УДК 531.396; 537.634; 519.6

С.С. Зуб

ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА ВО ВНЕШНИХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЯХ. МАГНИТНОЕ УДЕРЖАНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Введение

В данной статье обобщаются все предыдущие подходы к исследованию динамической устойчивости магнитных тел в аксиально-симметричном магнитном поле с учетом силы тяжести. Предлагается гамильтониан, описывающий широкий класс моделей с симметричным волчком, взаимодействующим с внешними аксиально-симметричными полями. Рассматривается устойчивость относительных равновесий. Найдены необходимые и достаточные условия динамического равновесия. Исследование проводится с использованием инерциальной системы отсчета. Устойчивость исследуется с помощью теоремы Ратью–Ортега [1]. Эквивалентность алгоритмов этой теоремы и классического метода энергии-момента обоснована в работе [2].

1. Движение симметричного волчка во внешнем поле

Имеем скобки Пуассона

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij},\ \{\nu_i, \nu_k\} = 0,\ \{\pi_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijl}\nu_l,\ \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l .$$

и гамильтониан

$$h(((\vec{x}, \vec{\nu}), (\vec{p}, \vec{\pi}))) = \frac{1}{2M}\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2I_\perp}\vec{\pi}^{\,2} + V(\vec{x}, \vec{\nu}) .$$

Так как кинетическая энергия $SO(3)$ симметрична, условие аксиальной симметрии гамильтониана системы сводится к требованию аксиальной симметрии потенциальной энергии

$$\{V, j_3\} = x^1\frac{\partial V}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial V}{\partial x^1} + \nu^1\frac{\partial V}{\partial \nu^2} - \nu^2\frac{\partial V}{\partial \nu^1} = 0 ,$$

которое также можно записать в виде

$$\vec{x}_\perp \times (\nabla^x V)_\perp + \vec{\nu}_\perp \times (\nabla^\nu V)_\perp = 0. \qquad (1)$$

Как будет показано ниже, соотношение (1) тождественно выполняется на орбите относительного равновесия.

2. Интегралы движения и присоединенный гамильтониан

Интегралы движения и форма присоединенного гамильтониана остаются такими же, как и в задаче об орбитроне, а именно:

$$h^\xi = h - \omega J_3 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

$$\begin{cases} C_1(\vec{\nu}, \vec{\pi}) = \vec{\nu}^{\,2}; \\ C_2(\vec{\nu}, \vec{\pi}) = \vec{\nu}\cdot\vec{\pi}; \\ J_3(((\vec{x}, \vec{\nu}),\ (\vec{p}, \vec{\pi}))) = \pi_3 + x_1 p_2 - x_2 p_1. \end{cases}$$

3. Необходимые условия относительного равновесия

Из выражения для присоединенного гамильтониана имеем

$$\mathrm{d}h^{\xi}=\left(\frac{1}{M}\vec{p}-\omega \mathrm{e}_3\times\vec{x}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{p}+\left(\frac{1}{I_\perp}\vec{\pi}-\omega\vec{e}_3+\lambda_2\vec{\nu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\pi}+$$

$$+(\nabla^x V+\omega\vec{e}_3\times\vec{p})\cdot\mathrm{d}\vec{x}+(\nabla^\nu V+2\lambda_1\vec{\nu}+\lambda_2\vec{\pi})\cdot\mathrm{d}\vec{\nu}\,.$$

Получаем необходимые условия относительного равновесия

$$\begin{cases}\vec{p}=M\omega(\vec{e}_3\times\vec{x});\\ \nabla^x V+\omega\vec{e}_3\times\vec{p}=0;\\ \vec{\pi}=I_\perp\omega\vec{e}_3-\lambda_2 I_\perp\vec{\nu};\\ \nabla^\nu V+2\lambda_1\vec{\nu}+\lambda_2\vec{\pi}=0;\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\nabla^x V=M\omega^2\vec{x}_\perp;\\ \lambda_2=\omega\nu_3-\dfrac{1}{I_\perp}C_2;\\ \nabla^\nu V+\lambda\vec{\nu}+I_\perp\omega\lambda_2\vec{e}_3=0;\end{cases}\tag{3}$$

$$\lambda=2\lambda_1-\lambda_2^2 I_\perp.\tag{4}$$

Отсюда следует

$$\begin{cases}\nabla^x V=M\omega^2\vec{x}_\perp;\\ (\nabla^\nu V)_\perp=-\lambda\vec{\nu}_\perp;\\ \omega C_2=\omega\langle\vec{\nu},\vec{\pi}\rangle=\dfrac{\partial V}{\partial\nu_z}+(\lambda+I_\perp\omega^2)\nu_z.\end{cases}$$

Здесь символ $\vec{u}_\perp$ означает составляющую вектора $\vec{u}$, ортогональную оси симметрии системы z.

Замечание 1. Вектор $\vec{\nu}$ и множитель Лагранжа ω находятся из первых двух строк (2) или, что то же самое, из первой строки (3). Это отличается от орбитрона, где было постулировано, что $\vec{\nu}$ направлен вдоль оси z.

Замечание 2. Соотношения (3) не только определяют $\vec{\nu}$ и множители Лагранжа $\omega,\lambda_1,\lambda_2$, но и накладывают ограничения на функцию V дополнительно к ее аксиальной симметрии.

4. Опорная точка и допустимые вариации

Выбираем следующую опорную точку:

$$\begin{cases}\vec{x}_0=r_0\vec{e}_1;\\ \vec{p}_0=M\omega r_0\vec{e}_2;\\ \vec{\nu}_0=\vec{\nu}_0,\ \vec{\nu}_0^2=1;\\ \vec{\pi}_0=C_2\vec{\nu}_0+I_\perp\omega P_\perp^{\nu_0}(\vec{e}_3).\end{cases}\tag{5}$$

Как уже отмечалось, вектор $\vec{\nu}_0$ должен быть найден из необходимых условий устойчивости. Допустимые вариации $v=(\delta x,\delta p,\delta\nu,\delta\pi)$ в опорной точке удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases}\delta_\nu C_1 = 2\nu_{0i}\delta\nu_i = 0;\\ \delta_\nu C_2 = \pi_{0i}\delta\nu_i + \nu_{0i}\delta\pi_i = 0;\\ \delta_\nu J_3 = \delta\pi_3 + p_0\delta x_1 + r_0\delta p_2 = 0.\end{cases}$$

К этим условиям добавляем условие трансверсальности, которое, в отличие от задачи об орбитроне, берем в более простом виде, что упрощает дальнейшие вычисления. Таким образом, полный набор условий может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases}\delta\nu_3 = -\dfrac{1}{\nu_{0z}}\langle\vec{\nu}_{0\perp}, \delta\vec{\nu}\rangle;\\ \delta\pi_3 = -\dfrac{1}{\nu_{0z}}\left\langle\vec{\nu}_{0\perp}, \left(\delta\vec{\pi} - \dfrac{I_\perp\omega}{\nu_{0z}}\delta\vec{\nu}\right)\right\rangle;\\ \delta p_2 = -\dfrac{p_0}{r_0}\delta x_1 - \dfrac{1}{r_0}\delta\pi_3;\\ \delta x_2 = 0;\end{cases} \tag{6}$$

Замечание 3. То, что для касательного к орбите вектора не может выполняться $\dot{x}_{02} = 0$, следует из второй строки (5), если $r_0 \neq 0$ и $\omega \neq 0$, что всегда предполагается.

