

**Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г. С. Сковороди**

«До друку та в світ дозволяю»

проректор з наукової, інноваційної
і міжнародної діяльності
професор С. В. Бережна

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА:
ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ**

Харків – 2022

**Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г. С. Сковороди**

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА:
ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ**

Навчально-методичний посібник

Харків – 2022

Рецензенти:

Сіра І. Т. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди;
Лукьянова В. А. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих дисциплін Харківського національного університету радіоелектроніки.

Затверджено вченою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди
протокол № 5 від 24.06.2022р.

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

Математика: Основи математичної логіки. Навчально-методичний посібник – Харків, 2022. – 28 с.

Навчально-методичний посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня галузі знань 01 «Освіта/Педагогіка» спеціальності 013 «Початкова освіта» з метою організації самостійної роботи та підготовки до практичних занять з теми «Основні поняття математичної логіки» курсу математики.

Навчально-методичний посібник надає здобувачам вищої освіти можливість усвідомити сутність та практично опрацювати основні поняття теорії математичної логіки: прості і складені висловлення, операції з ними; поняття про предикат та визначення множини істинності складеного предиката.

Видано за рахунок авторів

©Харківський національний педагогічний
університет імені Г. С. Сковороди
© Іонова О. М.
© Титаренко Л. І.
© Масюк О. М.
© Білецька С. А.

Вступ

Даний навчально-методичний посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня навчання зі спеціальності 013 «Початкова освіта» з метою організації самостійної роботи та підготовки до практичних занять з теми «Основні поняття математичної логіки» (Поняття про висловлення. Предикати і операції над ними.) курсу математики.

Навчально-методичний посібник надає студентам можливість усвідомити сутність та практично опрацювати основні поняття теорії математичної логіки: прості і складені висловлення, операції з ними; поняття про предикат та визначення множини істинності складеного предиката.

Навчально-методичний посібник охоплює весь програмний матеріал вивчення теми і розрахований на 6 годин практичних занять. Кожне заняття передбачає попередню самостійну роботу студента. Самостійна робота – основа навчальної діяльності студента – є обов'язковою умовою свідомого засвоєння знань з математики. На самому практичному занятті викладач виступає в ролі консультанта, тому мета кожного практичного заняття – це узагальнення та систематизація знань студента з кожної конкретної теми.

Тематика практичних занять відповідає Програмі навчальної дисципліни “Математика”.

Теми практичних занять (6 год.):

Заняття 1. Висловлення та операції над ними. Складання таблиць істинності складених висловлень. - 2 год.

Заняття 2. Предикати та операції над ними. Множина істинності складеного предиката. – 2 год.

Заняття 3. Відношення логічного слідування і логічної еквівалентності. – 2 год.

Для попередньої самостійної роботи студентів рекомендована основна й додаткова література у загальному списку до всіх занять теми, а також теми рефератів, рекомендовані для більш глибокого опрацювання матеріалу.

Тема: «Основні поняття математичної логіки»

Заняття 1. Висловлення та операції над ними. Складання таблиць істинності складених висловлень.

Мета заняття: сформувати у студентів уявлення про висловлення та операції з ними, вчити визначати істинність складеного висловлення та складати таблиці істинності. Навчити застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Хід заняття:

I. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [4, С.29-42; 5, С.33-42; 6, С.130-141; 7, С.15-29] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання завдань.

Питання для самоконтролю.

1. Розкрити сутність поняття “висловлення”.
2. Висловлення та їх позначення.
3. Які висловлення називаються простими, а які складеними? Як утворюються складені висловлення?
4. Назвати операції з висловленнями.
5. Дати означення заперечення висловлення.
6. Що таке кон'юнкція двох висловлень? Як вона позначається?
7. Що таке диз'юнкція двох висловлень? Як вона позначається?
8. Дати означення операції імплікації двох висловлень.
9. Що таке еквіваленція висловлень? Як вона позначається?

II. Практична частина

Приклад 1. Серед наступних висловлень вкажіть елементарні та складені: а) число 17 не ділиться на 5; б) число 12 ділиться на 3 і на 4; в) число 7 є дільником числа 14.

Розв'язання. а) Дане висловлення є складеним, тому що воно містить логічну «зв'язку» “не”. б) Висловлення «Число 12 ділиться на 3 і на 4» є складеним, тому що воно містить логічну «зв'язку» “і”. в) Дане висловлення є елементарним, тому що воно не містить логічних «зв'язок».

Приклад 2. Нехай В — висловлення «сьогодні середа», А — висловлення «іде дощ». Надати словесне формулювання складених висловлень: а) $A \wedge \bar{B}$; б) $A \Rightarrow B$; в) $\bar{B} \Leftrightarrow \bar{A}$.

Розв'язання. а) «Сьогодні середа і не іде дощ»; б) «Якщо сьогодні середа, то іде дощ»; в) «Сьогодні не середа в тому і тільки в тому випадку, якщо не іде дощ».

Приклад 3. Скласти таблицю істинності для висловлення $\bar{A} \vee (B \vee C)$.

Розв'язання. Складаємо таблицю, вказуючи усі можливі

комбінації істинності висловлень A , B і C . Записуємо поряд зі стовпцем C стовпчик $\bar{A}$. Висловлення $B \vee C$ істинне, якщо хоча б одне з цих висловлень істинне, тобто якщо або у стовпчику B або стовпчику C стоїть буква «і» (істина) або «1», в інших випадках $B \vee C$ – хибне (ставимо букву «х» або 0). Аналізуємо останню операцію диз'юнкції висловлень $\bar{A}$ та $(B \vee C)$, заповнюємо останній стовпчик.

A	B	C	$\bar{A}$	$B \vee C$	$\bar{A} \vee (B \vee C)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Завдання для студентів:

№ 1. Серед поданих речень вкажіть висловлення:

- 1) $3 \cdot 4 + 5 > 17$;
- 2) $9 \cdot 3 + 1 = 4$;
- 3) $(9 - 5)(9 + 5) = 56$;
- 4) хоча б одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5 є коренем рівняння $x^2 - 1 = 0$;
- 5) для будь-якого натурального числа n правильна нерівність $3n + 2 > 0$;
- 6) $3x + 13 = 5$;
- 7) $3y + 5 < 12$;
- 8) $xy = ux$

№2. Побудуйте заперечення даних висловлень та вкажіть що є істинним – само висловлення чи його заперечення: а) число 27 кратне 7; б) $3 + 6 = 9$; в) $38 > 44$; г) $7 \leq 7$.

№3. Серед поданих висловлень вкажіть елементарні та складені висловлення: а) «число 17 не ділиться на 5»; б) «число 13 – просте і не ділиться на 2»; в) « 12^2 - парне число або непарне»; г) «усякий рівнобедрений трикутник прямокутний і рівнобічний»; д) « $2 < 3 < 5$ »; е) « $5 \geq -3$ »; ж) «якщо число 14 ділиться на 2, то воно парне»; з) « $2 \leq 3 < 5$ ».

№4. Нехай маємо такі висловлення: A = «сьогодні ясно»; B = «сьогодні іде сніг»; C = «я буду писати листи»; D = «сьогодні понеділок». За поданими висловленнями сформулюйте складені висловлення:

- 1) $A \wedge D$;
- 2) $A \wedge \bar{B}$;
- 3) $D \wedge A \wedge \bar{C}$;
- 4) $A \vee D$;
- 5) $B \Rightarrow C$;
- 6) $C \Leftrightarrow D$;
- 7) $(A \wedge B) \Rightarrow D$.

№5. Дані висловлення: А: «Сьогодні температура повітря нижче 0°C», В: «Сьогодні ясно», С: «Я піду кататися на лижах» і D: «Я піду кататися на ковзанах». Сформулюйте висловлення, які мають таку структуру: а) $A \wedge B$; б) $A \wedge D$; в) $C \vee D$; г) $A \wedge (C \vee D)$; д) $A \wedge B \wedge (C \vee D)$.

