Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С. Сковороди

Жерновникова О.А., Чібісов О.Д.

Вибрані розділи математичного аналізу*:*
елементи теорії рядів

Методичні рекомендації для магістрантів спеціальності «014.04 Середня освіта (математика)» педагогічних ЗВО

Харків – 2023

УДК 517.521

Укладачі: Жерновникова О.А., Чібісов О.Д.

Рецензенти:

Дейніченко Т.І. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди;

Сергєєв В.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики і хімії Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди.

Методичні рекомендації. Вибрані розділи математичного аналізу: елементи теорії рядів. Х. : ХНПУ імені Г.С. Сковороди, 2023. 62 с.

Затверджено редакційно-видавничою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди
Протокол № 2 від 15.02.2023

Видано за рахунок укладачів

ЗМІСТ

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття

Означення. Нехай u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... - нескінченна послідовність чисел. Вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.1}$$

називається числовим рядом, а елементи послідовності u_1, u_2,…... - членами ряду.

Ряд вважається заданим, якщо відомо загальний член u_n як функцію свого номера. Часто ряд задається у вигляді суми декількох перших членів. У такому випадку треба визначити закономірність, за якою записані перші члени ряду, і записати u_n.

Приклади.

1. Для ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ загальний член $u_n = \frac{1}{n}$.
2. Для ряду $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} \cdots$ загальний член $u_n = \frac{n^2}{n!}$.
3. Для ряду $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$ загальний член $u_n = (-1)^{n+1} \cdot n$.

Означення. Сума n перших членів ряду (1.1)

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

називається n-ою частковою сумою ряду.

Означення. Ряд (1.1) називається збіжним, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум має скінченну границю

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Значення S називається сумою ряду (1.1).

Означення. Ряд (1.1) називається розбіжним, якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум не має границі (зокрема, якщо S_n необмежено зростає по модулю).

Завдання теорії числових рядів полягає у встановленні факту збіжності або розбіжності ряду і в обчисленні сум збіжних числових рядів.

Приклад. Дослідити на збіжність геометричний ряд, тобто ряд складений із членів геометричної прогресії зі знаменником q та першим членом a:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$$

Розв'язання. Відомо, що сума n членів геометричної прогресії, тобто – n часткова сума ряду для $q \neq 1$ дорівнює:

$$S_n = \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

Можливі випадки:

1. якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(q^n - 1\right)}{q - 1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}\right) = \frac{a}{1-q},$$

тобто ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$

2. якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, а отже $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і ряд розбіжний;

3. якщо $q = 1$, то ряд набуває вигляд $a + a + \ldots + a + \ldots$, n-часткова сума ряду $S_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} = na$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ тобто ряд розбіжний;

4. якщо $q = -1$, то ряд набуває вигляд $a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$ і якщо n парне то $S_n = 0$, якщо n непарне то $S_n = a$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує. Отже, ряд розбіжний.

Таким чином геометричний ряд збіжний якщо $|q| < 1$ і розбіжний якщо $|q| \geq 1$.

1.2 Властивості числових рядів.

Теорема 1.1. Якщо даний ряд збігається, то збігається й ряд, отриманий з даного відкиданням кінцевого числа членів.

Теорема 1.2. Якщо ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ збігається і його сума дорівнює S, то ряд $cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots$ (де c – стале число) також збігається і його сума дорівнює cS.

Теорема 1.3. Якщо ряди $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ і $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ збігаються і їхні суми відповідно дорівнюють S_1 та S_2, тоді ряди

$$\left(u_1 + v_1\right) + \left(u_2 + v_2\right) + \ldots + \left(u_n + v_n\right) + \ldots$$

та

$$\left(u_1 - v_1\right) + \left(u_2 - v_2\right) + \ldots + \left(u_n - v_n\right) + \ldots$$

також збігаються і їхні суми відповідно дорівнюють $S_1 + S_2$ і $S_1 - S_2$.

Для визначення збіжності або розбіжності числового ряду вивчаються ознаки, по яких можна встановити збіжність або розбіжність даного ряду, і сума збіжного ряду обчислюється наближено з потрібним рівнем точності.

1.3. Ознаки збіжності знакододатніх числових рядів.

Розглянемо числові ряди з додатними членами.

Теорема 1.4. (***Необхідна ознака збіжності ряду***) Якщо ряд збігається, то його n-й член прямує до нуля при необмеженому зростанні n:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Слід зауважити, що розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою, тобто якщо n-й член прямує до нуля, то це ще не означає, що ряд збігається; ряд може й розбігатися.

Наслідок. Якщо u_n не прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$ то ряд розбігається.

Приклади. Встановити виконання необхідної ознаки збіжності.

1. $$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Необхідна ознака виконується, але відповіді про збіжність ряду не дає.

2. $$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Необхідна ознака не виконується, ряд розбігається.

Ознаки порівняння рядів.

Теорема 1.5. Нехай дано два ряди:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \tag{1.2}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{1.3}$$

причому $u_n \le v_n$. Тоді із збіжності ряду (1.3) випливає збіжність ряду (1.2), а з розбіжності ряду (1.2) випливає розбіжність ряду (1.3).

Теорема 1.6. Якщо дано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $(u_n \ge 0, v_n \ge 0)$ і існує скінчена границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ $(\ne 0, \ne \infty)$, то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Означення. ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ називається гармонічним рядом і є розбіжним.

Означення. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ називається узагальненим гармонічним рядом, він збігається, якщо $\alpha > 1$ і розбігається, якщо $\alpha \le 1$ (при $\alpha = 1$ гармонічний ряд).

Далі при розв'язуванні прикладів будемо застосовувати властивості зазначених рядів, які будуть встановлені нижче.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} . \tag{1.4}$$

Розв'язання. Для порівняння обираємо гармонічний ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} .$$

Оскільки $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$, то й ряд (1.4) розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3n^4 + n + 1}$.

Розв'язання. Для порівняння візьмемо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, оскільки $\alpha = 2 > 1$;

$$u_n = \frac{n^2+2}{3n^4+n+1}, \quad v_n = \frac{1}{n^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2}{3n^4+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2\right)n^2}{3n^4+n+1} = \frac{1}{3}\ (\neq 0, \neq \infty)$$

За теоремою 1.6 даний ряд також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{3n^2+2n+7}$.

Розв'язання. Для порівняння візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, даний ряд розбігається

$$u_n = \frac{5n}{3n^2+2n+7},\ v_n = \frac{1}{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{3n^2+2n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{3n^2+2n+7} = \frac{5}{3}\ (\neq 0, \neq \infty).$$

За теоремою 1.6 даний ряд також розбігається.

Теорема 1.7. (ознака Даламбера).

Якщо дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \ (u_n \geq 0)$ і існує скінчена границя відношення наступного члена до попереднього при необмеженому зростанні номера, тобто $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд збігається, а при $l > 1$ – розбігається (при $l = 1$ про збіжність ряду нічого сказати не можна, потрібні додаткові дослідження).

Теорема 1.8. (радикальна ознака Коші).

Якщо дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n \geq 0)$ і існує скінчена границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$, то при l<1 ряд збігається, а при l>1 – розбігається (при l=1 про збіжність нічого сказати не можна, потрібні додаткові дослідження).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд:

$$\frac{3}{2} + \frac{2^2\cdot 3^2}{2^2} + \frac{3^2\cdot 3^3}{2^3} + \frac{4^2\cdot 3^4}{2^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{2^n}.$$

Розв'язання. Для даного ряду

$$u_n = \frac{n^2 \cdot 3^n}{2^n};\ u_{n+1} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{n^2 \cdot 3^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{2n^2} = \frac{3}{2}.$$

Оскільки $l = \frac{3}{2} > 1$, ряд розбігається за ознакою Даламбера.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2!} + \frac{2^2}{4!} + \frac{3^2}{6!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$.