5. Система координат на плоскости, удобная для анализа связей на вариации

Анализ связей на вариации удобно выполнить в системе координат, приспособленной для вектора $\vec{\nu}_{0\perp}$.

Замечание 4. Если этот вектор (как в случае орбитрона) равен нулю, то новая система координат на плоскости совпадает с исходной декартовой.

Рассмотрим систему координат на плоскости, связанную с выделенным вектором $\vec{a}$. Пусть на плоскости задана система координат $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и вектор $\vec{a}$. Направим базисный вектор $\vec{E}_1$ новой системы координат $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ по вектору $\vec{a}$. Для того чтобы новая систем координат была правильно ($\vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = \vec{e}_3$) ориентирована, должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases}\vec{E}_1 = \dfrac{a^1}{|\vec{a}|}\vec{e}_1 + \dfrac{a^2}{|\vec{a}|}\vec{e}_2 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|};\\ \vec{E}_2 = -\dfrac{a^2}{|\vec{a}|}\vec{e}_1 + \dfrac{a^1}{|\vec{a}|}\vec{e}_2.\end{cases}$$

Введем матрицу

$$\alpha = \begin{bmatrix}\dfrac{a^1}{|\vec{a}|} & -\dfrac{a^2}{|\vec{a}|}\\ \dfrac{a^2}{|\vec{a}|} & \dfrac{a^1}{|\vec{a}|}\end{bmatrix}, \quad \vec{E}_i = \alpha_{ki}\vec{e}_k, \quad \alpha_{ki} = \langle\vec{e}_k, \vec{E}_i\rangle$$

Тогда $\alpha_{ki}X_i = \langle\vec{e}_k, X_i\vec{E}_i\rangle = \langle\vec{e}_k, \vec{x}\rangle = x_k$, т.е. $x_k = \alpha_{ki}X_i$, $\vec{\mathrm{x}} = \alpha\vec{\mathrm{X}}$

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}X_1 - \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}X_2;\\ x_2 = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}X_1 + \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}X_2;\end{cases}$$

Соответственно,

$$X_k = (\alpha^{-1})_{ki} x_i, \;\; \vec{\mathrm{X}} = \alpha^{-1}\vec{x}$$

$$\alpha^{-1} = \alpha^T = \begin{bmatrix} \dfrac{a^1}{|\vec{a}|} & \dfrac{a^2}{|\vec{a}|} \\ -\dfrac{a^2}{|\vec{a}|} & \dfrac{a^1}{|\vec{a}|} \end{bmatrix}.$$

В данном случае выделенный вектор на плоскости — это $\vec{\nu}_{0\perp}$, поэтому

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}\begin{bmatrix} \nu_{01} & -\nu_{02} \\ \nu_{02} & \nu_{01} \end{bmatrix}, \;\; \vec{E}_A = \alpha_{BA}\vec{e}_B, \;\; \alpha_{BA} = \langle \vec{e}_B, \vec{E}_A \rangle \,;$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}(\nu_{01}\vec{e}_1 + \nu_{02}\vec{e}_2) = \dfrac{\vec{\nu}_{0\perp}}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}; \\ \vec{E}_2 = \dfrac{1}{|\vec{\nu}_{0\perp}|}(-\nu_{02}\vec{e}_1 + \nu_{01}\vec{e}_2); \end{cases}$$

6. Связи на вариации в новой системе координат

Для вариаций $\delta x, \delta p$ используем исходную систему координат, а для вариаций $\delta\nu, \delta\pi$ — базис $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{e}_3\}$; в новой системе координат обозначим их буквами $\delta\mathrm{N}, \delta\Pi$. Тогда связи (6) будут иметь вид

$$\begin{cases} \delta\nu_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\delta\mathrm{N}_1; \\ \delta\pi_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\left(\delta\Pi_1 - \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1\right); \\ \delta p_2 = -M\omega\delta x_1 + \dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\left(\delta\Pi_1 - \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1\right); \\ \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

Введем переменную $\delta\Pi_1'$

$$\begin{cases} \delta\Pi_1' = \delta\Pi_1 - \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1; \\ \delta\Pi_1 = \delta\Pi_1' + \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta\mathrm{N}_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \delta\nu_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\delta\mathrm{N}_1; \\ \delta\pi_3 = -\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\delta\Pi_1'; \\ \delta p_2 = -M\omega\delta x_1 + \dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta\Pi_1'; \\ \delta x_2 = 0. \end{cases}$$

7. Исходная и приведенная квадратичные формы

Рассмотрим вторую вариацию присоединенного гамильтониана ($i, j, k = 1...3,\ A, B, C = 1...2$)

$$\delta_v^2 h^\lambda = \frac{1}{M}\delta p_3^2 + \frac{1}{M}\delta p_1^2 + \frac{1}{M}\delta p_2^2 + \frac{1}{I_\perp}\delta\vec{\pi}_\perp^2 + \frac{1}{I_\perp}\delta\pi_3^2 + 2\lambda_2\langle\delta\vec{\pi}_\perp, \delta\vec{\nu}_\perp\rangle +$$

$$+ 2\lambda_2\delta\pi_3\delta\nu_3 + 2\lambda_1\delta\vec{\nu}_\perp^2 + 2\lambda_1\delta\nu_3^2 - 2\omega(\delta x_1\delta p_2 - \delta x_2\delta p_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^i\partial x^j}\delta x^i\delta x^j +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial x^i\partial\nu^A}\delta x^i\delta\nu^A + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x^i\partial\nu^3}\delta x^i\delta\nu^3 + \frac{\partial^2 V}{\partial\nu^A\partial\nu^B}\delta\nu^A\delta\nu^B +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^A\partial\nu^3}\delta\nu^A\delta\nu^3 + \frac{\partial^2 V}{\partial\nu_3^2}\delta\nu_3^2. \tag{7}$$

Используя связи, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}\delta p_2^2 = M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1\delta\Pi_1' + \dfrac{\vec{\nu}_{0\perp}^2}{Mr_0^2\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2; \\ \dfrac{1}{I_\perp}\delta\vec{\pi}^2 = \dfrac{1}{I_\perp}\dfrac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2 + 2\dfrac{1}{\nu_{0z}}\omega\delta\Pi_1'\delta N_1 + \dfrac{1}{\nu_{0z}^2}I_\perp\omega^2\delta N_1^2 + \dfrac{1}{I_\perp}\delta\Pi_2^2; \\ \langle\delta\vec{\pi}, \delta\vec{\nu}\rangle = \dfrac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'\delta N_1 + \delta\Pi_2\delta N_2 + \dfrac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta N_1^2; \\ \delta\vec{\nu}^2 = \dfrac{1}{\nu_{0z}^2}\delta N_1^2 + \delta N_2^2; \\ -2\omega(\delta x_1\delta p_2 - \delta x_2\delta p_1) = 2M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\dfrac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1\delta\Pi_1' \end{cases} \tag{8}$$

Ниже применяются следующие обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^i\partial N_A} = d^2V(\vec{e}_i, \vec{E}_A); \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_A\partial N_B} = d^2V(\vec{E}_A, \vec{E}_B); \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial N_A\partial\nu_3} = \partial_{\vec{E}_A}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\nu_3}\right), \end{cases}$$