№6. Нехай задані висловлення: А: «сьогодні спекотно»; В: «сьогодні іде дощ»; С: «сьогодні сухо»; D: «сьогодні я не буду працювати»; Е: «сьогодні я піду у кіно». Запишіть формулами такі висловлення:

- 1) «сьогодні спекотно і не іде дощ»;
- 2) «сьогодні спекотно і сиро»;
- 3) «сьогодні сухо і я не буду працювати»;
- 4) «сьогодні я буду працювати і не піду у кіно»;
- 5) «сьогодні я не буду працювати і піду у кіно»;
- 6) «сьогодні іде дощ і я не буду працювати».

№7. Нехай задані висловлення: А $\equiv$: «завтра буде дощ»; В $\equiv$: «ми підемо у театр»; С $\equiv$: «завтра буде ясно»; D $\equiv$: «завтра заняття закінчатися раніше». За допомогою символів логіки запишіть складені висловлення:

а) «якщо завтра буде дощ, то заняття закінчатися раніше і ми підемо у театр»;

б) «завтра буде ясно або буде дощ, і заняття закінчатися раніше і ми підемо у театр у тому і тільки у тому випадку, якщо не буде дощу і буде ясно».

№8. Доведіть, що дані висловлення істинні при будь-яких значеннях істинності висловлень А і В:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $A \wedge A \Leftrightarrow A$; | 6) $(\bar{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A$; | 11) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \bar{A} \vee B$; |
| 2) $A \vee A \Leftrightarrow A$; | 7) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$; | 12) $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$; |
| 3) $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$; | 8) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$; | 13) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$. |
| 4) $A \vee \bar{A}$; | 9) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$; | |
| 5) $\overline{A \wedge \bar{A}}$; | 10) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$; | |

№9. Складіть таблиці істинності для даних висловлень:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| 1) $\bar{A} \vee B$; | 5) $(\bar{A} \wedge B) \Rightarrow C$; | 9) $A \Rightarrow (\bar{A} \vee B)$; |
| 2) $(A \wedge B) \wedge C$; | 6) $(A \wedge B) \Rightarrow \bar{C}$; | 10) $(\bar{A} \vee B) \Rightarrow C$; |
| 3) $C \Rightarrow (A \wedge B)$; | 7) $(A \vee B) \Rightarrow \bar{C}$; | 11) $\overline{A \vee B} \Rightarrow C$; |
| 4) $A \Rightarrow (A \vee \bar{C})$; | 8) $A \Rightarrow (\bar{B} \wedge C)$; | 12) $A \Rightarrow (\bar{A} \wedge B)$; |
| | | 13) $A \wedge (\bar{A} \wedge B)$. |

№10. Складіть таблиці істинності для даних висловлень:

- 1) $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$;
- 2) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
- 3) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \Rightarrow C$;
- 4) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow A \Rightarrow (B \wedge C)$

III. Огляд теоретичних питань.

Поняття “висловлення”.

Поняття “висловлення” є основним у математичній логіці - науці про форми і закони мислення. Формально логіка як наука сформувалася ще у IV ст. до н.е. у працях давньогрецького філософа Аристотеля.

Висловлення – це будь-яке твердження, відносно якого можна сказати істинне воно чи хибне. При визначенні поняття «висловлення» потрібно чітко відрізняти розповідні речення, одні з яких є висловленнями, інші - ні. Наприклад: 1) «Полтавщина — колыска багатьох великих українських талантів». 2) «Студент — творча особистість». Перше твердження — висловлення, воно несе в собі істинну інформацію. Дійсно, Полтавщина—батьківщина І.П. Котляревського, Г.С. Сковороди, М.В. Остроградського, А.С. Макаренка та інших. Друге речення не містить в собі певної інформації. Далеко не кожний студент є творчою особистістю.

Висловлення позначають великими латинськими буквами: А, В, С та т.ін. Наприклад, А: “Сьогодні середа”. Істинність або хибність висловлення називається його **значенням істинності** і позначається відповідно: «і» (або 1) та «х» (або 0).

Операції над висловленнями.

У звичайній мові з простих речень за допомогою різних сполучників (логічних зв'язок) таких, як: «і», «або», «щоб», «якщо...», «то...» і т.п. – утворюють складні речення. Отже, висловлення поділяють на прості і складні (або складені).

З висловленнями можна виконувати логічні операції, за допомогою яких з двох або кількох простих висловлень можна утворювати складні (або складені) висловлення. Існує 5 логічних операцій над висловленнями:

- 1) заперечення висловлення ($\bar{A}$);
- 2) кон'юнкція висловлень (логічний добуток) ($A \wedge B$);
- 3) диз'юнкція висловлювань (логічна сума) ($A \vee B$);
- 4) імплікація висловлювань ($A \Rightarrow B$);

5) еквіваленція висловлювань ($A \Leftrightarrow B$).

Заперечення висловлення.

Запереченням висловлення A називається висловлення $\bar{A}$ (читають «не A »), яке істинне тоді, коли A хибне, і хибне, коли A – істинне.

Таблиця істинності для заперечення висловлення A має вигляд:

A	$\bar{A}$
і	х
х	і

Для формулювання заперечення висловлення використовують частки «не», «ні», «не можна». Наприклад, A : «Число 17 – просте».

$\bar{A}$: «Число 17 – не просте» або «Неправильно, що число 17- просте».

Кон'юнкція висловлень.

Кон'юнкцією двох висловлень A і B називається висловлення $A \wedge B$ (читають « A і B »), яке істинне лише за умови, що істинні обидва висловлення A і B , і хибне в усіх інших випадках.

Таблиця істинності для кон'юнкції висловлень A і B має вигляд:

A	B	$A \wedge B$
і	і	і
і	х	х
х	і	х
х	х	х

Наприклад, подвійна нерівність « $3 < 8 < 11$ » - це кон'юнкція двох простих висловлень A : « $3 < 8$ » і B : « $8 < 11$ ».

Властивості кон'юнкції висловлень

1) комутативний (переставний) закон: $A \wedge B \equiv B \wedge A$

2) асоціативний (сполучний) закон: $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

Диз'юнкція висловлень.

Диз'юнкцією двох висловлень A і B називається висловлення $A \vee B$ (читають « A або B »), яке істинне за умови, що хоча б одне з висловлень A або B істинне.

Таблиця істинності для диз'юнкції висловлень A і B має вигляд:

A	B	$A \vee B$
і	і	і
і	х	і
х	і	і
х	х	х

Наприклад, нестрога числова нерівність $12 \geq 7$ – це істинна

диз'юнкція двох висловлень: A : "12>7" - і, B : "12=7" - х

Властивості (закони) диз'юнкції висловлень

- 1) комутативний (переставний) закон: $A \vee B \equiv B \vee A$
- 2) асоціативний (сполучний) закон: $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- 3) закони де Моргана: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ та $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Імплікація висловлень.

Імплікацією двох висловлень A і B називається висловлення $A \Rightarrow B$ (читають «якщо A , то B »), яке хибне лише за умови, що A - істинне, а B - хибне. При цьому висловлення A називають *умовою* (підставою) імплікації, висловлення B - *висновком* (наслідком) імплікації.

Таблиця істинності для імплікації висловлень A і B має вигляд:

A	B	$A \Rightarrow B$
і	і	і
і	х	х
х	і	і
х	х	і

Наприклад, «Якщо у трикутнику всі сторони рівні, то він рівносторонній» - це імплікація.

Еквіваленція висловлень

Еквіваленцією двох висловлень A і B називається висловлення $A \Leftrightarrow B$ (читають « A тільки тоді, коли B »), яке істинне лише за умови, що обидва висловлення A і B або одночасно істинні або хибні (мають одне й те ж значення істинності). При цьому висловлення A і B називаються *рівнозначними* або *еквівалентними*.

