Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет імені Г.С.Сковороди

А.Ю. Пуди, А.І. Прокопенко, С.Б. Стасевський

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчально-методичний посібник для студентів і викладачів вищих навчальних закладів

Харків 2016

УДК 517.52(075.8)

Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, А.Ю.Пуди, А.І.Прокопенко, С.Б.Стасевський, Харків: ХНПУ імені Г.С.Сковороди, 2016. – 250с.

Навчальний посібник містить теоретичний і практичний матеріал з диференціальних та інтегральних числень функцій від декількох змінних. Підібрані задачі для індивідуальних домашніх завдань. Даний навчальний посібник адресований викладачам і студентам для проведення практичних занять і проведення самостійних робіт у аудиторії і видачі ІДЗ з усіх розділів курсу.

The given guidebook includes theoretical and practical material on differential and integral calculus of several variables. The problems for each topic the individual home tasks have been completed. This guide book can be used by the teachers and students in practical lessons and for solving the problems of quiz in the class-room and for giving the IHT of all chapters of the guidebook.

Рецензенти:

О.Г.Нерух - доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедрою вищої математики ХНУРЕ

Л.І. Білоусова - кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедрою інформатики ХНПУ імені Г.С.Сковороди

Затверджено редакційно-видавницькою радою Харківського
національного педагогічного університету ім. Г.С.Сковороди
Протокол № 1 від 15.02.2016

З М І С Т

Частина I. Диференціальне числення

§ 1. *Множини на площині і у просторі*

1.1. n – *вимірний евклідовий простір. Окіл і границі послідовності точок.*

Метод координат дає можливість установити взаємно-однозначну відповідність між всіма дійсними числами і всіма точками прямої. За допомогою цього методу можна встановити взаємно однозначну відповідність між всіма точками площини (простору) і всіма парами (трійками) дійсних чисел x і y (x, y, z), записаними у певному порядку. Таким чином, метод координат дає можливість точку на прямій, у площині, в просторі ототожнити відповідно з дійсним числом, з парою, з трійкою дійсних чисел, записаних у певному порядку. Цей факт може бути покладений в основу визначення точки n - вимірного простору. Точки будемо позначати буквами x, y, z, …, а їх координати – тими ж буквами з індексами, тобто у випадку площини $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ у випадку простору $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Відстань між точками x і y будемо позначати символом $\rho(x, y)$. Як відомо, формула відстані між точками x і y, у випадку площини, має вигляд

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

і у випадку простору

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Цей факт може бути покладений в основу визначення точки n - вимірного простору.

Означення 1. *Точкою x n - вимірного простору називається упорядкована сукупність n дійсних чисел*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

або, скорочено, $x = (x_i)$. Число x_i ($i = \overline{1, n}$) називається координатою точки x.

Відстань між двома точками $x = (x_i)$ і $y = (y_i)$ визначимо за формулою

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (1)$$

Означення 2. *Сукупність точок n - вимірного простору, для яких визначена відстань згідно з формулою (1), називається n - вимірним евклідовим простором і позначається $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{R}_n$*

Відстань між двома точками $x = (x_i)$ і $y = (y_i)$ простору $\mathbb{R}_n$ має наступні три властивості:

1^0. $\rho(x, y) \geq 0$, *причому* $\rho(x, y) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = y$, *тобто коли* $x_i = y_i$ *для всіх* $i = \overline{1, n}$;

2^0. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, *для будь-яких точок* $x = (x_i)$ *і* $y = (y_i)$ *із* R_n;

3^0. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *для будь-яких трьох точок* $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ *і* $z = (z_i)$ *із* $\mathbb{R}_n$.

Перші дві властивості зразу випливають із формули (1). Третя властивість у просторах $\mathbb{R}_2$ і виражають простий геометричний факт; *сума двох сторін трикутника не менше, ніж третя сторона*. Ця властивість відстані *називається нерівністю трикутника.* У загальному випадку $(n > 3)$ необхідно довести. Попередньо доведемо наступну лему.

Лема 1. (*Коші - Шварц***).** *Для будь-яких дійсних чисел* a_k *і* b_k, $k=\overline{1,n}$ *виконується наступна нерівність*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad (2)$$

► Розглянемо квадратичну функцію дійсної змінної $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_k t + b_k)^2 = t^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \qquad (3)$$

Очевидно,

$$F(t) \ge 0 \qquad (4)$$

Згідно з умовою (4) випливає, що многочлен (3) має дійсні рівні корені, або комплексні корені, і, значить, його дискримінант не додатній:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le 0$$

Якщо перенести другий доданок у праву частину і добувши квадратного кореня, дістанемо (2). ◄

Наслідок. *Якщо виконується (2), то справджується наступна нерівність*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \qquad (5)$$