причем в выражениях этого типа всегда считается, что векторы $\vec{e}_i$ касательны к пространству переменных $\vec{x}$, а $\vec{E}_A$ — к пространству переменных $\vec{\nu}$. Подставляя (8) в (7), находим приведенную квадратичную форму

$$\delta_v^2 h^\lambda = \frac{1}{M}\delta p_3^2 + \frac{1}{M}\delta p_1^2 + M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1\delta\Pi_1' + \frac{\vec{\nu}_{0\perp}^2}{Mr_0^2\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2 +$$

$$+ \frac{1}{I_\perp}\frac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'^2 + 2\frac{1}{\nu_{0z}}\omega\delta\Pi_1'\delta N_1 + \frac{1}{\nu_{0z}^2}I_\perp\omega^2\delta N_1^2 + \frac{1}{I_\perp}\delta\Pi_2^2 +$$

$$+ 2\lambda_2\left(\frac{1}{\nu_{0z}^2}\delta\Pi_1'\delta N_1 + \delta\Pi_2\delta N_2 + \frac{1}{\nu_{0z}}I_\perp\omega\delta N_1^2\right) + 2\lambda_1\left(\frac{1}{\nu_{0z}^2}\delta N_1^2 + \delta N_2^2\right) +$$

$$+2M\omega^2\delta x_1^2 - 2\omega\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{r_0\nu_{0z}}\delta x_1\delta\Pi_1' + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\delta x_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_3}\delta x_1\delta x_3 + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\delta x_3^2 +$$

$$-2\frac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial \mathrm{N}_A}\delta x^1\delta\mathrm{N}_A + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x^3\partial \mathrm{N}_A}\delta x^3\delta\mathrm{N}_A + -2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial \nu^3}\delta x^1\delta\mathrm{N}_1 -$$

$$-2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^3\partial \nu^3}\delta x^3\delta\mathrm{N}_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1^2}\delta\mathrm{N}_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1\partial \mathrm{N}_2}\delta\mathrm{N}_1\delta\mathrm{N}_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}\delta\mathrm{N}_2^2 -$$

$$-2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1\partial \nu^3}\delta\mathrm{N}_1^2 - 2\frac{|\vec{\nu}_{0\perp}|}{\nu_{0z}}\frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2\partial \nu^3}\delta\mathrm{N}_1\delta\mathrm{N}_2 + \frac{\vec{\nu}_{0\perp}^2}{\nu_{0z}^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \nu_3^2}\delta\mathrm{N}_1^2.$$

8. Достаточные условия устойчивости

При использовании метода последовательного исключения изолированных квадратов в порядке $\delta p_3, \delta p_1, \delta\Pi_2, \delta\Pi_1', \delta\mathrm{N}_2, \delta\mathrm{N}_1$, получаем

$$\begin{cases} \lambda + \mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{E}_2) > 0; \\ \lambda + \mathrm{d}^2V(\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}},\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) + \dfrac{I_\perp^2\vec{\nu}_{0\perp}^2}{I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega+\lambda_2)^2 + \vec{\nu}_{0\perp}^2 I_\perp\omega^2 - \dfrac{\mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})^2}{\lambda + \mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{E}_2)} > 0; \\ A > 0, \quad C > 0, \quad AC - B^2 > 0, \end{cases}$$

$$A = M\omega^2\frac{3Mr_0^2 - I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2}{I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial \mathrm{N}_2}\right)^2}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}} -$$

$$-\frac{\left(2\dfrac{I_\perp|\vec{\nu}_{0\perp}|p_0}{I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega+\lambda_2) + \mathrm{d}^2V(\vec{e}_1,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) - \dfrac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial \mathrm{N}_2}d^2V(\vec{E}_2,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}\right)^2}{\lambda + \mathrm{d}^2V(\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}},\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) + \dfrac{I_\perp^2\vec{\nu}_{0\perp}^2}{I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega+\lambda_2)^2 + \vec{\nu}_{0\perp}^2 I_\perp\omega^2 - \dfrac{\mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})^2}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}};$$

$$B = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial \mathrm{N}_2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3\partial \mathrm{N}_2}\right)}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}} - \left(d^2V(\vec{e}_3,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) - \frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3\partial \mathrm{N}_2}\mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}\right)\times$$

$$\times\frac{\left(2\dfrac{I_\perp|\vec{\nu}_{0\perp}|p_0}{I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega+\lambda_2) + d^2V(\vec{e}_1,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) - \dfrac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial \mathrm{N}_2}\mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}\right)}{\lambda + \mathrm{d}^2V(\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}},\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) + \dfrac{I_\perp^2\vec{\nu}_{0\perp}^2}{I_\perp\vec{\nu}_{0\perp}^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega+\lambda_2)^2 + \vec{\nu}_{0\perp}^2 I_\perp\omega^2 - \dfrac{\mathrm{d}^2V(\vec{E}_2,\vec{\nu}_0^{\mathrm{T}})^2}{\lambda + \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}};$$

$$C=\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\partial x_3^2-\frac{\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3\partial \mathrm{N}_2}\right)^2}{\lambda+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}-$$

$$-\frac{\left(d^2V(\vec e_3,\vec\nu_0^{\mathrm T})-\dfrac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3\partial \mathrm{N}_2}d^2V(\vec E_2,\vec\nu_0^{\mathrm T})}{\lambda+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}\right)^2}{\lambda+d^2V(\vec\nu_0^{\mathrm T},\vec\nu_0^{\mathrm T})+\dfrac{I_\perp^2\vec\nu_{0\perp}^2}{I_\perp\vec\nu_{0\perp}^2+Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega+\lambda_2)^2+\vec\nu_{0\perp}^2 I_\perp\omega^2-\dfrac{d^2V(\vec E_2,\vec\nu_0^{\mathrm T})^2}{\lambda+\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}}}.$$

Замечание 5. Для вывода условий положительной определенности квадратичной формы применялся метод последовательного исключения изолированных квадратов, аналогичный процедуре Гильберта–Шмидта ортогонализации базиса.

В данном случае используются следующие обозначения:

$$\vec\nu_0^{\mathrm T}=\nu_{0z}\vec E_1-|\vec\nu_{0\perp}|\vec e_3,\ \langle\vec\nu_0,\vec\nu_0^{\mathrm T}\rangle=0\,.$$