Таблиця істинності для диз'юнкції висловлень A і B має вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
і	і	і
і	х	х
х	і	х
х	х	і

Наприклад, $A \Leftrightarrow B$: «Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується на 0 або 5» - еквіваленція.

Два висловлення, складені з висловлень A , B і C за допомогою знаків $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ та заперечення, називають *рівносильними*, якщо вони мають одну й ту ж саме істинність при будь-яких значеннях істинності висловлень A , B і C . Наприклад, $A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$, $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$. Якщо два складних висловлення рівносильні, то

еквіваленція цих висловлень завжди істинна.

Заняття 2. Предикати та операції над ними. Множина істинності складеного предиката.

Мета заняття: сформулювати у студентів уявлення поняття про предикат, навчити визначати множину визначення та множину істинності складеного предиката.

Хід заняття:

I. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [4, С.29-42; 5, С.33-42; 6, С.150-152; 7, С.15-29] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання завдань.

Питання для самоконтролю.

1. Розкрити сутність поняття “предикат”.
2. Як позначається предикат? Чому його називають логічною функцією?
3. Що таке множина визначення предиката ? ;
4. Що називають множиною істинності предиката ?
5. Як утворюються складені предикати ?
6. Назвати операції над предикатами.
7. Як визначається множина істинності заперечення предиката ?
8. Як визначається множина істинності кон'юнкції двох предикатів ?
9. Як визначається множина істинності диз'юнкції двох предикатів ?

III. Практична частина

Приклад 1. Серед даних тверджень виділити предикати і знайти множини їх істинності: а) «Дніпро впадає в Чорне море»; б) «пийте томатний сік!»; в) $2x - 3 < 5$; г) $23 \leq 15$; д) «для будь-яких чисел x та y правильна рівність $x+y = y+x$ »; е) $xy = yx$; ж) $x-7$; з) $x-7=0$.

Розв'язання: а) Це — істинне висловлення; б) це речення не є висловленням, як й будь-яке окличне речення; в) це — одномісний предикат. Множина його істинності складається з усіх значень $x < 4$, тобто для $x \in (-\infty; 4)$; г) це — хибне висловлення; д) це — істинне висловлення; е) це двомісний предикат від змінних x і y , істинний при всіх значеннях x і y ; ж) це - не предикат, а вираз зі змінною; з) це - одномісний предикат, істинний, якщо $x=7$.

Приклад 2. Зайти область визначення предиката $A(x)$: « $y = \frac{3x+5}{x^2-4}$ ».

Розв'язання: Вираз $y = \frac{3x+5}{x^2-4}$ - це дріб, тому для знаходження його області потрібно знайти ті значення змінної x , при яких знаменник перетворюється в 0 та виключити їх. Розв'язуємо рівняння $x^2-4=0$,

знаходимо, що $x=-2$ та $x=2$. Отже, область визначення даного двомісного предиката складається з усіх чисел, відмінних від чисел -2 і 2 . Можна записати область визначення у вигляді проміжків: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

Приклад 3. На множині $X=\{-3; -2; 1; 0; 5\}$ задані предикати: $A(x)=\langle x \text{ - число ціле} \rangle$; $B(x) = \langle x \text{ - число від'ємне} \rangle$. Сформулюйте висловлення: $A(5) \vee B(5)$. Знайдіть їхнє значення істинності.

Розв'язання: $A(5)=1$, $B(5)=0$, тоді $A(5) \vee B(5)=1$.

Приклад 4. На множині K задані предикати $C(x)$: $\langle x < 4 \rangle$ і $D(x)$: $\langle (x-3)(x+4)=0 \rangle$. а) Сформулювати кон'юнкцію цих предикатів і знайти її множину істинності. б) Зобразити множини істинності предикатів $C(x)$ і $D(x)$ за допомогою кругів Ейлера та заштрихувати множину істинності предиката $C(x) \wedge D(x)$.

Розв'язання: а) Сформулюємо кон'юнкцію предикатів $C(x)$ і $D(x)$. $C(x) \wedge D(x)$: $\langle x < 4 \text{ і є коренем рівняння } (x-3)(x+4)=0 \rangle$.

Для знаходження множини істинності кон'юнкції знайдемо множину істинності предикатів $C(x)$ і $D(x)$, а потім їх переріз:

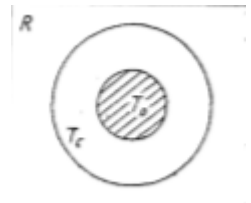
$$T_C = (-\infty; 4) \quad T_D = \{3, -4\}.$$

Тоді $T_{C \wedge D} = T_C \cap T_D$ і тому, що $T_D \subset T_C$, то $T_{C \wedge D} = T_D = \{3, -4\}$.

Відповідь: $T_{C \wedge D} = \{3, -4\}$.

б) Оскільки $T_D \subset T_C$, то круг, що зображує множину T_D розміщуємо усередині круга, що зображує множину T_C . Множина істинності предиката $C(x) \wedge D(x)$ показана на мал. 1 штриховкою.

мал.1



Приклад 5. На множині $X=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ задані предикати: $A(x) = \langle x \text{ не ділиться на } 3 \rangle$; $B(x) = \langle x \text{ - число непарне} \rangle$; $C(x) = \langle x \text{ - число парне} \rangle$; $D(x) = \langle x \text{ кратно } 5 \rangle$. Знайдіть множину істинності предикатів: $(\overline{A(x)} \vee D(x)) \wedge \overline{C(x)}$

Розв'язання: Нехай треба знайти множину істинності предиката $(\overline{A(x)} \vee D(x)) \wedge \overline{C(x)}$. Визначимо спочатку множини істинності кожного предиката, що входить до формули: T_A , T_D , T_C

$$T_A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\};$$

$$T_{\bar{A}} = \bar{T}_A = T'_X = \{3, 6, 9\};$$

$$T_D = \{5, 10\};$$

$$T_{\bar{A} \vee D} = T_{\bar{A}} \cup T_D = \bar{T}_A \cup T_D = \{3, 6, 9\} \cup \{5, 10\} = \{3, 5, 6, 9, 10\};$$

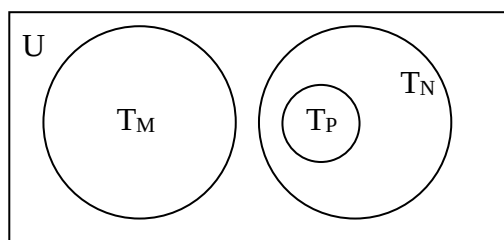
$$T_C = \{2, 4, 6, 8, 10\}, T_{\bar{C}} = \bar{T}_C = T'_X = \{1, 3, 5, 7, 9\};$$

$$T_{(\bar{A} \vee D) \wedge \bar{C}} = \{3, 5, 6, 9, 10\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{3, 5, 9\}$$

Відповідь: $T_{(\bar{A} \vee D) \wedge \bar{C}} = \{3, 5, 6, 9, 10\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{3, 5, 9\}$

Приклад 6. Покажіть за допомогою кругів Ейлера множину істинності предиката $(\overline{M(x) \vee N(x)}) \wedge P(x)$, де предикати: $M(x)$ = « x - парне число», $N(x)$ = « x - непарне число», $P(x)$ = «число x кратне 3», задані на множині $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

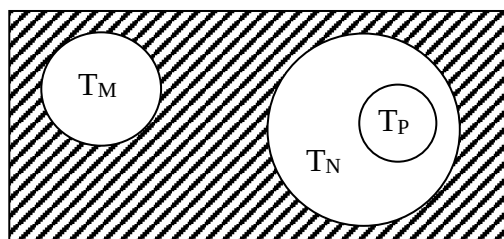
Розв'язання: Множини істинності T_M , T_N , T_P заданих предикатів $M(x)$, $N(x)$ і $P(x)$ можна зобразити так:



$$T_M = \{2, 4\}, \quad T_N = \{1, 3, 5\}, \quad T_P = \{3\}$$

Для множини істинності складеного предиката $(\overline{M(x) \vee N(x)}) \wedge P(x)$ маємо $(\overline{T_M \cup T_N}) \cap T_P$: $T_{M \vee N} = T_M \cup T_N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T_{\overline{M \vee N}} = \emptyset$

$$T_{\overline{M \vee N} \wedge P} = T_{\overline{M \vee N}} \cap T_P = \emptyset$$



 $T_M \cup T_N$

Відповідь: $(T_M \cup T_N)' \cap T_P = \emptyset$.

