибутивна) властивості цих операцій. Потім можна запропонувати розв'язати таку задачу: «*У хлопчика 12 яблук. Він пригостив трьох своїх товаришів, дав кожному однакову кількість яблук. Скільки яблук одержав кожний? А як бути, якщо у хлопчика лише одне яблуко?*» При розв’язанні цієї задачі формується розуміння про необхідність введення нових чисел. Таким чином, ми йдемо шляхом доповнення відомої учням універсальної множини новими числами, у результаті чого утворюється нова числова множина. Цим самим від класу до класу школи маємо змогу показати як математика розвиває й вдосконалює свій апарат під впливом потреб практики і науки, тобто здійснюється діалектичний підхід до вивчення числових множин.

Вправи для самоконтролю

№ 1. Запишіть множину К, елементами якої є натуральні числа, менші 8, використовуючи символічні записи характеристичної властивості та перелік елементів множини. Чи правильно, що $5\in К$, $8\in К$, $0\in К$?

№ 2. Дані числа 19; $\sqrt{7}$; 0; -27; 5,4; $\frac{3}{7}$. Які з них належать множині: а) цілих чисел; б) цілих невід'ємних чисел; в) раціональних чисел; г)дійсних чисел ?

№ 3. Покажіть на координатній прямій множину *X*, якщо:

1) $X=\{x/x\in N, -3<x<8\}$ 6) $X=\{x/ x\in R, -2\le x \le 4\}$
2) $X=\{x/x\in N, x\le 5\}$ 7) $X=\{x/ x\in R, x < 6\}$
3) $X=\{x/x\in N, -2<x\le 2\}$ 8) $X=\{x/ x\in R, x \ge -8\}$
4) $X=\{x/ x\in Z, -4<x \le 4\}$ 9) $X=\{x/ x\in R, 0 \le x <8\}$
5) $X=\{x/ x\in Z, -5\le x <0\}$ 10) $X=\{x/ x\in R, -3<x<8\}$

№ 4. Встановіть, в якому відношенні знаходяться множини А і В, якщо: 1) А={1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9;10}, В={2; 4; 6 ;8};
2) А={2; 4; 6; 8; 10}, В - множина чисел першого десятка;
3) А - множина двоцифрових натуральних чисел, В - множина парних двоцифрових чисел;
4)А = N, В = Z;
5) А = R, В = Z.

№ 5. Зазначте: у якому відношенні знаходяться множини А і В, зобразіть їх за допомогою кругів Ейлера, якщо:
а) А — множина парних чисел, В — множина чисел, кратних 7;
б) А — множина непарних одноцифрових чисел, В — множина парних одноцифрових чисел;
в) А — множина парних чисел, В — множина чисел, кратних 4;
г) А — множина прямокутних трикутників, В — множина рівнобедрених трикутників;
д) А — множина прямокутників з рівними сторонами, В — множина квадратів.

№ 6. А – множина паралелограмів, В – множина прямокутників, С – множина квадратів. Доведіть, що В⊂А і С⊂В. Проілюструйте дані множини за допомогою кругів Ейлера.

§3. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Над множинами виконуються такі операції: об'єднання, переріз, різниця, розбиття, декартів добуток. Всі ці операції мають велике значення у шкільному курсі математики. Тому студент повинен вміти не лише давати означення, але й на діаграмах Ейлера-Венна ілюструвати їх, показати за їх допомогою теоретичну основу арифметичних дій додавання, віднімання, множення і ділення натуральних чисел.

Нагадаємо ці означення і покажемо їх роль у початковому курсі математики.

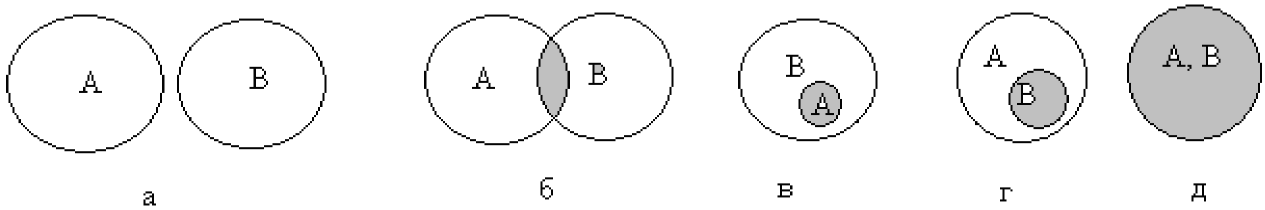
1. Переріз множин.

Нехай задані множини А={a, c, d} і В={c, d, e}. Утворимо нову множину *P*, що складається з усіх елементів, які належать одночасно і множині *A*, і множині *B*: P={c, d}. Ця множина *P* називається перерізом множин *A* і *B*.

Перерізом двох множин *A* і *B* називається така множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать одночасно кожній із множин *A* і *B* (мал.6).

Переріз множин *A* і *B* позначають так: **A∩B={x / x ∈ A і ∈ B}.**

За допомогою діаграм Ейлера-Венна проілюструємо переріз множин *A* і *B* (показано зафарбованою областю) (мал.6):



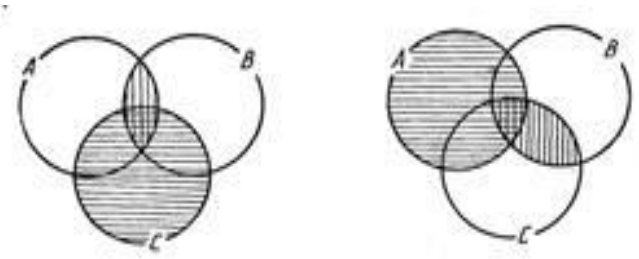
Мал.6

Операція перерізу множин має такі ***властивості:***

1. Переріз множин комутативний: $A \cap B = B \cap A$ (переставний закон)
2. Переріз множин асоціативний $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (сполучний закон). Наочно ця властивість ілюструється за допомогою діаграми Ейлера-Венна (мал.7).
3. Якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A$

Дійсно, якщо *A* - підмножина множини *B*, то елементи, що належать одночасно і множині *A* і множині *B*, є елементи множини *A* (мал.6в).

4. Для кожної множини A маємо: $A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap У = A$. Ці рівності випливають із властивості 3, тому що $A \subset A$ і $\varnothing \subset A$.



(A∩B)∩C ***A∩(B∩C)***

(подвійна штриховка) (подвійна штриховка)

Мал.7

Операція перерізу множин є підґрунтям розв’язання різноманітних задач.

<u>Приклад 1.</u> *A* - множина простих чисел, *B* - множина додатних парних чисел. Тоді $A \cap B = \{2\}$.

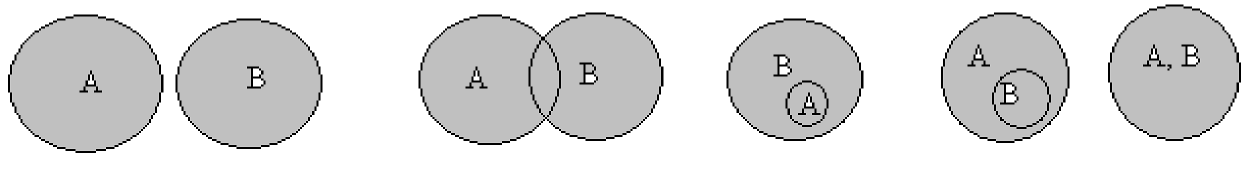
<u>Приклад 2.</u> *C* - множина ромбів, *D* - множина прямокутників. Тоді $C \cap D$ - множина квадратів.

2. Об'єднання множин.

Об'єднанням двох множин *A* і *B* називається множина, яка складається з елементів, що належать хоча б одній з множин *A* або *B*.

Оскільки кожний елемент *x* з нової множини має властивість “$x \in A$ або $x \in B$”, то означення об'єднання двох множин можна записати так: $\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A}$ **або** $\mathbf{x \in B\}}$**.**

Проілюструємо знаходження об'єднання множин на кругах Ейлера-Венна (зафарбовані області) (мал.8)



а б в г д

Мал.8

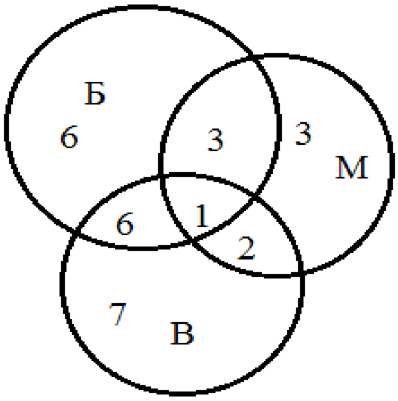
Кількість елементів множини *A* називається ***потужністю множини*** *A* і позначається m(A).

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай *A* - множина парних чисел; *B* - множина непарних чисел. Тоді N=A ∪ B - множина натуральних чисел.

Приклад 2. Нехай *A* - множина учнів деякого класу, що відвідують волейбольну секцію, а *B* - множина учнів того ж класу, що відвідують математичний гурток. Тоді у множину A∪B увійдуть ті учні, які відвідують волейбольну секцію або математичний гурток. Серед них можуть бути такі, що відвідують лише волейбольну секцію, або лише математичний гурток, і можуть бути ті, що відвідують і волейбольну секцію, і математичний гурток.

Приклад 3. Кожен студент групи бере участь в одному з гуртків: біологічному (Б), математичному (М), валеологічному (В).



мал.9

Скільки студентів у групі, якщо в біологічному гуртку - 16, математичному - 9, у валеологічному - 16, біологією і математикою займаються 4 студента, математикою і валеологією - 3, біологією і валеологією - 7, а у всіх трьох гуртках - 1 студент?

Розв'язання: Розв'яжемо задачу за допомогою кругів Ейлера-Венна (мал.9):

m(Г)=(6+3+7) + (6+3+2) + 1 = 16+11+1=28(ст.)

Відповідь: 28 студентів.

Операція об'єднання множин має такі ***властивості:***

1. Комутативний закон A ∪ B = B ∪ A
2. Асоціативний закон (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

Ця властивість дає можливість записати вираз без дужок і одержати об'єднання будь-якої кількості множин.

3. Якщо B ⊂ A, то A ∪ B = A.
4. Для будь-якої множини A мають місце рівності:

A ∪ A = A;   A ∪ ∅ = A;   A ∪ У = У

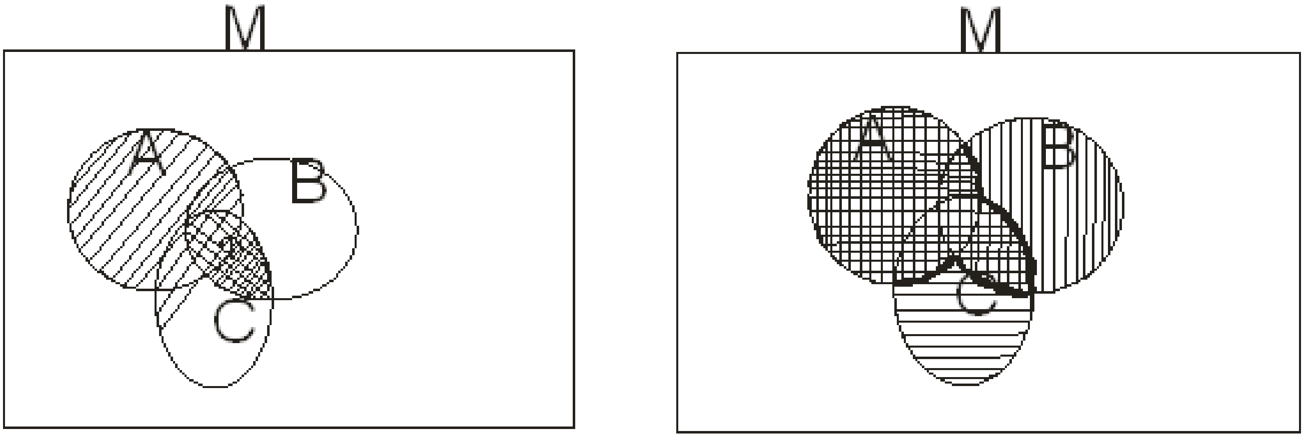
5. Для будь-яких множин *A, B, C* мають місце дистрибутивні (розподільні) закони, що пов'язують операції перерізу і об'єднання:

а) A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C);

б) A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C).

Властивості дистрибутивності ілюструються на діаграмах Ейлера-Венна. Так, на мал.10 наведені діаграми, що відповідають лівій і правій частині другого співвідношення. На мал.10а штриховкою позначено множину B∩C та заштриховано множину A. Уся заштрихована область зображує множину A ∪ (B ∩ C). На мал.10б

вертикальною штриховкою показано множину $A \cup B$, а горизонтальною штриховкою – множину $A \cup C$. Область, що має подвійну штриховку, зображує множину $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Порівняння одержаних областей дозволяє зробити висновок про те, що множини
$A \cup (B \cap C)$ і $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ рівні, тому що складаються з одних й тих саме елементів.



$A \cup (B \cap C)$ а) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ б)

Мал.10

Теоретичною основою операції додавання натуральних чисел є операція об'єднання двох множин, які не перетинаються (мал. 8а).

Зазвичай навіть учні старших класів на запитання: «Що таке алгебраїчна операція?» відповідають, що алгебраїчна операція - це дія, тобто у відповіді має місце тавтологія. А зміст алгебраїчної операції полягає у тому, що ми маємо відображення множини A^2 в A. Наприклад, парі натуральних чисел (2;3) при операції додавання відповідає натуральне число 5.

Якщо чітко виділити при вивченні у 1 класі теми «Додавання» теоретико-множинний підхід, то можна не лише сформувати правильне уявлення про алгебраїчну операцію на прикладі додавання натуральних чисел, а й підкреслити різницю між операцією додавання і безпосереднім виконанням додавання. На жаль, багато вчителів при розв’язанні задачі «На гілці сиділо 2 птахи і прилетіло ще 2. Скільки птахів стало?» міркують з учнями так: «Було 2 птахи, потім прилетів один птах; їх стало 3, а потім прилетів другий птах; їх стало 4. Отже, 2+2=(2+1)+1=4». При такому підході фактично розглядається не операція додавання, а саме виконання додавання прилічуванням по одному.

При формуванні у молодших школярів уявлення про алгебраїчну операцію на прикладі операції додавання натуральних чисел важливо показати, що дві різні множини замінюються третьою множиною.

Цю роботу можна провести так. Вчитель викликає до дошки Петра і Олю, дає Петрові, наприклад, 2 яблука, а Олі 3 груші. Потім пропонує скласти їх у кошик і запитує: «Скільки фруктів у кошику?» Таким чином, чітко показано, що є дві різні множини (яблука і груші), а одержали нову, третю множину (фрукти). Лише після цього правомірно поставити питання: «Як же порахувати, скільки фруктів у кошику?»

На цьому ж прикладі можна сформувати в учнів правильне уявлення про комутативну (переставну) властивість додавання. У цьому випадку спочатку на предметних діях показати учням істинність цієї властивості. Нехай, наприклад, вчитель викликав до дошки Петра і Олю, дав Петрові 2 яблука і Олі 3 груші; діти підрахували, скільки всього фруктів. Потім вчитель запропонував Олі і Петрові помінятися місцями і задає запитання: «Скільки всього у Олі і Петра фруктів?». Учні переконуються, що фруктів стільки ж, скільки їх було у першому випадку. Лише після таких задач доцільно переходити до знаходження суми чисел, наприклад 3+2 і 2+3.

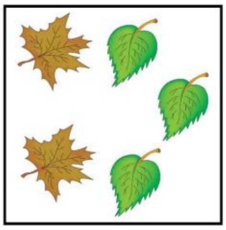
Справедливість асоціативного (сполучного) закону додавання також рекомендуємо виявити за допомогою предметних дій, використовуючи відповідний закон об'єднання множин $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$.

Покажемо на прикладі, як це можна зробить. До дошки викликаються Петро, Оля і Таня. Петро одержав 2 квадрати, Оля -3 круги, Таня - 1 трикутник. Вчитель пропонує порахувати, скільки геометричних фігур одержали діти. Учні пропонують різні варіанти. Серед них потрібно вибрати і підкреслити (шляхом різних групувань Петра, Олі і Тані) два варіанти: а) Петро і Оля, потім Таня; б) Петро і (Оля і Таня). Діти переконуються, що результати будуть однакові.

Якщо, після такої роботи вчитель запропонує знайти суми чисел (2+3)+1 і 2+(3+1), то у другому випадку, навіть не виконуючи дій, учні дадуть правильну відповідь.

У підручниках з математики для 1-2 класів початкової школи є багато різних завдань, які дають можливість формувати в учнів розуміння сутності операції об'єднання і перерізу множин, що, у свою чергу, сприяє формуванню важливих математичних понять. Наведемо приклади.

Об'єднання. Задача 1 (1 клас). Івась зібрав 2 кленових листочки і 3 липових. Скільки всього листочків зібрав хлопчик ?



Задача 2 (1 клас). Колгосп відправив до міста 8 машин з огірками і 2 машини з помідорами. Скільки машин з овочами відправив колгосп?

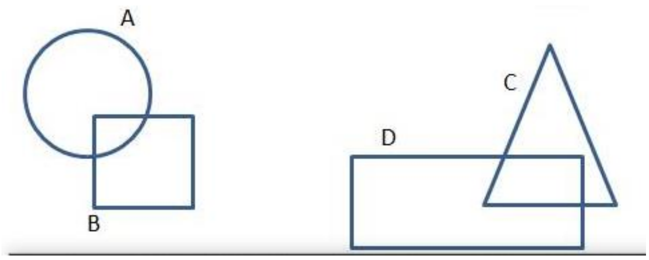
Задача 3 (2 клас). Мама дала Саші 7 абрикосів, 4 сливи, 1 яблуко. Скільки фруктів дала мама хлопчикові?

Задача 4 (2 клас). Діти заготували для птахів 5 кг насіння липи, 7 кг проса, а горобини стільки, скільки насіння липи і проса разом. Скільки горобини заготували діти?

Задача 5 (2 клас). На першому уроці праці використали 18 аркушів червоного паперу і 2 аркуші зеленого паперу, а на другому - 20 аркушів білого паперу. Скільки аркушів паперу використали на двох уроках?

Переріз. Задача 1 (1 клас). Якою фігурою на малюнку буде спільна частина трикутника і прямокутника?

Задача 2 (2 клас). Якою фігурою буде спільна частина квадрата і круга на малюнку?

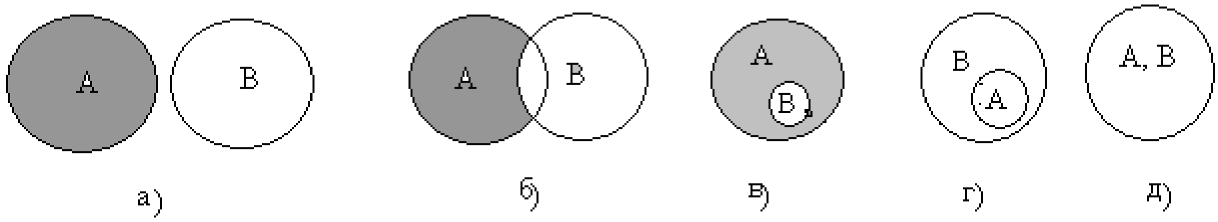


3. Різниця множин

Теоретичною основою операції віднімання натуральних чисел є операція над множинами, яка називається різницею.

Різницею двох множин *A* і *B* називається множина, елементи якої належать множині *A* і не належать множині *B*: **A\B=C={x | x∈A і x∉B}.**

Різниця множин *A* і *B* на діаграмах Ейлера-Венна має вид заштрихованої області (мал.11)



Мал.11

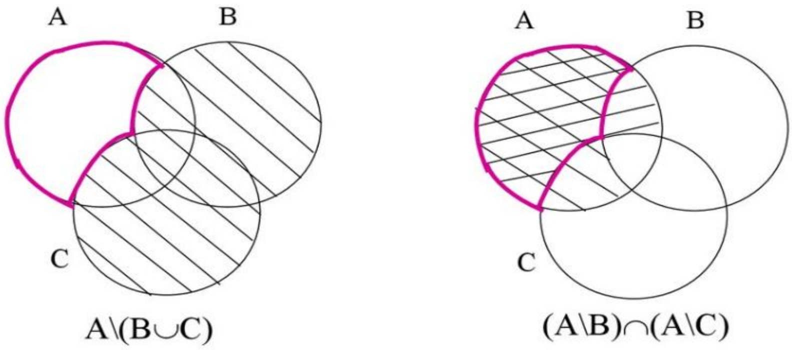
Потрібно зауважити, що $A\backslash B \neq B\backslash A$. Ця рівність існує лише за умови, якщо A=B: A\B = B\A=∅.

Для будь-яких множин *A, B, C* справедливі такі рівності, що пов’язують різницю множин з іншими операціями над множинами:

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

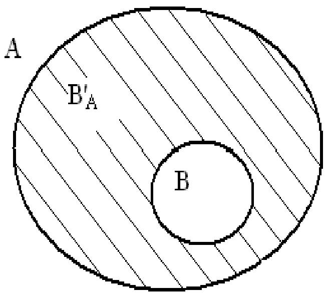
б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Ці рівності можна проілюструвати на діаграмах Ейлера-Венна і довести на основі виконання операцій над множинами. Наприклад, істинність властивості (б), наведеної вище, доведена на мал.12.