$$\begin{cases}\mathrm d^2V(\vec E_2,\vec\nu_0^{\mathrm T})=\nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1\partial \mathrm{N}_2}-|\vec\nu_{0\perp}|\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2\partial\nu^3};\\ \mathrm d^2V(\vec e_1,\vec\nu_0^{\mathrm T})=\nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial \mathrm{N}_1}-|\vec\nu_{0\perp}|\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1\partial\nu^3};\\ \mathrm d^2V(\vec e_3,\vec\nu_0^{\mathrm T})=\nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^3\partial \mathrm{N}_1}-|\vec\nu_{0\perp}|\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^3\partial\nu^3};\\ \mathrm d^2V(\vec\nu_0^{\mathrm T},\vec\nu_0^{\mathrm T})=\nu_{0z}^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1^2}-2|\vec\nu_{0\perp}|\nu_{0z}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1\partial\nu^3}+\vec\nu_{0\perp}^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_3^2}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial \mathrm{N}_1}=\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial\nu_1}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec\nu_{0\perp}|}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial\nu_2}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec\nu_{0\perp}|};\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial \mathrm{N}_2}=-\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial\nu_1}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec\nu_{0\perp}|}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial\nu_2}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec\nu_{0\perp}|};\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1\partial\nu^3}=\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1\partial\nu_3}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec\nu_{0\perp}|}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_2\partial\nu_3}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec\nu_{0\perp}|};\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2\partial\nu^3}=-\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1\partial\nu_3}\dfrac{\nu_{02}}{|\vec\nu_{0\perp}|}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_2\partial\nu_3}\dfrac{\nu_{01}}{|\vec\nu_{0\perp}|};\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1^2}=\dfrac{1}{|\vec\nu_{0\perp}|^2}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1^2}\nu_{01}^2+2\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\nu_{01}\nu_{02}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_2^2}\nu_{02}^2\right);\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1\partial \mathrm{N}_2}=\dfrac{1}{|\vec\nu_{0\perp}|^2}\left(-\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1^2}\nu_{01}\nu_{02}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_2^2}\nu_{01}\nu_{02}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1\partial\nu_2}(\nu_{01}^2-\nu_{02}^2)\right);\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2}=\dfrac{1}{|\vec\nu_{0\perp}|^2}\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1^2}\nu_{02}^2-2\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\nu_{01}\nu_{02}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial\nu_2^2}\nu_{01}^2\right);\end{cases}$$

9. Случай диполя в магнитном поле

Изучим вопрос о возможности левитации диполя в аксиально-симметричном магнитном поле. Потенциальная энергия в этом случае имеет

$$V = -\mu\langle\vec{\nu}, \vec{B}\rangle + Mgz = -\mu\nu^i B_i(\vec{x}) + Mgz, \tag{9}$$

где $\vec{B}$ — аксиально-симметричное магнитное поле, а $\mu > 0$.

Из (9) следует, что $\nabla^\nu V = -\mu\vec{B}$. Поэтому

$$\begin{cases} \lambda_2 = \omega\nu_z - \dfrac{1}{I_\perp}C_2; \\ \omega C_2 = -\mu B_z + (\lambda + I_\perp\omega^2)\nu_z; \\ \vec{\nu}_\perp = \dfrac{\mu}{\lambda}\vec{B}_\perp. \end{cases} \tag{10}$$

Из (10) следует, что $\vec{\nu}_\perp$ имеет то же самое направление, что и $\vec{B}_\perp$ (включая знак). Это условие согласуется с уравнением $\nabla^x V = M\omega^2\vec{x}_\perp$ для потенциальной энергии диполя (9).

Поэтому опорная точка в данном случае может быть выбрана в виде

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = r_0\vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = M\omega r_0\vec{e}_2; \\ \vec{\nu}_0 = \nu_z\vec{e}_3 + \nu_r\vec{e}_1, \ \nu_r^2 + \nu_z^2 = 1, \ \nu_r = \dfrac{\mu}{\lambda}B_r; \\ \vec{\pi}_0 = I_\perp\omega\vec{e}_3 - \lambda_2 I_\perp\vec{\nu}_0; \end{cases}$$

т.е. вектор $\vec{\nu}_0$ лежит в плоскости $\mathrm{span}(\vec{x}_0, \vec{e}_3)$. Упрощением в дипольном случае будет $\mathrm{d}_\nu^2 V = 0$.

Соотношения для аксиально-симметричного магнитного поля. Предполагается, что источники магнитного поля локализованы, а движение намагниченного тела происходит в области, свободной от источников.

Тогда в области движения выполняются уравнения магнитостатики без источников. Для аксиально-симметричного магнитного поля это, в частности, означает, что в цилиндрической системе координат имеются только две компоненты поля $B_r(r, z), B_z(r, z)$, зависящие от переменных r и z.

В данном случае справедливы следующие уравнения магнитостатики:

$$\begin{cases} B_{r,z} - B_{z,r} = 0; \\ B_{z,z} + B_{r,r} + \dfrac{1}{r}B_r = 0; \\ B_{z,zz} + B_{z,rr} + \dfrac{1}{r}B_{z,r} = 0. \end{cases}$$

Для якобиана магнитного поля

$$\begin{cases} B_{A,C} = B_{C,A} = \dfrac{B_r}{r}\delta_{AC} + \left(B_{r,r} - \dfrac{B_r}{r}\right)\dfrac{x_A x_C}{r^2}; \\ B_{3,C} = B_{z,r}\dfrac{x_C}{r}; \\ B_{3,3} = B_{z,z} \end{cases}$$

Для гессиана

$$\begin{cases} B_{A,\,CD} = -B_{z,\,rz}\dfrac{x_A x_C x_D}{r^3} \\ -\dfrac{1}{r}\left(B_{z,\,z} + \dfrac{2B_r}{r}\right)\left(\dfrac{x_A\delta_{CD} + x_C\delta_{AD} + x_D\delta_{AC}}{r} - \dfrac{4x_A x_C x_D}{r^3}\right); \\ B_{3,\,CD} = \dfrac{1}{r}B_{z,\,r}\delta_{CD} + \left(B_{z,\,rr} - \dfrac{1}{r}B_{z,\,r}\right)\dfrac{x_C x_D}{r^2}; \\ B_{3,\,C3} = \dfrac{x_C}{r}(B_{z,\,zr}); \\ B_{3,33} = B_{z,\,zz}; \end{cases}$$

Компоненты якобиана в опорной точке при $\vec{x} = (r_0,\, 0,\, 0)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{cases} B_{1,1} = B_{r,\,r}; \\ B_{1,2} = B_{2,1} = 0; \\ B_{2,2} = \dfrac{1}{r}B_r; \\ B_{3,1} = B_{z,\,r}; \\ B_{3,2} = 0; \\ B_{3,3} = B_{z,\,z} \end{cases}$$

Компоненты гессиана в опорной точке

$$\begin{cases} B_{1,11} = -B_{z,\,zr} + \dfrac{1}{r}\left(B_{z,\,z} + \dfrac{2}{r}B_r\right) = -B_{z,\,zr} - \dfrac{1}{r}\left(B_{r,\,r} - \dfrac{1}{r}B_r\right); \\ B_{1,12} = B_{1,21} = 0; \\ B_{1,22} = \dfrac{1}{r}\left(B_{z,\,z} + \dfrac{2}{r}B_r\right) = -\dfrac{1}{r}\left(B_{r,\,r} - \dfrac{1}{r}B_r\right); \\ B_{2,11} = B_{1,12} = 0; \\ B_{2,12} = B_{2,21} = B_{1,22} = \dfrac{1}{r}\left(B_{z,\,z} + \dfrac{2}{r}B_r\right) = -\dfrac{1}{r}\left(B_{r,\,r} - \dfrac{1}{r}B_r\right); \\ B_{2,22} = 0; \\ B_{3,11} = B_{z,\,rr}; \\ B_{3,12} = 0; \\ B_{3,13} = B_{z,\,rz}; \\ B_{3,23} = 0; \\ B_{3,33} = B_{z,\,zz}; \end{cases}$$

Уравнения равновесия для магнитного диполя. Из соотношения (9) имеем

$$\begin{cases} V_{,C} = \dfrac{\partial V}{\partial x^C} = -\mu\nu^i B_{i,C} = -\mu\nu^D B_{D,C} - \mu\nu^3 B_{3,C}; \\ V_{,3} = \dfrac{\partial V}{\partial x^3} = -\mu\nu^i B_{i,3} + Mg = -\mu\nu^D B_{D,3} - \mu\nu^3 B_{3,3} + Mg. \end{cases}$$