Завдання для студентів :

№ 1. Визначте: де висловлення, а де предикати і поясніть свою думку:

а) « $3 \cdot 4 + 5 > 17$ »;

е) « $3x + 13 = 5$ »;

б) « $9 \cdot 3 + 1 = 4$ »;

ж) « $3y + 5 < 12$ »;

в) « $(9 - 5)(9 + 5) = 56$ »;

з) « $xy = yx$ ».

- г) « хоча б одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5 є розв'язком рівняння $x^2 - 1 = 0$ »;
 д) «для будь-якого натурального числа n вірна нерівність $3n + 2 > 0$ »;

№2. Серед даних речень знайдіть предикати і для кожного з них вкажіть множину істинності:

- а) « $x + 5 = 1$ »; д) « $x^2 - 2x + 1 = 0$ »;
 б) «при $x = 2$ виконується рівність $x^2 - 1 = 0$ »; е) « $x + 2 < 3x - 4$ »;
 в) «існує таке число x , що $x^2 - 2x + 1 = 0$ »; ж) « $(x + 2) - (3x - 4)$ ».
 г) «одноцифрове натуральне число x кратне 3 »;

№ 3. Знайти область визначення предикатів:

- а) $A(x): \left\langle \frac{1}{x-3} = 2-x \right\rangle$ в) $C(x): \left\langle y = \sqrt{2x-6} \right\rangle$ д) $F(x): \left\langle \sqrt{2-x} + \frac{5}{x} = 0 \right\rangle$
 б) $B(x): \left\langle y = \frac{7-x}{x^2-4} \right\rangle$ г) $D(x): \left\langle x^2 - 5x + 6 = 0 \right\rangle$ е) $M(x): \left\langle (x-4)(x^2+5) < 0 \right\rangle$

№ 4. Серед даних предикатів назвіть ті, яким: 1) не задовільняє жодне дійсне число; 2) деякі дійсні числа задовільняють; 3) задовільняє будь-яке дійсне число:

- а) $x + 2 = 5 + x$; г) $y + 24 > y + 36$; ж) $y^2 > 0$;
 б) $x^2 = 49$; д) $x^2 + 1 = 0$; з) $x \leq 0$;
 в) $y + 24 > 36$; е) $x^2 = 0$; и) $x^2 + 1 \geq 0$.

№ 5. На множині N заданий предикат $C(x)$: «число x – дільник 12». Сформулюйте висловлення $C(4)$, $C(5)$, $C(8)$. Знайдіть їх значення істинності та множину істинності заданого предиката $T_{C(x)}$.

№6. На множині Z заданий предикат $B(y)$: « $y + 3 < 5$ ». Чи належать його множині істинності числа -2 ; 10 ; $\frac{3}{2}$?

№ 7. Дани предикати $A(x)$: « $x^2 - 4 = 0$ » і $B(x)$: « $3x - 2 < 17$ ». Знайдіть множину істинності цих предикатів, якщо їх множина визначення: а) множина всіх дійсних чисел; б) множина всіх натуральних чисел.

№8. На множині $K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ задані два предиката: $P(x)$: « x – просте число» і $Q(x)$: « x – непарне число». Складіть їх таблиці істинності. Чи еквівалентні дані предикати $P(x)$ і $Q(x)$ на множині K ?

№ 9. На множині $X = \{-5; -1; 2; 0; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}\}$ задані предикати: $A(x)$ = « x - число ціле»; $B(x)$ = « x - число дробове». Сформулюйте висловлення: $A(2) \vee B(2)$; $A(-1) \vee B(-1)$; $A(0) \vee B(0)$; $A(2) \wedge B(2)$; $A(-5) \vee B(-5)$. Знайдіть їх значення істинності.

№10. На множині Z задані предикати $A(x)$: « $x \geq 15$ » і $B(x)$: « $x < 30$ ».

- а) Сформулюйте кон'юнкцію цих предикатів.
 б) Прочитайте висловлення $A(12) \wedge B(12)$, $A(15) \wedge B(15)$, $A(40) \wedge B(40)$ та

знайдіть їх значення істинності.

в) Правильно чи ні, що $25 \in T_{A \wedge B}$? $7 \in T_{A \wedge B}$?

№11. На множині трикутників площини задані предикати $A(x)$: «трикутник x прямокутний» і $B(x)$: «трикутник x рівнобедрений». Утворіть кон'юнкцію та диз'юнкцію цих предикатів і накресліть по 2 фігури, які належать: а) множині істинності кон'юнкції; б) множині істинності диз'юнкції.

№12. На множині $X = \{-2; -1; 0; \frac{1}{2}; 1, 2; \frac{3}{5}\}$ задані предикати $C(x)$: «число x натуральне» і $D(x)$: «число x дробове».

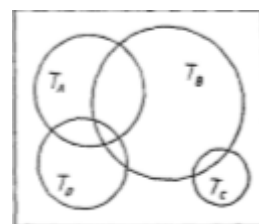
а) Сформулюйте висловлення $C(1) \vee D(1)$, $C(0) \vee D(0)$, $C(-2) \vee D(-2)$ та знайдіть їх значення істинності.

б) Правильно чи ні, що $\frac{1}{2} \notin T_{A \vee B}$? $2 \in T_{A \vee B}$?

№13. На множині $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ задані предикати $A(x)$: «число x кратне 5», $B(x)$: «число x парне», $C(x)$: «число x кратне 3», $D(x)$: «число x складене». Сформулюйте наступні предикати і знайдіть їх множини істинності:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| а) $A(x) \wedge B(x)$; | б) $A(x) \vee B(x)$; |
| в) $C(x) \wedge D(x)$; | г) $C(x) \vee D(x)$; |
| д) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$; | е) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$; |
| ж) $A(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$; | з) $A(x) \vee C(x) \vee D(x)$. |

№14. На мал.2 зображені множини істинності предикатів $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$. Заштрихуйте множини істинності наступних предикатів:



- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| а) $A(x) \wedge B(x)$; | б) $A(x) \vee B(x)$; |
| в) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$; | г) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$; |
| д) $B(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$; | е) $B(x) \vee C(x) \vee D(x)$. |

Мал.2

№15. На множині $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ задані предикати $A(x)$: « x кратне 3» і $B(x)$: « $x - 1 > 0$ ». Знайдіть множину істинності предиката $\overline{A(x) \wedge B(x)}$.

№16. На множині $X = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$ задані предикати $A(x)$: « x кратне 3» і $B(x)$: « $x:10$ ». Знайдіть множину істинності предиката $A(x) \wedge \overline{B(x)}$.

№17. На множині R задані предикати $A(x)$: « $x < 4$ » і $B(x)$: « $(x - 3) \times (x + 4) = 0$ ». Сформулюйте кон'юнкцію цих предикатів $(A \wedge B)$ і

знайдіть її множину істинності, зобразіть це на кругах Ейлера-Венна.