Розв'язання. Для даного ряду

$$u_n = \frac{n^2}{(2n)!};\ u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}.$$

Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}}{\frac{n^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot 2(n+1) \cdot n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1) \cdot 2 \cdot n^2} = 0.$$

Оскільки $l = 0 < 1$, то ряд збігається за ознакою Даламбера.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n}$

Розв'язання. Для даного ряду загальний член ряду має вигляд

$$u_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n};$$

Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Оскільки $l = \frac{1}{4} < 1$, то ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2}$.

Розв’язання. Для даного ряду загальний член ряду має вигляд

$$u_n = \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2} .$$

Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^{n} = \left[1^{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2+1}{n+2} \right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{\frac{n+2}{1}} \right)^{\frac{1}{n+2}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}} = e .$$

Оскільки $l = e > 1$, то ряд розбігається за радикальною ознакою Коші.

Теорема 1.9.(Інтегральна ознака Коші) Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \geq 0)$, члени якого не зростають: $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$. Нехай $f(x)$ – функція, що визначена при $x \geq 1$, неперервна, не зростає й $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, …, $f(n) = u_n \ldots$. Тоді для збіжності даного ряду необхідно й достатньо, щоб збігався невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

Розв’язання. Для цього ряду застосуємо інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $\frac{1}{x^{\alpha}}$, яка задовольняє умовам інтегральної ознаки Коші для $x \geq 1$ і дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, розглянемо різні випадки значень α:

1. $\alpha = 1$ (гармонічний ряд)

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$, тобто невласний інтеграл розбігається, отже, гармонічний ряд розбігається.

2. $\alpha\neq 1$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{-\alpha+1}-1\right)=\begin{cases}1/\left(1-\alpha\right),\ \text{якщо } \alpha>1\\ \infty,\ \text{якщо } \alpha<1\end{cases}$$

Можна побачити, що при $\alpha>1$ інтеграл збіжний, а при $\alpha<1$ інтеграл розбіжний, тобто при $\alpha>1$ узагальнений гармонічний ряд збігається, а при $\alpha<1$ розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Розв'язання. Для цього ряду $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$, і в цьому випадку

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln^2 x}=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln|x|}\Bigg|_2^b=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln b}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

тобто невласний інтеграл збігається, отже, початковий ряд збігається.

1.4 Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність

Означення. Знакозмінним рядом називається ряд, членами якого є числа довільного знака.

Нехай

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1.5}$$

деякий знакозмінний ряд.

Розглянемо ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{1.6}$$

членами якого є абсолютні величини членів знакозмінного ряду (1.5). Ряд (1.6) є рядом із додатними членами й до нього можна застосовувати ознаки, викладені вище.

Теорема 1.10. (***Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду***) Якщо знакозмінний ряд (1.5) такий, що ряд (1.6) збігається, то й даний знакозмінний ряд також збігається. Ця ознака дає можливість судити про збіжність тільки деяких знакозмінних рядів. Вона є достатньою, але не необхідною: існують знакозмінні ряди, які самі збігаються, але ряди, складені з абсолютних величин їхніх членів, розбігаються. У зв'язку із цим вводиться поняття абсолютної й умовної збіжності знакозмінного ряду.

Означення. Знакозмінний ряд (1.5) називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд (1.6).

Означення. Знакозмінний ряд називається умовно збіжним, якщо він збігається, але не збігається ряд з абсолютних величин .

Приклад. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots. \qquad (1.7)$$

Розв’язання. Даний ряд є знакозмінним. Складемо ряд з абсолютних величин цього ряду

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+\ldots \qquad (1.8)$$

Члени ряду (1.8) не перевершують відповідних членів збіжного ряду

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

тому ряд (1.8) збігається. Це означає, що ряд (1.7) збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1.9)$$

Розв’язання. Модулі членів цього ряду складають гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

який розбігається. Отже, ряд (1.9) не є абсолютно збіжним. Однак, безпосереднім обчисленням суми цього ряду можна переконатися, що ряд (1.9) все одно збігається, тобто цей ряд – умовно збіжний.

Знакопереміжні ряди. Ознака збіжності Лейбніца.

Означення. Знакозмінний ряд називається знакопереміжним, якщо його члени, які стоять поруч один до одного, мають різні знаки. Знакопереміжний ряд позначається $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$.

Для знакопереміжних рядів є досить загальна й практична ознака збіжності, що належить Лейбніцу.

Теорема 1.11. (Ознака Лейбніца) Якщо дано знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, ($u_n \geq 0$), такий, що $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$ (тобто члени ряду монотонно не зростають) і $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$, то даний ряд збігається і його сума $S \leq u_1$.

Порядок дослідження знакозмінного ряду:

1) Складаємо ряд з модулів членів даного ряду й дослідимо його на збіжність за однією з ознак для додатних рядів. Якщо отриманий ряд збігається, то збігається і даний ряд, причому абсолютно. Якщо ряд з модулів розбігається, то продовжуємо дослідження.

2) Якщо даний ряд знакопереміжний, застосовуємо ознаку Лейбніца. Якщо умови теореми 1.11 виконані, ряд збігається умовно. Якщо умови не виконані, ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{n!}$.

Розв’язання. Складемо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ і дослідимо його за ознакою Даламбера. Для даного ряду

$$u_n = \frac{3^n}{n!};\ u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)} = 0$$

Оскільки $l=0<1$, ряд збігається за ознакою Даламбера, а це означає, що початковий ряд збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$.

Розв'язання. Складемо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ і дослідимо його за інтегральною ознакою Коші.

Для цього ряду $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, в цьому випадку

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{2}2\lim_{b\to\infty}\sqrt{2x-1}\Big|_1^b=\left(\lim_{b\to\infty}\sqrt{2b-1}-\sqrt{2-1}\right)=\infty,$$

тобто, невласний інтеграл розбігається, отже, ряд з модулів не збігається.

До даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$ застосуємо ознаку Лейбніца:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{5}}>\ldots,\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}=0.$$

Отже, початковий ряд збігається умовно.

2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Поняття функціонального ряду

Означення. Ряд називається функціональним, якщо члени його є функціями від x.

Розглянемо функціональний ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots\ldots u_n(x)+\ldots\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \qquad (2.1)$$

Надаючи змінній x деяке значення x_0, одержимо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots\ldots u_n(x_0)+\ldots\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0). \qquad (2.2)$$

Якщо ряд (2.2) збігається, то точка x_0 називається точкою збіжності функціонального ряду.

Означення. Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називається його областю збіжності.

Якщо значення x_0 є точкою збіжності ряду (2.1), то можна говорити про суму $S(x_0)$ ряду (2.2). Сума функціонального ряду є функція $S(x)$. Областю визначення функції $S(x)$ буде область збіжності ряду (2.1).

2.2 Інтервал збіжності степеневого ряду

Означення. Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{2.3}$$

де a_0, a_1, a_2, … – сталі числа, які називаються коефіцієнтами ряду.
Області збіжності степеневих рядів описуються наступною теоремою.

Теорема 2.1. (***Теорема Абеля***) Якщо степеневий ряд (2.3) збігається при деякому $x = x_0$, то він збігається абсолютно при всіх значеннях x, для яких $|x| < |x_0|$.
Якщо ряд (2.3) розбігається при $x = x_1$, то він розбігається при всіх значеннях x, для яких $|x| > |x_1|$

Теорема Абеля приводить до наступного твердження: існує таке число $R \geq 0$, що при $|x| > R$ ряд (2.3) розбігається, при $|x| < R$ - збігається, а поведінка ряду при $x = \pm R$ підлягає подальшому аналізу. Множина значень змінної x, що задовольняє співвідношенню $-R < x < R$ називається інтервалом збіжності ряду (2.3), а число R – радіусом збіжності цього ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| \text{ або } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}} \tag{2.4}$$

Приклад. Визначити інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу.

$$\frac{2x}{1} - \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n} + \ldots$$

Розв'язання. Складемо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n |x|^n}{n}$ і дослідимо його за ознакою Даламбера. Для даного ряду

$$u_n = \frac{2^n |x|^n}{n};\ u_{n+1} = \frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{n+1}$$

Тоді

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n|x|^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{2^n|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x|n}{(n+1)}=2|x|$$

Даний ряд збігається абсолютно, якщо $l<1$, тобто $2|x|<1$;

$$|x|<\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

Таким чином маємо, що радіус збіжності $R=\frac{1}{2}$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу, тобто при $x=\pm\frac{1}{2}$

1. $x=-\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

При $x=-\frac{1}{2}$ даний ряд розбігається як гармонічний.

