УДК 378.147

І. Г. Яловега, М. В. Сидоров, Д. О. Гончаров

СКЛАДНІ ПРОЦЕНТИ ТА ЧИСЛО e - МЕТОДОЛОГІЯ МІЖДИСЦИПЛІНАРНОГО ЗВЯ'ЗКУ МАТЕМАТИКИ ТА ЕКОНОМІКИ

В статті розглядається економічне застосування фундаментального математичного поняття – числа e. На основі історичних фактів виникнення числа e в процесі розв'язання економічної задачі, виділено методологічні особливості вивчення поняття експоненціальної константи як важливого застосування при розрахунках складних процентів. Розглянуто проблему недосконалого з точки зору відсутності прикладів економічних застосувань процесу викладання основ математичного аналізу студентам ВНЗ. Запропоновано доповнення усталеного плану викладання курсу математичного аналізу економічним змістом експоненціальної константи. Включення прикладів нарахування складних процентів до теми «Число e» має надати студентам наочності та довести прикладну значущість однієї з найважливіших констант математики.

Ключові слова: *складний процент, число e, експоненціальна константа, економічний зміст числа e, математичний аналіз.*

В статье рассматривается экономическое применения фундаментального математического понятия – числа e. На основе исторических фактов возникновения числа в процессе решения экономической задачи выделено методологические особенности изучения понятия экспоненциальной константы как важного применения при расчетах сложных процентов. Рассмотрена проблема несовершенного с точки зрения отсутствия примеров экономических приложений процесса преподавания основ математического анализа студентам вузов. Предложено дополнение устойчивого плана преподавания курса математического анализа экономическим содержанием экспоненциальной константы. Включение примеров начисления сложных процентов к теме «Число» должен предоставить студентам наглядности и доказать прикладную значимость одной из важнейших констант математики.

Ключевые слова: *сложный процент, число e, экспоненциальная константа, экономический смысл числа e, математический анализ.*

The article deals with the economic use of the fundamental mathematical concepts – numbers e. Based on the historical facts of occurrence of numbers in the process of solving the economic problems highlighted methodological features of the study of the concept of exponential constant as an important application in the calculation of compound interest. The problem of imperfect in terms of lack of

https://orcid.org/0000-0002-3777-6393, https://orcid.org/0000-0001-8022-866X, https://orcid.org/0000-0002-7069-5739

examples of economic applications of the process of teaching the basics of mathematical analysis for students of universities. Proposed addition sustainable plan of teaching a course on mathematical analysis of the economic content of the exponential constant. The inclusion of examples of compounding interest to the theme of "number e " should provide students with clarity and show the importance of the application of one of the most important constants in mathematics.

Keywords: *compound interest, the number e, exponential constant, the economic meaning of numbers e, mathematical analysis.*

Постановка проблеми. На теперішній час економічна грамотність стає вкрай необхідною для кожної людини, сучасність потребує орієнтуватись в багатьох економічних поняттях, навіть у тих, які раніше вважалися вузько спеціальними. Особливо це торкається понять банківської сфери, таких як вклад, прості та складні проценти, процентний дохід, капіталізація процентів, тобто тих понять, які увійшли в життя кожного. Говорять, що коли Альберта Ейнштейна запитали про найбільш значне відкриття усіх часів, він з іронією відповів: «Складний процент». Можливо це лише байка, але багатьом би бажалось почути таку відповідь. Складний процент є важливою складовою сучасної банківській системи. В той час як складний процент фігурує практично у кожному фінансовому продукті, з математичної точки зору він є гарним практичним роз'ясненням сутності одного з найважливіших математичних понять – числа e.

При банківських розрахунках неможливо обійтися без знань вищої математики. При викладанні курсу вищої математики, а саме основ математичного аналізу, у студентів виникають багато питань стосовно важливого з будь-яких сторін числа e. Число e називають експоненціальною константою, числом Ейлера або числом Непера, воно є основою натурального логарифму, ірраціональним та трансцендентним числом. Незважаючи на те, що показникова та експоненціальна функції входять до шкільної програми з математики, студенти перших курсів навчання не до кінця розуміють значущість та можливості застосування числа e будь де, окрім математичних задач. В шкільних підручниках багато недоведених тверджень та скорочено наведених місць, що обумовлюється складністю теми. Скупість класичного підходу викладання і у вищих навчальних закладах залишає провали в розумінні сутності цього незвичайного числа. Так, якщо студенти математичних спеціальностей стикаються з числом e впродовж всіх років навчання в різних математичних дисциплінах та мають змогу ознайомитись не тільки з його застосуванням, а також з історією виникнення цього числа, то студенти економічних спеціальностей часто не до кінця розуміють навіщо число e взагалі потрібне. В той час, коли саме економічний зміст числа e може стати гарною ілюстрацією значущості цієї константи.