№18. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задані предикати: $A(x)$ = «число x не ділиться на 3»; $B(x)$ = « x - число непарне»; $C(x)$ = « x - число парне»; $D(x)$ = «число x кратне 5». Знайдіть множину істинності предикатів:

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $A(x) \wedge B(x)$; | 2) $(B(x) \wedge C(x)) \vee D(x)$; | 3) $C(x) \vee D(x)$; |
| 4) $\overline{C(x)} \wedge D(x)$; | 5) $(\overline{B(x)} \wedge \overline{C(x)}) \vee D(x)$; | 6) $(\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}) \vee C(x)$ |
| 7) $(\overline{C(x)} \vee \overline{D(x)}) \wedge A(x)$; | 8) $C(x) \wedge \overline{D(x)} \vee B(x)$; | 9) $(\overline{A(x)} \wedge C(x)) \vee B(x)$ |
| 10) $(\overline{C(x)} \vee \overline{D(x)}) \wedge A(x)$. | | |

III. Огляд теоретичних питань.

Поняття “предикат”.

Твердження $A(x)$ із змінною x , де $x \in X$, називають **предикатом** або висловлювальною формою (або логічною функцією), якщо при підстановці будь-якого значення $x \in X$ одержуємо висловлення.

У залежності від кількості змінних, що входять до твердження, відрізняють одномісні, двомісні, тримісні і т.ін. предикати, які позначають відповідно так: $A(x)$, $B(x, y)$, $C(x, y, z)$ і т.ін. Наприклад, $x < 5$ – одномісний предикат, а $x + y = 5$ – двомісний предикат.

При задаванні предиката зазвичай вказують його область визначення X .

Множиною істинності T одномісного предиката $A(x)$ називається множина тих значень змінної x з області її визначення X ($x \in X$), при підстановці яких предикат перетворюється в істинне висловлення. Одномісний предикат — це характеристична властивість його множини істинності.

Множина істинності двомісного предиката $A(x, y)$ складається з усіх таких пар (a, b) , при підстановці яких у цей предикат виходить істинне висловлення. Наприклад, пара $(6; 3)$ належить множині істинності предиката « $x : y$ » (т.к. $6:3$ – істинне висловлення), а пара $(8; 3)$ не належить (т.к. $8:3$ – хибне висловлення).

Множина істинності предиката T завжди є підмножиною його області визначення X : $T_{A(x)} \subset X$.

Операції над предикатами та множина істинності складеного предиката.

Висловлення є окремим випадком предиката. Тому над предикатами виконують ті ж саме операції, що й над висловленнями.

Заперечення предиката.

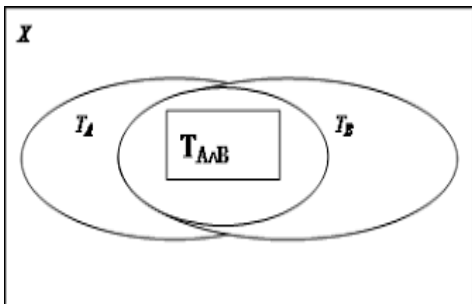
Запереченням предиката $A(x)$, заданого на множині X , називається предикат $\overline{A(x)}$, істинний при тих значеннях $x \in X$, при яких предикат $A(x)$ хибний, і навпаки.

З даного означення слідує, що предикати $A(x)$ і $B(x)$ не є запереченнями один одного, якщо знайдеться хоча б одне значення $x \in X$, при якому предикати $A(x)$ і $B(x)$ перетворюються у висловлення з однаковими значеннями істинності.

Множина істинності предиката $\overline{A(x)}$, є доповненням до множини істинності предиката $A(x)$ на множині X . Позначимо через T_A множину істинності предиката $A(x)$, а через $T_{\overline{A(x)}}$, множину істинності предиката $\overline{A(x)}$, тоді $T_{\overline{A(x)}} = (T_{A(x)})'_x$

Кон'юнкція предикатів.

Кон'юнкцією предикатів $A(x)$ і $B(x)$, заданих на множині X , називається предикат $A(x) \wedge B(x)$, що перетворюється в істинне висловлення при тих і тільки тих значеннях $x \in X$, при яких істинні обидва предиката.



Мал.3

Множина істинності кон'юнкції предикатів є переріз множин істинності предикатів, що її утворюють. Позначимо множину істинності предиката $A(x)$ через T_A , а множину істинності предиката $B(x)$ через T_B (мал.3) і множину істинності предиката $A(x) \wedge B(x)$ через $T_{A \wedge B}$, то

$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$$

Диз'юнкція предикатів.

Диз'юнкцією предикатів $A(x)$ і $B(x)$, заданих на множині X , називається предикат $A(x) \vee B(x)$, що перетворюється в істинне висловлення при тих і тільки тих значеннях $x \in X$, при яких є істинним хоча б один предикат $A(x)$ або $B(x)$.

Множина істинності диз'юнкції предикатів є об'єднання множин істинності предикатів, що її утворюють:

$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$$

Заняття 3. Відношення логічного слідування та логічної еквівалентності.

Мета заняття: формувати у студентів уявлення про операції імплікації та еквіваленції над предикатами, вчити визначати множину істинності

складеного предиката, визначати істинність імплікації двох предикатів, рівносильність предикатів.

Хід заняття:

I. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [4, С.29-42; 5, С.53-56; 6, С.154-155; 7, С.26-29] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Питання для самоконтролю.

1. Дати означення імплікації предикатів. Як позначається імплікація предикатів ?
2. Що таке умова імплікації ? що таке наслідок імплікації ?
3. За якої умови імплікація предикатів є істинною ?
4. Як визначити множину істинності імплікації двох предикатів ?
5. За якої умови предикати є рівносильними ?
6. Як позначають еквіваленцію предикатів ?
7. За якої умови предикат $A(x)$ є достатньою умовою для предиката $B(x)$?
8. За якої умови предикат $A(x)$ є необхідною і достатньою умовою для предиката $B(x)$?

II. Практична частина

Приклад 1. В даній імплікації виділіть умову й висновок та сформулюйте імплікації, обернену та протилежну даній, обернену протилежній; визначте значення істинності імплікацій. Задана імплікація «Якщо світить сонце, то від предметів падає тінь».

Розв'язання: У даній імплікації висловлень виділимо елементарні: A : «Світить сонце» і B : «Від предметів падає тінь». Отже, $A \Rightarrow B$ - дана імплікація: «Якщо світить сонце, то від предметів падає тінь». $(A \Rightarrow B)=1$;

Обернена імплікація: $B \Rightarrow A$: «Якщо від предметів падає тінь, то світить сонце». $(B \Rightarrow A)=0$;

Протилежна імплікація: $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$: «якщо сонце не світить, то від предметів тінь не падає» $(\bar{A} \Rightarrow \bar{B})=0$.

Обернена до протилежної імплікація: $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$: «якщо від предметів не падає тінь, то сонце не світить» $(\bar{B} \Rightarrow \bar{A})=1$.

Приклад 2. З'ясуйте істинність предиката $A(x)$: «якщо x ділиться на 4, то x ділиться на 2».

Розв'язання: Складений предикат $A(x)$: «якщо x ділиться на 4, то x ділиться на 2» запишемо формулою. Для цього виділимо в ньому елементарні предикати: $D(x)$: «число x ділиться на 4» і $C(x)$: «число x ділиться на 2». Тоді $A(x) \equiv D(x) \Rightarrow C(x)$

Визначимо істинність імплікації. Для цього знайдемо множини істинності цих предикатів, якщо вважатимемо їх областю визначення всі натуральні числа ($X=N$):

$T_D = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$ $T_C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \dots\}$

Ці множини знаходяться у відношенні включення, а саме $T_D \subset T_C$, то імплікація $D(x) \Rightarrow C(x)$ є істинною.

Відповідь: імплікація $D(x) \Rightarrow C(x)$ є істинною.