2. $x=\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

даний ряд не збігається абсолютно. Застосовуючи ознаку Лейбніца, одержимо, що ряд збігається умовно. Таким чином, ряд збігається на проміжку $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Приклад. Визначити інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ й дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу.

Розв’язання. Складемо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ і дослідимо його за ознакою Даламбера. Для даного ряду

$$u_n = \frac{|x|^n}{n!};\ u_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1$$

Даний ряд збігається абсолютно при будь-яких значеннях x. Таким чином, область збіжності даного ряду $x \in (-\infty;\infty)$

2.3 Ряди Тейлора й Маклорена

Якщо функція $f(x)$ диференційовна нескінченну кількість разів в точці x_0, то в околі цієї точки її можна представити степеневим рядом, який називають рядом Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \tag{2.5}$$

Зокрема, при $x_0 = 0$ одержуємо ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n \tag{2.6}$$

Розклад в ряд Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$ називають основними розкладами:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in (-\infty;+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x \in (-\infty;+\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in (-\infty;+\infty)$$

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!},\quad x\in\left(-1;1\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in\left(-1;1\right)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}x^n,\ x\in\left(-1;1\right)$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in\left(-1;1\right)$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ x\in\left(-1;1\right)$$

Якщо потрібно розкласти в ряд Тейлора довільну функцію, то можна скористатися формулами (2.5) і (2.6). Однак для багатьох функцій розклад в ряд Тейлора або Маклорена можна одержати, користуючись відомими розкладами елементарних функцій.

Приклад. Розкласти функцію $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x=1$.

Розв’язання. Скористаємося Формулою (2.5)

$$\frac{1}{x}=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n+\ldots$$

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2},\qquad f''(x)=\frac{2}{x^3},\qquad f'''(x)=-\frac{2\cdot3}{x^4}\ ,$$

$$f^{IV}(x)=\frac{2\cdot3\cdot4}{x^5},\quad\ldots\ ,\ f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot n}{x^{n+1}},\ldots$$

$$f(1)=1,\qquad f'(1)=-1,\qquad f''(1)=2,\ f'''(1)=-\frac{1\cdot2\cdot3}{1}=-3!\ ,$$

$$f^{IV}(1)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1}=4!,\quad\ldots\ ,\ f^{(n)}(x)=(-1)^n n!,\ldots$$

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+\frac{2}{2!}\cdot(x-1)^2+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\cdot(x-1)^n+\ldots=$$

$$=1-(x-1)+(x-1)^2+\ldots+(-1)^n\cdot(x-1)^n+\ldots$$

Отриманий ряд збігається, якщо -1< $x-1$ <1, тобто (0; 2) – інтервал збіжності.

Приклад. Розкласти функцію $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в ряд Тейлора в околі точки $x=0$ (ряд Маклорена)

Розв'язання. Скористаємося біноміальним рядом

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(-x^2\right)+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-x^2\right)^2}{2!}+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-x^2\right)^3}{3!}+\ldots$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\left(-x^2\right)^n}{n!}+\ldots$$

Таким чином маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!\cdot 2^n}x^{2n}+\ldots$$

$$x\in\left(-1;1\right).$$

Приклад. Представити у вигляді степеневого ряду (ряду Маклорена) функцію $\int\limits_0^x\frac{arctgx}{x}dx$.

Розв'язання. Зауважимо, що $arctgx=\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x^2}$. Представимо функцію $\frac{1}{1+x^2}$ у вигляді степеневого ряду та проінтегруємо цей ряд:

$$arctgx=\int\limits_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_0^x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots)dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ x\in\left(-1;1\right)$$

Отриманий ряд розділимо на x:

$$\frac{arctgx}{x}=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\ldots$$

Інтегруючи останню рівність отримаємо:

$$\int_0^x \frac{arctgx}{x}dx = \int_0^x \left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\ldots\right)dx = x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\ldots$$

Для отриманого ряду інтервал збіжності $(-1;1)$.

2.4 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Обчислення наближених значень функцій

Розклад функції в ряди Маклорена дозволяють у багатьох випадках з великою точністю обчислити значення цих функцій.

Якщо в наслідок розкладу одержуємо знакосталий ряд, то похибка оцінюється за допомогою залишкового члена формули Тейлора, тобто

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^n \qquad (2.7)$$

де c деяка точка між 0 та x.

Якщо при обчисленні значення функції або інтеграла приходимо до знакопереміжного ряду, то похибка такого обчислення не перевершує першого члена ряду, який відкидається (теорема Лейбніца).

Приклад. Обчислити з точністю до 0,0001 значення $\sqrt[10]{e}$

Розв’язання. Скористаємося формулою

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ ,\ x\in(-\infty;+\infty)$$

Маємо $e^{\frac{1}{10}} = 1+0,1+\frac{0,1^2}{2!}+\frac{0,1^3}{3!}+\ldots \approx 1+0,1+0,005+0,0003 = 1,1053$

Для оцінки похибки обчислення скористаємося формулою (2.7)

$$R_3 = \frac{e^c}{4!}x^4 = \frac{e^c}{4!}\left(\frac{1}{10}\right)^4 < \frac{e}{4!10^4} < \frac{3}{4!10^4} = 0,00001 \ \ (0<c<0,1)$$

Приклад. Обчислити з точністю до 0,0001 значення $\sqrt[5]{35}$

Розв’язання. Даний вираз запишемо у вигляді:

$$\sqrt[5]{35} = \sqrt[5]{32+3} = 2\sqrt[5]{1+\frac{3}{32}} = 2\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Скористаємося формулою

$$\left(1+x\right)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\ldots$$

При $\alpha=\frac{1}{5}$ маємо:

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}x-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}x^3-\ldots$$

Тоді

$$\sqrt[5]{35}\approx 2\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{32}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\left(\frac{3}{32}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\left(\frac{3}{32}\right)^3\right)=2,0361$$

оскільки ряд знакопереміжний, то за теоремою Лейбніца маємо, що сума відкинутої частини ряду не перевершує першого відкинутого члена, тобто похибка обчислення

$$R_3<\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\left(\frac{3}{32}\right)^3=0,00004$$

Приклад. Обчислити $\sin 5^{\circ}$ з точністю до 0,0001

Розв’язання. Для того, щоб скористатися формулою розкладення функції в ряд, потрібно перетворити градусну міру в радіанну:

$$\sin 5^{\circ}=\sin\left(\frac{\pi}{36}\right)$$

Скористаємося формулою

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}$$

Тоді

$$\sin\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5-...$$

оскільки ряд знакопереміжний, залишковий член R_3 менше першого відкинутого члена ряду, тобто $R_3<\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^5=10^{-7}$.