Мал.12

Велике значення у початковому курсі математики має випадок, коли множина *B* є підмножиною множини *A*. У цьому випадку множина всіх елементів з множини *A*, що не належать множині *B*, називають ***доповненням до підмножини*** *B* до множини *A* і позначають B'_A . На мал.13 це заштрихована область. На діаграмі Ейлера-Венна видно, що множині B'_A належать усі точки множини *A*, які не належать *B*, тобто B'_A **= A\B.**



Мал.13

Розглянемо на прикладі, як знаходити множину B'_A . Нехай A={1,2,3,4,5,6,7}, B={2,4,6}. Щоб знайти множину B'_A, потрібно з множини *A* вилучити всі елементи, що належать множині *B*. Ті елементи, що залишились, і складають множину B'_A ={1,3,5,7}. Говорять, що множину B'_A можна знайти, якщо з множини *A* відняти множину *B*.

Часто у шкільному курсі математики множини *A, B, C* (чисел, точок, фігур, функцій) є підмножинами деякої більш широкої множини *У*, яку приймають за основну або універсальну.

<u>Приклади</u>. 1) Для 1 класу основною множиною є множина натуральних чисел *N*.

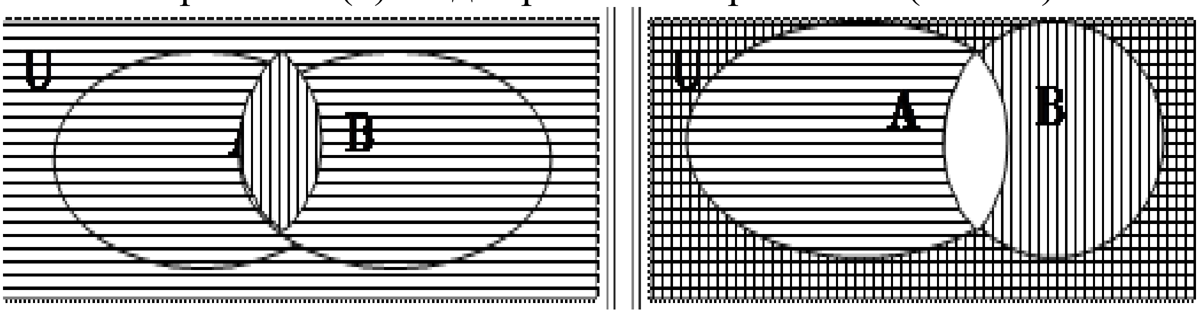
2) У геометрії вивчають трапеції, паралелограми, ромби, прямокутники, квадрати. У цьому випадку універсальною множиною буде множина всіх чотирикутників.

3) При розгляді різних відрізків натурального ряду чисел під універсальною множиною розуміється множина всіх дійсних чисел.

Основні ***властивості доповнення***:

1. $B\cup B'_A = A$ 2. $B\cap B'_A = \varnothing$
3. $(A\cap B)'=A'\cup B'$ 4. $(A\cup B)'=A'\cap B'$

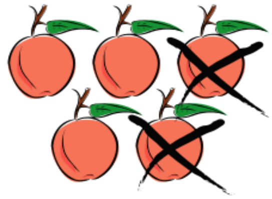
Корисно знати, що рівності (3) і (4) відомі під назвою ***законів де Моргана*** (шотландський математик, 1806-1871). Проілюструємо правильність рівності (4) на діаграмах Ейлера-Венна (мал.14).



$(A\cup B)'$ $A'\cap B'$

Мал.14

Вчитель, формуючи в учнів 1 класу за допомогою предметних дій уявлення про операцію «віднімання» натуральних чисел, має показати, що із даної множини вилучають другу множину і одержують третю множину, тобто має у своїй роботі виходити з означення доповнення множини В до множини А: А - перша множина, В- друга множина, B'_A - третя множина (мал.13).



Розглянемо на прикладі, як можна організувати таку роботу.

Вчитель пропонує розв’язати <u>задачу</u>, підкреслюючи, про які три множини йде мова: «В вазі лежить 5 фруктів: яблука і груші. Оля взяла всі яблука - 3. Скільки груш залишилось?» Діти перелічують кількість груш і записують: 5-3=2. Лише після неодноразового виконання такого виду робіт можна приступати до формування поняття про операцію віднімання як дії, протилежної додаванню.

Наведемо приклади з підручника математики для 1-2 класів початкової школи:

<u>Задача 1</u> (1 клас) У класі 10 хлопчиків та дівчат. Всі дівчата вийшли з класу. У класі залишилось 4 хлопчики. Скільки було дівчат?

<u>Задача 2</u>. У сплаві олова і міді масою 13 кг входить 7 кг олова. Скільки кілограмів міді у сплаві?

<u>Задача 3.</u> З 80 кг винограду одержали 20 кг ізюму. Скільки кілограмів води випарилось під час сушки винограду?

Вправи для самоконтролю

№1. Нехай задані множини A, B, C. Знайти $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$, якщо:

1) A={2; 3; 8; 9}, B={16; 18; 20}, C=N;
2) A=N, B={-2; -1; 0; 1; 2}, C={3; 5; 7};
3) A=Z, B={2; 4; 6}, C=N;
4) A={20}, B={2; 3; 4; 5}, C={5; 6; 7; 8; 9; 10};
5) A=Z, B=N, C=Q;

№ 2. Знайдіть переріз та об'єднання множин:

а) [8; 15] і [9; 20]; г) $(-\infty; 3]$ і $(-2; +\infty)$;
б) (-1; 1] і [-1; 0); д) (-2; 1] і [-2; 0);
в) $(2; +\infty)$ і [-4; 3]; е) [0; 2] і [1; 3).

№ 3. Побудуйте круги Ейлера для множин A, B і C та вкажіть характеристичну властивість елементів множини $A\cap B\cap C$, якщо:

а) A – множина правильних багатокутників, B – множина трикутників, C – множина чотирикутників;
б) A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників, C – множина чотирикутників;
в) A - множина прямокутних трикутників, B – множина рівнобедрених трикутників, C – множина рівносторонніх трикутників;
г) A – множина прямокутних трикутників, B – множина рівнобедрених трикутників, C – множина трикутників;

У кожному з випадків виділіть на малюнку область, що зображує множину $A\cap B\cap C$, і накресліть фігуру, яка належить цій множині.

№ 4. Множина A складається з натуральних чисел від 2 до 10, множина B – з натуральних чисел від 5 до 20. Назвіть елементи множин $A\setminus B$ і $B\setminus A$.

№5.Сформулюйте характеристичну властивість елементів доповнення підмножини P до множини трикутників, якщо: а) P – множина гострокутних трикутників; б) P – множина рівносторонніх трикутників.

№ 6. A – множина прямокутників, B – множина правильних багатокутників, C – множина трикутників. Побудувати круги Ейлера для даних множин та показати штриховкою області, що зображають множини: а) $A\cap B\cup C$; б) $A'\cap B\cup C$; в) $(A\cup B)'\cap C$. Для кожного випадку зробити окреме креслення.

4. Розбиття множини

Розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, є теоретичною основою ділення на рівні частини та на вміщення, класифікації, родо-видових означень. Розглянемо зміст цієї операції на конкретних прикладах.

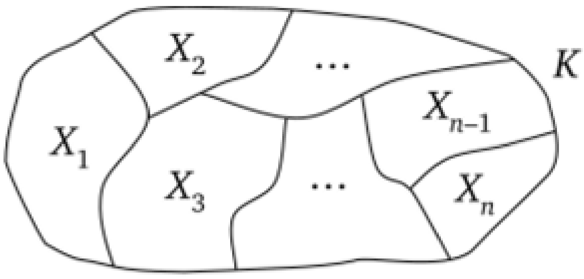
<u>Приклад 1.</u> Нехай маємо множину M - множину трикутників. Виділимо з M підмножину A з властивістю «мати прямий кут», підмножину B з властивістю «мати гострі кути», підмножину C з властивістю «мати тупий кут». Одержимо A - прямокутні трикутники, B - гострокутні трикутники, C - тупокутні трикутники. Ці множини мають такі властивості:

1) $M=A\cup B\cup C$; *2)* $A\cap B=\varnothing$; $A\cap C=\varnothing$; $B\cap C=\varnothing$.

<u>Приклад 2.</u> Нехай X - множина учнів деякої школи. Між елементами цієї множини існують багато різних відношень: «бути однокласником», «бути спортсменом», «бути сусідом» тощо.

Розглянемо відношення «бути однокласником». Виділимо з множини X учня x і разом з ним його однокласників. Потім у множині X візьмемо другого учня y, який не є однокласником x, і знов виділимо однокласників y. В результаті одержимо другий клас учнів і т.д. Таким чином можна розділити усіх учнів за класами, кожен учень попаде лише в один клас.

Позначимо X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 множини учнів кожного класу даної школи, тоді множину всіх учнів школи можна позначити: $K = X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4\cup X_5$. При цьому ніякі дві множини із X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 не мають спільних елементів, інакше кажучи, попарно не перетинаються, і ніяка з цих множин не є порожньою (мал.15).



Мал.15

Розбиття множини X на підмножини, що попарно не перетинаються, або класи визначається такими <u>умовами</u>:

1. Всі підмножини, що утворюють розбиття, не порожні.
2. Будь-які дві підмножини не перетинаються.
3. Об'єднання всіх підмножин є дана множина X.

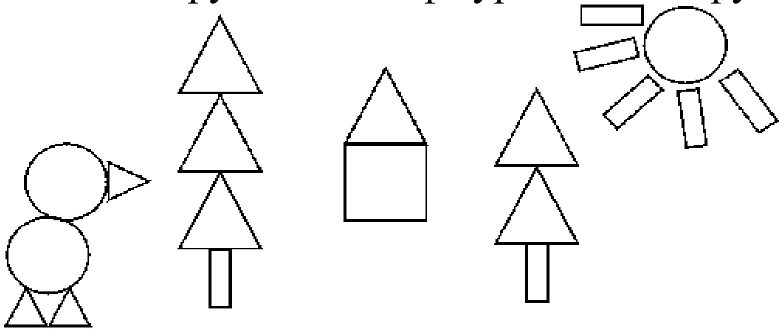
Розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, лежить в основі різноманітних ***класифікацій***. Поняття «клас» та його синоніми «тип», «родина», «рід», «вид», «сорт» тощо широко вживаються у всіх галузях нашої діяльності.

У початковому курсі математики явно не вводиться поняття розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, але розбивати множину на класи доводиться часто. Так, наприклад, множину всіх натуральних чисел розбиваємо на підмножини парних і непарних чисел; на одноцифрові, двоцифрові, трицифрові і т.д. Множину всіх кутів розбиваємо на 3 класи: гострі, тупі, прямі. Множину всіх багатокутників - на трикутники, чотирикутники і т.д. Виконуємо класифікацію рослин і тварин. І завжди при розбитті множини на класи потрібно обов'язково дотримуватися умов розбиття, котрі виділили раніше.

Після класифікації можна перейти до означень. Наприклад, розбивши множину чотирикутників на клас, в якому сторони попарно паралельні, і клас, в якому ця властивість відсутня, одержимо таке означення паралелограма: «Чотирикутник (рід, вся множина), у якому сторони попарно паралельні (видова відзнака, клас), називається паралелограмом».

Наведемо приклади з підручників математики 1-2 класу початкової школи, з допомогою яких можна формувати уявлення про розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються:

Задача 1. Скільки всього фігур на малюнку? (мал.16) Які групи можна утворити з цих фігур за ознакою форми? Скільки груп можна утворити за ознакою кольору? Скільки фігур в кожній групі?

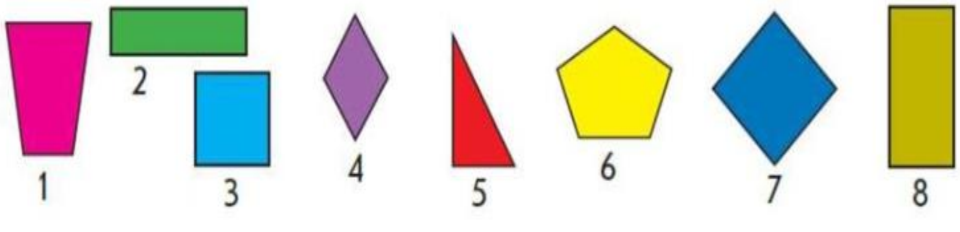


Мал.16

Задача 2. Які фігури на малюнку не будуть багатокутниками?

Задача 3. Назви кожен багатокутник на малюнку. Скільки чотирикутників на малюнку? (мал.16)

Задача 4. Якими цифрами позначені на малюнку прямокутники? (мал.17)



Мал.17

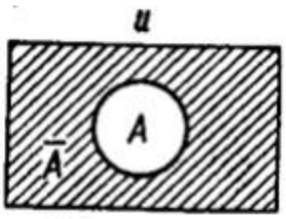
Задача 5. Запишіть, якими цифрами позначені на малюнку трикутники і чотирикутники.

З шкільної практики відомо, що учні досить часто роблять помилки в означеннях. І якщо навіть під керівництвом вчителя вони виправили помилку, немає гарантії, що наступного разу вони цієї помилки не повторять. Основна причина такого становища у тому, що вчитель при формуванні конкретних означень не завжди спирається на визначення розбиття. Помилки, що виникають у формуванні означень, виникають тому, що порушена яка-небудь з вимог до розбиття множини на підмножини. Тому студенту необхідно вміти безпомилково виконувати операцію розбиття. Він має розуміти, що поділ трикутників на різносторонні, рівносторонні і рівнобедрені не правильне, тому що у перерізі множин рівнобедрених і рівносторонніх трикутників одержимо множину рівнобедрених трикутників; а речення «Учні і футболісти, набувайте знання!» з цієї ж причини логічно неграмотне.

Зупинимося на розбитті множини за допомогою однієї або двох властивостей.

а) *Розбиття множини на класи за допомогою однієї властивості*.

Операції об’єднання і перерізу множин є основою для поняття розбиття множини на класи. Нехай універсальна множина *У* - множина всіх трикутників. За допомогою властивості «мати прямий кут» виділимо підмножину *А* – прямокутних трикутників (тобто елементів з *У*, що мають цю властивість) і підмножину $\bar{A}$ - непрямокутних трикутників (тобто елементів з *У*, що не мають цієї властивості).



Мал.18

Ці дві підмножини універсальної множини *У* не перетинаються $A \cap \bar{A} = \emptyset$, та їх об’єднання складає множину *У*, тобто $A \cup \bar{A} =$ У. Отже, властивість «мати прямий кут» визначає розбиття множин *У* на два класи: *А і* $\bar{A}$ (мал.18)

б) *Розбиття множини на класи за допомогою двох властивостей*.

Нехай універсальна множина *У=N* - множина всіх натуральних чисел. З множини *N* виділимо *А* - підмножину чисел, кратних 3, і *В* - підмножину натуральних чисел, кратних 4. Побудуємо круги Ейлера-Венна для всіх множин і установимо, на скільки областей, що перетинаються, розіб'ється множина У=N. Оскільки *А* і *В* -підмножини множини *N*, то круги, що зображають *А* і *В*, будуть знаходитися усередині універсальної множини *У=N* (мал.19).

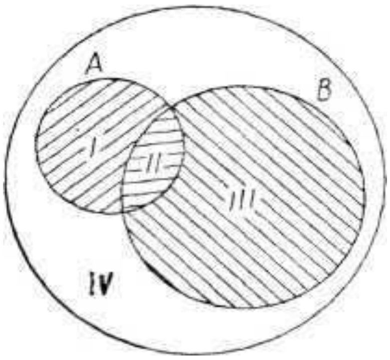
Множини *A* і *B* перетинаються і множина У=N розбилася на чотири області, що попарно не перетинаються:

область I - множина натуральних чисел, кратних 3 і не кратних 4;

область II - множина натуральних чисел, кратних 3 і 4 одночасно;

область III - множина натуральних чисел, кратних 4 і не кратних 3;

область IV - множина натуральних чисел, не кратних ні 3, ні 4.



мал.19

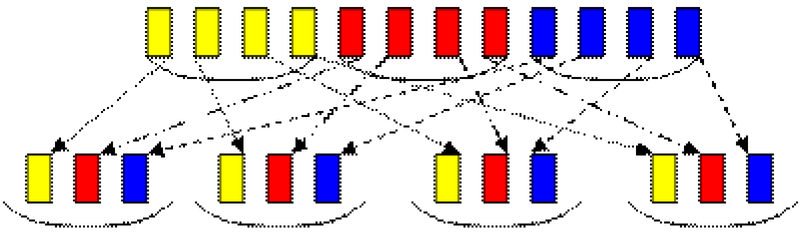
У розглянутому прикладі класифікація натуральних чисел була виконана за допомогою двох властивостей: «бути кратним 3» і «бути кратним 4».

В окремих випадках деякі з областей (I-IV) можуть виявитися порожніми. Тоді одержимо розбиття множини *У* на 3 класи.

Як вже говорилось раніше, операція розбиття є теоретичною основою арифметичної дії ділення, сутність якої у початковому курсі математики розкривається за допомогою двох простих задач: ділення на рівні частини і ділення на вміщення.

Розглянемо ці задачі:

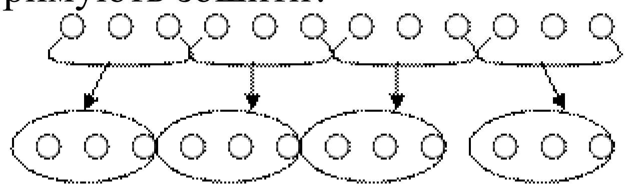
Задача 1. 12 зошитів потрібно роздати 4 учням порівну. По скільки зошитів одержить кожен учень?



Мал.20

Тут множину зошитів розбивають на 4 підмножин, що не перетинаються (мал.20). Потрібно знайти, скільки елементів має кожна підмножина. Це задача на ділення на рівні частини.

Задача 2. 12 зошитів потрібно роздати учням по 3 зошити кожному. Скільки учнів отримують зошити?



Мал.21

Тут множину зошитів розбивають на рівно потужні підмножини, що не перетинаються, і які мають по 3 елементи. Потрібно знайти кількість таких підмножин. Це задача на ділення на вміщення.

Звернемо увагу, що у першій задачі ми знаходимо кількість елементів у підмножині, а у другій задачі ми знаходили кількість підмножин. Тобто, у запису «a · b = c» ми за добутком «c» знаходимо у першому випадку *«a»*, у другому випадку - *«b»*. Працюючи з цими задачами, вчитель підводить учнів до розуміння операції ділення як дії, оберненої до дії множення.

Вправи для самоконтролю

№ 1. З множини P = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} виділіть підмножини A, B і C. З'ясуйте, у якому випадку здійснилося розбиття множини P на класи:
а) A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {7, 9};
б) A = {5}, B = {3, 4, 8, 9}, C = {1, 6};
в) A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {5, 7, 9};
г) A = {1, 3}, B = {4, 6, 8}, C = {5, 6, 9}.

№ 2. З'ясуйте, у яких випадках класифікація зроблена правильно:
а) трикутники поділяються на прямокутні, тупокутні й рівнобедрені;
б) кути поділяються на гострі, прямі й розгорнуті;
в) цілі числа можна розбити на натуральні, число 0 й від'ємні цілі числа;
г)дієслова української мови поділяються на дієслова теперішнього, минулого й майбутнього часу;
д) члени речення бувають головні та другорядні.

№ 3. Розбийте множину чотирикутників на класи:
а) за однією будь-якою властивістю; б) за двома властивостями. Для кожного випадку побудуйте круги Ейлера-Венна, встановіть кількість областей, що не перетинаються, та які множини відображають ці області.

5. Кортеж. Декартів добуток множин.

Часто в математиці нас цікавить не тільки множина різних цифр, за допомогою яких записано число, наприклад: 133211, тобто множина {1;2;3}, але й весь набір цифр, що взяті у певній послідовності і використані у запису даного числа. Порядок розташування цифр у цьому запису має значення, тому що кожна з розрядних одиниць, що входить в запис числа 133211, має різне значення: перша, рахуючи зправа наліво, свідчить про те, що число має одну одиницю, друга - що в числі у другому розряді є один десяток, третя - що в числі у розряді сотень дві одиниці і т.д.

Візьмемо будь-який елемент a_1 з множини X_1, потім елемент a_2 з множини X_2, …. елемент a_n з множини X_n. Вибрані елементи розмістимо по порядку: $(a_1, a_2,\ldots a_n)$. Ми одержимо упорядковану n-ку елементів вибраних з множин X_1, X_2,… X_n, або «***кортеж***». Число n називають *довжиною кортежу*, а елементи $a_1, a_2,\ldots a_n$ – його *компонентами*, до того ж a_1 називають першою компонентою, a_2 - другою компонентою, a_n - n-ю компонентою.

Множини $X_1, X_2,\ldots X_n$ можуть мати спільні елементи, або збігатися одна з одною. Наприклад, слово «мама» можна розглядати як кортеж довжиною 4, складений з елементів множини A = {x | x - буква алфавіту}. Кожне речення також можна розглядати як кортеж, кожний елемент якого, у свою чергу, є кортеж. Наприклад, «сьогодні гарна погода» є кортеж довжиною 3.

У математиці прикладом кортежу може служити набір цифр, що входять у десятковий запис будь-якого числа. Цей кортеж складається з цифр: 0, 1, 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причому цифри можуть повторюватися, а при перестановці цифр можна одержати інше число. Отже, кортеж цифр числа 112231 має вигляд: (1,1,2,2,3,1).