Приклад 3. Чи істинне твердження «Для того, щоб стати студентом, необхідно закінчити школу» ?

Розв'язання: Яка імплікація правильна: «Якщо я закінчу школу, то я стану студентом» або «Якщо я став студентом. То я закінчив школу» ?

Нехай $A(x)$: «Закінчити школу», $B(x)$: «Стати студентом»

Зрозуміло, що $T_{B(x)} \subset T_{A(x)}$, тому істинна імплікація $B(x) \Rightarrow A(x)$ і $A(x)$ – необхідна умова для $B(x)$.

Приклад 4. Дані предикати $A(x)$: «кути x і y вертикальні» і $B(x)$: «кути x і y рівні». З'ясувати, в якому відношенні знаходяться дані предикати. Розв'язання: В геометрії доведено, що якщо кути вертикальні, то вони рівні, тобто $A(x,y) \Rightarrow B(x,y)$. А обернена імплікація $B(x,y) \Rightarrow A(x,y)$ є хибною, оскільки з того, що кути рівні, не слідує, що вони вертикальні. Отже, дані предикати не рівносильні (еквівалентні), вони знаходяться лише у відношенні слідування (імплікації): із $A(x,y)$ слідує $B(x,y)$.

Рівність кутів $B(x,y)$ – необхідна умова для $A(x,y)$ - того, щоб кути були вертикальними, а вертикальність кутів $A(x,y)$ є достатньою умовою для $B(x,y)$ - їх рівності. У зв'язку з цим імплікацію предикатів («якщо $A(x,y)$, то $B(x,y)$ ») можна сформулювати по-іншому, користуючись словами «необхідно» і «достатньо»:

- 1) Для того, щоб кути були вертикальними, **необхідно**, щоб вони були рівними.
- 2) Для того, щоб кути були рівними, **достатньо**, щоб вони були вертикальними.

Відповідь: $A(x,y) \Rightarrow B(x,y)$.

Приклад 5. Замість трьох крапок вставити слова «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо»: «Для того, щоб число x було

дільником числа 15, ..., щоб число x було дільником числа 5».

Розв'язання: Введемо позначення: нехай $C(x)$: «число x — дільник числа 5», а $D(x)$: «число x — дільник числа 15».

Для виконання завдання потрібно з'ясувати, якою умовою («необхідною», «достатньою» чи «необхідною і достатньою») є предикат $C(x)$ для предиката $D(x)$.

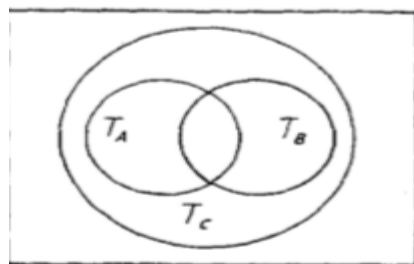
Для перевірки достатності предиката $C(x)$ з'ясуємо, знаходяться чи ні $C(x)$ і $D(x)$ у відношенні слідування. Так як $T_C = \{1, 5\}$, і $T_D = \{1, 3, 5, 15\}$, то $T_C \subset T_D$, тому істинною є імплікація $C(x) \Rightarrow D(x)$. Це означає, що $C(x)$ є достатньою умовою для $D(x)$.

Перевіримо, чи є $C(x)$ необхідною умовою для $D(x)$, з'ясуємо чи є істинною імплікація $D(x) \Rightarrow C(x)$. Оскільки $T_D \not\subset T_C$, то імплікація $D(x) \Rightarrow C(x)$ є хибною. Дійсно, знайдеться таке значення x (наприклад, $x=3$), при якому $D(x)$ істинне, а $C(x)$ хибне, тому предикат $C(x)$ не є необхідною умовою для $D(x)$.

Відповідь: замість трьох крапок можна вставити лише слово «достатньо»: «Для того, щоб число x було дільником числа 15, достатньо, щоб число x було дільником числа 5».

Завдання для студентів :

№ 1. На мал. 4 зображені множини істинності предикатів $A(x)$, $B(x)$ і $C(x)$. Вони позначені відповідно T_A , T_B , і T_C . З'ясуйте, які з поданих імплікацій істинні: а) $C(x)$ слідує з $A(x)$; б) з $B(x)$ слідує $C(x)$; в) $A(x)$ не слідує з $B(x)$; г) $A(x)$ слідує з $C(x)$.



Мал.4

№2. Доведіть, що кожне з наведених тверджень хибне:

- а) якщо трикутник рівнобедрений, то він рівнобічний;
- б) якщо трикутник прямокутний, то він рівнобедрений;
- в) якщо трикутник рівнобедрений, то він гострокутний.

№3. У кожній з даних імплікацій виділіть умову й висновок та сформулюйте імплікації, протилежну даній й обернену протилежній; визначте значення істинності імплікацій:

а) «якщо іде дощ, то дорога мокра»;

б) «якщо я запізнюся на роботу, то мене звільнять»;

в) «якщо учня перевели у наступний клас, то він одержав по всіх предметах відмінні оцінки».

№4. Встановіть знаходяться чи ні у відношенні слідування предикати $A(x)$ і $B(x)$:

- а) $A(x)$: «число x кратне 3» і $B(x)$: «число x кратне 9»;
 б) $A(x)$: «у чотирикутнику x діагоналі рівні» і $B(x)$: «чотирикутник x – це прямокутник»;
 в) $A(x)$: «число x - парне» і $B(x)$: «число x кратне 5»;
 г) $A(x)$: «трикутник x прямокутний» і $B(x)$: «трикутник x рівнобедрений».

№5. На множині R задані предикати $E(x)$: « $x-2=0$ » і $F(x)$: « $x^2-4=0$ ».

- а) Знайдіть множини істинності цих предикатів.
 б) З'ясуйте, у якому відношенні знаходяться множини T_E і T_F .
 в) Можна чи ні стверджувати, що $F(x)$ слідує з $E(x)$ на множині R ?
 Якщо «так», то зробіть відповідний запис.

№6. З'ясуйте істинність предиката: а) $B(x)$: «якщо $x < 3$, то $x < 5$ »;

б) $C(x)$: «якщо чотирикутник – ромб, то він - квадрат».

№ 7. Визначте, які з наведених імплікацій предикатів істинні, а які хибні: а) $x+3=0 \Rightarrow x^2-9=0$; в) $(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)=0$;

б) $x^2=4 \Rightarrow x=2$; г) $x < 3 \Rightarrow x < 7$

№8. Знайдіть множини істинності предикатів $A(x)$: « $x:3$ » і $B(x)$: «сума цифр у запису числа x кратна 3», заданих на множині $X=\{3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15\}$ та з'ясуйте у якому відношенні вони знаходяться. Будуть чи ні предикати $A(x)$ і $B(x)$ рівносильними на множині X ?

№9. Рівносильні чи ні предикати $A(x)$ і $B(x)$, якщо: а) $A(x)$: «Число x ділиться на 3» і $B(x)$: «Сума цифр числа x ділиться на 3»; б) $A(x)$: «Кожний доданок суми ділиться на 4» і $B(x)$: «Сума ділиться на 4»?

№10. Які з поданих висловлень істинні, а які - хибні?

а) $x:3 \wedge x:2 \Leftrightarrow x:6$

в) $x:2 \wedge x:4 \Leftrightarrow x:8$

б) $x:3 \wedge x:6 \Leftrightarrow x:18$

г) $x:2 \wedge x:5 \Leftrightarrow x:10$

№ 11. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задані предикати $A(x)$: « x кратне 3» і $B(x)$: « x – парне число». Знайдіть множину істинності предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$.

№ 12. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ задані предикати $A(x)$: « $x : 6$ » і $B(x)$: « x – парне число». Знайдіть множину істинності предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$.