Наближене обчислення визначених інтегралів

Багато визначених інтегралів, потрібних на практиці, не можуть бути обчислені за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, оскільки часто первісна підінтегральної функції не виражається в елементарних функціях. Якщо функція, яка стоїть під знаком інтегралу, розкладається в степеневий ряд і межі інтегрування належать інтервалу збіжності ряду, то визначений інтеграл може бути обчислений з наперед заданою точністю.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,0001

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$$

Розв'язання. Розклад підінтегральної функції в степеневий ряд має вигляд:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Ця рівність вірна при будь-яких x. Інтегруючи цей ряд почленно, одержимо:

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx = \int_0^{1/4}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/4} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} = 0,2448$$

Погрішність обчислення $R_2 < \dfrac{1}{2!\cdot 4^5\cdot 5} = 0,00008$

Наближене інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

Розв'язуючи наближено звичайні диференціальні рівняння першого порядку, а також рівняння вищих порядків, іноді використовують представлення шуканого розв'язку у вигляді ряду Тейлора, залишаючи у ньому певну кількість доданків.

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{2.8}$$

задовольняючого початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Припустимо, що $F(x, y, y')$ - диференційовна нескінченну кількість разів у деякому околі точки (x_0, y_0). Тоді розв'язок рівняння, (6.3) будемо шукати у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Потрібно знайти $f(x_0)$, $f'(x_0)$. Це можна зробити за допомогою початкових умов і рівняння (2.8). З початкових умов випливає, що $f(x_0)=y_0$, $f'(x_0)=y'_0$.

З рівняння (2.8) одержуємо:

$$y''(x_0)=f''(x_0)=F(x_0,y_0,y'_0)$$

Продиференцюємо (2.8) за правилом диференціювання складної функції декількох змінних. Одержимо:

$$y'''(x_0)=F'_x(x,y,y')+F'_y(x,y,y')y'+F'_{y'}(x,y,y')y'' \qquad (2.9)$$

Підставимо в (2.9) початкові умови та одержимо $y'''(x_0)=f'''(x_0)$. Диференціюючи (2.9) і підставляючи початкові умови, одержимо $y^{IV}(x_0)=f^{IV}(x_0)$. Продовжуючи цей процес крок за кроком, зможемо знайти значення наступних похідних у точці x_0, тобто коефіцієнти $y'''(x_0),...y^{(n)}(x_0),...$. Цей процес або переривається на заданому коефіцієнті, або завершується знаходженням загального закону побудови коефіцієнтів у розкладі. Для тих значень x, для яких цей ряд збігається, він представляє розв'язок рівняння.

Приклад. Знайти три члени розкладу в ряд Маклорена функції, що є розв'язком рівняння

$$y''=-x^2y, \qquad (2.10)$$

який задовольняє початковим умовам: $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Розв'язання. Оскільки початкові умови задані в точці x=0, то розв'язок будемо шукати у вигляді ряду Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\ldots$$

Використовуючи початкові умови, з рівняння (2.10) знайдемо $y''(0)=f''(0)=0$

Продиференцюємо (2.10) і підставимо початкові умови.

$y'''=-2xy-x^2y'$, $\qquad y'''(0)=-2\cdot 0\cdot y(0)-0^2y'(0)=0$

$y^{IV}(x)=-2y-4xy'-x^2y''$, $y^{IV}(0)=-2y(0)-4\cdot 0\cdot y'(0)-0^2y''(0)=-2$

Підставляючи значення похідних у ряд Маклорена, одержимо декілька перших членів розкладу функції $f(x)$, що є частковим розв'язком рівняння (2.10)

$$f(x) = 1 - \frac{2}{4!}x^4 + \ldots$$

Приклад. Знайти три члени розкладу в ряд Маклорена функції, яка є розв'язком рівняння

$$y' = e^{-2x} + 3y, \tag{2.11}$$

який задовольняє початковим умовам: $y(0) = 2$

Розв'язання. Оскільки початкові умови задані в точці $x=0$, то розв'язок будемо шукати у вигляді ряду Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots$$

Використовуючи початкові умови, з рівняння (2.11) знайдемо $y'(0) = f'(0) = e^0 + 3\cdot 2 = 7$

Продиференцюємо (2.11) і підставимо початкові умови.

$y'' = -2e^{-2x} + 3y'$ $\quad$ $y''(0) = -2e^{-2\cdot 0} + 3y'(0) = -2 + 3\cdot 7 = 19$

$y''' = 4e^{-2x} + 3y''$ $\quad$ $y'''(0) = 4e^{-2\cdot 0} + 3y''(0) = 4 + 3\cdot 19 = 61$

$y^{IV} = -8e^{-2x} + 3y'''$ $\quad$ $y^{IV}(0) = -8e^{-2\cdot 0} + 3y'''(0) = -8 + 3\cdot 61 = 175$

Тоді розв'язок має вигляд

$$f(x) = 2 + 7\cdot x + \frac{19}{2!}\cdot x^2 + \frac{61}{3!}\cdot x^3 + \frac{175}{4!}\cdot x^4 + \ldots$$

3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Ряди Фур'є функцій періоду 2π

Нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом 2π і інтегровною на відрізку [-π;π]. Рядом Фур'є функції $f(x)$ називається тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{3.1}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le 1 \end{cases}, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (3.2)$$

При цьому пишуть так (~ знак відповідності):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \ ,$$

оскільки ряд Фур'є функції $f(x)$ не завжди має своєю сумою цю функцію, якщо навіть збігається.

Справедлива наступна теорема (Діріхле).

Теорема 7.1. Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом 2π кусочно-монотонна й обмежена на відрізку [-π;π], то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається у всіх точках.

Сума отриманого ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності цієї функції. У точках розриву функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ праворуч і ліворуч (тобто, якщо x=c – точка розриву функції $f(x)$, то $S(c) = \dfrac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, означену рівністю:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & -\pi \le \mathrm{x} < 0 \\ 1, & 0 \le \mathrm{x} \le \pi \end{cases}$$

Розв’язання. Графік даної функції представлений на рисунку 3.1.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є цієї функції.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n}\sin 0 + \frac{1}{2n}\sin(-n\pi) + \frac{\sin(n\pi)}{n} - \frac{\sin 0}{n}\right) = 0$$

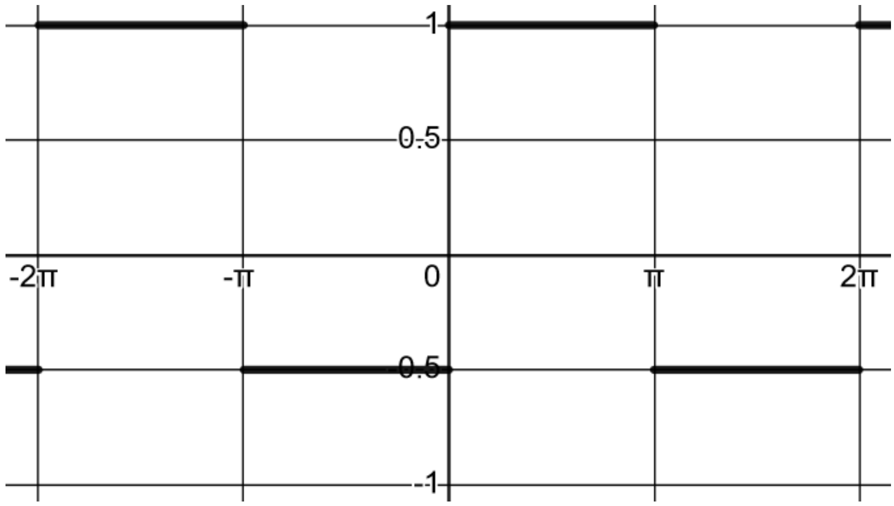

Рис. 3.1. Графік функції до прикладу 1.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\cos 0 - \frac{1}{2n}\cos(-n\pi) - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\cos 0}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n} - \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right) == \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2n} - \frac{3(-1)^n}{2n}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо n парні} \\ \dfrac{3}{\pi n}, & \text{якщо n непарні} \end{cases}$$

Тобто, $b_{2k} = 0$, $b_{2k-1} = \dfrac{3}{(2k-1)\pi}$ (k=1, 2, 3,…...)