► Для доведення нерівності (5) оцінимо суму

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2$$

Звідси

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \ ◄$$

Доведена нерівність (5), яка *називається нерівністю Коші.*

Тепер легко довести властивість (3^0) відстані між двома точками. Нехай

$$x = (x_i),\ y = (y_i),\ і\ z = (z_i)$$

Узявши у нерівності (5)

$$a_i = x_i - z_i \quad b_i = z_i - y_i, \quad i = \overline{1,n}$$

Дістанемо:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_i - y_i)^2}$$

або $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$. Нерівність 3^0 доведено. ◄

Зауваження. *Нехай на площині задані дві прямокутні системи координат, точка* M *у одній системі координат має координати* (x,y), *а у другій* (ξ,η), *тобто* $M = (x,y) = (\xi,\eta)$. *Якщо поставити у відповідність упорядкованій парі чисел* (x,y) *упорядковану пару* (ξ,η), *тоді дістанемо взаємно однозначну відповідність між* *множиною всіх упорядкованих пар* (x, y) *і множиною всіх упорядкованих пар* (ξ, η). *При цьому, якщо* $M' = (x', y') = (\xi', \eta')$, $M'' = (x'', y'') = (\xi'', \eta'')$, то

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2} = \sqrt{(\xi''-\xi')^2 + (\eta''-\eta')^2}$$

Цей приклад наступне означення робить цілком істотним.

Нехай кожній точці $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_n$ поставлений у відповідність упорядкований комплекс з ***n*** дійсних чисел $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}_n$ таким чином, що для будь-яких двох точок $x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ і $x'' = (x''_1, x''_2, ..., x''_n)$ і відповідних їм комплексів $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n)$ і $\xi'' = (\xi''_1, \xi''_2, ..., \xi''_n)$ виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{n} (x''_i - x''_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi''_i - \xi''_i)^2$$

Сукупність чисел $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ також називаються *координатами* точки x (у другій системі координат). Очевидно, що при будь якому виборі координат відстань між точками не міняється.

Означення 3. *Нехай* $x \in \mathbb{R}_n$ *і* $\varepsilon > 0$. *Сукупність усіх точок у просторі* $\mathbb{R}_n$*, таких, що* $\rho(x, y) < \varepsilon$ *називається* $n-$*вимірною кулею з центром у точці* x *радіуса* ε *або* $\varepsilon-$*околом (а інколи сферичним околом) точки* x *у просторі* R_n *і позначається* $O(x;\varepsilon)$, *таким чином,*

$$O(x;\varepsilon) = \{y : y \in \mathbb{R}_n, \rho(x, y) < \varepsilon\} \qquad (6)$$

У координатній формі це означення виглядає так:

$$O(x;\varepsilon) = \left\{ y = (y_i) : \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2 \right\},\ x = (x_i), \varepsilon > 0.$$

У випадку прямої, тобто при $n = 1$, $x = x_1$, $y = y_1$, тоді

$$O(x;\varepsilon) = \{ y : |y - x| < \varepsilon \}$$

Таким чином, є інтервал довжини 2ε з центром у точці x, тобто околом точки x.

У випадку площини, тобто при $n = 2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ і

$$O(x;\varepsilon) = \{ y = (y_1, y_2) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < \varepsilon \},\ \varepsilon > 0$$

тобто $O(x;\varepsilon)$ є звичайний круг радіуса ε з центром у точці $x = (x_1, x_2)$.

У випадку простору, тобто при $n = 3$, околом точки $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$O(x;\varepsilon) = \{ y = (y_1, y_2, y_3) : (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 < \varepsilon^2 \},\ \varepsilon > 0$$

є кулею з центром в точці $x = (x_1, x_2, x_3)$

Таким чином, ми узагальнили поняття околу на випадок $n-$вимірного евклідова простору $\mathbb{R}_n$. Однак поруч з цим узагальненням буває корисним і інше узагальнення, отже – так *званого прямокутного околу*.

Означення 4. *Нехай* $x = (x_i) \in \mathbb{R}_n$, $\delta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. *Множина*

$$P(x;\delta_1, ..., \delta_n) = \left\{ y = (y_i) : x_i - \delta_i < y < x_i + \delta_i, i = \overline{1, n} \right\} \qquad (7)$$

називається $n-$*вимірним паралелепіпедом, а точка* $x-$ *його центром.*

Якщо $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_n = \delta$, *тоді* $P(x;\delta, \delta, ..., \delta)$ *називається* $n-$*вимірним кубом з центром у точці* x *і позначається* $P(x;\delta)$.