Два кортежі $(a_1, a_2,\ldots a_n)$. і $(b_1,b_2,\ldots b_m)$ називають ***рівними***, якщо вони мають однакову довжину, тобто $n=m$, і кожна компонента першого кортежу дорівнює компоненті другого кортежу з тим же номером. Наприклад, кортежі (a, b, c) і (a, b, c) - рівні, а кортежі (a, b, c) і (b, a, c) не рівні, також не рівні кортежі (a, b, c) і (a, b, c, d).

У початковій школі поняття кортежу в явному вигляді не вводиться, але вживається, тому що з цим поняттям пов’язано розв’язання деяких завдань. Наприклад, учні розв’язують завдання: *«Скількома цифрами записане число 1000001? Скільки серед них різних?»* Відповіді на запитання такі: для запису числа 1000001 потрібно сім цифр; серед них лише дві різні 0 і 1. За цією відповіддю ми бачимо знайомі поняття кортежу і множини. Дійсно, число 1000001 – це кортеж цифр (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) довжиною 7. Кількість різних цифр числа - це множина цифр, за допомогою яких це число записано, тобто множина {1;0}.

Розглянемо **приклад**. Використовуючи цифри 2,0,7, записати: а) три одноцифрові числа; б) чотири двоцифрових числа; в) одне шестицифрове число.

Розв'язання завдання зводиться до запису різних кортежів цифрами 2, 0, 7: а) довжини 1; б) довжини 2; в) дожини 6. До того ж, у випадках б) і в) не розглядаються кортежі, перша компонента яких є 0, тому що ні двоцифрове, ані шестицифрове число не можуть починатися з нуля.

<u>Розв'язання:</u> а) кортежі (2); (0); (7) - це числа 0, 2 і 7;

б) кортежі (2,0); (2,7); (7,2); (7,0) - це числа 20, 27, 72, 70 або числа: 20, 22, 72, 77 або числа: 22, 70, 27, 72 і т.д.

в) кортежі: (2, 7, 7, 7, 0, 2); (7, 7, 7, 7, 7 , 7); (2, 0, 0, 0, 0, 0), тобто - це числа 277702, 777777, 200000 і т.д.

У шкільному курсі математики часто зустрічається кортеж довжини 2, котрий носить назву «***упорядкована пара***». З поняттям пари учні зустрічаються при позначенні координат точки у прямокутній системі координат. Наприклад, точка на координатній площині задана вдома числами А(2; 3), де х=2; у=3.

Працюючи з десятковим записом чисел, де використовується позиційна система, учні спостерігають, як змінюється значення цифри у залежності від її місця у числі. Так, наприклад, $27 \neq 72$, $365 \neq 635$ і т.д. Вчителю початкових класів корисно знати, що в 9 класі у курсі геометрії учні стикаються з розкладанням вектору за координатами, в результаті чого одержують кортеж довжини 3.

Елементи декартового добутку двох скінченних множин зручно розташовувати у вигляді таблиці, де по вертикалі розміщують елементи множин *Х*, а по горизонталі - елементи множини *У*, а елементи множини Х×У записують на перетині відповідних рядків та стовпців (мал.22). Наприклад, у таблиці на мал.21 записані елементи декартового добутку множин Х={а, в, с} і У={4, 5}.

Учитель стикається з табличним записом декартового добутку двох множин, коли заповнює класний журнал, складає графік чергування тощо.

Х \ У	4	5
а	(а, 4)	(а, 5)
в	(в, 4)	(в, 5)
с	(с, 4)	(с, 5)

Мал.22

Використовуючи поняття кортежу, можна визначити поняття декартового добутку трьох, чотирьох та n-множин

Нехай задані n множин: A_1, A_2,… A_n. З елементів цих множин утворимо кортежі довжини *n*, перша компонента яких належить множині A_1, друга - множині A_2,… *n*-а компонента – множині A_n. Множину таких кортежів називають ***декартовим добутком*** множин A_1, A_2,… A_n і позначають $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. Наприклад, декартів добуток множин $A_1=\{1, 2\}$; $A_2=\{3, 4\}$, $A_3=\{5, 6, 7\}$ має вигляд: $A_1\times A_2\times A_3$ = {(1,3,5); (1,2,6); (1,4,5); (1,4,6); (1,4,7); (2,3,5); (2,3,6); (2,3,7); (2,3,7); (2,4,5); (2,4,6); (2,4,7)}.

Декартів добуток множин має такі ***властивості*** (дистрибутивні закони):

1) $A \times (B\cap C)= (A\times B)\cap(A\times C)$;

2) $A \times (B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

Учителю початкових класів важливо знати ці властивості, тому що за їх допомогою одержують правила множення числа на суму і суми на число (друга властивість).

Отже, якщо, розв’язуючи з учнями завдання, наприклад, таке: «*З даних цифр скласти різні двоцифрові числа*», учитель акцентує увагу на місце, яке займає цифра у числі (27≠72), то тим самим він здійснює у пропедевтичному плані підготовку учнів до сприйняття понять: метод координат, функція та її графік, вектор.

Вправи для самоконтролю

№ 1. Запишіть усі двоцифрові числа, цифри десятків яких належать множині $A = \{4, 5, 6\}$, а цифри одиниць – множині $B=\{3, 7\}$.

№ 2. Зобразіть у прямокутній системі координат множину $X \times X$, якщо $X = \{x / x \in R, - 1 \le x \le 6\}$. Чи належать цій множині пари: (- 3, 4), (2,5; - 0,5), (0, 0), (0, - 3), (5, 5) ?

№ 3. Зобразіть на координатній площині елементи декартового добутку множин X і Y, якщо:

1) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ і $Y = \{2, 3, 4\}$;
2) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ і $Y = [2; 4]$;
3) $X = [-1; 2]$ і $Y = \{2, 3, 4\}$;
4) $X = [1;7]$ і $Y = [2; 6]$;
5) $X = \{2\}$ і $Y = R$;
6) $X = (-3;2)$ і $Y = R$;
7) $X = R$ і $Y = [-2; 2]$;

№ 4. На координатній площині побудуйте пряму, яка паралельна осі OX і проходить через точку P (-2;3). Встановіть, декартів добуток яких двох множин зображується на координатній площині у вигляді цієї прямої.

Розділ ІІ. ВІДПОВІДНОСТІ

§1. БІНАРНІ ВІДПОВІДНОСТІ ТА ЇХ ВИДИ

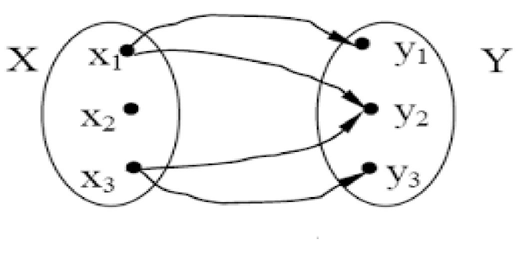
Для глибокого розуміння завдань навчання математики у початкових класах майбутньому вчителю необхідно вміти встановлювати та виділяти зв'язки між основними поняттями теоретичних основ початкового курсу математики та курсу методики навчання математики у початкових класів.

Традиційно у межах теоретико-множинного підходу головну увагу спрямовують на усвідомлення поняття натурального числа як потужності скінчених еквівалентних множин та операцій над множинами як теоретичної основи арифметичних дій. У розділі «Відповідності» буде показано, що не менш важливим є встановлення теоретичної основи понять «дорівнює», «більше», «менше», які вводяться у початкових класах.

Вивчаючи відношення між множинами і операції над ними, ми нехтували природою елементів, що складають ці множини, та тими зв'язками, які можуть існувати між цими елементами. Наприклад, на множині чисел: «дорівнює-не дорівнює», «ділиться-не ділиться», «менше-більше» тощо; на множині прямих: «перетинаються», «паралельні», «перпендикулярні»; між учнями класу: за зростом - «вище-нижче»; за віком – «старше-молодше».

Взаємозв'язок між елементами двох множин у математиці прийнято виражати за допомогою двомісного предиката *R(x, y)* і називати **бінарною відповідністю** («бінарний» від латинського слова “bis”, що означає «двічі»).

Один з шляхів формального визначення математичного поняття «бінарна відповідність R» полягає в ототожненні цього поняття з трійкою множини Х,У, G, де Х і У - вихідні множини із заданим набором елементів x∈X і y∈У, а G - підмножина декартового добутку G⊆Х×У, причому кожний елемент множини *G*, тобто кожна упорядкована пара виду *(x, y)*, забезпечує істинність двомісного предиката *R*, який прийнято позначати R (x, y) або xRy.



Мал.23

Множину G (G⊆Х×У={(x,y) | xRy - істинне}) називають ***графіком відповідності** R*, множину *X* - ***областю відправлення*** відповідності, множину *У* ***- областю прибуття*** відповідності. Наприклад, на мал. 23 відповідність *R* встановлено між множиною Х= $\{x_1, x_2, x_3\}$ - область відправлення та множиною У=$\{y_1, y_2, y_3\}$ - область прибуття. Графік даної відповідності утворюють пари:$G=\{(x_1,y_1), (x_1, y_2), (x_3, y_2), (x_3, y_3)\}$

Приклад 1. Встановимо бінарну відповідність між елементами множин Х={2,3,5,7} та У={4,21,25} за допомогою двомісного предиката xRy≡ "*число х є дільником числа у"*, де $x \in X$, $y \in У$. Це твердження буде істинним не для всіх пар чисел *(х, у)*, які можна утворити з елементів множин *Х* і *У*, тобто не для всіх упорядкованих пар декартового добутку Х×У. Наочно це можна показати за допомогою таблиці:

x \ y	4	21	25
2	*і*	*х*	*х*
3	*х*	*і*	*х*
5	*х*	*х*	*і*
7	*х*	*і*	*х*

Неважко помітити, що розглянута відповідність виділяє з усього декартового добутку Х × У підмножину *G*:

$$G = \{(2,4), (3,21), (5,25), (7,21)\}.$$

Цей набір упорядкованих пар є графіком відповідності.

Множина перших компонент в парах *(х,у)* графіка утворює ***область визначення*** відповідності *R*. Множина других компонент у парах графіка *G* утворює ***множину значень*** відповідності *R*.

Слід особливо підкреслити, що оскільки бінарні відповідності задаються двомісними предикатами, то над ними виконуються всі логічні операції, які виконують над предикатами, а над їх графіками, що являють собою множини упорядкованих пар, - операції над множинами.

Способи задання графіка бінарних відповідностей

Тісний зв'язок поняття бінарної відповідності з декартовим добутком визначив і способи задання його графіка.

1. Аналітичний спосіб.

Як у випадку скінченних, так і нескінченних множин *X* і *У*, графік *G* бінарної відповідності R можна задати за допомогою формули xRy, що встановлює аналітичний зв'язок між елементами множин *X* і *У*:

$$G = \{(x,y) \mid xRy \text{ - істинне}\}$$

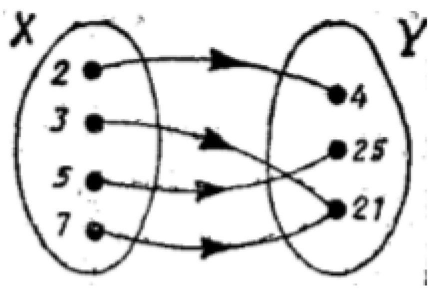
або за допомогою прямого переліку пар (для скінченних множин *X* і *У*), яка у розглянутому вище прикладі 1.

2. Табличний спосіб.

Якщо множини *X* та *У* скінченні, то іноді доцільно задати множину G у вигляді таблиці, як у наведеному вище прикладі 1.

3. Спосіб орієнтованих графів.

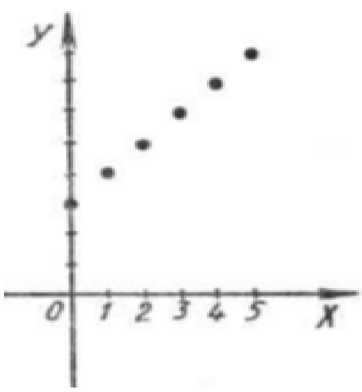
Для наочності задання графіків бінарних відповідностей, встановлених між скінченними множинами *X* і *У*, можна здійснювати за допомогою спеціальних креслень - орієнтованих графів, в яких множини зображуються у вигляді кругів Ейлера, елементи - точками, а графік *G* відповідності *R* - набором стрілок, що виходять з однієї точки в іншу. Наприклад, побудуємо граф для графіка *G*, який визначили у прикладі 1 (мал.24). Стрілками з'єднуються точки-елементи множин, для яких *xRy* - істинне (x∈X, y∈У).



Мал.24

4. Графічний спосіб.

Якщо множини X і У - числові множини, то зручніше графік бінарних відповідностей зображати як точки у прямокутній системі координат, де по вісі абсцис відкладається числова множина *X*, а по вісі ординат - числова множина *У*. Наприклад, графік бінарної відповідності xRy≡ "число x менше числа y на 3", де X={0,1,2,3,4,5}, У={0,1,2,3,4,5,6,7,8}, де x∈X, y∈У, зображено на мал. 25.



мал.25

Види бінарних відповідностей

При вивченні різних відповідностей, які зустрічаються в математиці між множинами математичних об'єктів або в житті між оточуючими нас множинами об'єктів, було помічено, що графіки деяких відповідностей збігаються, доповнюють один одного і т.ін. Це дало змогу виділити сукупності відповідностей, графіки яких мають певні особливості.

1. Повною відповідністю називають відповідність *R* між множинами *X* і *У*, якщо її графік *G* збігається з усім декартовим добутком множин *X* і *У*, тобто G= X × У.

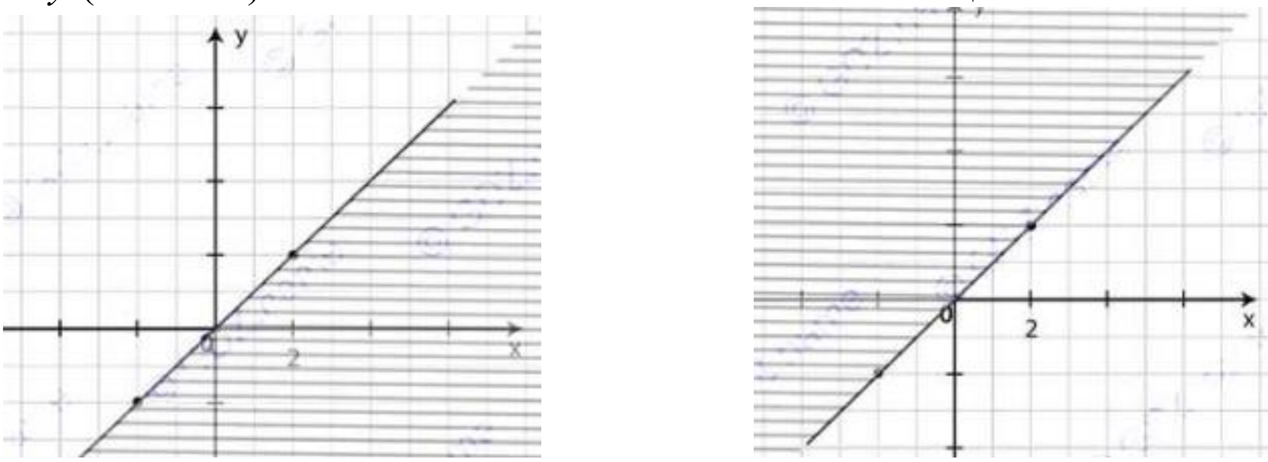
<u>Приклад 2.</u> Якщо X={2,4,6}, У={7,11,13} і xRy≡ ”x<y”, то G= {(2,7), (2,11), (2,13), (4,7), (4,11), (4,13), (6,7), (6,11), (6,13)}= X×У, тому що для всіх пар декартового добутку *xRy* - істинне.

2. Порожньою відповідністю між множинами *X* і *У* називають відповідність *R*, графік якої порожній, тобто G=∅.

<u>Приклад 3.</u> Якщо X={2,4,6}, У={7,11,13} і xRy≡ ”x >y”, то G=∅, тому що для всього декартового добутку X × У xRy - хибне.

3. Відповідності, що задані між множинами *X* і *У* предикатами *xRy* *і* $x\overline{R}y$, називають **протилежними відповідностями**, якщо їх графіки *G* і $\overline{G}$ не перетинаються (G ∩ $\overline{G}$ = ∅), а їх об'єднання становить усю сукупність пар декартового добутку X × У, тобто G∪$\overline{G}$=X×У.

<u>Приклад 4.</u> Якщо X=R і У=R, а xRy≡ ”x≥y”, тоді x$\overline{R}$y≡“x<y”. *G*- множина точок площини, що лежать нижче бісектриси *x=y* і на ній (мал.26 а). $\overline{G}$ −множина точок площини, що лежать вище бісектриси *x=y* (мал.26 б). G∪$\overline{G}$=X×У- множина всіх точок площини.



а Мал.26 б

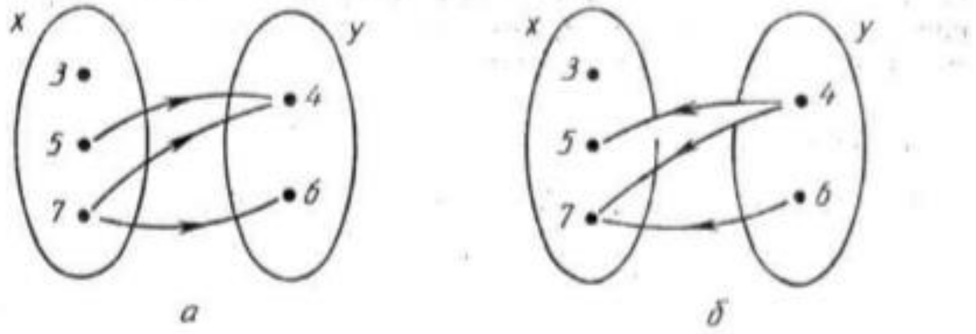
4. Відповідністю, **оберненою** даній відповідності *R*, називають відповідність R^{-1}, задану між множинами *X* і *У* двомісним предикатом виду $yR^{-1}x$, який є істинним у тих і тільки тих випадках, коли істинна вихідна відповідність, задана предикатом xRy, тобто коли істинна кон'юнкція предикатів: $xRy \wedge yR^{-1}x$ = і (x∈X, y∈У).

Щоб одержати графік оберненої відповідності $yR^{-1}x$, потрібно у графіку вихідної відповідності *R* поміняти місцями компоненти у кожній парі, а щоб побудувати граф, треба змінити напрямок всіх стрілок на обернений.

<u>Приклад 5.</u> Нехай для множин X={3,5,7} та У={4,6} задана відповідність xRy:“x>y”. Побудувати графік і граф оберненої відповідності $yR^{-1}x$.

<u>Розв’язання:</u> Побудуємо графік і граф (мал.27 а) бінарної відповідності *R:* G = {(5,4),(7,4),(7,6)}.

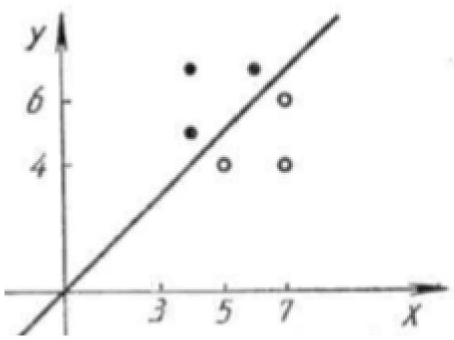
Обернена відповідність між множинами *У* і *X* задається предикатом $yR^{-1}x$: “y≤x”. Її графік одержуємо зміною місць компонент у парах: G^{-1}= {(4,5),(4,7),(6,7)}, а граф – зміною напрямку стрілок (мал.27б).



Мал.27

Графіки *G* і G^{-1} – симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів *y = x* (мал.28).

Вчителю початкової школи слід звернути увагу на те, що всі відповідності, які зустрічаються в курсі математики початкових класів, можна віднести до одного з зазначених типів відповідностей.



мал.28

Слід запам'ятати, що ***відповідності порядку*** (наприклад, “x<y”, “x слідує за y”, “x ділиться на y” і т.ін.) мають протилежні відповідності (відповідно “x>y”, “x передує y”, “x не ділиться на y” і т.д.), а всі ***відповідності тотожності*** (наприклад, “x дорівнює y”, “x паралельна y” і т.ін.) мають обернені відповідності (відповідно “y дорівнює x”, “y паралельна x” тощо). Визначення і застосування цих відповідностей має велике практичне значення в роботі вчителя, тому що дає змогу розширяти можливість вправ підручника математики, творчо використовувати запропонований підручником матеріал, формувати у молодших школярів самостійність математичного мислення.