№13. Предикати A , B , C задані на множині $X=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Знайдіть множину істинності предиката $A(x) \vee B(x) \Rightarrow C(x)$, якщо $A(x)$: « x – від'ємне число», $B(x)$: « $x : 3$ », $C(x)$: « x – парне число».

№14. Предикати A , B , C задані на множині $X=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Знайдіть множину істинності предиката

$A(x) \vee C(x) \Rightarrow \overline{B(x)}$, якщо $A(x)$: « x – натуральне число», $B(x)$: « x – складене число», $C(x)$: « $x : 5$ ».

№15. Предикати A , B , C задані на множині $P = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$. Знайдіть множину істинності предиката $\overline{A(x) \vee B(x)} \Rightarrow C(x)$, якщо $A(x)$: « x – парне число», $B(x)$: « $x : 3$ », $C(x)$: « x – непарне число».

№ 16. На множині Z задані предикати $E(x)$: « x – дільник 4» і $F(x)$: « x – дільник 12». Доведіть, що $F(x)$ слідує з $E(x)$. Сформулюйте імплікацію $E(x) \Rightarrow F(x)$ за допомогою слів: 1) «якщо, то»; 2) «достатньо»; 3) «необхідно».

№ 17. У кожне висловлення замість трьох крапок вставте слово «необхідно» або «достатньо», щоб одержане висловлення було істинним:

а) якщо $A(x) \Rightarrow B(x)$, то $A(x) \dots$ для $B(x)$, а $B(x) \dots$ для $A(x)$;

б) якщо $B(x) \Rightarrow A(x)$, то $B(x) \dots$ для $A(x)$, а $A(x) \dots$ для $B(x)$.

№18. Запишіть подані висловлення, використовуючи символ « $\Rightarrow$ »:

а) $P(x)$ — достатня умова для $Q(x)$; б) $Q(x)$ — достатня умова для $P(x)$;

в) $P(x)$ — необхідна умова для $Q(x)$; г) $Q(x)$ — необхідна умова для $P(x)$.

№19. Сформулюйте висловлення зі словом «слідує»:

а) рівність двох чисел є достатньою умовою рівності їх квадратів;

б) наявність прямого кута в чотирикутнику необхідно для того, щоб чотирикутник був квадратом;

в) подільність числа на 2 необхідна для того, щоб число ділилося на 4»;

г) «рівність чисельника дробу нулю достатньо для того, щоб весь дріб дорівнював нулю».

№20. Замість трьох точок вставте слова «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо»:

а) для того щоб сума двох натуральних чисел була більше 20, ..., щоб хоча б один з доданків був більше 10;

б) для того щоб різниця двох чисел була парною, ..., щоб зменшуване і від'ємник були парними;

в) для того щоб віднімання виконувалося на множині натуральних чисел, ..., щоб зменшуване було більше від'ємника;

г) для того щоб сума двох чисел дорівнювала другому доданку, ..., щоб перший доданок дорівнював нулю;

д) для того щоб $ab = 0$, ..., щоб $a = 0$;

е) для того щоб сума двох чисел ділилася на 5, ..., щоб кожний доданок ділився на 5;

ж) для того щоб число ділилося на 24, ..., щоб воно ділилося на 4.

III. Огляд теоретичних питань

Відношення слідування і рівносильності між висловленнями та предикатами.

Розглянемо два предиката $A(x)$: «число x кратне 4» і $B(x)$: «число x кратне 2». Вони пов'язані між собою: будь-яке число, кратне 4, буде кратним 2, або по-іншому: з того, що число кратне 4, слідує, що воно кратне 2. Отже, говорять, що з предиката $A(x)$ слідує предикат $B(x)$. Це можна записати так: $A \Rightarrow B$ («з A слідує B », «якщо A , то B »).

Імплікація предикатів $A(x) \Rightarrow B(x)$ буде істинною, коли $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$. При цьому предикат $B(x)$ називають **логічним наслідком** предиката $A(x)$. Предикат $A(x)$ є **достатньою умовою** для предиката $B(x)$, а $B(x)$ є **необхідною умовою** для $A(x)$.

Для визначення, який предикат є достатньою умовою для іншого, потрібно визначити їх множини істинності та з'ясувати їх взаємне розташування.

Імплікація широко використовується в геометрії, оскільки будь-яка теорема – це істинна імплікація. Якщо при розв'язуванні рівняння або нерівності потрібно виконувати імплікаційні перетворення, то це означає, що у зв'язку з розширенням області істинності вихідного предиката можуть з'явитися сторонні корені; щоб їх відсіяти, потрібно обов'язково виконати перевірку.

У формальній логіці множина істинності предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ розглядається як об'єднання множин істинності предикати $B(x)$ із доповненням множини істинності предикати $A(x)$ до множини X :

$$T_{A(x) \Rightarrow B(x)} = (T_{A(x)})' \cup T_{B(x)}$$

Якщо з предиката $A(x)$ слідує предикат $B(x)$, а з предиката $B(x)$ слідує предикат $A(x)$, то говорять, що предикати **еквівалентні** або **рівносильні**. Це записують так: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ (« A тоді і тільки тоді, коли B »). У випадку еквівалентності предикати $A(x)$ і $B(x)$ взаємозамінні, вони мають бути або обидва істинні, або обидва хибними. Тому множини істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$ збігаються: $T_{A(x)} = T_{B(x)}$, а кожен з них виражає і достатню і необхідну умову для іншого предиката. Інакше кажучи, кожен з них логічно впливає з іншого.

З еквіваленцією часто зустрічаємося, коли маємо справу з теоремою, яка має істинну обернену теорему. Еквіваленція предикатів широко використовується при розв'язанні різноманітних рівнянь та нерівностей.

Завдання для самопідготовки студентів

В-1 1) 4, № 2.1 2) 4, № 2.26 3) 4, № 2.45 (б,г,в) 4) 4, № 2.73 (а,в,д) 5) 5, № 175 6) 5, № 201 7) 5, № 224 8) 5, № 247 9) 5, № 267 (б) 10) 5, № 287 (а,в)	В-2 1) 4, № 2.2 2) 4, № 2.27 3) 4, № 2.45 (ж,з) 4) 4, № 2.74 (а) 5) 5, № 176 6) 5, № 202 7) 5, № 225 8) 5, № 248 9) 5, № 268 10) 5, № 287 (б,г)	В-3 1) 4, № 2.3 (а) 2) 4, № 2.28 3) 4, № 2.46 (а,в) 4) 4, № 2.74 (б) 5) 5, № 177 6) 5, № 203 (а,д) 7) 5, № 226 (а,в,д) 8) 5, № 249 9) 5, № 269 (а,в) 10) 5, № 288
В-4 1) 4, № 2.3 (б) 2) 4, № 2.29 3) 4, № 2.46 (б,г) 4) 4, № 2.75 5) 5, № 178 6) 5, № 203 (в,ж) 7) 5, № 226 (б,г) 8) 5, № 250 9) 5, № 269 (б,г) 10) 5, № 289	В-5 1) 4, № 2.4 2) 4, № 2.30 3) 4, № 2.46(д,з) 4) 4, № 2.76 5) 5, № 179 6) 5, № 203 (б,е) 7) 5, № 227 8) 5, № 251 9) 5, № 269 (д,ж) 10) 5, № 290	В-6 1) 4, № 2.5 2) 4, № 2.31 3) 4, № 2.46(е,н) 4) 4, № 2.77 5) 5, № 180 6) 5, № 203 (г,з) 7) 5, № 227 (б,г) 8) 5, № 252 9) 5, № 269 (е,з,и) 10) 5, № 291
В-7 1) 4, № 2.6 2) 4, № 2.34 3) 4, № 2.46 (ж,к) 4) 4, № 2.77 5) 5, № 181 6) 5, № 204 7) 5, № 228 8) 5, № 253 9) 5, № 270 10) 5, № 292	В-8 1) 4, № 2.7 2) 4, № 2.35 3) 4, № 2.46(м,н) 4) 4, № 2.78 5) 5, № 182 6) 5, № 205 7) 5, № 229 8) 5, № 254 9) 5, № 271 10) 5, № 293	В-9 1) 4, № 2.8 2) 4, № 2.36 (а,в,д) 3) 4, № 2.47 (а,б) 4) 4, № 2.79 5) 5, № 183 6) 5, № 208 7) 5, № 230 8) 5, № 257 (а,б) 9) 5, № 274 (а,в) 10) 5, № 296
В-10 1) 4, № 2.9 2) 4, № 2.36 (б,г,е) 3) 4, № 2.49	В-11 1) 4, № 2.10 2) 4, № 2.36 (ж,и,л) 3) 4, № 2.50	В-12 1) 4, № 2.11 2) 4, № 2.36 (з,к,м) 3) 4, № 2.56