Якщо $n = 1$, множина $P(x;\delta)$ є інтервалом з центром у точці x довжини 2δ; якщо $n = 2$, множина $P(x;\delta_1, \delta_2)$ є прямокутник зі сторонами, паралельними вісям координат, і довжини відповідно $2\delta_1$ і $2\delta_2$; якщо $n = 3$ множина $P(x;\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ представляє собою прямокутний паралелепіпед з ребрами, паралельними вісям координат, відповідно до довжини $2\delta_1$, $2\delta_2$ і $2\delta_3$.

Під $n-$вимірним паралелепіпедом, відповідно $n-$вимірним кубом треба розуміти теж множину, яка визначена вище вказаними умовами хоча б в одній системі координат.

Означення 5. *Всякий $n-$вимірним паралелепіпедом $P(x;\delta_1,...,\delta_n)$ називається прямокутним околом точки x.*

Лема 2. *Яким би не був $\varepsilon-$окіл $O(x;\varepsilon)$ точки $x\in\mathbb{R}^n$, існує її прямокутний окіл $P(x;\delta_1,...,\delta_n)$, такий, що*

$$P(x;\delta_1,...,\delta_n)\subset O(x;\varepsilon) \qquad (8)$$

і навпаки, яким би не був прямокутний окіл $P(x;\delta_1,...,\delta_n)$ точки $x\in\mathbb{R}^n$, існує її $\varepsilon-$окіл $O(x;\varepsilon)$, такий, що

$$O(x;\varepsilon)\subset P(x;\delta_1,...,\delta_n) \qquad (9)$$

► Нехай заданий окіл $O(x;\varepsilon)$. Зауважимо, що якщо $y=(y_i)\in P(x;\delta)$ тоді згідно (7)

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\le\sqrt{\delta^2+...+\delta^2}<\delta\sqrt{n}\,.$$

Отже, якщо вибрати $\delta<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, то $y\in O(x;\varepsilon)$ *(Рис. 1*)*, Оскільки y є довільна точка $n-$*вимірного куба* $P(x;\delta)$, то це і означає, що

$$P(x;\delta)\subset O(x;\varepsilon)$$

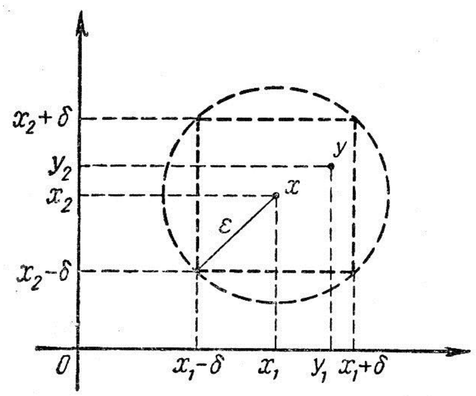

*Рис. 1**

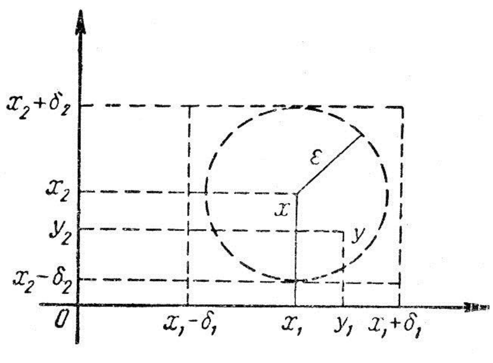

*Рис. 2**

Таким чином (8) доведено.

Навпаки, нехай заданий прямокутний окіл $P(x;\delta_1,...,\delta_n)$.

Покладаємо $\varepsilon=\min\limits_{i=\overline{1,n}}\delta_i$ і розглянемо $O(x;\varepsilon)$ *(Рис. 2*)*. Якщо $y=(y_i)\in O(x;\varepsilon)$, тобто $\rho(x,y)<\varepsilon$, тоді

$$|x_k-y_k|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\rho(x,y)<\varepsilon=\min_{i=\overline{1,n}}\delta_i\le\delta_k$$

Для будь-яких $k=\overline{1,n}$, тобто згідно з означенням (7) $y\in P(x;\delta_1,...,\delta_n)$. Оскільки $y-$довільна точка кулі $O(x;\varepsilon)$, то це означає, що

$$O(x;\varepsilon)\subset P(x;\delta_1,...,\delta_n)$$

Лема 2 доведена. ◄

Означення 6. *Нехай кожному натуральному числу* m *поставлена у відповідність деяка точка* $x_m \in \mathbb{R}_n$ *(необов'язково різні точки для різних* m*). Отже, множина* $\{x_m, m = 1, 2, ...\}$*, яка складається із точок простору* E *з різними номерами, називається послідовністю точок* $\mathbb{R}_n$ *і позначається*

$$x_m, \ m = 1, 2, ... \ \textit{або} \ \{x_m\}$$

Послідовність $\{y_k\}$ *називається підпослідовністю послідовності* x_k *і позначається*

$$x_{m_k}, \ k = 1, 2, ..., \ \textit{або} \ \{x_{m_k}\}$$

якщо для будь-якого k *існує таке* m_k*, що* $y_k = x_{m_k}$*, причому якщо* $k_1 < k_2$*, то* $m_{k_1} < m_{k_2}$.