Учитывая третью строку из (10) свойства аксиально-симметричного магнитного поля, получаем

$$\begin{cases} \nu_r = \dfrac{\mu}{\lambda}B_r; \\ \nu^C = \nu^r\dfrac{x^C}{r} \end{cases}$$

и уравнения равновесия принимают вид

$$
\begin{cases}
\nu^z B_{z,\,z} + \nu^r B_{r,\,z} = \dfrac{M}{\mu} g; \\
\nu^z B_{r,\,z} + \nu^r B_{r,r} = -\dfrac{M}{\mu}\omega^2 r; \\
\nu_r^2 + \nu_z^2 = 1.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Достаточные условия устойчивости для магнитного диполя в аксиально-симметричном магнитном поле. В опорной точке имеем

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial \mathrm{N}_1} = \mathrm{s}ign(\nu_r)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_1}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mathrm{N}_2} = \mathrm{s}ign(\nu_r)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_2}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1 \partial \nu^3} = \mathrm{s}ign(\nu_r)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_3}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2 \partial \nu^3} = sign(\nu_r)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2 \partial \nu_3}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1^2}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_1 \partial \mathrm{N}_2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{N}_2^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \nu_2^2}; \\
\mathrm{d}^2 V(\vec{e}_1, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) = \mathrm{s}ign(\nu_r)\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_1}\nu_z - \nu_r \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial \nu^3}\right); \\
\mathrm{d}^2 V(\vec{e}_3, \vec{\nu}_0^{\mathrm{T}}) = \mathrm{s}ign(\nu_r)\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial \nu_1}\nu_z - \nu_r \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial \nu^3}\right);
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_1} = -\mu B_{r,\,r}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_2} = 0; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial \nu_1} = -\mu B_{r,\,z}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial \nu_2} = 0; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \nu_1}\nu_z - \nu_r \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^1 \partial \nu^3} = -\mu(B_{r,\,r}\nu_z - B_{r,\,z}\nu_r); \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial \nu_1}\nu_z - \nu_r \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^3 \partial \nu^3} = -\mu(B_{r,\,z}\nu_z - B_{z,\,z}\nu_r);
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = -\mu\nu^z B_{z,rr} + \mu\nu^r B_{z,zr} - \mu\nu^r \dfrac{1}{r}\left(B_{z,z} + \dfrac{2}{r}B_r\right); \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} = -\mu\nu^z B_{z,rz} - \mu\nu^r B_{z,rr}; \\
\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = -\mu\nu^z B_{z,zz} - \mu\nu^r B_{z,rz};
\end{cases}
$$

ISSN 0572-2691

$$\begin{cases} \mu(B_{r,\,z}\nu_r - B_{r,\,r}\nu_z) = Mg + \dfrac{\mu B_r}{r}\nu_z; \\ \mu(B_{z,\,z}\nu_r - B_{r,\,z}\nu_z) = M\omega^2 r - \dfrac{\mu B_r}{r}\nu_r. \end{cases}$$

Тогда условия устойчивости относительного равновесия (см. разд. 8) примут вид

$$\begin{cases} \lambda = \mu\dfrac{B_z}{\nu_z} + \dfrac{\omega C_2}{\nu_z} - I_\perp\omega^2 > 0; \\ A > 0, \quad C > 0, \quad AC - B^2 > 0, \end{cases} \tag{12}$$

$$A = M\omega^2\frac{3Mr_0^2 - I_\perp\nu_r^2}{I_\perp\nu_r^2 + Mr_0^2} - \mu\nu^z B_{z,\,rr} + \mu\nu^r B_{z,\,zr} - \mu\nu^r\frac{1}{r}\left(B_{z,\,z} + \frac{2}{r}B_r\right) -$$

$$-\frac{\left(2\dfrac{I_\perp\nu_r p_0}{I_\perp\nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2) + \left(Mg + \dfrac{\mu B_r}{r}\nu_z\right)\right)^2}{\lambda + \dfrac{I_\perp^2\nu_r^2}{I_\perp\nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2)^2 + \nu_r^2 I_\perp\omega^2}; \tag{13}$$

$$B = -\mu\nu^z B_{z,rz} - \mu\nu^r B_{z,rr} -$$

$$-\frac{\left(2\dfrac{I_\perp\nu_r p_0}{I_\perp\nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2) + \left(Mg + \dfrac{\mu B_r}{r}\nu_z\right)\right)}{\lambda + \dfrac{I_\perp^2\nu_r^2}{I_\perp\nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2)^2 + \nu_r^2 I_\perp\omega^2}\left(M\omega^2 r - \frac{\mu B_r}{r}\nu_r\right) \tag{14}$$

$$C = -\mu\nu^z B_{z,\,zz} - \mu\nu^r B_{z,\,rz} - \frac{\left(M\omega^2 r - \dfrac{\mu B_r}{r}\nu_r\right)^2}{\lambda + \dfrac{I_\perp^2\nu_r^2}{I_\perp\nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_{0z}\omega + \lambda_2)^2 + \nu_r^2 I_\perp\omega^2}, \tag{15}$$

где значения величин ν_r, ν_z, ω могут быть найдены из (11), а λ_2, λ, $\vec{\pi}_0$ — из (10).

10. Орбитрон

Наиболее простой пример — это орбитрон. Под полем орбитрона будем понимать аксиально-симметричное относительно оси z и зеркально-симметричное относительно экваториальной плоскости поле [3]. Покажем, что существуют устойчивые относительные равновесия, пространственно расположенные в экваториальной плоскости.

В этом случае отсутствует сила тяжести

$$V(\vec{x}, \vec{\nu}) = -\mu B_i(\vec{x})\nu^i = -\mu\langle\vec{B}(\vec{x}), \vec{\nu}\rangle.$$

В виду зеркальной симметрии опорная точка имеет вид

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = r_0\vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = M\omega r_0\vec{e}_2; \\ \vec{\nu}_0 = \sigma\vec{e}_3, \quad \sigma = \pm 1; \\ \vec{\pi}_0 = \sigma C_2\vec{e}_3 = \pi_3\vec{e}_3 = \pi_0\vec{e}_3; \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} \lambda_2 = \sigma\left(\omega - \dfrac{1}{I_\perp}\pi_0\right); \\ \lambda = \sigma\mu B_z + \omega(\pi_0 - I_\perp\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{z,z} = 0; \\ B_{z,r} = -\sigma\dfrac{M}{\mu}\omega^2 r_0; \\ \vec{B} = B_z\vec{e}_3. \end{cases}$$

Рассмотрим достаточные условия, используя все предыдущие упрощения из (12)–(15)

$$\begin{cases} \lambda = \sigma\mu B_z + \omega\pi_0 - I_\perp\omega^2 > 0; \\ B = 0; \end{cases}$$

$$A = 3M\omega^2 - \mu\sigma B_{z,\,rr} > 0, \tag{16}$$

$$C = -\sigma\mu B_{z,\,zz} - \frac{(M\omega^2 r)^2}{\lambda} > 0. \tag{17}$$

Из (17) следует, что $-\sigma B_{z,\,zz} > 0$, поэтому условиям (16), (17) можно придать вид

$$\begin{cases} -\sigma B_{z,\,zz} > 0; \\ -\sigma\left(3\dfrac{1}{r}B_{z,\,r} + B_{z,rr}\right) = -\sigma\left(-B_{z,\,zz} + 2\dfrac{1}{r}B_{z,\,r}\right) > 0; \\ \omega\pi_0 > -\sigma\mu B_z + I_\perp\omega^2 + \dfrac{\mu(B_{z,\,r})^2}{-\sigma B_{z,\,zz}}; \end{cases} \tag{18}$$

Эти условия эквивалентны выводам из [3].