Аналіз актуальних досліджень. Вивчення математичних дисциплін на нематематичних спеціальностях проходить на перших двох курсах, часто відірвано від навчальних дисциплін спеціалізації, в яких студенти мали б змогу оцінити значущість розглянутих математичних понять [9, с. 86-89]. В той же час і на математичних спеціальностях економічним застосуванням фундаментальних понять не приділяється належної уваги. Викладачу вищої математики часто доводиться стикатися із запитаннями «Навіщо це потрібно? Як воно нам стане у пригоді?». Відповіді на подібні запитання стають темами досліджень багатьох науковців, викладачів та методистів. Проблема методологічних особливостей викладання теми «Число e» та складності розуміння цього незвичайного числа розглядалась багатьма науковцями. Пропонувалися різні підходи до введення цього поняття. Так, в класичному курсі математичного аналізу число e традиційно визначається як границя $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ [1, с. 47; 6 с. 86-87; 7 с. 78-79, 12 с. 76-77]. В деяких курсах число e визначається як сума ряду або у вигляді нескінченого цепного дробу [8, с. 114; 13, с. 146]. Рідко, але зустрічається, визначення числа e при дослідженні диференційованості показникової функції, оминаючи визначення через границю [5, с. 198]. В іноземних курсах математичного аналізу також існують нестандартні прийоми визначення числа e [15, с. 96-99].

В. Г. Болтянський в своїй роботі виділяє важливість зв’язку числа e з диференціальними рівняннями, обґрунтовує значущість експоненціальної константи її фізичним змістом [3, с. 20-24]. В статті А. М. Фрумкіна пропонується альтернативна схема визначення числа e, виходячи з його характерної властивості [14, с. 23-31]. Більшість робіт зосереджено на суто математичному визначенні числа e, що ніяк не вирішує проблеми опанування сутності та розуміння важливості застосувань цього надзвичайного числа. Історичний аспект, а саме економічний зміст числа e найчастіше залишається без належної уваги, лише в деяких підручниках після класичного визначення в якості приклада приводиться економічне застосування [10, с. 157-161]. У книзі відомого американського математика М. Гарднера «Математические досуги» приділено увагу історичному аспекту виникнення числа e та подальшому розвитку його дослідження, наведено багато прикладів економічних, фізичних та ймовірнісних задач на застосування числа e [4, с. 121-129]. Сучасний математик А. Беллос, який «закоханий у числа», в своїй книзі «Красота в квадрате» багато уваги приділяє саме методам донесення складних математичних понять. З числом e він знайомить читача через історію його виникнення, подальшого розвитку та приклади цікавих задач [2, с. 116-141].

Мета статті. Поняття проценти вперше зустрічається в шкільній програмі з математики. У вищих навчальних закладах, в залежності від напряму спеціалізації навчання, це поняття та його похідні, вивчаються починаючи з другого курсу. У той час, як число e, що історично виникло саме при дослідженні складних процентів, з’являється в курсі вищої математики або математичного аналізу вже на першому курсі, тому вкрай важливо приділити увагу до міжпредметного зв’язку двох важливих фундаментальних понять економіки та математики. Студенти вперше стикаються з числом e при вивченні теорії границь, спочатку в границях послідовностей, а потім в границях функцій при вивченні першої та другої чудових границь. Опит показує, що дана тема з точки зору опанування техніки знаходження границь не доставляє багато труднощів, але просте запитання студенту про сутність числа

e заганяє його у кут. Перед викладачем постає задача роз'яснити студентам, особливо економічних спеціальностей, важливість та застосування числа e у житті, та, насамперед, в економіці вже на перших заняттях ознайомлення з цим числом. Доцільним буде доповнення усталеного роками викладання математичного аналізу важливим економічним застосуванням фундаментального математичного поняття числа e, до того ж, пов'язане з числом e поняття складного проценту є базовим в економіці.