1.1.1.Границя послідовності точок

Наявність відстані між двома точками евклідового простру $\mathbb{R}_n$ дозволяє багато понять і фактів, які відносяться до множини дійсних чисел, перенести на довільні множини цього простору.

Аналогом поняття границі послідовності дійсних чисел є поняття границі послідовності точок простору $\mathbb{R}_n$.

Означення 7. *Точка* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in \mathbb{R}_n$ *називається границею послідовності точок*

$$x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}) \in \mathbb{R}_n (m = 1, 2, ...),$$

якщо відстань точки x_m *до точки* x_0 *прямує до нуля при* $m \to \infty$*, тобто*

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_0) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{mi} - x_{0i}\right)^2} = 0. \qquad (10)$$

Той факт, що точка x_0 є границею послідовності точок $x_m \in \mathbb{R}_n (m = 1, 2, ...)$, символічно записують так:

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x_0 \ \text{або} \ x_m \to x_0 \ (m \to \infty) \qquad (11)$$

Послідовність точок $x_m \in \mathbb{R}_n (m = 1, 2, ...)$, яка має границю, називається *збіжною,* а та, що не має границі - *розбіжною*. Якщо послідовність точок $x_m \in \mathbb{R}_n (m = 1, 2, ...)$ має за свою границю точку $x_0 \in \mathbb{R}_n$, то також говорять, що ця послідовність точок *збігається до точки* x_0.

Теорема 1. *Для того, щоб послідовність точок*

$$x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}) \in \mathbb{R}_n$$

$(m = 1, 2, ...)$ *мала за свою границю точку* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$*, необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{m\to\infty} x_{mi} = x_{0i} \ \ (i = \overline{1, n}) \qquad (12)$$

Іншими словами, для збіжності послідовності точок

$$x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn})$$

до точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ необхідно і достатньо, що послідовності перших, других, … n - их координат цих точок збігалися до відповідних координат точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$. Слід звернути увагу на відмінність границі в рівностях (11) і (12). Якщо у рівності (11) йде мова про границю послідовності точок $n-$ вимірного евклідового простору, то в рівностях (12) маємо n границь послідовностей дійсних чисел.

► Нехай правильна рівність (11). Тоді згідно з (10), послідовність дійсних невід'ємних чисел $\rho(x_m, x_0)$ $(m=1,2,...)$ прямує до нуля при $m \to \infty$. Отже, для числа $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $m_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $m \geq m_0(\varepsilon)$ правильна нерівність

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_0) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{mi} - x_{0i}\right)^2} < \varepsilon$$

Звідси для $m > m_0(\varepsilon)$ і будь-якого $i = 1,2,...,n$, маємо

$$\left|x_{mi} - x_{0i}\right| \leq \rho(x_m, x_0) < \varepsilon$$

Отже, для кожного $i = \overline{1,n}$ правильна рівність (12). Цим необхідність доведено.

Нехай правильні рівності (12) для всіх $i = \overline{1,n}$. Задамо число $\varepsilon > 0$. Тоді для чисел $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$ ($n-$ фіксоване) існує натуральне число $m_{0i}(\varepsilon)$ таке, що

$$\left|x_{mi} - x_{0i}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

для всіх $m > m_{0i}(\varepsilon)$, то нерівності (12) будуть правильними для всіх $i = \overline{1,n}$ і тому для $m \geq m_{0i}(\varepsilon)$ маємо:

$$\rho(x_m, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{mi} - x_{0i}\right)^2} < \sqrt{n\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$$

Тобто, правильна рівність (11). Теорему доведено. ◄

З теореми 1 і властивостей границі числових послідовностей випливає, що збіжна послідовність точок n вимірного евклідового простору може мати тільки одну границю і що будь-яка підпослідовність збіжної послідовності збігається до тієї ж границі, що і вся послідовність.

Дамо геометричну інтерпретацію границі послідовності точок $x_m \in \mathbb{R}_n$ $(m=1,2,...)$.