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \ . \qquad (3.3)$$

За теоремою Діріхле ряд (3.3) збігається при всіх x. Сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює цієї функції. У точках $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ $S(x) = \dfrac{1}{4}$.

3.2 Розклад в ряд Фур'є парних й непарних функцій періоду 2π

Ряд Фур'є парної функції, тобто задовольняючій умові $f(-x)=f(x)$, не містить членів із синусами. Цей ряд має вигляд:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{3.4}$$

де

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx, \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx \tag{3.5}$$

Якщо $f(x)$ - непарна функція, тобто задовольняє умові $f(-x)=-f(x)$, то її ряд Фур'є не містить вільного члена й членів з косинусами. Цей ряд має вигляд:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \ , \tag{3.6}$$

де

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx \tag{3.7}$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію з періодом 2π, яка задана рівністю $f(x)=|x| \quad -\pi<x<\pi$.

Розв’язання. Ця функція парна, її графік симетричний відносно осі Оу (див. рис.3.2)

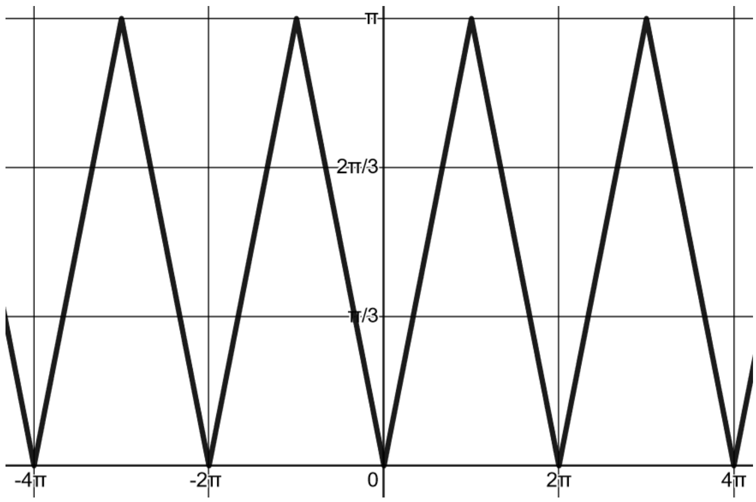

Рис. 7.2. Графік функції до прикладу 2.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є для цієї функції.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) = \pi ;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \cos nx dx & V = \dfrac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi\frac{\sin n\pi}{n} - 0 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos 0}{n^2} \right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1 \right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо n парні} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2}, & \text{якщо n непарні} \end{cases}$$

Ряд Фур'є цієї функції має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Оскільки $f(x)$ всюди неперервна, кусочно-монотонна й обмежена, то її ряд Фур'є збігається при всіх x і сума ряду дорівнює $f(x)$.

3.3 Розклад в ряд Фур'є функцій періоду 2ℓ

Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом 2ℓ (ℓ - будь-яке дійсне число) і інтегровна на відрізку [-ℓ;ℓ], то ряд Фур'є цієї функції має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} ,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

Якщо, зокрема, $f(x)$ парна, то

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad b_n = 0.$$

Якщо $f(x)$ непарна, то

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad a_0=0, \qquad a_n=0$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію з періодом 2ℓ=4, задану на інтервалі-періоді (-2;2) рівністю $f(x) = x$.

Розв'язання. Графік цієї функції симетричний відносно початку координат (рис. 3.3.) Функція непарна.

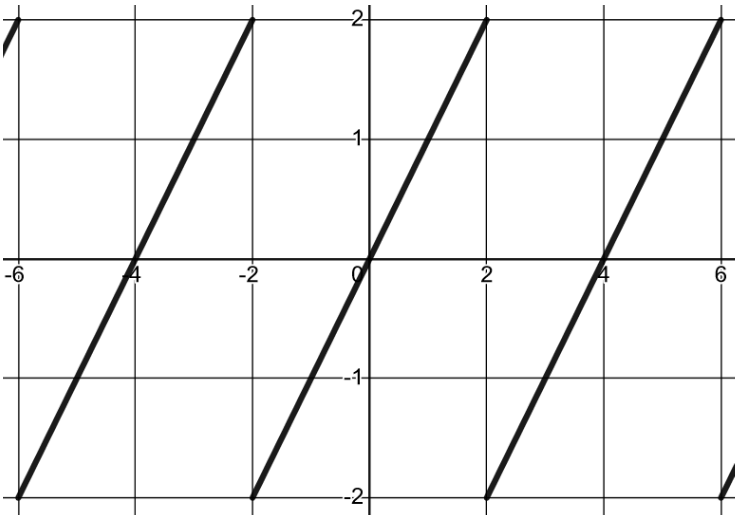

Рис. 3.3. Графік функції до прикладу 3.

Для цієї функції $a_0=0$, $a_n=0$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \sin\frac{n\pi x}{2}dx & V = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{vmatrix} = \left(-x\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \right.$$

$$\left. +\int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx \right) = \left(-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + 0 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 \right) = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n +$$

$$\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi - 0 = -\frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

Функції $f(x)$ відповідає ряд Фур'є:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції дорівнює $f(x)$, у точках $x = 0, \ \pm n$ $(\mathrm{n} = 1,2,3...)$ $S(x)$=0.

3.4 Розклад в ряд Фур'є функцій, заданих на напівінтервалі

Функцію, задану на напівінтервалі (0; π)., можна розкласти в ряд синусів або ряд косинусів, продовжуючи на другий напівперіод відповідно непарним або парним образом.

Приклад. Функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ розкласти в ряд косинусів в інтервалі (0; π).

Розв'язання. Продовжимо функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ на проміжок (-π; 0) таким чином, щоб вона була парною. Вважаючи функцію періодичною з періодом 2π , обчислимо коефіцієнти Фур'є цієї функції.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left.\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{4}\right)\right|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}\right)=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos nxdx=\left|\begin{matrix}U=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) & dU=-\frac{dx}{2}\\ dV=\cos nxdx & V=\frac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\left(\left.\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{2n}dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin n\pi}{n}-0\right)-\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{\cos nx}{2n^2}\right|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{якщо n парні}\\ \frac{2}{\pi n^2}, & \text{якщо n непарні}\end{cases}$$

Тоді

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x\ .$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а) } \frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots;\ \text{б) } \frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots;\ \text{в) } \frac{1}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}-\ldots$$

2. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $x-\dfrac{x^2}{3\sqrt{2}}+\dfrac{x^3}{5\sqrt{3}}-\ldots$ б) $1-\dfrac{x-2}{4\cdot 2}+\dfrac{(x-2)^2}{7\cdot 2^2}-\ldots$

в) $1-\dfrac{5x^2}{2^2\sqrt{3}}+\dfrac{9x^4}{2^4\sqrt{5}}-\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в околі точки $x_0=4$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\ln(1+e^{2x})$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ б) $f(x)=\sqrt[3]{27-x}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt[3]{129}$ б) $\displaystyle\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''=xy'-y+1$ при заданих початкових умовах $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x)=x$, задану в інтервалі $(0;\pi)$.

Варіант 2

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а) } 1+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}+\ldots; \text{ б) } \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots; \text{ в) } \frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

$$\text{а)} 1-\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{\sqrt{5}x^2}{2^2}-\frac{\sqrt{7}x^3}{2^3}+\ldots \qquad \text{б)} (x-2)+\frac{(x-2)^2}{5\cdot 2}+\frac{(x-2)^3}{9\cdot 2^2}+\ldots$$

$$\text{в) } \frac{2x^2}{4}+\frac{5x^4}{4^2}+\frac{8x^6}{4^3}+\ldots$$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\cos\frac{\pi}{6}x$ в околі точки $x_0=3$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^x\cdot\cos x$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\cos x^2$ б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sin 10^\circ$ б) $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y''-xy'-y=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=x+\pi$, задану в інтервалі (0; π).