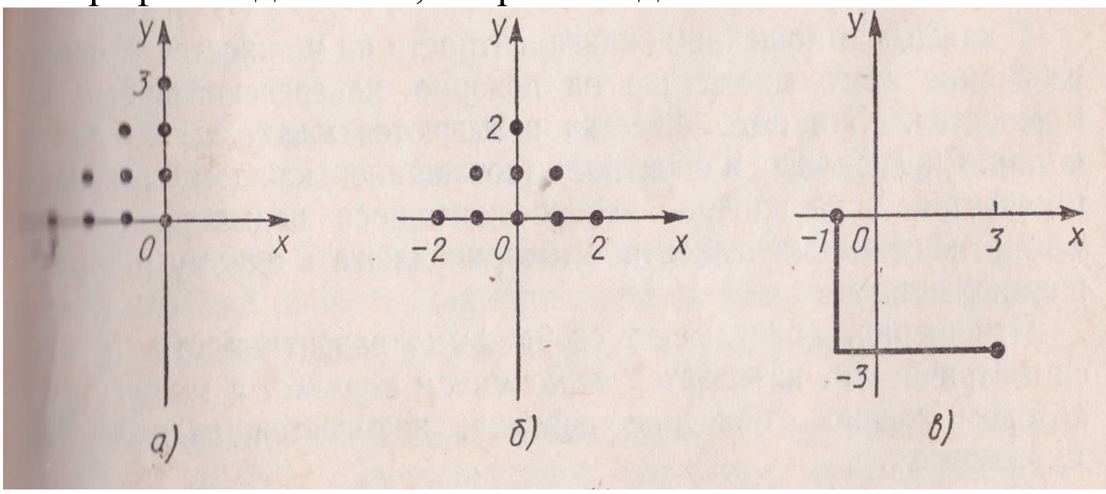
Вправи для самоконтролю

№ 1. Дані множини A={1, 3} та B ={2, 5}. Назвіть елементи декартового добутку даних множин та випишіть усі підмножини цієї множини. Яка з одержаних підмножин задає відношення: а) «менше»; б) «більше»; в) «більше або дорівнює»; г) «бути дільником» ?

№ 2. Задана множина X = {2, 3, 4, 5}. Назвіть усі елементи декартового добутку $X \times X$ та випишіть ті підмножини цього декартового добутку, які задають відношення: а) «менше»; б)»більше»; в) «дорівнює». Побудуйте графи даних відношень.

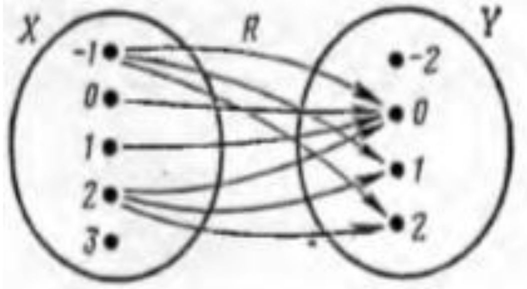
№ 3. Множина T={(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)} є відношення між елементами множин X={1, 2, 3, 4} та Y={0,1}.Задайте відношення T^{-1}, обернене до відношення T, та побудуйте на одному малюнку графіки відношень T і T^{-1}. Симетричні чи ні вони відносно бісектриси першого і третього координатних кутів ?

№ 4. Відношення P, T і M задані за допомогою графіків (мал.29). Побудуйте графіки відношень, обернених даним.



Мал.29

№5. Визначити області відправлення і прибуття бінарної відповідності *R*, граф якої зображено на мал. 30.



Мал.30

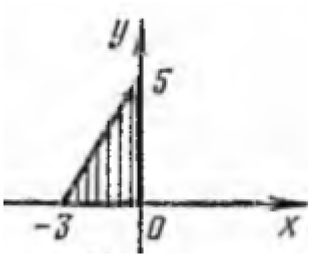
№6. Побудуйте добуток множини $X \times У$, якщо X={12,24,36}, У={1,2,4,6} та знайдіть:

а) графік бінарного відношення R≡"x⁝y", заданого між вказаними множинами *X* та *У*, і вкажіть тип відношення;

б) побудуйте відношення R^{-1}, обернене відношенню R≡"x⁝y". Знайдіть його графік, область визначення та множину значень. Визначте тип оберненого відношення.

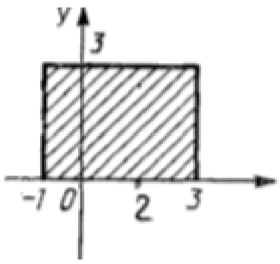
№ 7. На мал. 31 зображені бінарні відношення *R* і *S*, графіки яких позначені штрихованою частиною малюнку. Запишіть обернені бінарні відношення R^{-1}, S^{-1}, а також протилежні відношення $\overline{R}$ *і* $\overline{S}$ за допомогою нерівностей з двома невідомими. Укажіть їх область визначення і область значень.

R



а

S



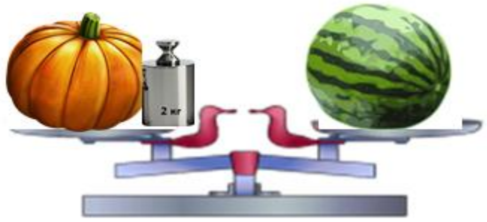
б

мал.31

№ 8. Користуючись змістом задач з підручника математики для 1 класу, дайте означення відношенням і об’єктам, зв’язаним цим відношенням. Укажіть протилежні відношення.

а) Богдан накреслив два відрізка. Перший довжиною 9 см, а другий 7см. Порівняйте їх.

б) На одній шальці терезів лежить кавун, а на другій – гарбуз і двокілограмова гиря. Що легше - гарбуз чи кавун? Що важче? На скільки кілограмів?



в) У кожної парі чисел запишіть найбільше число: 20 і 10, 17 і 19, 9 і 12, 0 і 10.

§2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо окремий випадок бінарної відповідності між множинами *X* і *У*, коли ці множини збігаються, тобто Х=У. У цьому випадку прийнято говорити про бінарні відношення, тому що мова йде про відношення між елементами всередині однієї і тієї ж множини.

Бінарне відношення *R* на множині *X* вважають заданим, якщо названа пара множин *X* і *G*, де *G* - підмножина декартового добутку X×X, кожний елемент якого забезпечує істинність двомісного предиката *xRy*, де x∈X, y∈ Y, G⊆X×X = {(x,y) / xRy - істинне}. До того ж множину *G* називають ***графіком бінарного відношення***, а множину *X* - ***областю задання відношення***.

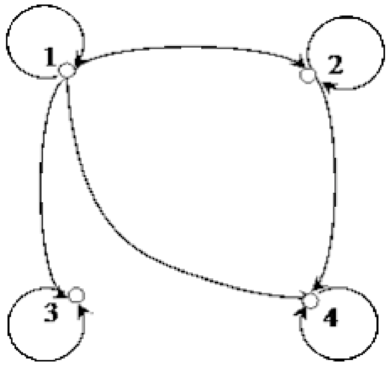
<u>Приклад 1.</u> Знайти графік бінарного відношення xRy=“x-дільник y*”,* заданого на числовій множині X={1,2,3,4}.

<u>Розв’язання:</u> Графік цього відношення *G* - це множина тих пар *(x,y)*, для яких двомісний предикат xRy=“x - дільник y” перетворюється в істинне висловлення, тобто

G = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (2,2), (3,3), (4,4)}.

Граф бінарного відношення

Графом бінарного відношення є креслення, на якому точками позначають елементи множини *X*, а стрілками з'єднують пари точок *(x,y)*, для яких предикат *xRy* перетворюється в істинне висловлення. Точки, що зображують елементи множини *X*, називаються *вершинами графа*, а стрілки – його *ребрами*.



Мал.32

Побудуємо граф бінарного відношення, заданого у прикладі 1 (мал.32). Для всіх пар виду *(x, y)* малюємо стрілку, яка починається і закінчується на одному й тому ж елементі (число є дільником самого себе) - таку стрілку на графі називають петлею (мал.33)

Оскільки бінарне відношення є окремим випадком бінарної відповідності, то визначення типів відповідностей переноситься на відношення у множині *X*.

Властивості бінарних відношень

Розглянемо властивості бінарних відношень. Нехай на множині *X* задано деяке відношення *R*.

1. Бінарне відношення R називають ***рефлексивним***, якщо для будь-якого *x* з *X* предикат *xRy* - істинний, тобто елемент x знаходиться у відношенні *R* з самим собою.

Наприклад, розглядаючи приклад 1, у графіку можна побачити пари виду *(x;x)*. Предикат “число x є дільником числа x” завжди істинний. Отже, відношення “бути дільником” рефлексивне. Граф рефлексивного відношення містить петлі (мал.33).

мал.33

2. Бінарне відношення *R* називають ***антирефлексивним***, якщо жоден елемент з множини *X* не знаходиться у відношенні *R* з самим собою, тобто *xRx* - хибне. Наприклад, відношення “пряма x перпендикулярна прямій y” антирефлексивне, тому що ніяка пряма не перпендикулярна сама собі.

3. Бінарне відношення *R* називається ***симетричним***, якщо має місце одночасна істинність предикатів *xRy* і *yRx*, тобто якщо кон'юнкція $xRy \wedge yRx$ істинна.

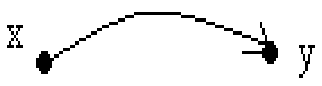
Наприклад, симетричне відношення паралельності на множині прямих: умова $x \parallel y$ і $y \parallel x$ виконується одночасно. Або відношення *R* “слово х має спільний корінь із словом у” на множині іменників. Наприклад, слово «однокурсник» має спільний корінь із словом «курсант», а слово «курсант» - із словом «однокурсник».

Граф таких бінарних відношень складається з двох елементів, пов’язаних стрілками протилежних напрямків (мал.34)

мал.34

4. Бінарне відношення *P* називають ***асиметричним***, якщо ні для яких елементів *x* і *y* з множини X не виконується одночасно істинність предикатів *xRy* і *yRx*.

Наприклад, відношення “y>z” асиметричне на множині дійсних чисел, тому що ні для кого дійсного числа не виконується одночасно умова: $x>y$ і $y>x$ (якщо 15 >10, то 10>15 – хибне висловлення). Граф такого відношення має стрілки одного напрямку (мал.35).



мал.35

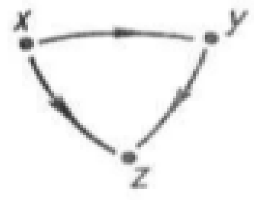
5. Бінарне відношення називають ***антисиметричним***, якщо предикати *xRy* та *yRx* істинні одночасно в одному єдиному випадку, коли $x=y$. Наприклад, відношеннях *R:* “число х кратне числу у” на множині X={3,15}. Дійсно, якщо *x* є кратним *y* *(15;3)*, то *y* не буде кратним *x* (3;15), симетричне відношення кратності виконуватиметься лише у випадку $x=y$, тобто 15⁝15 і 3⁝3.

Антисиметричність об'єднує дві властивості: рефлексивність і асиметрічність. У зв'язку з цим граф (мал.36) буде комбінацією графів, що зображені на мал. 32 і 34.

мал.36

6. Бінарне відношення *R* називають ***транзитивним***, якщо для будь-яких елементів x, y і z з множини X виконується відношення слідування: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ [(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]$.

Наприклад, відношення R: “пряма x паралельна прямій y” на множині прямих є відношенням транзитивності, оскільки з аксіом паралельності випливає, що: якщо x||y і y||z, то x||z. Побудуємо граф такого відношення (мал.37).

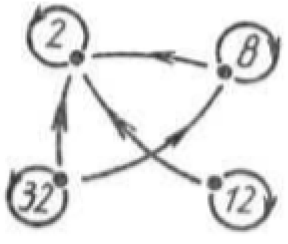


мал.37

7. Бінарне відношення називають ***зв'язним***, якщо для нього виконується істинність хоча б одного з предикатів: або xRy, або yRx, або x=y.

<u>**Приклад 1.**</u> Побудувати граф і графік бінарного відношення *R*, що задане двомісним предикатом *xRy: “x⋮y”* на множині X = {2, 8, 12, 32} та визначити властивості, які має це відношення.

<u>Розв’язання.</u> Графік бінарного відношення *R* буде містити такі пари G = {(2,2), (8,8), (12,12), (32, 32), (8,2), (12,2), (32,2), (32,8)}, а граф відношення буде мати вигляд (мал. 38):



Визначимо властивості даного відношення:

1) Відношення *xRy* - рефлексивне, тому що x⋮x (перевіримо, 2⋮2, 8⋮8, 12⋮12).

мал.38

2) Воно антисиметричне, тому що [x ⋮ y ∧ y ⋮ x] ⇒ (x = y).

3) Воно транзитивне, тому що 32 ⋮ 8 ∧ 8 ⋮ 2 ⇒ 32 ⋮ 2

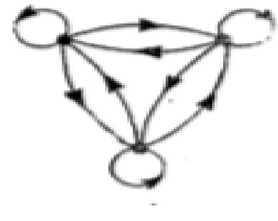
4) Воно в'язне, тому що для будь-якої пари (x, y) виконується або x⋮y, або y⋮x, або x=y. Перевіримо це, наприклад, для пари (2,8) дійсно, $\overline{2⋮8}$ але 8⋮2; для пари (2,12) - $\overline{2⋮12}$, але 12⋮2, а для пари (2,2) виконується умова 2=2 і т.д.

§3. ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ТА ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ

За набором властивостей серед бінарних відношень можна виділити дві великі сукупності: відношення еквівалентності і відношення порядку. Розглянемо першу з них.

Відношенням еквівалентності називається бінарне відношення *R* на множині *X*, якщо воно має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

Прикладом відношень еквівалентності можуть служити добре відомі з шкільного курсу математики відношення: паралельності на множині прямих (пряма *x* паралельна прямій *y*), рівності на множині числових виразів (числовий



мал.39

вираз x дорівнює числовому виразу y) і т. ін. Рекомендуємо самостійно переконатися, що ці відношення мають вказаний набір властивостей і що їх графи мають такий вигляд, як на мал.39.

Такий граф називають ***повним***. Всі точки з множини X попарно зв'язані стрілками двох напрямків і кожна з них має петлю.

Відношення еквівалентності відіграє важливу роль у різних галузях знань. Це обумовлено тим, що за допомогою відношення еквівалентності можна розбити будь-яку універсальну множину об'єктів на підмножини, що попарно не перетинаються, які визначають як класи. Таке розбиття носить назву ***класифікації.***

Класифікацію проводять за певними ознаками над об'єктами живої та неживої природи, над абстрактними математичними об'єктами, у повсякденному житті. Замість терміну «клас еквівалентності» використовують поняття «рід», «вид», «підвид», «родина» тощо.

Найчастіше у початкових класах зустрічаються такі відношення еквівалентності, як "числовий вираз x дорівнює числовому виразу y" на множині числових виразів; "множина A рівночисельна множині B" при порівнянні різних предметних множин; "звичайний дріб $\frac{x}{m}$ дорівнює звичайному дробу $\frac{y}{n}$" на множині дробів; при вивченні геометричного матеріалу "фігура Φ_x рівновелика фігурі Φ_y " тощо.

Особливу роль відіграє відношення "бути рівнокількісним" при введенні поняття натурального числа як загальної властивості класу скінченних еквівалентних або рівнокількісних множин. Відношення "бути рівнокількісним" розбиває множину всіх предметних множин на класи еквівалентності за їх кількісною характеристикою – потужністю: K_1- клас одноелементних множин, K_2 - двоелементних і т.д. Кожному класу K_n ставиться в відповідність певне натуральне число n.

Крім відношення еквівалентності серед бінарних відношень особливо виділяють **відношення порядку.**

Слово «порядок» звичне і в повсякденному житті, і в математиці. Ми говоримо про порядок слів у реченні, про порядок цифр у запису числа, про порядок виконання дій у числовому виразі. При цьому надаємо цьому поняттю такий смисл, що елемент множини, яку ми розглядаємо, слідує за певним елементом з цієї ж множини. Керуючись нашим уявленням про порядок, задамо на множині X відношення
R≡ "елемент x слідує за елементом y" (або обернене відношення "x передує y"). Визначимо властивості такого відношення:

а) Відношення R антирефлексивне, тому що елемент х не може слідувати за самим собою.

б) Відношення R асиметричне, тому що якщо елемент x слідує за елементом y, то y не може слідувати за елементом x.

в) Відношення R транзитивне, тому що якщо елемент x слідує за елементом y, а елемент y - за елементом z, то елемент x буде слідувати за елементом z.

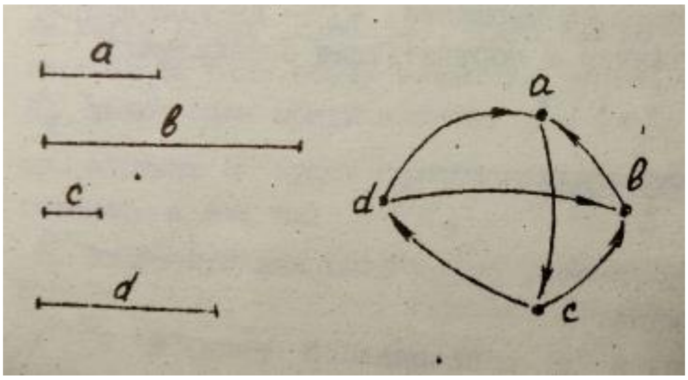
Такий же набір властивостей мають і багато інших відношень, наприклад, відношення "х >у" на множині дійсних чисел; відношення "людина х вища за людину у" на множині людей при порівнянні їх за зростом і т.ін. Такі відношення називаються відношеннями строгого порядку.

Отже, бінарне відношення R, задане на множині X, називається ***відношенням строгого порядку***, якщо воно транзитивне, асиметричне і антирефлексивне.

Слід відзначити, що відношеннями строго порядку будуть також відношення, обернені розглянутим вище. А саме відношення, *"x<y"*, *"людина x нижча за людину y"* будуть також мати властивості транзитивності, асиметричності і антирефлекивності.

Побудуємо, наприклад, граф відношення строго порядку *"відрізок x коротше за відрізок y"*, заданого на множині відрізків (мал.40).

Граф цього відношення (мал.40), не має петель, тому що за властивістю антирефлексивності відрізок x не може бути коротше самого себе. Будь-яку пару точок *(x,y)* з'єднує лише одна стрілка певного напрямку, що свідчить про асиметричність відношення.



мал.40

Побудований граф (мал.40) дозволяє розмістити елементи заданої множини у певному порядку: {е, а, в, d, c}, тобто упорядкувати задану множину відрізків за довжиною.

Поряд з відношенням строгого порядку ми постійно зустрічаємось з відношенням нестрогого порядку *"людина x не вища за людину y"*, *"числовий вираз x не перевищує числовий вираз y"*, *"x≥y"* та т.ін. Такі відношення уявляють собою диз'юнкцію двох відношень: строгого порядку та тотожності (рівності). Наприклад, *“x≥y”* рівносильно “x>y ∨ x=y”, а “x≤y” рівносильно “x<y ∨ x=y”.

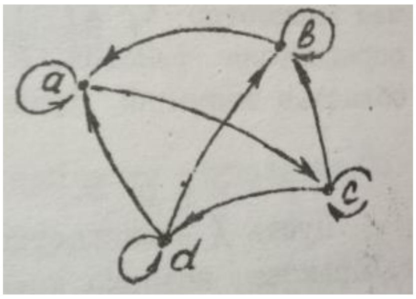
Відношення *R* на множині *X* називається ***відношенням нестрогого порядку***, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне. Переконаємося в цьому, побудувавши граф відношення нестрогого порядку на прикладі відношення *R: “відрізок x не довший за відрізок y”*, заданого на множині відрізків (мал.41). Це відношення *R* є диз’юнкцією відношень *“відрізок x коротший за відрізок y”* або *“відрізок x рівновеликий відрізку y”* і має такі властивості:

- рефлексивність, тому що диз’юнкція буде істинною при істинності одного з висловлень, а саме висловлення *“відрізок x рівновеликий самому собі”* - істинне;

- антисиметричність, тому що *“x не довший y”* і *“y не довший x”* тільки в тому випадку, коли *“x рівновеликий y”*;

- транзитивність, тому що *“x не довший y”*, а *“y не довший за z”*, то *“x не довший за z”*.

Скористаємося цими властивостями і побудуємо граф відношення *R “відрізок x не довший відрізка y”* (мал.41). Побудований граф нагадує граф відношення “відрізок *x* коротший за відрізок *y*” (мал.40), тільки для кожної точки добавлена петля, тому що є властивість рефлексивності.



Мал.41

Побудований граф дозволяє розмістити елементи множини у порядку зростання, тобто упорядкувати його, а саме, X = {c; a; d; b }.

Про множину *X*, на якій задано відношення порядку (строго або нестрогого), говорять, що вона упорядкована відношенням *R*. Іншими словами, множину *X* називають ***упорядкованою***, якщо для будь-яких двох різних її елементів встановлено правило, за яким один з її елементів вважають попереднім до іншого. Наприклад, множина всіх натуральних чисел може бути упорядкована відношенням *“x<y”* або *“x:y”*, а розглянута множина відрізків (мал.40) - відношенням *“відрізок x коротший за відрізок y”*, так й відношенням *“відрізок x не довший за відрізок y”*.

§4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВІДНОШЕННЯ

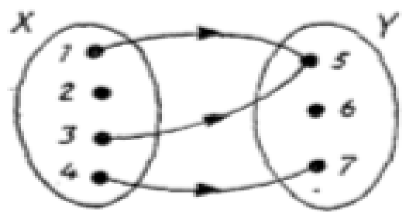
Розглянемо бінарну відповідність між елементами множин

X={-1,0,1,2,3} та У={1,2,3,4,5}, задану двомісним предикатом xRy≡ "x+y=2", де $x \in X$, $y \in У$. Це твердження буде істинним не для всіх пар чисел (x, y) декартового добутку X×У. Задана відповідність виділяє з цього декартового добутку X×У підмножину G={(-1,3);(0,2);(1,1)}, яка називається *графіком відповідності*, множина *X* - *областю відправлення* відповідності, множина *У* - *областю прибуття* відповідності.