Помітивши, що при $n=1$ відстань точки $x = x_1 \in \mathbb{R}_1$ до точки $x_0 = x_{01} \in \mathbb{R}_1$, згідно з (1), визначається за формулою

$$\rho(x, x_0) = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2} = \left|x_1 - x_{01}\right| = \left|x - x_0\right|$$

робимо висновок, що кулею радіуса $\varepsilon > 0$ в точці $x_0 \in \mathbb{R}_1$ і отже, $\varepsilon-$ околом точки x_0 в просторі $\mathbb{R}_1$ є інтервал $\left(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right)$. Якщо координати точок простору $\mathbb{R}_2$ (площини) позначити через x (абсцису) і y (ординату), то кулею радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у точці (x_0, y_0) у цьому просторі, згідно (1), буде множина точок $(x, y) \in \mathbb{R}_2$, які задовольняють нерівність

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

Ця множина точок є звичайним кругом з центром у точці (x_0, y_0) і радіусом $\varepsilon > 0$. Якщо координати простору $\mathbb{R}_3$ позначити через x (абсцису), y (ординату) і z (аплікату), то кулею радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у точці (x_0, y_0, z_0) у цьому просторі, згідно з (1), буде множина точок $(x, y, z) \in \mathbb{R}_3$, що задовольняють нерівність

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2,$$

і це є звичайна куля радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у точці (x_0, y_0, z_0).

Якщо $\varepsilon-$ околом точки $(x, y) \in \mathbb{R}_2$ є звичайний круг радіуса ε з центром у цій точці, то $\varepsilon-$ околом точки $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_3$ є звичайна куля радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у точці (x_0, y_0, z_0). У випадку довільного $n > 3$ геометричне тлумачення кулі радіуса $\varepsilon > 0$ з центром у точці $x_0 \in \mathbb{R}_n$ неможливе. В цьому випадку і не слід шукати в означенні кулі простору $\mathbb{R}_n$ якогось прихованого фізичного або геометричного смислу. Треба розуміти, що введення в математику поняття n вимірного евклідового простору має на меті побудову деякого математичного апарату, зручного для вивчення функцій багатьох змінних. Термінологію, яку ми вводимо в цьому просторі, запозичуємо із звичайної геометрії. Це дозволяє включати пряму, площину і звичайний тривимірний простір в одну загальну схему.

Тепер ми можемо дати геометричне тлумачення границі послідовності точок n вимірного евклідового простору.

Якщо

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x_0,\ x_m \in \mathbb{R}_n,\ (m=1,2,\dots),\ x_0 \in \mathbb{R}_n,$$

то це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ *існує номер* $m_0(\varepsilon)$ *такий, що всі точки* x_m *для* $m > m_0(\varepsilon)$ *точки* x_m *у випадку* $n=1$ *потрапляють у інтервал* $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$; у випадку $n=2$ - *у звичайний круг з центром у точці* $x_0 \in \mathbb{R}_2$ *того ж радіуса* $\varepsilon > 0$*; у випадку* $n=3$ - *у звичайну кулю з центром у точці* $x_0 \in \mathbb{R}_3$ *того ж радіуса* $\varepsilon > 0$. Що ж стосується скінченного числа $x_1,\ x_2,\dots,x_{m_0(\varepsilon)}$, то в означенні границі про них нічого не говориться, отже, вони всі або деякі з них можуть знаходитись в $\varepsilon-$околі точки x_0, а можуть і не бути там.

Нарешті зробимо ще одне зауваження. В означенні границі послідовності точок $x_m \in \mathbb{R}_n$ $(m=1,2,\dots)$ нічого не говориться відносно того, що точки x_m попарно відмінні. Деякі з них можуть бути рівними. Більш того, всі вони можуть бути рівними, тобто $x_m = x_0$ $(m=1,2,\dots)$.

1.1.2. Обмежені множини і послідовності

Означення 1. *Множина* $E \subset \mathbb{R}_n$ *називається обмеженою, якщо існує куля* $S(0;r)$ *з центром на початку координат радіуса* r *, що містить всі точки множини* E.

Означення 2. *Послідовність точок* $x_m \in \mathbb{R}_n$ $(m=1,2,\dots)$ *називається обмеженою, якщо множина її значень утворює обмежену множину в просторі* $\mathbb{R}_n$.

Неважко побачити, що збіжна послідовність точок є послідовність обмежена. Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне.

Теорема 2. (Больцано-Вейєрштрасса). *Із всякої обмеженої послідовності точок простору* $\mathbb{R}_n$ *можна виділити збіжну підпослідовність*

► Нехай послідовність точок

$$x_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}) \in \mathbb{R}_n\ \ (m=1,2,\dots)$$

обмежена Тоді існує куля $S(0;r)$ така, що $x_m \in S(0;r)$ $(m=1,2,\dots)$, тобто

$$\rho(x_m;0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}\right)^2} < r$$