Варіант 3

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{\frac{6}{7}}+\ldots;\ \text{б) } \frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\ldots;\ \text{в) } 1+\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\frac{x}{2\cdot 1!}-\frac{x^2}{7\cdot 3!}+\frac{x^3}{12\cdot 5!}-\ldots$ б) $\frac{(2x-1)}{1}-\frac{(2x-1)^2}{5}+\frac{(2x-1)^3}{9}-\ldots$

в) $\frac{x}{1}-\frac{x^4}{3\cdot 2^3}+\frac{x^7}{5\cdot 2^6}-\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sin\frac{\pi}{6}x$ в околі точки $x_0=3$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$ б) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ б) $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння

$y''=x+y\cos y$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=\frac{\pi}{3}$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану на відрізку [-π; π] рівністю $f(x)=x$.

Варіант 4

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $2+\frac{5}{4}+\frac{8}{7}+\dots$; б) $\frac{2!}{1\cdot 2}+\frac{4!}{3\cdot 2^3}+\frac{6!}{5\cdot 2^5}\dots$; в) $\frac{1}{2\ln^3 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\frac{1}{4\ln^3 4}+\dots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$1-\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}-\dots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}x-\frac{5}{\sqrt{2^3}}x^2+\frac{8}{\sqrt{2^5}}x^3-\dots$ б) $\frac{(3x-2)}{1}+\frac{3(3x-2)^2}{4}+\frac{3^2(3x-2)^3}{7}+\dots$

в) $\frac{x^2}{4\cdot 3}-\frac{x^4}{4^2\cdot 5}+\frac{x^6}{4^3\cdot 7}-\dots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\ln(3+x)$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt[3]{70}$ б) $\int_0^{1/3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''=xy^2-y'$ при заданих початкових умовах $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x)=x-\pi$, задану на інтервалі (0; π).

Варіант 5

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{8}{5}}+\ldots$; б) $\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{10}\ldots$; в) $2+\frac{2\cdot 5}{4\cdot 2}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{7\cdot 2^2}\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $x-\frac{2!}{3\cdot 3}x^2+\frac{3!}{5\cdot 3^2}x^3-\ldots$ б) $\frac{(2x-3)}{1\cdot 2}+\frac{(2x-3)^2}{3\cdot 2^2}+\frac{(2x-3)^3}{5\cdot 2^3}+\ldots$

в) $x-\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{5\cdot 7}-\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\ln x$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклоренафункції

$$f(x)=e^x\ln\left(1+x^2\right)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=e^{-\frac{x^3}{3}}$ б) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sin 10^\circ$ б) $\int\limits_0^{1/2}\frac{arctgx}{x}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y'=x^2+y^3$ при заданих початкових умовах $y(1)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=x^2$, задану на інтервалі (0; π).

Варіант 6

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а) } \frac{2}{3}+\frac{6}{5}+\frac{10}{7}+\ldots;\ \text{б) } 1+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\ldots;\ \text{в) } \frac{1\cdot 3}{1}+\frac{3\cdot 3^2}{1\cdot 5}+\frac{5\cdot 3^3}{1\cdot 5\cdot 9}\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$1-\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{2^2\cdot 3!}-\frac{1}{2^2\cdot 4!}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\frac{x}{2\sqrt{5}}-\frac{x^2}{5\sqrt{5^3}}+\frac{x^3}{8\sqrt{5^5}}-\ldots$ б) $(x-3)+\frac{(x-3)^2}{5\cdot 3^2}+\frac{(x-3)^3}{9\cdot 3^4}+\ldots$

в) $1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{7}+\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt{x}$ в околі точки $x_0=4$.
5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена

$$f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=x\cos\frac{x}{2}$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\ln 3$ б) $\int_0^1 \sin x^2 dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''=xy'-y+e^x$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.
9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Варіант 7

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{5}{7}}+\sqrt{\frac{8}{9}}+\ldots$; б) $\frac{1!}{2}+\frac{3!}{2\cdot 5}+\frac{5!}{2\cdot 5\cdot 8}\ldots$; в) $\frac{1}{2\ln\ 2}+\frac{1}{3\ln\ 3}+\frac{1}{4\ln\ 4}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\frac{2}{3}x-\frac{2^3}{5}x^2+\frac{2^4}{7}x^3-\ldots$ б) $\frac{\left(2x-3\right)}{1\cdot 3}+\frac{\left(2x-3\right)^2}{4\cdot 3^2}+\frac{\left(2x-3\right)^3}{7\cdot 3^3}+\ldots$

   в) $\frac{x}{2\cdot 3}-\frac{2^2x^3}{5\cdot 3^3}+\frac{2^4x^5}{8\cdot 3^5}-\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\frac{x+3}{\left(x+1\right)^2}$$

6. Розкласти в ряд по ступенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=\sin\frac{x^3}{2}$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\cos 1^\circ$ б) $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''-\left(1+x^2\right)y\ =0$ при заданих початкових умовах $y(0)=$-2, $y'(0)=2$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x\le 0\\ \pi-x, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Варіант 8

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{\ln\ 2}+\frac{5}{\ln\ 5}+\frac{9}{\ln\ 8}+\ldots$; б) $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{1\cdot 5\cdot 9}\ldots$; в) $\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{3\cdot 1!}-\frac{1}{3^2\cdot 3!}+\frac{1}{3^3\cdot 5!}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\frac{2}{\sqrt{1\cdot 2}}x+\frac{2^2}{\sqrt{3\cdot 5}}x^2+\frac{2^3}{\sqrt{5\cdot 8}}x^3+\ldots$

б) $\frac{(x-3)}{2}-\frac{(x-3)^2}{4\cdot 3}+\frac{(x-3)^3}{6\cdot 3^3}-\ldots$ в) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6\cdot 4}-\frac{x^6}{10\cdot 4^2}+\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ в околі точки x_0 =4.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^x\ln(1+x)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=e^{\frac{x^3}{3}}$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt[3]{130}$ б) $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{x}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $(1+x^2)y''+xy'-y\ =0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 4, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0\\ x, & 0<x\le 2\end{cases}$$

Варіант 9

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{5}{7}}+\sqrt{\frac{9}{11}}+\ldots$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8\cdot 3^2}\ldots$; в) $\frac{1}{2\ln\ 2}+\frac{1}{3\ln\ 3}+\frac{1}{4\ln\ 4}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{1\cdot 2!}-\frac{1}{3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 6!}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\frac{x}{\sqrt{2}\cdot 3}-\frac{x^2}{\sqrt{2^3}\cdot 7}+\frac{x^3}{\sqrt{2^5}\cdot 11}-\ldots$

   б) $\frac{(3x+2)}{2}-\frac{(3x+2)^2}{5\cdot 2}+\frac{(3x+2)^3}{8\cdot 2^2}-\ldots$ в) $\frac{3^2}{2}x+\frac{3^4}{6}x^3+\frac{3^6}{10}x^5+\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=(x-tgx)\cos x$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=\cos 3x^2$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\sin 10^\circ$ б) $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^{-x}}{x}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y''=yy'-x^2$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 4π, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\pi\le x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 2\pi\end{cases}$$

Варіант 10

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{2\ln\ 2}+\frac{1}{3\ln\ 3}+\frac{1}{4\ln\ 4}+\ldots$; б) $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 11}\ldots$; в) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{2^2}{5}}+\sqrt{\frac{2^3}{7}}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{1\cdot 1!}-\frac{1}{2\cdot 3!}+\frac{1}{2^2\cdot 5!}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\frac{2x}{3^2}-\frac{5x^2}{3^4}+\frac{8x^3}{3^6}-\ldots$ б) $\frac{(x-4)}{1}+\frac{(x-4)^2}{3\cdot 2}+\frac{(x-4)^3}{5\cdot 2^2}+\ldots$