Одержали функціональне відношення, оскільки в парі з кожним елементом $x \in X$ знаходиться не більше одного елемента $y \in Y$. Дійсно, для елементів *2* і *3* з множини *X* немає відповідних елементів у множині Y, а елементам *-1, 2, 0* з множини *X* відповідає лише один елемент з множини Y. У цьому випадку множина X_1 ={-1,0,1}, де $X_1 \subseteq X$, називається ***областю визначення функції***, а множина Y_1= {1,2,3}, де $Y_1 \subseteq Y$ - ***областю значень функції***.

<u>Приклад 1.</u> Нехай *X* - множина учнів 2 класу середньої школи м.Харкова, які повинні писати контрольну роботу з математики. Нехай Y = {4,5,6,7,8,9,10,11} - набір оцінок , які вони можуть одержати.

Нехай X_1 - множина учнів, які писали контрольну роботу, а $У_1$ - множина оцінок, які вони одержали. Тоді *X* - область відправлення функції, X_1- область визначення функції, Y - область прибуття, Y_1 - область значень функції.



Мал.42

<u>Означення.</u> **Функцією** називається така відповідність між елементами множин *X* і Y, при якій кожному елементу множини *X* відповідає не більше одного елемента множини Y (мал.42).

Функція або функціональна відповідність позначається так: *y=f(x)*, де *x* називають ***аргументом функції***, а *y* – ***значенням функції***.

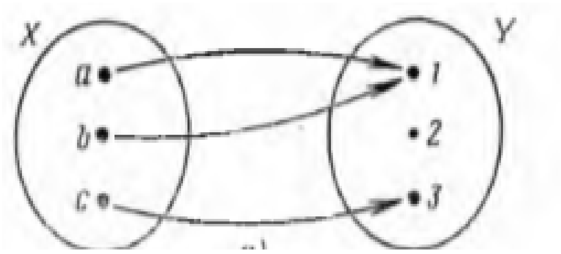
Розглянемо різні функціональні відношення.

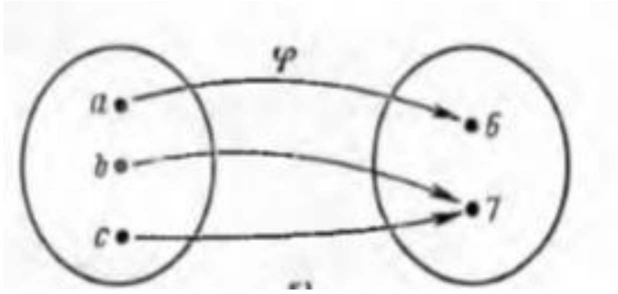
1. Нехай $X_1=X$, тобто область визначення і область відправлення співпали. У цьому випадку говорять, що дана функція є ***всюди визначеною***.

В школі зазвичай розглядають всюди визначені функції. В математиці всюди визначену функцію називають відображенням.

<u>Означення.</u> Якщо кожному елементу першої множини відповідає один і тільки один елемент другої множини, то таку відповідність називають **відображенням.**

У відображені виділяють два випадки: $Y_1 \subset Y$ (мал.43а) та $Y_1 = Y$ (мал.43б)





$X_1=X \quad Y_1 \subset Y$ $\qquad$ $X_1=X \quad Y_1 = Y$

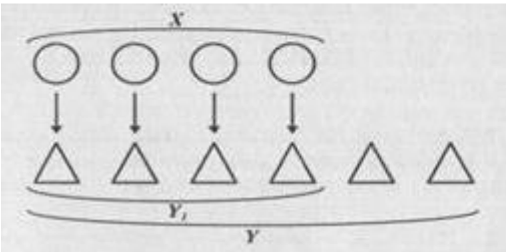
а) $\qquad$ Мал.43 $\qquad$ б)

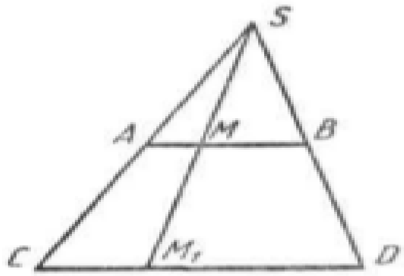
У першому випадку (мал.43а) говорять, що множина *X* відображається ***в*** множину У. У другому випадку (мал.43б) говорять, що множина *X* відображається ***на*** множину У (сюр'єктивне відображення).

<u>Приклад 2.</u> $y = x-2$, де $x \in R$.

Тут $X_1= R$, $У_1= R$, тобто $X_1= X$, $У_1= У$. Тому це відображення X на У (або R на R).

Нехай множина X_1 ($X_1=X$) відображається в множину $У_1$ ($У_1 \subset У$) так, що $(\forall x_1)(\forall x_2)$ $[f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2]$, тоді відображення *f* називають *ін'єктивним* (***взаємно-однозначним відображенням "в"***) (мал.44).

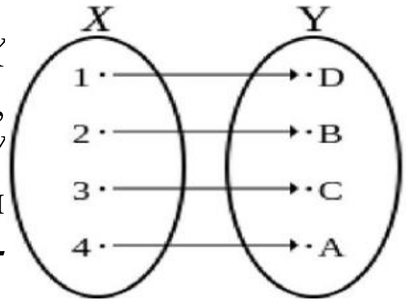




мал.44 $\qquad$ мал.45

Прикладом ін'єктивного відображення може бути відображення, при якому кожній точці відрізка *AB* відповідає єдина точка прямої *CD* (мал.45).

2. Якщо кожному елементу множини *X* відповідає один і тільки один елемент множини *У*, і навпаки, кожному елементу множини *У* відповідає один і тільки один елемент множини *X*, то така відповідність називається ***взаємно-однозначною*** або *бієктивною* (мал.46).



мал.46

Отже, для взаємно однозначної відповідності маємо $X_1=X$, $У_1=У$. Наприклад, будь-яка неперервна і монотонна функція характеризується взаємно-однозначною відповідністю (наприклад, $y = x-2$; $y =\frac{3x+2}{7}$).

Рівнопотужні множини

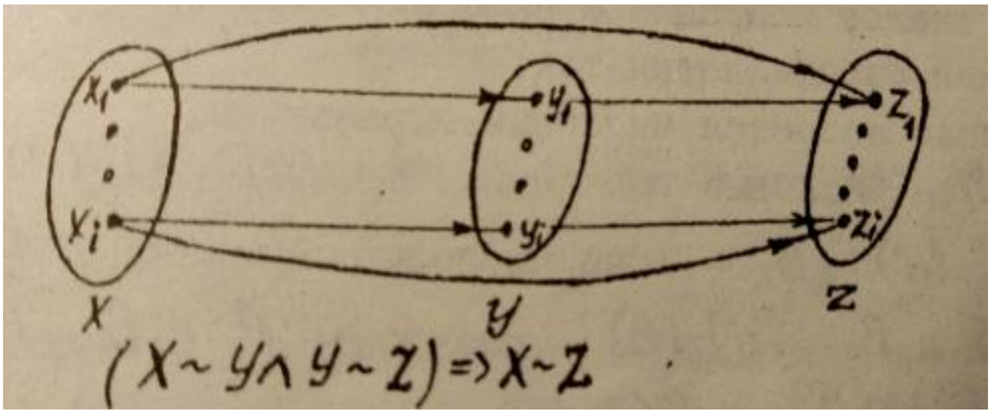
Якщо між елементами двох множин X і $У$ можна встановити взаємно-однозначну відповідність, то число елементів в них однакове, і такі множини називають рівнчисельними або рівнокількісними (Х~У).

Покажемо, що відношення "Х рівнокількісне У" є відношенням еквівалентності. Воно має такі властивості:

а) рефлексивність (оскільки кожний елемент х∈Х відповідає елементу х∈Х, то між елементами множин X і X встановлюється взаємно однозначна відповідність, між множинами X і X - бієктивне відображення, Х~Х);

б) симетричність (якщо Х~У, то для кожного елемента x з X є відповідний елемент y з $У$ і, навпаки. кожному елементу y з $У$ буде відповідати елемент x з X (при бієктивному відображенні повернули стрілки), то Х~У⇒ У~Х).

в) транзитивність (оскільки при бієктивному відображенні Х~У і У~Z, кожному елементу x_i з X відповідає певний елемент y_i з $У$, а елементу y_i - певний елемент z_i з Z , то бієкція буде встановлена й між множинами X і Z , тому що кожному елементу x_i з X знайдеться відповідний елемент z_i у множині Z (мал.47)



Мал.47

Оскільки відношення "Х~У" має властивості рефлексивності, симетричності й транзитивності, то воно є відношенням еквівалентності і розбиває сукупність всіх множин на класи еквівалентності, які будуть характеризуватися однаковим числом елементів у множині. Кожному класу еквівалентності можна взаємно однозначно поставити у відповідність певне натуральне число, т.к. поняття «число елементів» виступає як спільна властивість, що характеризує клас еквівалентних або рівнокількісних скінченних множин, що попарно не перетинаються.

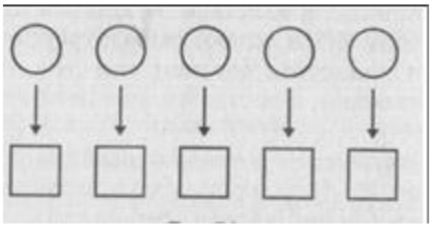
Якщо множини нескінченні, то виникає потреба розширити поняття «число елементів множини», щоб це поняття було характеристикою й нескінченних попарно еквівалентних множин. Таким узагальненням стало поняття «***потужність множини»***, яке було введене основоположником теорії множин Георгом Кантором: *m(A)* - потужність множини *A*.

Множини *A* і *B мають одну потужність* тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні.

Всі множини, що входять в даний клас еквівалентності, еквівалентні і характеризуються одним і тим же числом елементів, яке Кантор запропонував називати ***кардинальним числом*** і позначати як m(A)=Card (A).

Еквівалентні множини називають ще ***рівнопотужними*** або рівносильними. Всі вони характеризуються певним кардинальним числом, яке записують за допомогою натурального числа.

У початкових класах взаємо однозначна відповідність широко використовується для формування понять «дорівнює - не дорівнює». За зображенням різноманітних множин на малюнках в підручниках математики дітям пропонують утворити пари (мал.48).



Мал.48

Якщо кожний предмет з множини *X* має свою пару в множині *У*, то кількість елементів в множині *X* дорівнює кількості елементів в множині *У* і мова йде про рівнопотужні множини.

Вправи для самоконтролю

№ 1. Підберіть самостійно з підручників математики для початкових класів приклади, в яких використовується відношення еквівалентності та відношення порядку. Визначить їх властивості. Змініть зміст задач так, щоб для відношення еквівалентності утворилося обернене відношення, а для відношення порядку – протилежне відношення.

№ 2. Побудуйте граф бінарного відношення *xRy "y = 2x+1"*, заданого у множині *X = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}*. З'ясуйте, чи має дане відношення властивості рефлективності, симетричності, транзитивності.

№ 3. Визначте властивості бінарних відношень на множині членів вашої родини і вкажіть їх властивості на графі:

а) *xRy ≡ "людина x не старіша за людину y"*

б) *xPy ≡ "людина x вище за ростом за людину y"*

№ 4. Чи можна утворити розбиття множини *X = {0,1,2,...19,20}* на класи за допомогою бінарного відношення *"при діленні на 5 число x має ту ж саме остачу, що й число y"*?

№ 5. З підручників початкової школи підберіть такі вправи, у яких учням пропонується упорядкувати множини за допомогою відношень порядку "більше", "довше", "швидше", "важче". З'ясуйте їх властивості. Визначте, чи є кожне з них відношенням строго або нестрогого порядку.

№ 6. Які властивості мають наступні відношення у множині цілих чисел Z? Для відношень еквівалентності графіки відношень побудуйте у прямокутній системі координат:

а) $x + y = 10$ е) $x < 2y$

б) $(x + y) \vdots 10$ ж) $x + y = 100$

в) $x = y$ з) $(x - y) > 0$

г) $x = 2y$ к) $|x| = |y|$

№ 7. Які з наведених нижче відношень функціональні:

а) $y = x$ г) $y = ax + b$

б) $y = 2x$ д) $x + y = 10$

в) $y = 2\cdot\sqrt{x}$ е) $x\cdot y = 10$

Для всіх відношень $x, y \in R$.

№ 8. Чи будуть рівнопотужними множини:

а) $A = \{x \mid x \vdots 2, 0 < x < 20, x \in Z\}$ і $B = \{x \mid x = 2k, 1 < k < 10, x \in Z\}$

б) $A = \{x \mid x \in R, 1 \le x \le 5\}$ і $B = \{x \mid x \in R, |x - 3| \le 2\}$

в) $A = \{-1, 3\}$ і $B = \{x \mid x \in R, |4 + 3x| - x = |1 + x|\}$

Розділ ІІІ. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

§ 1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Числовий вираз являє собою запис, що складається за допомогою чисел, знаків арифметичних дій та дужок. У загальному вигляді поняття числового виразу визначається так:

1. Кожне число є числовим виразом.
2. Якщо А і В – числові вирази, то (А)+(В); (А)–(В); (А)·(В); (А):(В) - теж є числовими виразами. Вираз (А)+(В) називають сумою А і В, (А)–(В) – різницею А і В, (А)·(В) – добутком та (А):(В) – часткою.

Наприклад, (27-3):5 + 2; 208 + 6:4 - 4.

В математиці користуються такими *способами спрощення записів числових виразів*:

- опускають дужки, що містять лише одне число: замість (5)+(9) пишуть 5 + 9;
- опускають дужки під час запису суми декількох доданків: замість ((6+8)+9)+12 пишуть 6+8+9+12;
- опускають дужки під час запису добутку декількох множників: замість (3·9) · 14 пишуть 3·9·14;
- якщо вираз містить декілька операцій додавання та віднімання, які виконуються за порядком їх запису зліва направо, то дужки опускають: наприклад, замість ((8-3)+9) - 11 пишуть 8-3+9 - 11. За іншим порядком виконання дій дужки опускати не можна: наприклад, (7- (4-2)) + 3 $\neq$ 7 – 4 – 2 + 3;
- якщо вираз містить декілька операцій множення і ділення, що виконуються за порядком їх запису зліва направо, то дужки опускаються: наприклад, замість ((27:3)·2):6 пишуть 27:3·2:6.
- якщо перед дужками, що містять лише операції множення і ділення, стоїть знак «+» або «-», то ці дужки можна опустити: наприклад, замість 28+ ((18:2) ·3) пишуть 28 + 18:2·3;
- домовилися спочатку виконувати дії другого ступеня (множення і ділення), а потім першого ступеня (додавання і віднімання).

Правило 1. Якщо числовий вираз не має дужок, то треба розбити його на частини, відокремлені одна від одної знаками додавання і віднімання, та обчислити значення кожної такої частини, виконуючи операції множення і ділення за порядком зліва направо. Після цього, замінивши кожну частину її значенням, знаходять значення виразу, виконуючи операції додавання і віднімання за порядком зліва направо. Наприклад, 28 : 2 – 18 : 9 + 12 · 4

1) 28:2=14; 2) 18:9=2; 3) 12·4=48; 4) 14-2+48=60.

<u>Правило 2.</u> Якщо числовий вираз містить дужки, то потрібно взяти частини виразу, що знаходяться в дужках і не мають інших дужок, знайти їх значення за правилом 1 і замінити одержаним виразом, опустивши дужки. Якщо після цього одержимо вираз без дужок, необхідно обчислити його за правилом 1, інакше – знов застосувати правило 2.

Після виконання дій, які зазначені в запису виразу, одержимо число, яке називають ***значенням числового виразу***.

Наприклад, треба обчислити значення виразу, використовуючи правила 1 і 2: ((36:2 - 14) · (42·2 - 14) + 20):2.

Спочатку знаходимо, що: 36 : 2 – 14 = 18 – 14 = 4

42 · 2 – 14 = 84 – 14 = 70.

Замінимо 36 : 2 - 14 і 42 · 2 - 14 їх значеннями, одержимо:

(4·70 + 20):2 = (280 + 20) : 2 = 300:2 = 150.

Зазначимо, що не будь-який числовий вираз має значення. Так, наприклад, вирази 12 : (8-2·4) та $\sqrt{18-25}$ не мають значень на множині дійсних чисел, тому що у першому виразі не можна виконати ділення на нуль, а в другому – добути корінь другого степеня з від'ємного числа.

Якщо значення двох числових виразів збігаються, то говорять, що ці ***числові вирази рівні***. Наприклад, дані вирази є рівними: 7+12 і 2·8+3; 48:6 і 13-5.

<u>Вправи для самоконтролю</u>

№1. Визначити, які із записів є числовими виразами:

а) 8·72 – 5 в) 38+25 - 44+13

б) (45-3)·7 г) 17 > (3+5)·2

№2. Які з даних числових виразів мають значення на множині R:

а) $\frac{8,31,2+4,2}{\left(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15}\right)5-7\frac{2}{3}}$ б) $\frac{5,62,1-11,76}{\left(5-3\frac{2}{3}\right)6-7,9}$

Учні початкових класів починають знайомство з числовими виразами ще в 1 класі. Спочатку це вирази виду: 2+1; 4-1; 3-2 і т.п. Пізніше з'являються більш складні числові вирази, за допомогою яких учні записують розв'язок задач; є завдання на знаходження значень числових виразів або на порівняння числових виразів.

Розглянемо задачу з підручника математики 2 класу.

<u>Задача.</u> На базі було 50 соснових і 30 березових колод. 70 розпиляли на дошки. Скільки колод залишилось на базі?

Для розв'язання задачі складають числовий вираз (50+39)-70, в якому вказують, які дії потрібно виконати над даними в задачі числами, а потім виконують дії, тобто дається програма обчислення відповіді. Після виконання цієї програми учні одержують значення числового виразу: 50+30-70 = 10.

Наведемо приклади з шкільних підручників, які пов'язані з введенням поняття «числовий вираз».

1) Знайти вирази, значення яких дорівнює 47;

35+12 40 – 10 + 17

100 - (50 - 30) 47 + 10 + 1

2)Задача. Перша ланка піонерів висадила 14 яблунь, а друга – на 5 яблунь більше. Що можна дізнатися, якщо обчислити числові вирази: 14+5 та 14+(14+5) ?

3) Склади задачу за виразом: 40 - (23 + 7).

4) Запиши вирази і знайди їх значення: а) зменшити 72 на 9; б) збільшити 84 на 8; в) з 48 відняти суму чисел 7 і 6.

5) Запиши числові вирази та обчисли їх значення: а) суму чисел 8 і 16 розділити на 4; б) число 4 помножити на різницю чисел 20 і 12; в) різницю чисел 40 і 12 зменшити у 4 рази.

6) Прочитай вирази і знайди їх значення:

$10\cdot(30 - 24)$ $8\cdot(28:7)$ $(22 + 14):14$

§2. ЧИСЛОВІ РІВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай є два числових вирази A і B. З'єднаємо їх знаком «=» (знак рівності). Одержимо деяке висловлення, що називається **числовою рівністю**: $A=B$. Це висловлення може бути істинним або хибним. Рівність $A=B$ вважають істинною, якщо обидва вирази мають рівні числові значення. Наприклад, рівність $7+5 = 4\cdot 3$ – істинна, а рівність $15+12 = 4\cdot 7$ – хибна. Хибна рівність $6:(2\text{-}2) = 5$, тому що вираз $6:(2\text{-}2)$ не має сенсу.

Розглянемо ***властивості істинних числових рівностей***. Нехай $A=B$ – істинна числова рівність, C – будь-яке дійсне число. Відношення рівності числових виразів має властивості:

1) ***рефлективність*** (А = А);

2) ***симетричність*** (А = В, то В = А);

3) ***транзитивність*** (якщо А = В і В = С, то А = С).

Отже, відношення "бути рівним" на множині числових виразів є відношенням еквівалентності. Тому множина всіх числових виразів розбивається на класи еквівалентності, що складаються з виразів, які мають одне і те ж числове значення. Наприклад, в один і той же клас еквівалентності потрапляють вирази 5+1; 9-3; 2·3; 12:2 та ін.– всі вони мають значення 6.

4) ***монотонність відносно операції додавання***: якщо до обох частин істинної числової рівності додати або відняти одне й те ж число або числовий вираз, то знов одержимо істинну числову рівність:

$$A = B <=> A + C = B + C$$

Наприклад, 14 -7 = 21:3 – істинна рівність, тоді 14-7+5 = 21:3+5 – також істинна рівність, тому що значення числових виразів у правій і лівій частинах рівності однакові: 12 = 12.

Ця властивість дає можливість переносити числа з однієї частини рівності в іншу з протилежним знаком.

5) ***монотонність відносно операції множення***: якщо обидві частини істинної рівності помножити або поділити на одне і те ж число $C \neq 0$, то одержимо істинну рівність:

$$A = B <=> A \cdot C = B \cdot C,\ C \neq 0;$$
$$A = B <=> A : C = B : C,\ C \neq 0.$$

Наприклад, 5 · 4 = 28 – 8 – істинна рівність, тоді
5·4· (-3) = (28 - 8)·(-3) – істинна рівність, тому що -60 = -60.

Над числовими рівностями, як і над будь-якими висловленнями, можна виконувати операції кон’юнкції, диз’юнкції, імплікації, заперечення. Наведемо приклади.

а) Висловлення “9 + 3 = 12 ∧ 13 · 2 = 26” - істинне, тому що істинні висловлення, які входять в кон’юнкцію.

б) Висловлення “4 + 3 = 6 ∨ 7 + 1 = 8” - істинне, тому що істинне хоча б одне з висловлень, що входять в диз’юнкцію.