Звідси для кожного $(i=1,2,\dots,n)$ маємо:

$$\left|x_{1m}\right| < r\ \ (m=1,2,\dots).$$

За теоремою Больцано-Вейєрштрасса (для обмеженої послідовності дійсних чисел) з обмеженої послідовності x_{1m} $(m=1,2,\dots)$ можна виділити збіжну послідовність

$$x_{1m_{1k}} \to x_1^*\ \ (k\to\infty)$$

За тією ж теоремою Больцано-Вейєрштрасса з обмеженої послідовності $x_{2m_{1k}}$ $(k=1,2,\dots)$ можна виділити збіжну послідовність

$$x_{2m_{2k}} \to x_2^*\,(k\to\infty)$$

Через те, що послідовність m_{2k} $(k=1,2,...)$ є підпослідовністю послідовності m_{1k} $(k=1,2,...)$, а послідовність $x_{1m_{1k}}$ $(k=1,2,...)$ збігається до числа x_1*, то з цього випливає правильність рівності

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_{2k}} = x_1^*$$

Застосувавши теорему Больцано-Вейєрштрасса для обмежених послідовностей дійсних чисел n разів, дістаємо послідовність

$$x_{m_{nk}} = \left(x_{1m_{nk}}, x_{2m_{nk}}, ..., x_{nm_{nk}},\right)$$

$(k=1,2,...)$ таку, що

$$x_{im_{nk}} \to x_i^* \ (k\to\infty) \text{ для } (i=1,2,...,n)$$

Позначивши через $x^* = = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, маємо:

$$\rho(x_{m_{nk}}, x^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im_{nk}} - x_i^*\right)^2} \to 0 \ \ (k\to\infty)$$

Тобто, послідовність точок $x_{m_{nk}} \in \mathbb{R}_n$ $(k=1,2,...)$ збігається до точки $x^* \in \mathbb{R}_n$. Теорему доведено. ◄

Означення 3. *Точка* $x_0 \in \mathbb{R}_n$ *називається граничною точкою множини* $E \subset \mathbb{R}_n$, *якщо будь-який* ε *окіл цієї точки містить нескінченну множину точок з множини* E.
Неважко побачити, що сформульоване означення граничної точки множини E рівносильне іншому її означенню.

Означення 4. *Точка* $x_0 \in \mathbb{R}_n$ *називається граничною точкою множини* $E \subset \mathbb{R}_n$, *якщо будь-який* ε *- окіл цієї точки містить принаймні одну точку множини* E *відмінну від точки* x_0

Що з першого означення випливе друге – зрозуміло. Покажемо, що з другого означення випливає перше. Нехай x_0 - гранична точка множини $E \subset \mathbb{R}_n$ в розумінні другого означення. Припустимо, що існує ε_1 - окіл $S(x_0;\varepsilon_1)$ точки x_0, в якій лише скінченне число різних між собою точок $x_1, x_2, ..., x_p$ з множини E відмінних від точки x_0. Тоді число $\varepsilon = \min\limits_{1<i<p} \rho(x_0; x_i)$ більше, ніж нуль і в ε - окіл точки x_0 не потрапляє ні однієї точки з множини E, відмінних від точки x_0, оскільки $\rho(x_0;x_i) \ge \varepsilon$. Дістаємо суперечливість з означенням граничної точки в розумінні другого означення. Цим рівносильність двох означень граничної точки множини E доведена.

Теорема 3. *Для того, щоб точка* $x_0 \in \mathbb{R}_n$ *була граничною для множини* $E \subset \mathbb{R}_n$, *необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність попарно різних точок* $x_m \in E$ $(m=1,2,...)$, *збіжна до точки* x_0.

► *Необхідність.* Нехай x_0 - гранична точка множини $E \subset \mathbb{R}_n$. Тоді в околі $S(x_0;1)$ точки x_0 міститься нескінченна множина точок із множини E. Візьмемо одну точку з цієї множини, відмінну від x_0, і позначимо її x_1, $x_1 \in E$. В околі $S(x_0;1/2)$ точки x_0 також міститься нескінченна множина точок із множини E. Візьмемо з цієї множини одну точку, відмінну від x_0 і x_1, і позначимо її через x_2, $x_2 \in E$. Припустимо, що точки x_1, x_2, …, x_{m-1} вже вибрані, причому $x_i \ne x_j$ для $i \ne j$. Візьмемо окіл $S(x_0;1/m)$ точки x_0. В цьому околі міститься нескінченна множина точок з E. Візьмемо одну з цих точок, відмінну від x_1, x_2, …, x_{m-1}, і позначимо її через x_m, $x_m \in E$. У такий спосіб ми побудували послідовність попарно різних точок x_m, $x_m \in E$ і таку, що $\rho(x_0;x_m) < \frac{1}{m}$. Отже, $\rho(x_0;x_m) \to 0\ (m \to \infty)$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}_n$ - границя послідовності точок $x_m \in E\ \ (m = 1, 2, ...)$. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай дано послідовність попарно різних точок $x_m \in E\ \ (m = 1, 2, ...)$, збіжну до точки $x_0 \in \mathbb{R}_n$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $m_0(\varepsilon)$, що $\rho(x_m;x_0) < \varepsilon$ для всіх $m > m_0(\varepsilon)$, тобто ε - окіл точки $x_0 \in \mathbb{R}_n$ потрапляє нескінченна множина $x_m \in E\ \ (m = m_0 + 1, m_0 + 2, m_0 + 3, ...)$. А це означає, що точка x_0 є граничною для множини E. Теорему доведено. ◄