в) $\frac{2}{3}x-\frac{2^2}{5\cdot 3^2}x^2+\frac{2^3}{9\cdot 3^3}x^3-\ldots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sin\frac{\pi x}{8}$ в околі точки $x_0=4$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\cos(x-a)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sin\frac{x^3}{2}$ б) $f(x)=\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\cos 10^\circ$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y'=y\ +x\ e^y$ при заданих початкових умовах $y(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану рівністю

$$f(x)=x^3 \qquad -\pi\le x\le\pi .$$

Варіант 11

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$а)\ 2+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}+\ldots;\ б)\ \frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}\ldots;\ в)\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{\left(\sqrt{2}\right)^3}+\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 x^n}{((2n)!)^2}\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}\qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}$$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=e^x$ в околі точки x_0=-2.
5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=x\ln(1+x^2)$ б) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\ln 1{,}1$ б) $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{\text{sinx}}{\text{x}}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y'=y^2+x$ при заданих початкових умовах $y(0)=0$.
9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0\\ 1-x\ , & 0<x\le 1\end{cases}$$

Варіант 12

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{3}{3}+\frac{9}{5}+\frac{27}{7}+\ldots$; б) $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\ldots$; в) $1\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{125}\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4 x^{2n}}{(2n+1)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt{x}$ в околі точки x_0 =4.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\ln\left(e^x+x\right)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=(1+x)e^x$ б) $f(x)=\sqrt[4]{(1-x)}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\sqrt[4]{17}$ б) $\int_0^{0.5} s\mathrm{inx}^2 dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y'=y\ \cdot x^2$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану рівністю

$$f(x)=|x| \qquad -\pi\le x\le\pi .$$

Варіант 13

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а) } \frac{1}{1}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}}+\ldots;\ \text{б) } \frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\ldots;\ \text{в) } \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{n^2+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n-1}x^{n-1}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ в околі точки $x_0=\frac{\pi}{2}$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=10^x$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=x\sin^2 x$ б) $f(x)=\sqrt{(1-x^2)}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt[3]{29}$ б) $\int\limits_0^1 t^2e^{-t^2}dt$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y'=2x-0{,}1y^2$ при заданих початкових умовах $y(0)=0{,}1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi\le x\le 0\\ x-2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Варіант 14

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{8}+\frac{5}{11}+\ldots$; б) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}\ldots$; в) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}x^{n-1}}{n-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n x^{2n-1}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x^2}$ в околі точки $x_0=$-1.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^{x^2+3}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=x\sin^2 x$ б) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\cos 18^\circ$ б) $\int_0^1 \cos x^3 dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''+xy=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x\le 0\\ 1-\frac{x}{2}, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Варіант 15

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\ldots$; б) $\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}-\ldots$; в) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{25}}+\frac{1}{\sqrt[3]{49}}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\ \cdot 5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}x^{n-1}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x}$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=xe^{-3x}$ б) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\sin 15^\circ$ б) $\int_0^{1/2}\ln(1+\sqrt{\text{x}})dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''-y\cos x=x$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=|x|+1$, задану на інтервалі (-2;2)

Варіант 16

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а)}\ \frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{8}+\ldots;\ \text{б)}\ \frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3}}\ldots;\ \text{в)}\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{9}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{3}{7}+\frac{4}{10}-\frac{5}{13}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ \ \cdot 4^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\left(x-3\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^{2n+1}}{2n+3}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ в околі точки $x_0=3$.
5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=2^{\sin x}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sin\frac{x^2}{4}$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt[3]{751}$ б) $\int\limits_{0}^{0.5} a\mathrm{rctgx}^2dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y'=2y+e^x$ при заданих початкових умовах $y(0)=0$.
9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=5x-1$, задану на інтервалі (-5;5)

Варіант 17

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

$$\text{а) } \frac{1}{1}+\frac{2}{4}+\frac{3}{7}+\ldots;\ \text{б) } \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots;\ \text{в) } \frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\ldots$$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{4}{9}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!(x-3)^n}{n^3} \qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n\ln n}$$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\dfrac{1}{5-x}$ в околі точки $x_0=2$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$$

6. Розкласти в ряд по ступенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^3}$ б) $f(x)=\sin^2 x$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити

а) $\sin\dfrac{\pi}{8}$ з точністю до 0,0001 б) $\displaystyle\int_0^{0.5} a\mathrm{rctg}x^2dx$ з точністю до 0,001:

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y''+xy=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=x^2$, задану на інтервалі (0; π)

Варіант 18

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4}\ldots$; б) $\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots$; в) $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{7}{27}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в околі точки $x_0=9$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\frac{1}{x+3}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ б) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ б) $\int_0^1 x^3\cos x\,dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''+\frac{y'}{x}+y=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$, задану на інтервалі $(0;\pi)$

Варіант 19

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}\ldots$; б) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4+n^2}+\ldots$; в) $\frac{1}{1}+\frac{4}{e}+\frac{9}{e^2}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\ \cdot 3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 4^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x-5}$ в околі точки $x_0=6$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=\frac{x}{2-x}$ б) $f(x)=x\cos\frac{x^2}{4}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ б) $\int_0^{0.5}\ln\left(1+x^2\right)dx$:

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''-x^2y=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x)=\frac{x^2}{4}$, задану на інтервалі (-π; 0)

Варіант 20

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 9}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 27}}+\dots$ б) $\sin 1+\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{9}+\dots$

в) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{14}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{5+n^2}+\dots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\cdot 3^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n+1)!}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\cos 2x$ в околі точки $x_0=\frac{\pi}{8}$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\left(1+e^x\right)^2$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$ б) $f(x)=x\cos^2\frac{x}{2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sin 0,4$ б) $\int_0^{1/4}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y'-3y+xe^x=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0\\ 0\ , & 0<x\le 1\end{cases}\qquad f(x\pm 2)=f(x).$$

Варіант 21

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\ldots$; в) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 27}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-0,5\right)^n}{2n\cdot 5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sin 3x$ в околі точки $x_0=\frac{\pi}{3}$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=ctgx$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sqrt[3]{1-\frac{x}{2}}$ б) $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\ln 5$ б) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y'-3y+xe^x=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0\\ -1\ , & 0<x\le 1\end{cases} \qquad f(x\pm 2)=f(x).$$

Варіант 22

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{6}{3!}+\ldots$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\ldots$; в) $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\ldots+\frac{n}{5+n^2}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{1}{5}+\frac{2}{8}-\frac{3}{13}+\ldots+(-1)^n\frac{n}{4+n^2}+\cdots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)\ \cdot 3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ (x-2)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x}$ в околі точки $x_0=3$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^{\sin x}$$

6. Розкласти в ряд по ступенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=x^2\sin^2\frac{x}{2}$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити:

   а) $\sin 18^\circ$ з точністю до 0,0001; б) $\int_0^{0.5} a\mathrm{rctgx}^2 dx$ з точністю до 0,001

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y''+xy=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{2}-1, & -\pi\le x\le 0\\ -1\ , & 0<x\le\pi\end{cases}$$

Варіант 23

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots$ б) $\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\frac{1}{\sqrt{4^3}}+\ldots$

в) $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{8}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 6\cdot 7}{32}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{1}{5}+\frac{4}{8}-\frac{9}{13}+\ldots+(-1)^n\frac{n^2}{4+n^2}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}x^{2n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+2\right)^n}{\left(n+1\right)\cdot 2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt{x^3}$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{5}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}\ldots$$

6. Розкласти в ряд по ступенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=x^2\sin 3x$ б) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{2}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sqrt[3]{129}$ б) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^3}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $(1-x)y'=1+x-y$ при заданих початкових умовах $y(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0\\ 1+x\ , & 0<x\le 1\end{cases}.$$

Варіант 24

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots$ б) $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{16}+\ldots$