в) Висловлення “4 + 3 = 6 => 4 + 6 =11” - істинне як імплікація двох хибних числових рівностей.

г) Запереченням висловлення “7 · 8 = 54” є висловлення
“7 · 8 ≠ 54”. Перше висловлення – хибне, а друге – істинне.

6) Якщо істинні рівності A=B і C=D, де A, B, C, D – числові вирази, то за умови, що виконуються відповідні операції, істинні й рівності: A + C = B + D   A · C = B · D
A – C = B – D   A : C = B : D

У початкових класах істинні числові рівності називають правильними числовими рівностями, хибні – неправильними. Ці поняття допомагають учням не тільки удосконалювати обчислювальні навички, а й глибше вивчити теоретичний матеріал, пов’язаний з теорією еквівалентності рівнянь. Здійснюють це при виконанні різних вправ. Наприклад, таких:

1) Які приклади розв'язані неправильно? Постав у цих прикладах дужки так, щоб відповіді були правильними:

$18 - 3 - 7 = 8$ $\qquad$ $19 - 13 - 6 = 12$

$17 - 3 + 6 = 8$ $\qquad$ $14 - 5 - 2 = 7$

2) Знайди приклади, які мають відповідь 25:

$2 \cdot 9 + 6$ $\qquad$ $18 : 2 + 11$ $\qquad$ $3 \cdot 9 - 12$

$9 \cdot 4 - 11$ $\qquad$ $4 \cdot 8 - 7$ $\qquad$ $18 : 3 + 24$

3) Встав замість «віконечка» знаки «+» або «-», щоб вийшли правильні рівності:

15□3 = 12 $\qquad$ 40□8 = 52

16□9 = 7 $\qquad$ 13□5 = 8

4) Постав, де треба, дужки так, щоб вийшли правильні рівності:

$76 - 20 + 5 = 51$ $\qquad$ $53 - 18 - 15 = 20$ $\qquad$ $64 + 36 - 75 = 25$

5) Перевір обчислення, чи правильні такі рівності:

$8 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = (8 + 7) \cdot 3$ $\qquad$ $17 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = (17 + 3) \cdot 2$

§ 3. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Два числові вирази A і B, з'єднані знаками «менше» (<) або «більше» (>), називають нерівністю $A < B$ або $A>B$.

Нерівність $A<B$ будемо вважати істинною, якщо A і B мають числові значення, причому числове значення виразу A менше числового значення виразу B і числове значення виразу A менше числового виразу B. Наприклад, нерівність $(18 - 3) : 5 < 3 + 4$ істинна, тому що $(18 - 3) : 5$ має значення 3; а $3 + 4$ має значення 7, і $3 < 7$.

Для будь-яких дійсних чисел a і b істинним є одне і лише одне з відношень: $a = b; a > b; a < b$.

У середній школі надається така ознака відношення «>» і «<» між числами a і b:

1)$a > b$ тоді і тільки тоді, коли $(a - b)$ – додатне число;

2)$a < b$ тоді і тільки тоді, коли $(a - b)$ – від'ємне число.

Розглянемо ряд ***властивостей істинних числових нерівностей*** (наприклад, для відношення «бути менше»).

1. Якщо $a < b$, то $b > a$.

Дійсно, тому що $a < b$, то $(a-b)$ – від'ємне число, тоді протилежне йому число – $a-b$ – додатне. Звідки $(b-a)$ – додатнє число, тобто $b > a$.

2. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Дійсно, тому що $a < b$ і $b < c$, то $(a – b)$ і $(b – c)$ – від'ємні числа. Але тоді $(a – b) + (b – c)$ – від'ємне число (як сума двох від'ємних чисел). Звідси $(a – c)$ – від'ємне число. Тому $a < c$.

3. Якщо $a < b$, то для будь-якого c $a+c < b+c$ (властивість монотонності відносно додавання).

Дійсно, тому що $a < b$, то $(a-b)$ – від'ємне число. Але тоді $(a+c) – (b+c)$ – теж від'ємне число, тому $a+c < b+c$.

<u>Наслідок</u>. З однієї частини нерівності можна переносити доданки в іншу частину, змінюючи при цьому їх знак на протилежний.

4. Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$ (властивість монотонності нерівності відносно множення).

Тому що $a < b$, то $(a-b)$ – від'ємне число, тоді $(a-b)\cdot c$ – теж від'ємне число (як добуток від'ємного і додатного чисел), тобто $ac < bc$.

5. Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$.

Дійсно, тому що $a < b$, $(a-b)$ – від'ємне число, тому $(a-b)\cdot c$ – додатне (як добуток двох від'ємних чисел). Тоді $(ac-bc)$ – додатне число, а значить $ac > bc$.

6. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a+c <$ в$+d$.

Дійсно, з умови маємо, що $(a-b)$ і $(c-d)$ – від'ємні числа. Але тоді $(a-b) + (c-d)$ – від'ємне число (як сума від'ємних чисел). Звідки $(a+c) – (b+d)$ – теж від'ємне число. Тому $a+c < b+d$.

7. Якщо $a < b$ і $c > d$, то $a-c <$ в$-d$.

Оскільки $c > d$, то $-c < -d$ (властивість 5). Маємо $(a-b)$ і $(-c + d)$ – від'ємні числа, тоді $(a-b) + (-c+d)$ – від'ємне число (як сума від'ємних чисел). Звідки $(a-c) – (b-d)$ – теж від'ємне число. Тобто $a-c < b-d$.

8. Якщо a, b, c і d – додатні числа, $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$.

Це справедливо, тому що $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$. Аналогічно $cb < bd$. Тоді $ac < bd$ (властивість 4).

<u>Наслідок 1.</u> Нерівність з додатними числами не порушиться, якщо обидві його частини піднести до степеня з одним і тим же натуральним показником. Наприклад: а) $5^2 > 2^2$; б) $\frac{3}{4} < 1$, тому $(\frac{3}{4})^3 < 1^3$.

<u>Наслідок 2.</u> Якщо з обох частин істинної числової нерівності з невід'ємними частинами вилучити арифметичний корінь, то одержимо істинну числову нерівність того ж знаку. Наприклад: якщо 4>0, то 2>0.

9. Якщо $a < b$ – істинна числова нерівність, де a і b мають однакові знаки, то істинною є нерівність $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Щоб це довести, достатньо довести, що $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ або $\frac{b-a}{ab}$ – додатнє число. Дійсно, за умовою $a < b$, тоді $b > a$, тобто $(b-a)$ – додатне число. Крім того, $a \cdot b$ – додатне число як добуток чисел з однаковими знаками. Отже, що $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ або $\frac{b-a}{ab}$ – додатне число.

10. Якщо a, b, c і d – додатні числа, $a < b$ і $c > d$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Дійсно, якщо $c > d$, то $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$ (властивість 9). Тоді $a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{d}$ (властивість 8), тобто $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. Наприклад, якщо 16>8 і 2 <4, то 8>2.

Поряд з відношеннями $a > b$ і $a < b$ розглядають й відношення $a \leq b$ і $a \geq b$. Нерівність $a \leq b$ є диз'юнкцією висловлень $a < b$ і $a = b$ і тому істинна, якщо істинна хоча б одна з них:

$a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$.

Аналогічно $a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$. Наприклад, нерівність 5≤5 істинна тому, що 5 =5. Нерівність 4 ≤ 3 хибна тому, що висловлення 4<3 і 4 = 3 хибні.

Подвійна нерівність $a < b < c$ є кон'юнкцією нерівностей $a<b$ і $b<c$. Вона істинна лише за умови, що істині обидві нерівності. Наприклад, подвійна нерівність 5 < 9 < 11 істинна, тому що істинні нерівності 5 < 9 і 9 < 11. А подвійна нерівність 5 < 11 < 9 – хибна, тому що нерівність 11< 9 – хибна.

Кон'юнкція нерівностей $(a \geq b) \wedge (a \leq c)$ є подвійною нерівністю: в $b \leq a \leq c$. Аналогічно, $(a > b) \wedge (a \leq c) \Leftrightarrow b < a \leq c$,

$$(a \geq b) \wedge (a < c) \Leftrightarrow b \leq a < c$$

Усі розглянуті властивості відношень «менше», «більше» для дійсних чисел переносяться на числові нерівності $A > B$, $C < D$, які є висловленнями, тому над ними можна виконувати логічні операції кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації. Так, нерівність $A \leq B$ є диз'юнкцією $A < B$ і $A = B$: $A \leq B \Leftrightarrow (A < B) \vee (A = B)$

Наприклад, істинно, що (2 · 4 + 15) · 2 ≤ 35 + 19, оскільки значення виразу (2 · 4 + 15) · 2 = 46, а значення виразу 35 +19 = 54 і нерівність 46 < 54 – істинна.

Вираз $A < B < C \Leftrightarrow (A < B) \wedge (B < C)$ – істинний, коли істинні обидві нерівності $A<B$ і $B<C$. Наприклад, істинно, що 16+4<125:5<3·10. Дійсно, значення 16 + 4 = 20; 125 : 5 = 25; 3·10=30. Оскільки 20 < 25 і 25 < 30, то подвійна нерівність істинна.

Вправи для самоконтрою

№1. Порівняти значення числових виразів і поставити один із знаків «>» або «<» так, щоб числова нерівність була правильною:

32,8 : 0,5 + 17 і 53,8 + 12,6 – (17,3 – 4,2)

№2. Записати висловлення у вигляді кон’юнкції або диз’юнкції висловлень і знайти їх значення істинності:

а) $-28 \geq 14$ в) $18 \leq 18$

б) $32 < 24 < 48$ г) $33 < 35 \leq 52$

У підручниках математики для початкових класів розглядаються різні вправи, пов’язані з поняттям нерівності. Так, учням 1 класу пропонуються такі вправи:

1) Порівняй числа 7 і 6; 4 і 7; 7 і 5; 6 і 7.

2) У кожній парі чисел назви більше число 15 і 17; 20 і 19; 1 дм і 10 см; 13 см і 1 дм 5 см.

3) Порівняй значення числових виразів:

$2 \cdot 5 \square 8$ $14 - 5 \square 2 \cdot 5$

$2 \cdot 7 \square 17$ $16 - 8 \square 8 : 2$

4) Добери число, щоб записи були правильними:

$2 \cdot 9 > 12 + \square$ $16 : 2 > 5 + \square$

$3 \cdot 7 < 30 - \square$ $18 : 2 < 7 + \square$

5) Випиши вирази, між якими треба поставити знак «>»:

$40 - 5 \square 35$ $100 - 3 \square 99$

$50 - 2 \square 49$ $40 - 8 \square 31$

$60 - 3 \square 47$ $80 - 8 \square 81$

§ 4. ВИРАЗ ЗІ ЗМІННОЮ, ЙОГО ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ТОТОЖНІСТЬ

Часто зустрічаються вирази, які містять не лише числа, а й букви. Вони називаються ***виразами зі змінною***. З такими виразами діти зустрічаються вже з 1 класу, коли мають справу з виразами, що містять «віконце». Наприклад, завдання з «віконечком»: «Підстав у вираз з «віконцем» $\square + 2$ по-черзі числа 1, 2, 3, 4 і обчисли значення виразу». Фактично діти працюють з виразом зі змінною, для якого вказано область визначення (числа 1, 2, 3, 4). Далі замість віконця у виразі з’являється буква. Після підстановки у вираз зі змінною замість змінної її закінчення одержуємо числовий вираз. Якщо він має числове значення, то говорять, що вираз зі змінною визначено при заданих значеннях змінної.

Наведемо декілька прикладів з підручника математики 2 класу.

1) 8+1 Який доданок не змінюється?
8+2 Який доданок змінюється?
8+3 Позначимо другий доданок буквою «*a*»:
8 + a.
якщо $a = 1$, то $8 + a = 9$;
якщо $a=2$, то $8+a=10$
Знайди $8 + a$ при $a = 3$, $a = 4$.

2) Обчисли:

a	9 +*a*	12 - *a*
1	10	
0		
3		

3) Обчисли значення виразу $a : 6$, якщо $a = 42$, $a = 54$, $a = 0$.

4) Знайди значення суми $a + b$, якщо $a = 16$, $b = 37$.

5) Задача. У шкільному садку *a* яблунь, а груш на *b* менше. Скільки всього яблунь і груш у садку? Запиши задачу виразом і знайди відповідь при $a = 21$, $b = 7$.

У середній школі зустрічаються вирази зі змінними, які містять по декілька змінних. Наприклад, потрібно знайти числове значення виразу $\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^2-18a^4b+2b^5}$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = 0,5$.

Перш за все, необхідно спростити даний вираз, виконавши тотожні перетворення, а потім підставити значення a і b та знайти числове значення виразу:

$$\frac{a(3a^2+b^2)-2b(3a^2+2b^2)}{9a^4(a-2b)-b^4(a-2b)}=\frac{(3a^2+b^2)(a-2b)}{(a-2b)(9a^4-b^4)}=\frac{(3a^2+b^2)}{(3a^2-b^2)(3a^2+b^2)}=\frac{1}{3a^2-b^2}$$

Якщо $a=\frac{1}{3}$, $b = 0,5$, то $=\frac{1}{3\frac{1}{9}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{12}}=12$

Якщо кожну букву у виразі зі змінною замінити її числовим значенням (часто множина значень змінної співпадає з усією множиною дійсних чисел), то одержимо числовий вираз. Якщо він має числове значення, то говорять, що вираз зі змінними визначений при заданих значеннях змінних. А одержане числове значення називають значенням виразу при цих значеннях змінних.

Вираз зі змінною не можна назвати ні висловленням, ні предикатом. Дійсно, про вираз $x + 8$ не можна сказати істинний він чи хибний, тому $x +8$ не є висловленням. А після підстановки замість *x* числових значень одержимо різні числові вирази, значенням яких є деякі числа. Вираз зі змінною позначають так: *ƒ (x), g (x)* або *A(x), B (x,y)*.

Розглянемо на множині всіх дійсних чисел *R* вираз $f(x)=7x^2+x-4$. Яке б дійсне число $x=x_0$ ми не взяли, йому буде відповідати єдине значення числового виразу: $7x_0^2+x_0-4$. Так, при $x = 1$ $f(x) = 4$, а при $x= -5$ $f(x)=166$.

Вираз $\varphi(y)=3y(y-9)$ на множині всіх дійсних чисел при $y=9$ перетворюється на числовий вираз $3\cdot9:(9-9)$, який не має значення, тобто при $y=9$ вираз $3y:(y-9)$ не має сенсу. При всіх інших значеннях змінної $y\in R$ вираз $\varphi(y)$ перетворюється на числовий вираз, значення якого існує.

Вираз $f(x) = \sqrt{x-6}$, заданий на множині всіх дійсних чисел, не має сенсу при значеннях $x < 6$.

Якщо на множині X заданий вираз $f(x)$, то множину значень, які приймає змінна x, щоб вираз $f(x)$ мав сенс, називають ***множиною допустимих значень змінної*** (ОДЗ) або ***областю визначення даного виразу*** *(D(y))*.

Так, областю визначення виразу $7x^2 + x - 4$ є множина всіх дійсних чисел, а множиною допустимих значень змінної у виразі $\frac{3y}{y-9}$ є множина всіх дійсних чисел, крім числа 9; область визначення виразу $\sqrt{x-6}$ - множина дійсних чисел $x\in[6; +\infty]$.

Якщо вираз містить дві змінні x і y, то область його визначення – множина пар чисел $(x; y)$, при яких цей вираз має сенс. Наприклад, область визначення виразу $\frac{15}{x-y}$ складається з усіх пар чисел $(x; y)$, таких, що $x \neq y$.

Іноді область визначення вказується (наприклад, у прикладі з «віконцем»), іноді визначається за сенсом (наприклад, кількість яблунь і груш, про які йдеться в задачі, може бути тільки натуральним числом). Якщо вираз містить 3 букви, то під його областю визначення розуміють множину упорядкованих трійок, таких, що при підстановці їх одержимо числовий вираз, який має значення. Наприклад, область визначення виразу $(3a + в) \cdot \sqrt{c}$ складається з трійок $(a; в; c)$, де $c\geq 0$.

Частіше за все область визначення виразу зі змінною потрібно вміти знаходити. Це неважко зробити, якщо знати певні положення.

Областю визначення виразу з однією змінною $f\ (x)$ є вся множина дійсних чисел, окрім таких випадків:

1. Нехай вираз зі змінною має вигляд $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, тоді $f(x) \neq 0$.
2. Якщо вираз зі змінною має вигляд $\sqrt{f(x)}$, то $f\ (x) \geq 0$.
3. Для виразу $log_{(x)}f(x)$ маємо

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 0 \end{cases}$$

4. У випадку, коли змінна знаходиться під знаком тангенсу: tg($f(x)$, то $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + n$, $n \in Z$; або під знаком катангенсу ctg($f(x)$), то $f(x) \neq \pi n$, $n \in Z$.

<u>Приклад</u>. Знайти область визначення виразу $\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \frac{7}{x+2}$. Оскільки змінна знаходиться під знаком кореня парного степеня та у знаменнику, то $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow (x \geq 1)$

<u>Відповідь:</u> $[1; +\infty)$.

Нам часто доводиться перетворювати вирази зі змінною, тобто замінювати один вираз іншим. При цьому необхідно стежити за тим, щоб область визначення не змінювалась, щоб виконувалися тотожні перетворення.

З курсу середньої школи відомо, що два вирази зі змінною $f\ (x)$ і $\varphi\ (x)$ називаються ***тотожньо рівними***, якщо вони мають однакові значення при будь-яких допустимих значеннях змінних.

До тотожніх перетворень відносять: формули скороченого множення, приведення спільних доданків, розкладання на множники, розкриття дужок, скорочення дробу на вираз, не рівний нулю при допустимих значеннях букв. Наприклад, вираз $\sqrt{a^2}$ і а при $a \in R$ не тотожно рівні, хоча їх області визначення однакові, тому що при $a \leq 0$ перший вираз невід'ємний, а другий вираз – від'ємний.

Тотожно рівні вирази утворюють ***тотожність***. Наприклад, $(\forall a,b)$ $(a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2)$, $(\forall a,b)$ $(a + 2b - 3a = 2b - 2a)$.

У математиці розглядають тотожності, що містять дві, три і більше змінних. Наведемо тотожності, що виражають основні властивості дій над дійсними числами, тотожності скороченого множення.

$(\forall a)\ (\forall b)\ \ (a + b = b + a)$
$(\forall a)\ (\forall b)\ \ (\forall c)\ \ ((a + b) + c = a + (b + c))$
$(\forall a)\ \ (a + 0 = a)$
$(\forall a)\ \ (a + (-a) = 0)$
$(\forall a)\ (\forall b)\ \ (ab = ba)$
$(\forall a)\ (\forall b)\ \ (\forall c)\ ((a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c))$.
$(\forall a)\ \ (a \cdot 1 = a)$
$(\forall a)\ (a \cdot 0 = 0)$
$(\forall a)\ (\forall b)\ \ (\forall c)\ \ ((a + b)\cdot c = ac + bc)$
$(\forall a)\ (\forall b)\ \ ((a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$ і т.п.

Заміну буквеного виразу тотожньо йому рівним називають ***тотожнім перетворенням*** цього виразу. Будь-який вираз, що містить лише одну змінну і операції додавання, віднімання і множення (цілий раціональний вираз від x), можна тотожно перетворити до виду:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Будь-який вираз від x, що містить додавання, віднімання, множення і ділення, можна тотожно привести до виду:

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$$

У підручнику математики для 3 класу поряд з обчисленням значень виразів при певному значенні змінної подані приклади тотожно рівних виразів. Наприклад,вправи виду:

1) Поясни, чому рівні значення виразів при будь-яких значеннях змінної: $a + 15$ і $16 + a$ $\quad 15\cdot(8 \cdot k)$ і $120 \cdot k$
$16 \cdot x$ і $x \cdot 16$ $\quad 3\cdot(b + 8)$ і $3b + 24$

Ці приклади є початковою ланкою в серії завдань на тотожні перетворення в старших класах. Для того, щоб найбільш повно оволодіти поняттям тотожно рівних виразів, пропонуємо такі

Вправи для самоконтролю

№1. Знайди значення виразу, спочатку тотожньо перетворивши його:

$\frac{1}{2x-2} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2x+2}$ при $x = 3$.

№2. Доведи тотожності:

1) $(a^2 + в^2)(x^2 + y^2) = (ax – вy)^2 + (вx + ay)^2$;

2) $\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0$.

№3. При яких значеннях х є тотожностями рівності:

1) $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)} = x + 2$

2) $7x + 5 + \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-8} = 7x + 5.$

§ 5. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ

Відповідності можуть бути задані на різних множинах, тому і функції як окремий випадок відповідності також можуть мати областю визначення і областю значення різні множини.

В курсі математики в основному розглядають числові множини.

Означення. Якщо функціональну відповідність встановлено між елементами числових множин, то таку функцію називають **числовою функцією**.

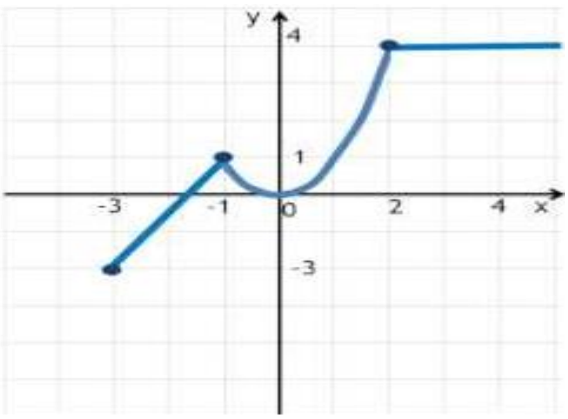
Оскільки числову функцію можна представити як окремий випадок відповідностей між елементами двох множин, то й способи її задання ті ж саме, що й для відповідностей. Найзручніші способи задання числової функції - аналітичний, графічний і табличний.