Теорема 4. (Больцано-Вейєрштрасса). *Всяка нескінченна обмежена множина $E \subset \mathbb{R}_n$ має принаймні одну граничну точку.*

► Візьмемо з множини E нескінченну множину попарно різних точок $x_m\ (m = 1, 2, ...)$. Ця послідовність буде обмеженою, оскільки E - обмежена множина. За теоремою 2 (Больцано-Вейєрштрасса), з послідовності $\{x_m\}$ можна виділити збіжну послідовність $x_{m_k} \to x^*\ (k \to \infty)$. За теоремою 3, точка x^* буде граничною для множини E. Теорему доведено. ◄

1.2. Різні типи множин

1.2.1. Замкнені множини.

Означення 1. *Множина $E \subset \mathbb{R}_n$ називається замкненою, якщо вона містить в собі всі свої граничні точки.Множина всіх граничних точок множини E називається похідною множиною і позначається через $\overline{E}$. Таким чином, множина $E \subset \mathbb{R}_n$ називається замкненою, якщо $\overline{E} \subset E$.*

Всяка *скінчена множина* $F \subset \mathbb{R}_n$ не має граничних точок, тобто $\overline{F} = \varnothing$, тому $\overline{F} \subset F$, отже, скінчена множина F - замкнена множина.

Весь простір $\mathbb{R}_n$ - *замкнена множина*

У просторі $\mathbb{R}_1$ всякий відрізок $[a;b]$ - замкнена множина. Інтервал $(a;b)$ у просторі $\mathbb{R}_1$ не є замкненою множиною, оскілки точки a і b будучи граничними точками інтервалу $(a;b)$, не належать цьому інтервалу. В просторі $\mathbb{R}_2$ прямокутник, що визначається нерівностями

$$a \le x \le b, \qquad c \le y \le d \tag{1}$$

є замкненою множиною. Якщо ж взяти множину точок $(x;y) \in \mathbb{R}_2$, для яких

$$a < x < b, \qquad c < y < d \tag{2}$$

то ця не буде замкненою, оскільки точки $(a,y) \in \mathbb{R}_2$, де $c \le y \le d$, будучи граничними для цієї множини, не належить їй.

1.2.2. Відкрита множина

Означення 2. *Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}_n$ називається внутрішньою точкою множини E, якщо існує окіл точки, який повністю складається з точок множини E. Множина $E \in \mathbb{R}_n$ називається відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою для неї.*

Наприклад. Інтервал (a,b) у просторі $\mathbb{R}_1$ є відкритою множиною. А відрізок $[a;b]$ у просторі $\mathbb{R}_1$ не є відкритою множиною, оскільки точки a і b не є внутрішніми для нього. Точки $(x;y)\in\mathbb{R}_2$, що задовольняють нерівність

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2, \qquad (3)$$

тобто точки круга з центром в точці $(x_0;y_0)$ радіуса $r>0$, утворюють відкриту множину. Відкриту множину утворюють і точки $(x,y,z)\in\mathbb{R}_3$, що задовольняють нерівність

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1 \text{ (еліпсоїд)}$$

Весь простір $\mathbb{R}_n$ - відкрита множина. *Порожня множина за означенням називається відкритою*

1.2.3. Зв'язна множина

Означення 3. *Геометричне місце точок* $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}_n$ *координатами яких є функції* $x_i=x_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ *неперервні на відрізку* $\alpha\le t\le\beta$, *називається неперервною кривою у просторі* R_n. *Аргумент* t *називається параметром кривої. Точка* $x(\alpha)=(x_1(\alpha),x_2(\alpha),...,x_n(\alpha))$ *називається початком, а точка* $x(\beta)=(x_1(\beta),x_2(\beta),...,x_n(\beta))$ *- кінцем даної кривої.*

Множина E простору $\mathbb{R}_n$ *називається зв'язною*, якщо будь-які дві різні точки можна з'єднати неперервною кривою, яка повністю міститься у множині E. Зв'язність виражає собою властивість множини зображати єдине ціле, складатися з одного куска. Відрізок, інтервал простору $\mathbb{R}_1$ - приклади зв'язних множин. Квадрат і круг - зв'язні множини простору $\mathbb{R}_2$. Множина $F=[a,b]\cup[c,d]$, де $b<c$, яка складається з двох відрізків без спільних точок, у просторі $\mathbb{R}_1$ утворює незв'язну множину. У просторі $\mathbb{R}_2$ прямокутники (1) і (2) – зв'язні множини. Сукупність двох куль у просторі $\mathbb{R}_3$, відстань між центрами яких більше, ніж сума їх радіусів, є множиною незв'язною.