Дипольтрон. В стандартном орбитроне [4] в качестве источников магнитного поля использовались магнитные полюса. Результаты, приведенные выше, показывают, что другие виды источников поля также обеспечивают устойчивость.

Особый интерес представляют источники поля в виде магнитных диполей, так как эта модель поля общепризнана. Кроме того, известно, что устойчивые динамические конфигурации не реализуются в системе магнитных диполей, которые взаимодействуют исключительно с магнитными силами (так называемая «проблема $\dfrac{1}{R^3}$»), что добавляет интерес к такому выбору модельного поля.

Рассмотрим систему с двумя источниками магнитного поля в виде магнитных диполей, расположенных на оси z в точках $z = \pm h$ с равными магнитными моментами, ориентированными вдоль одной оси z. Очевидно, что поле этой системы аксиально-симметрично относительно оси z и зеркально-симметрично — относительно плоскости $z = 0$.

Замечание 6. В данной системе есть внешние силы, которые удерживают источники диполей в заданном положении.

 ISSN 0572-2691

Поле магнитного диполя хорошо известно

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\langle\vec{m}, \vec{R}\rangle\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3}\right),$$

где $\vec{m}$ — вектор магнитного момента и $\vec{R}$ — радиус-вектор от диполя до точки наблюдения поля.

Для диполей, расположенных на оси z в точках $\pm h$ в компонентах декартовой системы, имеем

$$\begin{cases} B_C^{\pm} = 3q\dfrac{(x_3 \mp h)x_C}{D_{\mp}^{5/2}}, & C = 1,2; \\ B_3^{\pm} = q\dfrac{2(x_3 \mp h)^2 - (x_1^2 + x_2^2)}{D_{\mp}^{5/2}}, & D_{\pm} = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \mp h)^2; \end{cases} \tag{19}$$

где $q = \dfrac{\mu_0}{4\pi}|\vec{m}|$ — «магнитный заряд», эквивалент полюса магнитного диполя.

Используя (19) и беря производную от B_z по r при $z = 0$, найдем все необходимые величины.

$$\begin{cases} B_z = 2q(2h^2 - r_0^2)D_0^{-5/2}; \\ B_{z,\,r} = B_{r,\,z} = r\beta_{,\,z} = -6qr_0(-r_0^2 + 4h^2)D_0^{-7/2}; \\ B_{z,\,zz} = 6q(3r_0^4 - 24r_0^2h^2 + 8h^4)D_0^{-9/2}; \\ \dfrac{3}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -6q(r_0^4 - 28r_0^2h^2 + 16h^4)D_0^{-9/2}, \end{cases}$$

где $D_0 = r_0^2 + h^2$.

Тогда из первых двух условий (18) получаем геометрические условия дипольтрона

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{r_0}{h}\right)^4 - 24\left(\dfrac{r_0}{h}\right)^2 + 8 < 0; \\ \left(\dfrac{r_0}{h}\right)^4 - 28\left(\dfrac{r_0}{h}\right)^2 + 16 > 0 \end{cases}$$

или

$$2\sqrt{1 - \sqrt{5/6}} < \frac{r_0}{h} < \sqrt{9 - \sqrt{65}}. \tag{20}$$

при выполнении геометрических условий (20) третье условие в (18) всегда может быть выполнено.

12. Левитация орбитрона

Изучим вопрос о возможности левитации диполя в аксиально-симметричном магнитном поле. Как было показано выше, поле орбитрона может обеспечить уровновешивание центробежной силы устойчивым образом. Но, как показывают исследования, оно плохо приспособлено для уравновешивания силы тяжести.

Поэтому введем дополнительное поле, линейно зависящее от координат. Пусть

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}^L(\vec{x}) + \vec{B}^O(\vec{x}),$$

где $\vec{B}^L$ — линейно зависящее от координат магнитное поле, а $\vec{B}^O$ — зеркально-симметричное относительно плоскости $z = 0$ поле (разумеется, оба поля аксиально-симметричны).

Предполагается, что поле $\vec{B}^L$ предназначено, в основном, для уравновешивания силы тяжести, а поле $\vec{B}^O$ — центробежной силы.

Рассмотрим относительные равновесия при $z = 0$.

Важные свойства введенных полей таковы:

$$\begin{cases} B_r^O \,|_{z=0} = 0 \to (B_{r,\,r}^O = 0) \,\&\, (B_{r,\,rr}^O = 0) \,|_{z=0} \\ \to (B_{z,\,z}^O = 0) \,\&\, (B_{z,\,rz}^O = 0) \,|_{z=0}; \\ \mathrm{d}^2 \vec{B}^L = 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} B_z^L = B_0 + B'z; \\ B_r^L = -\frac{1}{2} B'r; \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} B_{z,z}^L = B'; \\ B_{r,z}^L = B_{z,r}^L = 0; \\ B_{r,r}^L = -\frac{1}{2} B'. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} B_{z,z} = B'; \\ B_{r,z} = B_{r,z}^O; \\ B_{r,r} = -\frac{1}{2} B'; \end{cases}$$

Необходимые условия относительного равновесия. Представим уравнения равенства сил

$$\begin{cases} \nu^z + \beta \nu^r = \kappa; \\ \beta \nu^z - \frac{1}{2} \nu^r = -\kappa \xi^2; \\ \nu_r^2 + \nu_z^2 = 1, \end{cases} \tag{22}$$

где $\beta = \frac{B_{r,\,z}^O}{B'}$, $\kappa = \frac{Mg}{\mu B'}$, $\xi^2 = \frac{\omega^2 r}{g}$.

Отсюда следует, что

$$\nu_r = \frac{1}{1+\beta^2} \left(\beta\kappa \pm \sqrt{1+\beta^2-\kappa^2} \right) \tag{23}$$

$$\xi^2 = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} + \beta^2 \right) \nu_r - \beta \tag{24}$$

Из соотношения $\nu_r = \frac{\mu}{\lambda} B_r$ и (21) имеем

$$\nu_r = -\frac{Mgr}{2\kappa\lambda} \to \operatorname{sign}(\nu_r) = -\operatorname{sign}(\kappa)\,. \tag{25}$$

Таким образом, знак ν_r должен быть противоположен знаку κ.

Следовательно, в выражении (24) первый член должен быть отрицательным, и тогда знак β должен быть отрицательным.

Кроме того, так как вектор $\vec{v}$ полностью определяется из системы (22), величина λ также определена соотношением (25). Поэтому соотношение

ISSN 0572-2691

$$\lambda = \mu \frac{B_z}{\nu_z} + \frac{\omega C_2}{\nu_z} - I_\perp \omega^2 > 0;$$

следует рассматривать не как уравнение для λ, а, скорее, как ограничения для B_z и π.

Из (23) и (24) имеем

$$\xi^2 = -\frac{\beta}{2(1+\beta^2)} \pm \frac{\frac{1}{2}+\beta^2}{1+\beta^2} \frac{\sqrt{1+\beta^2-\kappa^2}}{\kappa}.$$

Если $|\kappa| = 1,$ то данная величина при знаке минус перед корнем становится отрицательной.