   в) $\frac{5}{4}+\frac{7}{5}+\frac{9}{16}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt[3]{2}}{5}+\frac{\sqrt[3]{3}}{10}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^{2n-1}}{n!}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2n-1}\,(x+3)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}x^n}{n!}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ в околі точки $x_0=2$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^x\cdot\ln(1+x)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=x\ \cos^2 x$ б) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{3}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\cos 1^\circ$; б) $\int_0^{1/4} x\cos\sqrt{x}\,dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''=y'+xy+1$ при заданих початкових умовах $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду $2\ell=4$, задану рівністю

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x\le 0\\ \frac{x}{2}-1\,, & 0<x\le 2\end{cases}$$

Варіант 25

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{8}{8}+\frac{11}{16}+\dots$ б) $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\dots$

   в) $\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{6}{3!}+\dots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

   $\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}-\dots$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3\sqrt{2}}+\frac{x^5}{4\sqrt{3}}-\dots$ б) $1-\frac{x+3}{3\cdot 3}+\frac{(x+3)^2}{5\cdot 3^2}-\dots$

   в) $1-\frac{5x^2}{3^2\sqrt{3}}+\frac{9x^4}{3^4\sqrt{5}}-\dots$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt{x^5}$ в околі точки $x_0=4$.
5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

   $$f(x)=\ln(1+e^x)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=e^{-\frac{3x^2}{2}}$ б) $f(x)=\sqrt[3]{8-x}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\sqrt[4]{17}$ б) $\int_0^{0.5} e^{-2x^2}dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''=xy'-y^2+x$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=1$.
9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=2x$, задану в інтервалі $(0;\pi)$.

Варіант 26

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\ldots$ б) $\frac{2}{4}+\frac{5}{7}+\frac{8}{10}+\ldots$

в) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[4]{9}}+\frac{1}{\sqrt[4]{25}}+\frac{1}{\sqrt[4]{49}}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3n-1}$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n x^{n-1}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x^2}$ в околі точки $x_0=1$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=x^2e^{-2x}$ б) $f(x)=\frac{1}{1-2x^2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\sin 10^{\circ}$ б) $\int_0^{1/2}\ln(1+\mathrm{x}^2)dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''-y\sin x=x^2$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2+1,$ задану на інтервалі (-2;2)

Варіант 27

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{2}{2}+\frac{5}{3}+\frac{8}{4}+\ldots$ б) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\ldots$

   в) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{5}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6}\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{5}{7}+\frac{7}{10}-\frac{9}{13}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)\ \cdot 2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x-3)^n}{n!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n+1}}{2n+5}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\sqrt[3]{x-3}$ в околі точки $x_0=4$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=3^{\cos x}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=\sin\frac{x^3}{2}$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

   а) $\sqrt[3]{29}$ б) $\int_0^{0.5} a\mathrm{rctgx}\ dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y''=2y'y+e^x$ при заданих початкових умовах $y(0)=0,\ y'(0)=1$

9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=2x-1$, задану на інтервалі (-1;1)

Варіант 28

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

   а) $\frac{1}{1}+\frac{4}{3}+\frac{16}{5}+\dots$ б) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{12}}+\dots$

   в) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{9}{8}+\dots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{1}{5}+\frac{3}{7}-\frac{5}{9}+\dots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^2+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!(x+1)^n}{n+1}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n+1)\ln(n+1)}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{3-x}$ в околі точки $x_0=2$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=e^{\sqrt{x+1}}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

   а) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$ б) $f(x)=\cos^2 x$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити

а) $\sin\frac{\pi}{12}$ з точністю до 0,0001 б) $\int_0^{0.5} a\mathrm{rctgx}\,dx$ з точністю до 0,001:

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''+xy^2-2=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=x^2+1$, задану на інтервалі (0; π)

Варіант 29

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{9}{2\cdot 3\cdot 4}\ldots$ б) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{7}{4}}+\ldots$

в) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^2}+\frac{1}{4\cdot 3^3}-\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{1}{n}\left(x-1\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{\left(2n+1\right)^2}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ в околі точки $x_0=9$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ б) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ б) $\int_0^1 x^2\cos x\, dx$

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв'язком диференціального рівняння $y''-\frac{y'}{x}-y=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$, задану на інтервалі (0; π)

Варіант 30

1. Дослідити збіжність даних числових рядів:

а) $\frac{1}{3}+\frac{3}{7}+\frac{5}{11}\ldots$; б) $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{3+n^2}+\ldots$; в) $\frac{2}{1}+\frac{4}{e}+\frac{8}{e^2}+\ldots$

2. З'ясувати, чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним або розбіжним:

$$-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 7}+\ldots$$

3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду й дослідити його збіжність на границях інтервалу:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2\cdot 2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\cdot 3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{(n+3)^2}$

4. Знайти ряд Тейлора функції $f(x)=\frac{1}{x-4}$ в околі точки $x_0=5$.

5. Знайти три перші відмінні від нуля члени ряду Маклорена функції

$$f(x)=x^2\ln(1+2x)$$

6. Розкласти в ряд по степенях x дані функції, користуючись відомими розкладами функцій у ряд Маклорена:

а) $f(x)=\frac{x}{1+x}$ б) $f(x)=x^2\cos\frac{x}{2}$.

7. Користуючись розкладами в ряд Маклорена функцій, обчислити з точністю до 0,001:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ б) $\int_0^{0.5}\ln(1-x^2)dx$:

8. Знайти три перші відмінні від нуля члени розкладу у ряд Маклорена функції $y=f(x)$, що є частковим розв’язком диференціального рівняння $y''-x^2y-x+2=0$ при заданих початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

9. Розкласти в ряд Фур'є по синусах функцію $f(x)=\frac{x^2}{4}$, задану на інтервалі (-π; 0)

Література

1. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.1. К.: КНЕУ, 2001. 546 с. Ч.2. К.: КНЕУ, 2002. 451 с.
2. Вища математика: Підручник. У 2-х кн. Кн. 1. Основні розділи. За ред. Г.Л. Куленіча. К.: Либідь, 2003. 400 с.
3. Городній М.Ф., Митник Ю.В., Кашпіровський О.І. Основи математичного аналізу. Київ: КМ Академія, 2004. ч.1. 98с
4. Дубовик В.П. Вища математика: Навчальний посібник. К.: А.С.К., 2006. 648 с.
5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник. За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К.: А. С. К., 2005. 480 с.
6. James Stewart, Daniel Clegg, Saleem Watson. Calculus: Early Transcendentals, 9th Edition. Cengage Learning, 2020. 1376 p.
7. Victor Henner, Tatyana Belozerova, Kyle Forinash. Mathematical Methods in Physics. CRC Press, 2009. 860 p.
8. Mattias Blennow. Mathematical Methods for Physics and Engineering 1st edition. CRC Press, 2018. 760 p.
9. Valery Serov. Fourier Series, Fourier Transform and their Applications to Mathematical Physics. Springer, 2017. 545 p.
10. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. К.:Либідь, 2014. 363с.
11. Gilbert Strang. Calculus. Wellesley-Cambridge Press, 1991. 671 p.
12. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб. Ч.3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. К.: Книги України ЛТД, 2009. 400 с.
13. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. К.: Либідь, 1993. 320 с.

Навчальне видання

Оксана Анатоліївна ЖЕРНОВНИКОВА

Олександр Дмитрович ЧІБІСОВ

Методичні рекомендації

Вибрані розділи математичного аналізу*:*
елементи теорії рядів

Відповідальний за випуск: Жерновникова О.А.

Підписано до друку 16.02.2023. Ум. друк. арк. 3,8.

Відповідальність за дотримання вимог академічної доброчесності несуть автори.

Харківський національний педагогічний
університет імені Г.С. Сковороди
Україна, 61002, м. Харків, вул. Алчевських, 29.