4) 4, № 2.80 5) 5, № 184 6) 5, № 209 7) 5, № 231 8) 5, № 257 (б,в,г) 9) 5, № 274 (б,г) 10) 5, № 297	4) 4, № 2.81 5) 5, № 185 6) 5, № 212 7) 5, № 232 8) 5, № 259 (б,д) 9) 5, № 277 10) 5, № 300	4) 4, № 2.82 5) 5, № 186 6) 5, № 213 7) 5, № 233 (а,в,д) 8) 5, № 259 (в,е) 9) 5, № 278 10) 5, № 301
B-13 1) 4, № 2.12 2) 4, № 2.36 (н,п,о) 3) 4, № 2.57 4) 4, № 2.83 5) 5, № 187 6) 5, № 206 7) 5, № 233 (б,г,е) 8) 5, № 255 9) 5, № 272 10) 5, № 294	B-14 1) 4, № 2.13 2) 4, № 2.36 (с,р,т) 3) 4, № 2.58 4) 4, № 2.84 5) 5, № 188 6) 5, № 207 7) 5, № 234 8) 5, № 256 9) 5, № 273 10) 5, № 295	B-15 1) 4, № 2.14 2) 4, № 2.37 3) 4, № 2.59 4) 4, № 2.85 5) 5, № 189 6) 5, № 210 7) 5, № 235 8) 5, № 258 9) 5, № 275 10) 5, № 298
B-16 1) 4, № 2.15 2) 4, № 2.39 (а,в,д) 3) 4, № 2.60 4) 4, № 2.86 5) 5, № 190 6) 5, № 211 7) 5, № 236 8) 5, № 259 (а,г) 9) 5, № 276 10) 5, № 299	B-17 1) 4, № 2.16 2) 4, № 2.39 (б,г,е) 3) 4, № 2.61 4) 4, № 2.87 5) 5, № 191 6) 5, № 214 7) 5, № 237 8) 5, № 260 9) 5, № 279 10) 5, № 302	B-18 1) 4, № 2.17 2) 4, № 2.39 (к,л,м) 3) 4, № 2.62 4) 4, № 2.88 5) 5, № 192 6) 5, № 215 7) 5, № 238 8) 5, № 261 9) 5, № 280 10) 5, № 303
B-19 1) 4, № 2.18 2) 4, № 2.39 (з,к,м) 3) 4, № 2.63 4) 4, № 2.89 5) 5, № 193 6) 5, № 216 7) 5, № 239 8) 5, № 262 9) 5, № 281 (а)	B-20 1) 4, № 2.19 2) 4, № 2.41 (а,в) 3) 4, № 2.64 4) 4, № 2.90 5) 5, № 194 6) 5, № 219 7) 5, № 240 8) 5, № 263 9) 5, № 281 (б)	B-21 1) 4, № 2.20 2) 4, № 2.41 (б,г) 3) 4, № 2.65 4) 4, № 2.92 (в,г,о) 5) 5, № 195 6) 5, № 218 7) 5, № 243 8) 5, № 265 (б,д) 9) 5, № 283

10)5, № 304	10)5, № 305	10)5, № 308
В-22	В-23	В-24
1) 4, № 2.21 (а,в,д)	1) 4, № 2.22 (а,в,д)	1) 4, № 2.23 (б,г,е)
2) 4, № 2.41 (д,к)	2) 4, № 2.41 (е,з)	2) 4, № 2.43
3) 4, № 2.66	3) 4, № 2.68	3) 4, № 2.69
4) 4, № 2.92 (д,з,н)	4) 4, № 2.92 (ж,з)	4) 4, № 2.92 (и,к,л)
5) 5, № 196	5) 5, № 197	5) 5, № 198
6) 5, № 219	6) 5, № 222	6) 5, № 223
7) 5, № 244	7) 5, № 245	7) 5, № 246
8) 5, № 265 (г,е)	8) 5, № 266	8) 5, № 267 (а)
9) 5, № 284	9) 5, № 285	9) 5, № 286
10)5, № 309	10)5, № 310	10)5, № 311
В-25	В-26	В-27
1) 4, № 2.24	1) 4, № 2.25	1) 4, № 2.26
2) 4, № 2.44	2) 4, № 2.45 (а,в,д)	2) 4, № 2.46 (и,к,л)
3) 4, № 2.70	3) 4, № 2.71	3) 4, № 2.73 (б,г,е)
4) 4, № 2.91	4) 4, № 2.92 (а,б,м)	4) 4, № 2.92(д,о,з)
5) 5, № 199	5) 5, № 200	5) 5, № 201
6) 5, № 220	6) 5, № 221	6) 5, № 225
7) 5, № 241	7) 5, № 242	7) 5, № 243
8) 5, № 281 (в)	8) 5, № 265 (а,в)	8) 5, № 265 (г,д)
9) 5, № 264	9) 5, № 282	9) 5, № 283
10)5, № 306	10)5, № 307	10)5, № 312

Література

Основна

1. Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М., Мурач М.М., Соколенко О.И. Курс математики: навч.посіб. Київ: Вища школа, 1995. 392с.
2. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики. Київ: Вища школа, 1987. 318с.
3. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М. и др. Математика: учеб.пособ. Москва: Просвещение, 1977. 350с.
4. Задачник-практикум по математике: пособие для студентов-заочников факультетов подготовки учителей начальных классов пединститутов / Под ред. Н.Я.Виленкина. Москва: Просвещение, 1977. 185 с.
5. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике: учеб. пособ. Москва:Просвещение, 1985. 184 с.
6. Левшин М.М., Лодатко Є.О. Математика: навч.посіб. В 3-х ч. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2012. Ч.І. 264с.
7. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики: учеб. пособие. Москва:»Просвещение», 1988. 320 с..

Додаткова

- 1.Вивальнюк Л. М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи : навч.посіб. Київ: Вища школа, 1988. 270 с.
2. Зуб О. М., Коберник Г.І., Нещадим А.Ф. Математика : посіб. для студ. пед. факультетів. Київ. : Науковий світ, 2000. 417 с.
3. Математика. Ч.1: навч.посіб./ Під ред. В.Д.Рябчинської. Харків, 1989. 23 с.
- 4.Рябчинская В.Д., Гусева Т.К., Карпова В.А. Общие математические понятия: метод.реком. Харьков, 1989. 47 с.
5. Рябчинська В.Д., Любченко А.Г. Організація самостійної роботи з математики при вивченні тем: «Множини» і «Математичні твердження»: метод.реком. Харків, 1990. 25 с.

Навчальне видання

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА:
ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ**

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск: Іонова О.М.

Комп'ютерна верстка: Масюк О.М.

Коректор: Білецька С.А.

Відповідальність за дотримання вимог академічної доброчесності несуть автори

Підписано до друку	Формат	Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний. Ум. друк. арк.		
Обл.-вид. арк.	Зам №	Тираж прим. Ціна договірна.

Відомості про видавництво