Аналітичний спосіб передбачає задання функції формулою, що показує, які операції і в якій послідовності виконуються над аргументом x, щоб знайти значення функції $y = f(x)$. Якщо при цьому не вказана область визначення функції $D(y)$, то це означає, що вона співпадає з областю існування формули. Наприклад, для функції $y=\sqrt{1-x}$ $D(y) = (-\infty; 1]$.

Графічний спосіб задання функції самий наочний.

Означення. ***Графіком функції*** $y = f(x)$ називається множина точок (x; y), де $x \in D(y)$, $y = f(x)$.

Найчастіше графік функції $y=f(x)$ являє собою деяку криву у прямокутній системі координат. Наприклад, графік функції, заданої *кусочно*, наведений на мал.49.



Мал.49

$$y = \begin{cases} 2x+3, & -3 \le x < -1 \\ x^2, & -1 \le x < 2 \\ 4, & x \ge 2 \end{cases}$$

Табличний спосіб задання функції - це множина упорядкованих пар *(x; y)*, де $x \in D(y)$, $y=f(x)$.

На практиці при вивченні будь-якого процесу одержують результати у вигляді пар чисел, які записують у таблицю. Наприклад, залежність між вартістю купленої тканини та кількістю купленого матеріалу *x* при постійній ціні за 1 м можна задати за допомогою таблиці:

x	1м	2м	3м	….
y	2 грн.	4 грн.	6 грн.	….

У початковій школі широко використовується *словесний спосіб задання функції*. Розглянемо, наприклад, задачу: «За книгу й ручку заплатили 38 коп. Скільки коштує ручка, якщо книга коштує а) 36 коп.; б) 30 коп.; в) 15 коп.?» Тут кожному значенню вартості книги відповідає своє значення вартості ручки. Позначимо вартість книги буквою x, а вартість ручки буквою y, одержимо $x+y=38$, або $y = 38-x$.

Часто розглядають три величини, одна з яких дорівнює добутку двох інших. Так, наприклад, в початкових класах зустрічаються такі задачі:

- на рівномірний рух (тут шлях дорівнює добутку швидкості на час руху: $S = V \cdot t$);
- на вартість товару, яка дорівнює добутку його ціни на кількість;
- на знаходження периметру правильного n- кутника по довжині його сторони a: $P=a \cdot n$.

Залежність цих величин можна виразити рівністю: $y = x \cdot z$.

Нехай одна із змінних, наприклад z, постійна. Тоді одержимо функцію ***y=kx.*** У цьому випадку говорять, що величина *x прямо пропорційна* величині y. Для того, щоб знайти k - ***коефіцієнт пропорційності***, достатньо знати одну пару $(x_0; y_0)$ відповідних значень x і y, відмінну від пари (0;0). Наприклад, при постійній швидкості (V - const), яка є коефіцієнтом пропорційності, пройдений шлях пропорційний часу руху $(S=V \cdot t)$. Тому, щоб знайти швидкість, достатньо знати пройдений шлях і час руху. Так, якщо автобус за 2 год проїхав 100 км, то його швидкість дорівнює 100:2= 50 (км/год). Тут
$y = 50x$.

Пряма пропорційність - окремий випадок загального поняття лінійної залежності між величинами. Наприклад, нехай потрібно визначити, на якій відстані від пункту А буде знаходитись через x годин автобус, що вийшов з пункту В зі швидкістю 60 км/год, якщо відстань між пунктами А і В дорівнює 30 км. Шукана відстань буде виражатися формулою $y = 60x+30$. Ця формула є окремим випадком формули $y=kx+ b$, яку називають ***лінійною функцією***.

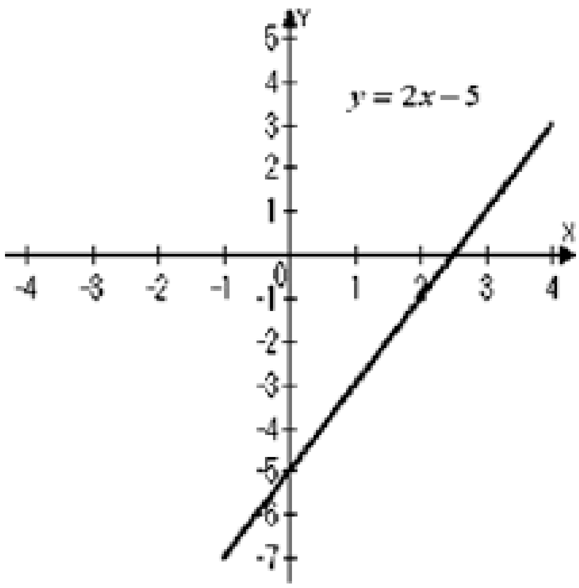
Нехай в рівності y=xz змінна y постійна і дорівнює k. Тоді отримаємо функцію k = xz, з чого маємо $z = \frac{k}{x}$. У цьому випадку говорять, що величини x і z ***обернено пропорційні***, тому що із збільшенням однієї величини в a разів друга величина зменшується у стільки ж разів. Для того, щоб знайти k, достатньо знати одну пару $(x_0;z_0)$ відповідних значень x і z, відмінну від пари (0;0). Наприклад, при постійній відстані (S-const), яка є коефіцієнтом пропорційності, швидкість обернено пропорційна часу проходження цієї відстані ($V=\frac{S}{t}$). Тому відстань, пройдена, наприклад, за 6 год зі швидкістю 60 км/год, дорівнює S=60 · 6=360 км. Цю відстань зі швидкістю 40 км/год буде пройдено за 9 год, а зі швидкістю 90 км/год - за 4 години. Тут $z=\frac{60}{x}$ або $y = \frac{60}{x}$.

Висновки: 1.Якщо дві величини знаходяться ***в прямо пропорційній залежності***, то у скільки разів збільшується (зменшується) одна величина, у стільки ж разів збільшується (зменшується) інша величина.

2.Якщо дві величини знаходяться ***в обернено пропорційній залежності***, то у скільки разів збільшиться (зменшиться) одна величина, у стільки ж разів зменшиться (збільшиться) інша величина.

При розгляді числових функцій часто використовують одночасно усі способи їх задання, що дозволяє більш докладно вивчати властивості функцій.

Приклад 1. Розглянемо лінійну функцію $y = kx+b$. Її графік є пряма лінія, що відсікає на осі 0у відрізок, рівний b, і утворює з додатнім напрямком осі $0x$ кут α , для якого $tg\alpha=k$. Наприклад, для функції $y=2x-5$ $b= -5$, $k=2$ (мал.50). Для лінійної функції $D(y)=R$, $E(y)=R$

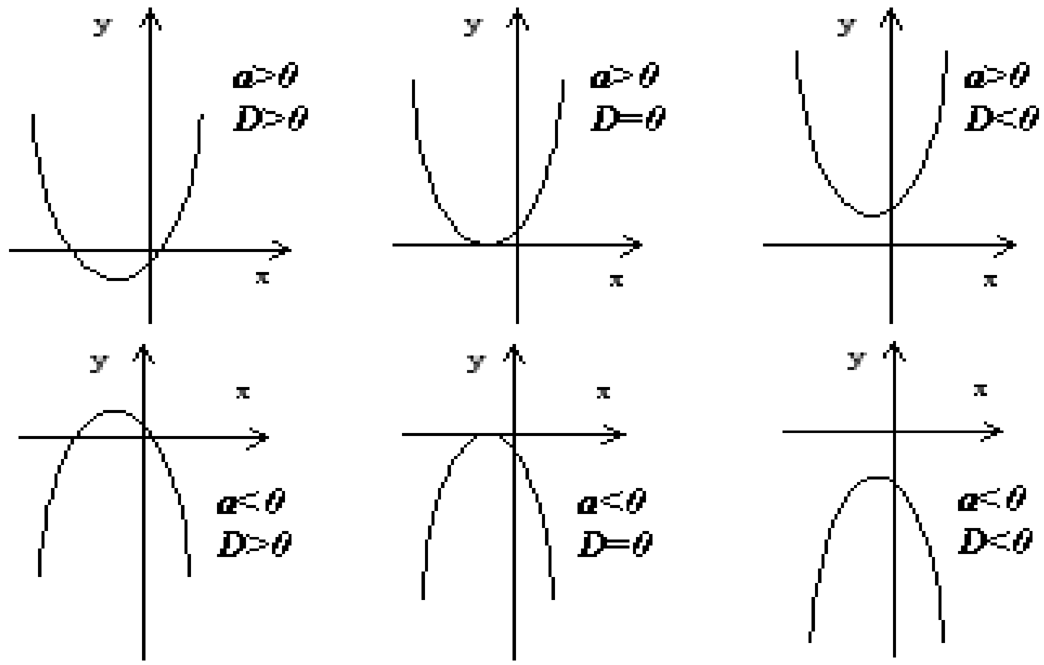


мал.50

Приклад 2. Розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2+ bx+c$. Її графік являє собою параболу з координатами вершини ($-\frac{b}{2a}$; $\frac{b^2-4ac}{4a}$) . Якщо $a>0$, то вітки параболи направлені вгору, якщо $a<0$ - униз.

Якщо $D = b^2-4ac>0$, то парабола перетинає вісь Ох у двох точках (корні функції), якщо $D=0$ – в одній точці, а якщо $D<0$ – не перетинає вісь Ох (немає коренів функції) (мал.51).

Корені функції: $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ і $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$



Мал.51

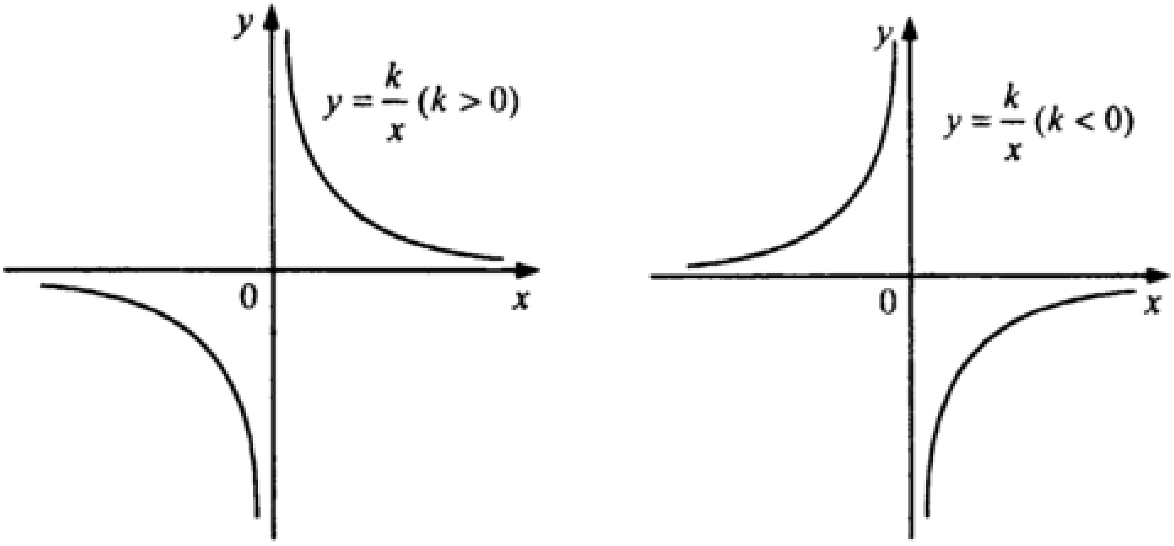
Приклад 3. Розглянемо функцію $y=\frac{k}{x}$.

Очевидно, що D(y) = (-∞; 0) ∪ (0;+∞), E(y) = (-∞; 0) ∪(0; +∞).

Функція непарна, тому що $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$. Тому графік функції симетричний відносно початку координат. Тому досить розглянути функцію для $x \in (0;+\infty)$.

Нехай $x\to\infty$, тоді $y\to 0$; $y\to\infty$ при $x\to 0$; тому $x=0$ і $y=0$ - асимптоти.

Графік функції проходить через точку $(1; k)$. Побудуємо графік функції для $x\in(0;+\infty)$, використаємо властивість непарності для побудови всього графіка функції (мал. 52).



Мал.52

Розділ IV. ВЕЛИЧИНА. ВЛАСТИВОСТІ ВЕЛИЧИНИ.

Величина, так само як і число, є основним поняттям курсу математики початкових класів, в завдання якого входить формування у дітей уявлення про величину як про певні властивості предметів і явищ, які насамперед пов'язані з порівнянням.

Ознайомлення учнів з поняттям величини проводиться за допомогою практичних дій, але при цьому не слід нехтувати науковими засадами. Словом величина можна називати геометричні, фізичні астрономічні та інші величини. Порівнюють, додають і віднімають не величини, а значення величин.

Саме вивчення величин дає можливість показати прикладний характер математики її зв’язок з життям. Метою ознайомлення учнів початкових класів з величинами полягає в усвідомленні сутності кожної величини, формуванні практичних навичок їх вимірювання, засвоєнні одиниць їх вимірювання та співвідношення між ними, виконання арифметичних дій з іменованими числами.

Поняття величини є одним із основних понять, яке використовується у різних науках і навчальних предметах. Загальне поняття величини не підлягає строгому означенню, оскільки часто у різних науках або навіть у різних розділах однієї науки йому надають різного змісту: одні трактують величини як деякі множини, інші - як певні сукупності властивостей множини або як певні властивості деяких функцій тощо.

Крім того, термін «величина» часто використовується в зовсім іншому значенні- як синонім термінів «кількість», «розмір», значення: «величина дробу», «величина об'єму», «абсолютна величина числа», тобто модуль числа, «змінна величина».

Величини можуть бути:

одного роду – ті, що виражають одну і ту ж властивість об'єктів деякої множини;

різного роду (довжина і площа, об'єм і маса) – ті, що виражають різні властивості об'єктів;

скалярні (довжина, площа, об'єм, маса, час, вартість, ціна) – ті, що виражені тільки числовим значенням;

векторні (сила, прискорення) – ті, що виражені не тільки числовим значенням, але й напрямком.

У математиці як науці, величина є поняттям первісним, неозначуваним і подається через систему аксіом на множині однорідних об'єктів. На цій множині вводяться відношення («більше», «менше», «дорівнює») та виконуються властивості додавання (переставна, сполучна), можливість дій віднімання і ділення на n рівних частин, аксіоми Архімеда і Кантора.

Під **величиною** розуміють спільну характеристику множини об'єктів чи явищ матеріального світу, яка набуває кількісно різних значень.

Характеристики, які підводять до розуміння основних величин, є різними: протяжність або існування найменшої відстані між двома точками простору приводить до поняття довжини; займати певну частину площини – до поняття площі; займати певну частину простору – до поняття об'єму, притягуватися до землі – до поняття маси; тривалість події – до поняття часу.

Поняття величини пов'язано з такими поняттями, як *функція вимірювання* та *міра величини*.

Функція вимірювання вважається заданою лише при існуванні множини однорідних об'єктів, залежності між цією множиною і множиною цілих невід'ємних чисел та наявності еталону вимірювання. Наприклад, функцію вимірювання об'єму будемо вважати заданою, якщо є посудина із рідиною, є еталон вимірювання (склянка, банка, стакан тощо) та вказується як слід проводити вимірювання (набирати кожного разу склянку, стакан чи банку повними; переливати в іншу посудину і називати відповідний числівник з натурального ряду чисел; починати лічбу слід з одиниці; закінчити вимірювання, коли у більшій посудині закінчиться рідина).

Операцію встановлення відповідності між елементами класу еквівалентності однорідних величин та множиною цілих невід'ємних чисел множини називають ***вимірюванням***, а величину, для якої існує така відповідність, називають *вимірюваною*.

Числове значення функції вимірювання називається ***мірою величини***. Міра величини – це невід'ємна адитивна функція множини, яка є узагальненням поняття довжини, площі, об'єму, маси, часу. Міра величини є результатом здійснення функції вимірювання і має такі властивості:

- ***властивість додатності***: міра величини існує і вона невід'ємна $m(A) \geq 0$.

Властивість додатності полягає у тому, що при вимірювання величин значення функції вимірювання є натуральним числом або нулем. Прикладаючи початок відрізка з нульовою поділкою, міру довжини знаходимо як число на лінійці, яке співпадає з кінцем відрізка.

- ***властивість інваріантності***: якщо дві величини рівні, то рівні й їх міри ($A=B$), $m(A) = m(B)$.

Інваріантність як властивість міри вказує на те, що однакові якісні характеристики предметів мають й однакові міри величини. Наприклад, при вимірюванні довжини відрізка від початку до кінця чи від кінця відрізка до початку дає однаковий результат. Або вимірювання відрізка від нульової поділки до поділки, що співпадає із кінцем відрізка дає той же результат, якщо вимірювати, користуючись як початком відліку будь-якою поділкою на лінійці. Об'єм рідини не зміниться, якщо наливати його у посудини різної форми. Предмети, які покладені на різні шальки терезів і урівноважують їх, мають однакову масу.

- ***властивість адитивності***: якщо величина A складається з величин B, C, D, то міра величини A рівна сумі мір доданків ($A = B + C + D$), $m(A) = m(B) + m(C) + m(D)$.

Адитивність міри величини є такою властивістю функції вимірювання, яка полягає у тому, що об'єднання множин, що не перетинаються, дозволяє виконувати дію додавання над результатами вимірювання або мірами величини. Так, наприклад, міра об'єму є числом, що знаходимо додаванням кількості окремих мірок (склянки, стакана, банки) при переливанні з однієї в іншу посудину. Довжину відрізка, який має довжину, що на 2см більша за довжину даного відрізка (6см), знаходимо додаванням довжин 2см і 6см. Щоб визначити тривалість двох подій, що слідують одна за другою, необхідно виконати додавання значень тривалості обох подій.

- ***властивість нормованості**:* завжди можна вказати величину серед однорідних величин, яку назвемо одиницею вимірювання: m(A)=e.

Нормованість передбачає існування еталону вимірювання. Еталон вимірювання для кожної із величин є різним. Ним може бути умовна мірка або одиниця вимірювання відповідно до Міжнародної системи СІ (мал.53). У 1960 році 11-ю Генеральною конференцією з мір і вагів Міжнародна система одиниць була рекомендована як практична система одиниць для вимірювання фізичних величин.

Міжнародна система одиниць (СІ) прийнята 1660 р

Фізична величина	Що характеризує	позначення	Одиниці вимірювання		Спосіб вимірювання
		Основні одиниці			
довжина	протяжність	l	метр	м	лінійка
час	Тривалість	t	секунда	с	секундомір
маса		m	кілограм	кг	терези
		Похідні одиниці			
площа	Займати частину поверхні	S	Кв. метр	$м^2$	???
об'єм	Займати частину простору	V	Куб. метр	$м^3$	???

Мал.53

Міжнародна система одиниць складається з набору одиниць вимірювання та набору кратних і часткових префіксів до них (мал.54). Система також визначає стандартні скорочені позначення для одиниць та правила запису похідних одиниць. Так, основними загальноприйнятими одиницями вимірювання є: для довжини – метр;

для маси – кілограм; для площі – квадратний метр; для об'єму – кубічний метр; для місткості — літр.

Серед **характеристик величин** назвемо:

- *порівнюваність*, що вимагає зрілого рівня аналітико-синтетичної діяльності мозку на основі повної та різносторонньої сенсорної інформації;
- *відносність* як закріплення сенсорних еталонів та включення їх до чуттєво-практичного досвіду дитини;
- *транзитивність*, яка полягає в оптичному аналізові, сенсорній чутливості при визначенні співвідношень між величинами;
- *вимірюваність* або практичне використання умовних мірок та одиниць вимірювання.

Найменування	Позначення	Множник
екса	Е	10^{18}
пета	П	10^{15}
тера	Т	10^{12}
гіга	Г	10^{9}
мега	М	10^{6}
кіло	к	10^{3}
гекто	г	10^{2}
дека	да	10^{1}
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
мілі	м	10^{-3}
мікро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
піко	п	10^{-12}
фемто	ф	10^{-15}
атто	а	10^{-18}

Мал.54

Вправи для самоконтролю

№1. Правильно чи ні сформулював учитель завдання:
«*Порівняйте числа: 76 і 40, 25см і 2дм, 100 і 99, 5дм і 1дм*»?

№2. Як правильно прочитати результат вимірювання довжини відрізка 5см :

а) *довжина відрізка дорівнює 5 сантиметрам*

б) *значення довжини відрізка при одиниці сантиметр дорівнює 5;*

в) *довжина дорівнює п'яти;*

г) *даний відрізок складається з 5 сантиметрів ?*

№3. Виконайте дії з іменованими числами:

24м 35см — 18м 6дм   8859м 2дм : 98   9год 28хв · 7

845кг + 24ц 5кг   4дн 6год - 2дн 18год   15р 83дн + 65р 293дн

№4. Виразіть у більших одиницях вимірювання:

395078 кг;   84285хв;   3860217мм;   572680г.

№5. Виразіть у менших одиницях вимірювання:

4т 8ц 12кг;   6м 5см;   2р. 26дн.   35год 18хв

Розділ V. ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

§ 1. ЛОГІЧНА СТРУКТУРА ГЕОМЕТРИЧНИХ ОЗНАЧЕНЬ

В математиці, як й в інших науках, мають справу з поняттями. Вихідні поняття кожної науки не визначаються, а лише описуються їхні властивості.