Виклад основного матеріалу. Два нерозривно пов'язані фундаментальні поняття економіки та математики – складні проценти та число e, зародилися одночасно та протягом часу зайняли окремі важливі місця в науці та житті. Складний процент став основою глобальної фінансової системи, а число e глибоко проникло у всі математичні дисципліни та стало фундаментальним поняттям математики. Історичний аспект, щодо цих двох тісно пов'язаних понять, повинен обов'язково бути включеним до вивчення курсу вищої математики. Так, число e інколи називають неперовим, на честь шотландського вченого Джона Непера (1550 – 1617 рр.), автора праці «Опис дивовижної таблиці логарифмів» (1614 р.). Вважається, що вперше число e було обчислено Якобом Бернуллі (1655 – 1705 рр.) в процесі розв'язання задачі про максимальний дохід. Саме вивчення складного проценту привело до відкриття цієї важливої константи. Процентний дохід – це дохід, що отримується власником грошових коштів від надавання їх на деякий час іншим економічним суб'єктам, тобто представляє собою компенсацію, що виплачується за використання фінансових коштів. Якщо простий процент – це конкретна сума грошей, яка нараховується на первинну суму та залишається незмінною на кожному черговому періоді виплати процентів, то у випадку складного проценту сума процентних платежів розраховується за кожний черговий період враховуючи нараховані проценти, тобто на накопичену суму. Безумовно, в роки перших згадок числа e неможливо було передректи, що це відкриття стане важливою складовою сучасної банківській системи. В 1690 році Я. Бернуллі вперше опублікував дослідження складного проценту, в якому обґрунтував існування граничної вигоди, яку визначив як більшу ніж 2,5, але меншу ніж 3. Я. Бернуллі показав, що якщо частоту нарахування процентів нескінченно збільшувати, то процентний дохід у випадку складного процента має граничне значення. Шляхом декількох наближень, він, по суті, шукав границю послідовності

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ,$$

яка дорівнює числу e. Таким чином, константа e означає максимально можливий річний прибуток при 100% річних та максимальній частоті капіталізації процентів (капіталізація процентів – додавання процентів до суми вкладу, що дозволяє начисляти проценти на проценти).

Букву e почав використовувати Леонард Ейлер (1707 – 1783 рр.), першою публікацією, що містить букву e, була його робота «Механика, или Наука о движении, изложенная аналитически» (1736 р.). Відповідно, e зазвичай називають числом Ейлера. Існує декілька думок стосовно, чому саме буква e була обрана для означення. Можливо, це слідує з того, що з букви e починається слово exponential («показниковий», «експоненціальний»), або тому що букви a, b, c, d вже доволі часто використовувались в інших цілях, і e була наступною незайнятою буквою, а можливо, причиною стало те, що буква e є першою в фамілії Л. Ейлера (Euler). І хоча константа e була відома ще з років Дж. Непера та Я. Бернуллі, саме Л. Ейлер зробив настільки глибоке дослідження цієї важливої величини, що з тих пір вона носить його ім'я.

Кредитори здавна надають перевагу складному проценту ніж простому. Причиною привабливості складного проценту у банківській справі є збільшення суми в геометричній прогресії. Римляни засуджували нарахування складного проценту, бо вважили його найгіршою формою лихварства. Але глобальна фінансова система опирається саме на таку практику. Саме так розраховуються залишки на банківських рахунках, проценти за кредитним карткам та платежі за іпотечні кредити. Складний процент виявився головним каталізатором економічного зростання с самого початку розвитку нашої цивілізації. Складний процент фігурує практично у кожному фінансовому продукті, а кожен розрахунок неперервного нарахування проценту включає число e. Можна сказати, що експоненціальна константа – це ключова величина, від якої залежить вся фінансова система.

Фундаментальний характер числа e ясніше за все виявляється при вивченні зростання будь-якої величини. Але не тільки гроші гарно ілюструють експоненціальне зростання. Багато важливих фізичних, біологічних та інших процесів, таких як швидкість ядерної цепної реакції, поширення хвороб, розмноження мікроорганізмів, збільшення інтернет-трафіку та ін., теж математично моделюються за допомогою числа e. У експоненціального зростання є свій антипод – експоненціальне зменшення, в ході якого величина зменшується в одній і той же пропорції. Так, різниця між температурою гарячого чаю та температурою чашки, в яку він налитий, зменшується за експоненціальним законом. Теж саме можна сказати про зниження атмосферного тиску при сходженні на гору.