Замечание 7. Очевидно, так как $\beta < 0$, выбор знака плюс является предпочтительным, когда $\kappa > 0,$ и, наоборот, для $\kappa < 0$ надо выбирать знак минус.

В противном случае в наиболее интересной области $\kappa \approx 1$ получается отрицательное значение для

$$\xi^2 = -\frac{\beta}{2(1+\beta^2)} + \frac{\frac{1}{2}+\beta^2}{1+\beta^2} \frac{\sqrt{1+\beta^2-\kappa^2}}{|\kappa|}.$$

Тогда

$$\nu_r = \frac{\kappa}{1+\beta^2}\left(\beta + \frac{\sqrt{1+\beta^2-\kappa^2}}{|\kappa|}\right).$$

Очевидно, что при небольшом превышении величиной $|\kappa|$ единицы величина ν_r будет малой величиной.

$$|\kappa| = 1+\varepsilon \to \nu_r = O(\varepsilon)(\varepsilon > 0) \tag{26}$$

$$\lambda = -\frac{Mgr}{2\kappa\nu_r} \to \frac{Mgr}{\lambda} = O(\varepsilon) > 0 \tag{27}$$

$$\xi^2 = |\beta| + O(\varepsilon) \tag{28}$$

Достаточные условия устойчивости для левитации орбитрона. Выражения для величин A, B, C принимают вид

$$\begin{cases} A = M\omega^2 \dfrac{3Mr_0^2 - I_\perp \nu_r^2}{I_\perp \nu_r^2 + Mr_0^2} - \mu\nu^z B_{z,\,rr} - \dfrac{\left(2\dfrac{I_\perp \nu_r p_0}{I_\perp \nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2) + Mg\left(1 - \dfrac{\nu_z}{2\kappa}\right)\right)^2}{\lambda + \dfrac{I_\perp^2 \nu_r^2}{I_\perp \nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2)^2 + \nu_r^2 I_\perp \omega^2}; \\ B = -\mu\nu^r B_{z,\,rr} - \dfrac{\left(2\dfrac{I_\perp \nu_r p_0}{I_\perp \nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2) + Mg\left(1 - \dfrac{\nu_z}{2\kappa}\right)\right)}{\lambda + \dfrac{I_\perp^2 \nu_r^2}{I_\perp \nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2)^2 + \nu_r^2 I_\perp \omega^2} Mg\left(\xi^2 - \dfrac{Mgr}{4\kappa^2\lambda}\right); \\ C = -\mu\nu^z B_{z,\,zz} - \dfrac{(Mg)^2\left(\xi^2 - \dfrac{Mgr}{4\kappa^2\lambda}\right)^2}{\lambda + \dfrac{I_\perp^2 \nu_r^2}{I_\perp \nu_r^2 + Mr_0^2}(\nu_z\omega + \lambda_2)^2 + \nu_r^2 I_\perp \omega^2}; \end{cases}$$

Учитывая (26)–(28), можно записать достаточные условия в виде

$$\begin{cases} a = \dfrac{r}{Mg} A = -\sigma \dfrac{\mu r}{Mg}\left(\dfrac{3}{r} B_{z,\,r} + B_{z,\,rr}\right) - O(\varepsilon) > 0; \\ b = \dfrac{r}{Mg} B = O(\varepsilon); \\ c = \dfrac{r}{Mg} C = -\sigma \dfrac{\mu r}{Mg} B_{z,\,zz} - O(\varepsilon) > 0; \\ ac - b^2 > 0; \\ \lambda = \sigma\mu B_z + \omega\pi_0 - I_\perp \omega^2 \gg \dfrac{Mgr}{2}; \\ O(\varepsilon) > 0; \end{cases} \tag{29}$$

Следовательно, выполняются геометрические условия

$$\begin{cases} -\sigma B_{z,\,zz} > 0; \\ -\sigma\left(\dfrac{3}{r} B_{z,\,r} + B_{z,\,rr}\right) = -\sigma\left(-B_{z,\,zz} + \dfrac{2}{r} B_{z,\,r}\right) > 0, \end{cases}$$

которые обеспечивают соблюдение достаточных условий устойчивости (29) при достаточно малых $\varepsilon > 0$. В пределе при $\varepsilon \to +0$ для магнитного поля имеем случай орбитрона.

Таким образом, геометрические условия вместе с динамическим условием

$$\omega\pi_0 \gg -\sigma\mu B_z + I_\perp \omega^2 + Mgr$$

дают полный набор условий устойчивости системы.

Для достаточно больших $|\pi_0|$ (параметр B_z также является регулируемым) можно добиться выполнения всех условий (29), т.е. орбитрон может левитировать.

13. Численное моделирование левитации орбитрона

Уравнения движения симметричного волчка во внешнем поле приведены в [5]. Безразмерные переменные вводятся следующим образом [6]:

$$\begin{cases} \vec{x} = h\vec{\chi}; \\ \vec{p} = Mh\sqrt{\dfrac{g}{h}}\vec{v}; \\ t = \tau\sqrt{\dfrac{h}{g}} \to \omega = \varpi\sqrt{\dfrac{g}{h}} \to \zeta = \varpi\sqrt{\rho}; \\ I_\perp = Mh^2 i_\perp; \\ \vec{\pi} = Mh^2\sqrt{\dfrac{g}{h}}\vec{\eta}; \\ \vec{B} = hB'\vec{b}. \end{cases}$$

Замечание 8. Вернемся к обозначениям $\vec{x}, \vec{p}, \vec{\pi}, t, \omega$, но будем считать их безразмерными.

Линейное поле в безразмерном виде:

$$\begin{cases} b_3^L = b_0^L + z; \quad b_0^L = \dfrac{B_0}{hB'}; \\ b_r^L = -\dfrac{1}{2} r. \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{cases}$$

ISSN 0572-2691

Поле орбитрона в безразмерном виде:

$$\vec{b}^{O}(\vec{x}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \vec{b}^{\varepsilon}(\vec{x}),\ \vec{b}^{\varepsilon}(\vec{x}) = \varepsilon q \frac{\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_z}{|\vec{x} - \varepsilon \vec{e}_z|^3},\ q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{h^3 B'},$$

где R — «магнитный заряд».

Уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{p}; \\ \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{1}{\kappa} \nabla \langle \vec{\nu}, \vec{b} \rangle - \vec{e}_3, \quad (\dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{1}{\kappa} \nu_j b_{j,i}); \\ \dfrac{d\vec{\nu}}{dt} = \dfrac{1}{i_\perp} \vec{\pi} \times \vec{\nu}; \\ \dfrac{d\vec{\pi}}{dt} = \dfrac{1}{\kappa} \vec{\nu} \times \vec{b}. \end{cases} \tag{30}$$

Для численного моделирования движения диполя следует еще задать опорную точку, т.е. начальные условия. В безразмерном виде они выглядят так:

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = r_0 \vec{e}_1; \\ \vec{p}_0 = r_0 \omega \vec{e}_2; \\ \vec{\nu}_0 = \nu_z \vec{e}_3 + \nu_r \vec{e}_1, \quad \nu_r^2 + \nu_z^2 = 1; \\ \vec{\pi}_0 = i_\perp \omega (\vec{e}_3 - \nu_z \vec{\nu}_0) + c_2 \vec{\nu}_0; \end{cases} \tag{31}$$

Величины ν_r и ω находятся из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \beta = b_{1,3}^{O}; \\ \xi^2 = -\dfrac{\beta}{2(1+\beta^2)} + \dfrac{\frac{1}{2} + \beta^2}{1+\beta^2} \dfrac{\sqrt{1+\beta^2 - \kappa^2}}{|\kappa|}; \\ \nu_r = \dfrac{\kappa}{1+\beta^2} \left(\beta + \dfrac{\sqrt{1+\beta^2-\kappa^2}}{|\kappa|} \right); \\ \omega^2 = \dfrac{1}{r_0} \xi^2; \end{cases}$$

Из последнего уравнения (31) следует, что

$$\pi_{01} = \frac{\nu_r}{\nu_z} (\pi_{03} - i_\perp \omega)$$

Величина $|\pi_{03}|$ должна быть достаточно большой, так как

$$\frac{\lambda}{Mgh} = b_3 + \omega \pi_{03} - i_\perp \omega^2 \gg \frac{r_0}{2} \tag{32}$$

а величина $|\kappa| = 1 + \varepsilon$, где ε — малая положительная величина.