Серед властивостей об'єкта відрізняють ***суттєві*** і ***несуттєві*** для виділення його серед інших об'єктів. Властивість вважається суттєвою для об'єкта, якщо вона притаманна цьому об'єкту і без неї він не може існувати. Несуттєві властивості – це такі властивості, відсутність яких не впливає на існування об'єкта. Наприклад, властивість «мати чотири вершини» є суттєвою, а властивість «сторона AD квадрата ABCD горизонтальна» є несуттєвою властивістю. Отже, щоб розуміти, що уявляє собою даний об'єкт достатньо знати його суттєві властивості. У цьому випадку говорять про поняття про цей об'єкт.

Будь-яке поняття характеризується *словом* (або словосполученням), *об'ємом* та *змістом*. Під ***об'ємом поняття*** розуміють множину об'єктів, які можна назвати даним словом. Під ***змістом поняття*** розуміють сукупність усіх взаємопов'язаних суттєвих властивостей об'єкта.

Якщо об'єми понять A і B не перетинаються ($A\cap B=\varnothing$), то поняття A і B є *несумісними*. Якщо об'єми понять A і B перетинаються ($A\cap B=\varnothing$), то поняття A і B називаються *сумісними*.

Якщо об'єм поняття A є власною підмножиною поняття B ($A\subset B$ і $A \neq B$), то: 1) поняття A є *видовим* по відношенню до поняття B, а поняття B – *родовим* по відношенню до поняття A;
2) поняття A *вужче* поняття B, а поняття B *ширше* поняття A;
3) поняття A є *частковим випадком* поняття B, а поняття B є *узагальненням* поняття A.

Якщо об’єм поняття А дорівнює об’єму поняття В, то поняття А і В є *тотожними.*

У зміст поняття про будь-який математичний об’єкт входить багато різних суттєвих властивостей цього об’єкта. Однак щоб встановити, міститься чи ні об’єкт в об’ємі даного поняття, потрібно перевірити наявність у нього лише деяких суттєвих властивостей. Зазначення цих суттєвих властивостей об’єкта, які є достатніми для розпізнавання об’єкта, називається ***визначенням поняття*** про цей об’єкт.

Означення – це логічна операція, яка розкриває зміст поняття.

У будь-якому означенні виокремлюють поняття, яке визначається, та поняття, через яке відбувається визначення. Наприклад, розглянемо таке означення:

«*Прямокутником називається паралелограм з прямим кутом*»

поняття, яке визначається   поняття, через яке відбувається дане означення

Способи визначення поняття різні. Одним з видів означень є ***означення через рід і видову ознаку*** (відмінність). Найбільш розповсюдженим означенням математичного поняття є його означення через найближчий рід і видову відзнаку. Формулювання означення поняття через найближчий рід і видову ознаку базується на класифікації, яка полягає в тому, що деяка множина об’єктів розбивається на дві підмножини, що не перетинаються, за допомогою зазначення деякої ознаки, що має ряд об’єкті, а інші об’єкти не мають. Нехай А - деяка множина елементів, тоді введемо певну властивість елементів $P_1(x)$, розіб’ємо множину А на дві множини A_1 та A_2, де $A_1 = \{ x \mid x \in A \wedge P_1(x) \}$ - множина елементів, що мають властивість P_1, і $A_2 = \{ x \mid x \in A \wedge \overline{P_1(x)} \}$ - множина елементів, що не мають властивості P_1, причому $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

Отже, структура таких означень така: в понятті, через яке відбувається визначення даного поняття, вказується 1) родове поняття по відношенню до поняття, яке визначається, 2) та властивість, яка виділяє потрібний нам вид з інших видів даного роду (видову відмінність).

«*Прямокутником називається паралелограм з прямим кутом*»

родове поняття   видова відмінність

Приклад. Сформулювати означення поняття «трапеція», підібравши найближче родове поняття та вказавши видову ознаку поняття «трапеція».

Розв'язання. А - множина плоских чотирикутників. Введемо властивість P_1 - властивість чотирикутника мати одну пару паралельних сторін. Тоді множина А розіб'ється на дві підмножини A_1 та A_2, де A_1 – множина трапецій і A_2 - множина інших чотирикутників - не трапецій, при цьому $A_1 \cup A_2 = A$ і $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

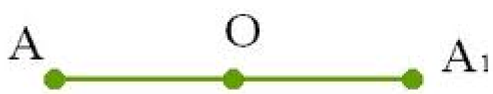
Означення: Трапецією називається чотирикутник, що має одну пару паралельних сторін. Найближчий рід понять для означення трапеції – чотирикутник. Видова відмінність трапеції від чотирикутника - наявність однієї пари паралельних сторін.

§ 2. ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРІЇ.

Геометричні поняття вводяться за допомогою означень, в яких використовуються інші, вже відомі поняття. Наприклад, в означенні «*відрізком АВ називається множина точок прямої, що лежать між точками А і В*» входять поняття «множина», «точка», «між». Дати означення всім поняттям не можна, бо при цьому ланцюг посилань на вже відомі поняття був би нескінченим. Отже, деякі поняття необхідно прийняти без означення. Такі означення називаються *основними* або вихідними.

До основних понять належать основні об'єкти й основні відношення між ними. Основними об'єктами геометрії є точка, пряма і площина.

Елементарні геометричні фігури



Мал.55

Відрізком (мал. 55) називається частина прямої, яка складається з двох даних точок цієї прямої та усіх точок, які лежать між ними (А і A_1- кінці відрізка).

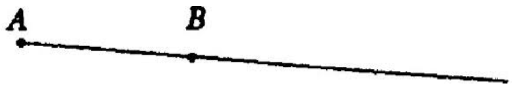
Серединою відрізка називається точка відрізка, яка ділить його навпіл (т. О) (мал.55).

Найважливішою властивістю відрізка є його ***довжина***. Вона виражається додатнім числом, яке може бути визначене порівнянням даного відрізка з відрізком, прийнятим за одиницю вимірювання – одиничним відрізком (1см, 1м, 1дм тощо).

Число, що виражає довжину відрізка, залежить від обраної одиниці вимірювання. Довжину відріз AA_1 називають ***відстанню*** між точками А і A_1.

Будь-яка точка розбиває пряму на дві напівпрямі (променя).

Променем називається частина прямої (мал.56), що складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від деякої даної на ній точки, а також самої цієї точки (т. А – початок променя).



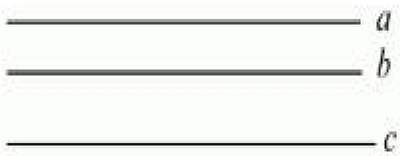
мал.56

Два різних променя однієї прямої із спільним початком називаються *доповнювальними променями*.

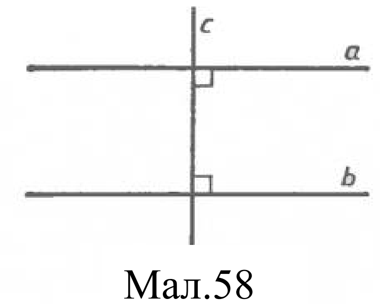
Дві прямі на площині називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються. Отже, можна виділити два випадки взаємного розміщення прямих на площині: вони або перетинаються або є паралельними. Дві прямі називаються **перпендикулярними,** якщо вони перетинаються під прямим кутом.

<u>**Теорема.**</u> Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою ($a \| c$, $b \| c \Rightarrow a \| b$) (мал.57)

<u>**Теорема.**</u> Дві прямі, перпендикулярні третій, паралельні ($a \perp c$, $b \perp c \Rightarrow a \| b$) (мал.58).

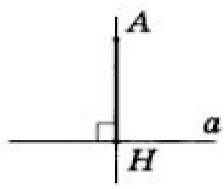


мал.57



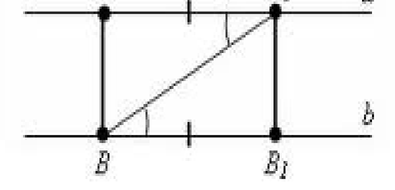
Мал.58

Відстань від точки А до прямої а – це довжина перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму *а* (мал.59).



Мал.59

<u>**Теорема.**</u> Через будь-яку точку площини можна провести пряму, перпендикулярну даній прямій, і тільки одну (мал.59).

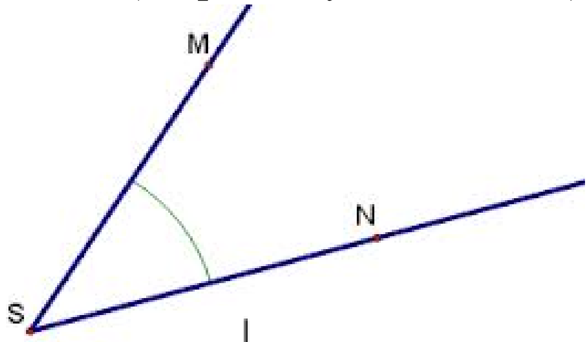


Мал.60

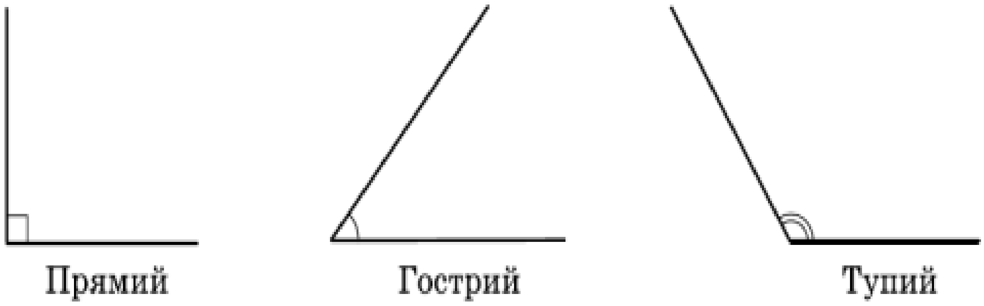
Відстань між двома паралельними прямими – це відстань від будь-якої точки однієї з цих прямих до іншої прямої. <u>**Теорема.**</u> Відстані між будь-якими двома точками прямої до паралельної прямої рівні ($AB=A_1B_1$) (мал.60).

Кутом називається геометрична фігура, яка складається з двох променів (сторони кута SN і SM), що виходять з однієї точки (S – вершина кута) (мал.61). Сторони кута ділять площину на дві частини.

Кути поділяються на гострі, тупі й прямі (мал.62).



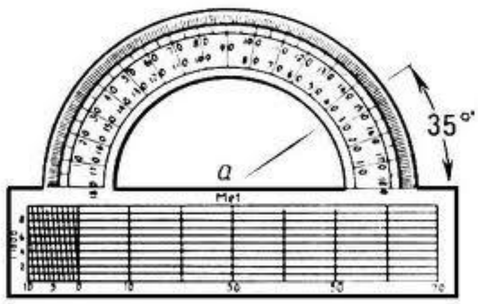
мал.61



мал.62

Вимірювання кутів має багато спільного з вимірюванням відрізків.

Міра кута є додатнім числом, яке можна визначити вимірюванням, яке основане на порівнянні даного кута з кутом, прийнятим за одиницю вимірювання. Такою одиницею є 1 градус (1°) – кут, який дорівнює $\frac{1}{180}$ частині розгорнутого кута. Градусна міра вказує, скільки кутів величиною в 1° та їх частин міститься в даному куті. Для вимірювання кутів зазвичай використовують *транспортир*, (мал.63), поділки якого задають міру кута у градусах.



Мал.63

Система аксіом геометрії

Висловлення, які приймаються в геометрії без доведення як вихідні, називають ***аксіомами геометрії***. Істинність усіх інших висловлень доводять (це ***теореми***) послідовним міркуванням без використання інтуїції та дослідних даних.

Логічна побудова геометрії полягає в тому, що:

а) перелічуються основні геометричні поняття (об’єкти та відношення між ними);

б) за допомогою основних понять визначаються усі інші геометричні поняття;

в) формулюються аксіоми;

г) на основі аксіом та означень понять доводяться наступні геометричні твердження.

Метод побудови геометрії за такою схемою називається ***аксіоматичним***, оскільки в ньому істотну роль для умовиводів відіграють аксіоми.

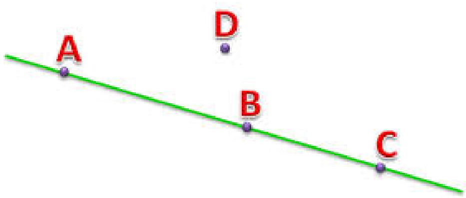
Отже, оскільки геометричні поняття і твердження мають абстрактний характер, то всю геометрію можна побудувати логічно, спираючись на невелику кількість основних понять і аксіом. Аксіоми, які розкривають зміст певного поняття, об'єднують в одну групу (аксіоми належності, аксіоми порядку та ін..).

Для логічної побудови однієї й тієї самої геометрії можна скласти різні сукупності аксіом як за кількістю, так і за змістом, залежно від вибору основних об'єктів геометрії. При цьому важливо, щоб сукупність аксіом утворювала систему аксіом.

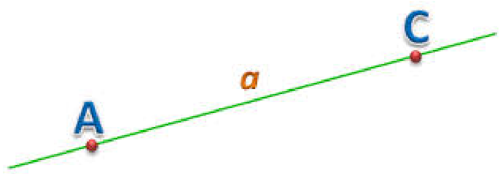
Системою аксіом називають таку сукупність аксіом, яка задовольняє *умовам*: несуперечності, незалежності та повноти.

Розглянемо систему аксіом геометрії О.В. Погорелова.

Аксіома1 (*аксіома належності точок прямій*). Яка б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які їй не належать (мал.64). Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну (мал.65).



мал.64



мал.65

Аксіома 2 (*аксіома порядку*). З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими (мал.64).

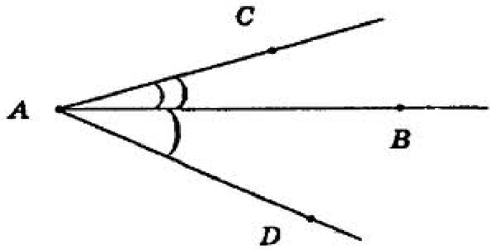
Аксіоми вимірювання і відкладання відрізків

Аксіома 3. Кожний відрізок має певну додатню довжину. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин, на які він розбивається будь-якою його точкою (наприклад, на мал.64 AC=AB+BC).

Аксіома 4. На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один.

Аксіома 5. Пряма розбиває площину на дві напівплощини.

Аксіоми вимірювання і відкладання кутів



Аксіома 6. Кожний кут має певну додатню градусну міру. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (наприклад, на мал.66 $\angle CAD=\angle CAB+\angle BAD$).

мал.66

Аксіома 7. Від будь-якого променя в задану напівплощину можна відкласти кут з заданою градусною мірою, меншу 180°, і тільки один.

Аксіома 8 (*аксіома Евкліда*) Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше однієї прямої, паралельної даній.

Аксіома 9. Який би не був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розміщенні відносно даної напівпрямої.

Вправи для самоконтролю

№1. Накресліть три об'єкта, які належать об'єму поняття:

а) геометрична фігура; б) прямокутник; в) квадрат; г) ромб.

№2. Назвати п'ять суттєвих властивостей поняття: а) трикутник; б) прямокутник; в) трапеція.

№ 3. Які з вказаних понять:

а) є сумісними чи несумісними:

1) поняття «додатній» і «від'ємний» для чисел;

2) «гострий» і «тупий» для кутів ?

б) є частковим випадком іншого, а яке є узагальненням:

1) «рівносторонній трикутник» і «прямокутний трикутник»;

2) «рівносторонній трикутник» і «правильний багатокутник»;

3) «рівносторонній трикутник» і «рівнобедрений трикутник»;

в) є рівносильними:

1) «правильний чотирикутник» і «ромб»;

2) «правильний чотирикутник» і «квадрат»;

3) «рівнокутний чотирикутник» і «ромб»;

4) «рівнокутний чотирикутник» і «прямокутник».

№ 4. Вказати логічні помилки, відкинути зайві слова або додати необхідні слова в таких означеннях:

1) «промінь є пряма, обмежена з однієї сторони»;

2) «відрізком називається пряма, обмежена з двох боків»;

3) «відрізком називається множина точок прямої, сума відстаней яких від точок А і В цієї прямої дорівнює відстані між точками А і В»;
4) «січною називається нескінчена пряма, яка проходить через будь-які дві точки кола»;
5) «квадратом називається прямокутник, діагоналі якого рівні між собою і ділять одна одну навпіл»;
6) «ромбом називається паралелограм, у якого сторони рівні, а діагоналі взаємно перпендикулярні»;
7) «геометрична фігура називається колом, якщо усі її точки рівновіддалені від даної точки»;
8) «пряма називається дотичною до кола, якщо вона має з ним одну спільну точку»;
9) «діагоналлю багатокутника називається відрізок, який з'єднує вершини багатокутника».

№5. Правильно чи ні стверджувати, що об'єм поняття «прямокутник» більше, ніж об'єм поняття «квадрат» ? Який зв'язок існує між змістами цих понять ?

№6 У поданих означеннях виділити поняття, що визначається, родове поняття та видову відмінність:
а) «прямі називаються паралельними, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються»;
б) «трикутник називається рівнобедреним, якщо хоча б дві його сторони рівні»;
в) «значення змінної, що перетворює рівняння в істинну рівність, називається коренем рівняння»;
г) «відрізок, який з'єднує середини двох сторін трикутника, називається його середньою лінією».

№7 Розташуйте подані поняття так, щоб кожне наступне було родовим по відношенню до попереднього: «опуклий багатокутник», «пласка фігура», «паралелограм», «опуклий чотирикутник», «квадрат», «плаский багатокутник», «прямокутник», «геометрична фігура».

№8 Визначити співвідношення між об'ємами за допомогою діаграм Ейлера-Венна між такими поняттями: «багатокутник», «трикутник», «прямокутний трикутник», «рівнобедрений трикутник», «рівносторонній трикутник», «призма».

№9 Зобразити за допомогою кругів Ейлера-Венна відношення між об'ємами таких понять:
а) А:"ціле число", В:"натуральне число", С:"від'ємне число";
б) А:"дерево", В:"рослина", С:"кущ";

в) А:”квадрат”, В:“ромб з прямим кутом”.

№ 10 Назвати поняття, яке є родовим по відношенню до такої групи понять: а) квадрат, трапеція, ромб; б) круг, коло, многокутник, відрізок; в) дерева, кущі, трави.

№11. Вказати найближче родове поняття для поняття:
а) прямокутник; б) відрізок; в) непарне число; г) коло.

№12 З’ясуйте, в яких з наведених випадках істинне висловлення «поняття В є узагальнення поняття А»:
а) А:”відрізок”, В:“пряма”;   г) А:”коло”, В:“круг”;
б) А:”промінь”, В:“пряма”;   д) А:”прямокутник”, В:“паралелограм”.
В)А:”птах”, В:“тварина”;

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М., Мурач М.М., Соколенко О.И. Курс математики: навч.посіб. Київ: Вища школа, 1995. 392с.

2. Іонова О.М., Масюк О.М., Титаренко Л.І., Білецька С.А. Математика: множини та операції над ними. Методичні рекомендації до практичних занять з математики: ХНПУ ім. Г.С.Сковороди, 2022. – 36. URL: https://dspace.hnpu.edu.ua/handle/123456789/7918

3. Іонова О.М., Масюк О.М., Титаренко Л.І., Білецька С.А. Математика. Частина І. Навчальний посібник.: ХНПУ ім. Г.С.Сковороди, 2022. 106с. URL: https://dspace.hnpu.edu.ua/handle/123456789/7920

4. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики. Київ: Вища школа, 1987. 318с.

5. Левшин М.М., Лодатко Є.О. Математика: навч.посіб. В 3-х ч. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2012. Ч.І. 264с.

Додаткова

1. Зуб О. М., Коберник Г.І., Нещадим А.Ф. Математика: посіб. Для студ. Пед. Факультетів. Київ: Науковий світ, 2000. 417 с.

2. Рябчинская В.Д., Ионова Е.Н, Курбаров С.Г. Натуральные числа и операции над ними: метод.реком. Харьков, 1992. 24 с.

3. Рябчинська В.Д., Іонова О.М, Карпова В.О., Курбаров С.Г. Організація самостійної роботи з математики при вивченні теми: «Цілі невід'ємні числа»: метод.реком. Харків, 1994. 23 с.

4. Рябчинська В.Д., Фещенко Т.І., Захарова Г.М. Натуральні числа, алгебраїчні операції, методика їх формування. Ч.І: метод.реком. Харків, 1991. 30с.

5.Рябчинская В.Д., Гусева Т.К., Карпова В.А. Общие математические понятия: метод.реком. Харьков, 1989. 47 с.

6. Рябчинська В.Д., Любченко А.Г. Організація самостійної роботи з математики при вивченні тем: «Множини» і «Математичні твердження»: метод.реком. Харків, 1990. 25 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Сінопальнікова Н.М.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск: Титаренко Л.І.

Комп'ютерна верстка: Масюк О.М.

Коректор: Сінопальнікова Н.М.

Відповідальність за дотримання вимог академічної доброчесності несуть автори

Підписано до друку Формат Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний. Ум. друк. арк.

Обл.-вид. арк. Зам № Тираж прим. Ціна договірна.

Відомості про видавництво