Однією з перших появ експоненціальної константи в області, що не має очевидного зв'язку з експоненціальним зростанням, стало відкриття Ейлера щодо значущості числа e в теорії ігор. Незвичайна задача з теорії ймовірностей про стратегію вибору дружини (або секретаря) у розв'язку містить константу e. Одним з перших і дуже важливим застосуванням числа e у фізиці, а точніше в механіці, стало розв'язання питання, що було поставлене Я. Бернуллі, про геометричну форму частки шпагату, який закріплений за обидва кінці, та звисає під власною масою. Геометрична крива, що відповідає описаній в питанні матеріальній кривій, була названа цепною лінією, вона може описувати і провисання електричного кабелю, і намиста, і скакалки та ін.

На рівні університетської освіти число e займає домінуюче місце. Число e – трансцендентне, тобто воно не може бути коренем будь-якого алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами. Цей факт було доведено у 1873 році французьким математиком Шарлєм Ермітом (1822 – 1901 рр.), значно пізніше за відкриття числа e. Таким чином, число e неможливо не тільки представити у вигляді десятинного дробу, для чергування десятинних знаків якого відомий деякий закон, але і виразити за допомогою алгебраїчного виразу, що містить скінчене число радикалів з цілих чисел. Не існує і способу побудови відрізка, довжина якого би виражалася числом e. Число e можна записати у вигляді нескінченого цепного дробу (відкриття Л. Ейлера):

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\ldots}}}}}.$$

Розклавши за степенями вираз $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ отримаємо добре відомий нескінчений ряд, сума якого дорівнює e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.$$

Перші двадцять знаків числа e після коми мають наступний вигляд:

$$e = 2,48281828176353254095...$$

Можливості сучасних комп'ютерів дають змогу обчислювати мільйони знаків після коми числа e.

Але повернемося до економічного змісту експоненціальної константи – складного проценту, туди, звідки вперше виникло це важливе число e. Тема «Складний процент» дуже цікава для студентів та с точки зору розуміння економічного змісту не викликає багатьох питань при опануванні [11, с. 26]. Саме при вивченні складного проценту студенти стикаються із застосуванням числа e. Дуже важливо на заняттях з вищої математики, тобто до вивчення зазначеної теми в економічних дисциплінах, зупинитися на цьому застосуванні числа e та чітко роз'яснити природу виникнення цієї константи при нарахуванні складного проценту. Класична задача про зростання вкладу стає гарною передмовою перед визначенням числа e.

Задача про зростання вкладу. Припустимо, що банк пропонує вкладнику складний процент, який полягає в тому, що після кожного нарахування процентів капітал збільшується, та у наступний раз процент нараховується на суму, що була отримана після збільшення капіталу. Позначимо первинний капітал через 1 у. о. Якщо річний складний процент дорівнює a, то через n років капітал становить:

$$b(n) = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n$$

Зрозуміло, що якщо банк не змінював би своїх умов протягом багатьох років, то 1 у. о. через 1000 років дала б капітал

$$b(1000) = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{1000} \text{ у.о.}$$

Якщо визначити достатньо «скромно» складний процент, що дорівнює 1%, тобто

$$a = 1,$$

то через 1000 років отримуємо суму:

$$b(1000) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{1000} = 1{,}01^{1000} \approx 25000 \text{ у.о.,}$$

а через 2000 років вже

$$b(2000) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{2000} = 1{,}01^{2000} \approx 700000000 \text{ у.о.}$$

Однак, це фантастичні припущення, бо такий довгий термін не цікавить вкладника, крім цього, банки за різних причин припиняють своє існування набагато раніше 1000 років. Тому в рекламних цілях деякі банки пропонують нарахування складного проценту не один раз на рік, а декілька разів. Позначимо через m число нарахувань банком складного проценту на рік. Тоді за один рік сума вкладу становить

$$c(m) = \left(1 + \frac{a}{100m}\right)^m .$$

Ця величина для будь-якого m не перебільшує

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{100m}\right)^m = e^{\frac{a}{100}}.$$