Вычислим якобиан магнитного поля

$$\begin{cases} b_{3,C}^{L} = 0; \\ b_{3,3}^{L} = 1; \\ b_{C,D}^{L} = -\dfrac{1}{2} \delta_{CD}; \\ b_{C,3}^{L} = 0; \end{cases}$$

$$b_{i,j}^O = \sum_{\varepsilon=\pm 1} b_{i,j}^{\varepsilon}, \quad b_{i,j}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon q}{|\vec{x}-\varepsilon\vec{e}_z|^3}\left(\delta_{ij} - \frac{3(x_i-\varepsilon\delta_{i3})(x_j-\varepsilon\delta_{j3})}{|\vec{x}-\varepsilon\vec{e}_z|^2}\right)$$

В частности, в опорной точке

$$\beta = \frac{6qr_0}{(1+r_0^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{33}$$

Безразмерные уравнения (30) можно получить из размерных, положив $M=1,\ g=1,\ \mu=\frac{1}{\kappa}$.

Замечание 9. Поле орбитрона можно получить из размерного при $h=1,\ Q=\frac{4\pi q}{\mu_0}$.

Замечание 10. (к вычислению начальных условий).

1. Величина $\beta<0$, поэтому в соответствии с (33) должно быть $q<0$;
2. Величина $|\kappa|=1+\varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$;
3. При выполнении п. 2 должно быть $\mathrm{sign}(\nu_z)=\mathrm{sign}(\kappa)$;
4. Из (32) имеет смысл принять $\mathrm{sign}(\omega)=\mathrm{sign}(\pi_{03})$.

При вычислении начальных условий для моделирования движения в окрестности относительного равновесия, будем считать выполненными пп. 1–4, т.е. эти предположения будут заложены в процедуру вычисления.

Заключение

Развита методика исследования устойчивости симметричных магнитных тел во внешних аксиально-симметричных полях, основанная на методах энергии-момента, энергии-Казимира и их обобщениях. В общем виде выведены законченные аналитические формулы достаточных условий устойчивости. Это сделано благодаря новому, более простому, условию трансверсальности и методу исключения изолированных квадратов. Приведены конструктивные доказательства устойчивости определенного класса магнитных систем.

В связи с этим актуальным представляется исследование проблем управления [7, 8], идентификации параметров [9], управляемости [10, 11] для рассмотренных выше систем с помощью импульсных воздействий.

Данная статья посвящается светлой памяти моего учителя и постоянного соавтора Зуба Сергея Ивановича. Она завершает цикл наших работ [12] по исследованию систем, обобщающих орбитрон.

С.С. Зуб

ГАМІЛЬТОНОВА ДИНАМІКА СИМЕТРИЧНОЇ ДЗИҐИ В ЗОВНІШНІХ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ ПОЛЯХ. МАГНІТНЕ УТРИМАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

Запропоновано новий підхід до дослідження динамічної стійкості магнітних тіл у зовнішніх аксіально-симетричних полях. Розглядається гамільтоніан, який описує широкий клас математичних моделей симетричної дзиґи, яка взаємодіє з зовнішніми аксіально-симетричними полями та однорідним полем сили тяжіння. Метод застосовано до ряду відомих і нових марема тичних моделей.

S.S. Zub

HAMILTONIAN DYNAMICS OF A SYMMETRIC TOP IN EXTERNAL AXIALLY SYMMETRIC FIELDS. MAGNETIC CONFINEMENT OF A RIGID BODY

A new approach of study the dynamical stability of the magnetic bodies in the external axially symmetric magnetic fields is proposed in this article. The hamiltonian for a wide class of mathematical models of interaction a symmetrical top with external axially symmetric fields and homogeneous field of gravity force is considered. The method was applied to some known and new mathematical models.

1. *Ortega J.-P., Ratiu T.S.* Non-linear stability of singular relative periodic orbits in Hamiltonian systems with symmetry // J. Geom. Phys. — 1999. — **32**, N 2. — P. 160–188.
2. *Mathematical* Model of Interaction of a Symmetric Top with an Axially Symmetric External Field. / S.I. Zub, S.S. Zub, V.S. Lyashko, N.I. Lyashko, S.I. Lyashko // Cybernetics and systems analysis. — 2017 — **53**, N 3. — P. 333–345.
3. *Grigoryeva L., Ortega J.–P., Zub S.* Stability of hamiltonian relative equilibria in symmetric magnetically con_ned rigid bodies // The J. of Geom. Mech. — 2014. — **6**, — P. 373–415.
4. *Zub S. S.* Stable orbital motion of magnetic dipole in the field of permanent magnets. Physica D. — 2014. — **275.** — P. 67–73.
5. *Zub S.S.* Magnetic levitation in orbitron system // Probl. At. Sci. Technol. — 2014. — **5**(93). — P. 31–34.
6. *Zub S.S.*, *Lyashko N.I., Lyashko S.I., Cherniavskyi A.Y.* (2019) Levitating Orbitron: Grid Computing // Adv. in Intel. Syst. and Comp. — 2018. — **754.** Springer, Cham.
7. *Lyashko S.I., Nomirovski D.A.* Generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin weakly permeable inclusions // Cybernetics and systems analysis. — 2003. — **39**, N 5. — P. 737–745.
8. *Lyashko S.I., Klyushin D.A., Onotskyi V.V., Lyashko N.I.* Optimal control of drug delivery from microneedle systems // Ibid. — 2018. — **54**, N 3. — P. 1–9.
9. *Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V.* Identification of age — structured contamination sources in ground water, Optimal control of age — structured populations in economy, demography, and the invironment. — London; New York : Routledge. — 2013. — P. 277–292.
10. *Lyashko S.I., Semenov V.V.* Controllability in classes of singular influences for linear distributed parameter systems // Cybernetics and systems analysis. — 2001 — № 1. — P. 18–42.
11. *Lyashko S.I., Nomirovski D.A., Sergienko T.I.* Trajectory and Final Controllability in Hyperbolic and Pseudohyperbolic Systems with Generalized Actions // Ibid. — 2001. — № 5. — P. 157–166.
12. *Zub S.S., Zub S.I.* Hamiltonian dynamics of a symmetric top in external fields having axial symmetry. Levitating Orbitron // Cornell University. — 2015. — arXiv:1502.04674. — https://arxiv.org/abs/1502.04674.

Получено 31.05.2018