Для наочності розглянемо декілька різних процентних ставок. Так, якщо $a=50$, тобто складний процент дорівнює 50%, в залежності від числа нарахувань m, за рік після внесення 1 у. о. на рахунку матимемо (з точністю до четвертого знаку після коми):

m	$c(m)$
1	1,5
2	1,5625
3	1,5878
4	1,6018
5	1,6105

Якщо визначити $a=100$, то за рік після внеску 1 у. о. на рахунку будемо мати (з точністю до четвертого знаку після коми):

m	$c(m)$
1	2
2	2,25
3	2,3704
4	2,4414
5	2,4883

Враховуючи оцінку

$$c(m)\le e^{\frac{a}{100}}$$

маємо для $a=50$:

$$c(m)\le e^{\frac{1}{2}}$$

де $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1{,}6487$, тобто навіть для великого числа нарахувань на рік, неможливо зробити первинний капітал 1 у. о. більше ніж 1,6487, що відповідає 65% відсоткам від первинної суми.

Для $a = 100$:

$$c(m) \le e,$$

тобто у цьому випадку за рік сума не може перевищити в точності числа e, як би ми не збільшували число нарахувань складного проценту. Можна сказати, що при неперервному нарахуванні процентів протягом року, тобто при $m \to \infty$, 1 у. о. наприкінці року становить величину

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e \text{ (у.о.)}.$$

Висновки та перспективи подальших досліджень. Доповнення лекційного матеріалу історичними фактами та важливими застосуваннями істотно впливає не тільки на краще розуміння нового матеріалу, а ще й направляє студентів на самостійне занурення в сутність часто до кінця не зрозумілих понять. Задача викладача виявити і донести до студентів ті тонкощі і цікаві факти, які зможуть зробити важливі фундаментальні математичні поняття, такі як і число e, доступними і зрозумілими, не тільки стосовно техніки обчислень та розв'язання задач, але і безпосередньо їх застосування в різних процесах, навіть при визначенні стратегії обирання дружини. Говорять, що «число e лежить в основі капіталізму, каталонської архітектури та пошуку супутника життя».

В статті виділено важливість наведення в процесі викладання економічного змісту експоненціальної константи при її визначенні, тобто при першій появі її в курсі вищої математики або математичного аналізу, але економічний зміст виявляється і в подальшому навчанні, в більш складних економіко-математичних моделях. Це також потребує більш тонкого та глибокого дослідження щодо можливостей перегляду усталеної методики викладання з ціллю занурення в прикладну економічну значущість фундаментального математичного поняття числа *e* та осучаснення вищої освіти.

Література

1. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков – М.: Высш. шк., 2000. – 696 с.
2. Беллос А. Красота в квадрате. Как цифры отражают жизнь и жизнь отражает цифры / А. Беллос – М.: «Манн, Иванов и Фербер», 2015. – 259 с.
3. Болтянский Г. П. Экспонента / Г. П. Болтянский // Научно-популярный физико- математический журнал «Квант» МЦНМО – 1984. – № 10 – С. 20–24.
4. Гарднер М. Математические досуги / М. Гарднер – М.: Мир, 1972. – 496 с.
5. Дьедонне Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне – М.: Мир, 1964. – 431 с.
6. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I / В. А. Зорич – М.: ФАЗИС, 1997. – 554 с.
7. Ильин В. А. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 648 с.
8. Карташев А. П. Математический анализ / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский – СПб.: Лань, 2007. – 448 с.
9. Котельникова М. В. Об анализе содержания курса математического анализа для экономистов / М. В. Котельникова, В. М. Соколов // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского – 2013. – № 5(2). – С. 86–89.
10. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 471 с.
11. Мицкевич А. Финансовая математика / А. Мицкевич – М.: ИНЭС, 2003. – 146 с.
12. Никольский С. М. Курс математического анализа. Том I / С. М. Никольский – М.: Наука, 1983. – 464 с.

13. Уиттекер Э. Т. Курс современного анализа. Часть I / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон – М.: ГИФМЛ, 1963. – 343 с.
14. Фрумкин А. М. К определению числа «е» в курсе математического анализа / А. М. Фрумкин // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета – 2010. – № 3 (15) – С. 23 – 31.
15. Bartle R. G. The elements of real analysis / R. G. Bartle – New York: Wiley & Sons. Inc., 1964. – 447 p.