1.2.4. Область

Означення 4. *Зв'язна відкрита множина* $G\subset\mathbb{R}_n$ *називається областю.* Прямокутник (2) у просторі $\mathbb{R}_2$- область, а прямокутник (1) не є областю, оскільки цей прямокутник не є відкритою множиною.

Точка $x_0\in\mathbb{R}_n$ називається *межовою точкою* множини $E\subset\mathbb{R}_n$, якщо будь-який її окіл містить і точки множини E, і точки, які їй не належать. Множина всіх межових точок множини $E\subset\mathbb{R}_n$ *називається межею* цієї множини. Наприклад, межею круга (3) в просторі $\mathbb{R}_2$ є коло $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Межею всіх раціональних точок простору $\mathbb{R}_1$ є весь простір $\mathbb{R}_1$. Область разом з її межею *називається замкненою областю.* Неважко переконатися, що замкнена область є замкнена множина. Наприклад, множина точок $(x;y)\in\mathbb{R}_2$, що задовольняють нерівності

$$r_1^2\le(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r_2^2, \qquad (4)$$

утворює замкнену область (кільце). Межа цієї замкненої області складається з двох концентричних кіл

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_1^2,\ \ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r_2^2. \qquad (5)$$

Якщо взяти множину точок $(x;y)\in\mathbb{R}_2$, які задовольняють нерівності

$$r_1^2 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r_2^2 \qquad (6)$$
то ця множина є областю. Її межа також складається з двох кіл (5). Звертаємо увагу на той факт, що замкнена область (4) не є областю, оскільки точки кіл (5) належать цій замкненій області, однак вони не є її внутрішніми точками.

1.2.5. Відстань між множинами

Нам добре відомо, що відстань від точки $A \in \mathbb{R}_2$ до прямої $(CD) \subset \mathbb{R}_2$ дорівнює довжині перпендикуляра $[AA_1]$, опущеного з точки A на цю пряму (CD). В цьому випадку довжина відрізка $[AA_1]$ є найменша відстань між точками A і $A_2 \in (CD)$. Однак така найменша відстань між фіксованою точкою A і точками деякої множини не завжди існує. Наприклад, серед відстаней $2 \in \mathbb{R}_1$ до півінтервалу $(4;5]$ взяти число
$$2 = \inf_{x\in(4;5]} \rho(4,x),$$
де $\rho(4;x)$ - відстань від точки 2 до точки $x \in (4;5]$.

В загальному випадку, *коли дано точку $x_0 \in \mathbb{R}_n$ і непорожню множину $E \subset \mathbb{R}_n$, за відстань цієї точки x_0 до множини E, за означенням, беруть число*
$$\rho(x_0;E) = \inf_{x\in E} \rho(x_0;x) \qquad (7)$$
Якщо дано дві непорожні множини $E_1 \subset \mathbb{R}_n$ і $E_2 \subset \mathbb{R}_n$, то відстань між цими множинами називається число
$$\rho(E_1;E_2) = \inf_{\substack{x\in E_1\\ x\in E_2}} \rho(x_1;x_2) \qquad (8)$$
Вище було зазначено, що відстань між двома множинами не завжди є найкоротша відстань між двома точками цих множин.

Теорема. *Якщо F_1 і F_2 - замкнені непорожні множини простору $\mathbb{R}_n$, причому F_1 - обмежена і $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то існують дві точки $x^* \in F_1$ і $x^{**} \in F_2$ такі, що*
$$\rho(F_1;F_2) = \rho(x^*;x^{**}) > 0.$$

► Внаслідок властивості нижньої грані для кожного натурального числа m існують дві точки $x_{1m} \in F_1$ *і* $x_{2m} \in F_2$, для яких правильні нерівності
$$\rho(F_1;F_2) \le \rho(x_{1m};x_{2m}) < \rho(F_1;F_2) + 1/m \qquad (9)$$
Оскільки F_1 - обмежена множина, то послідовність точок $\{x_{1m}\}$ обмежена. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса, з неї можна виділити збіжну послідовність $\{x_{1m_k}\}$
$$\lim_{k\to\infty} x_{1m_k} = x^*$$
Внаслідок замкненості множини F_1 точка x^* належить цій множині. Послідовність $\{x_{2m_k}\}$ обмежена. Дійсно, використавши нерівність трикутника й нерівність (9), дістанемо:
$$\rho(0;x_{2m_k}) \le \rho(0;x_{1m_k}) + \rho(x_{1m_k};x_{2m_k}) \le C + \rho(F_1;F_2) + 1/m_k < C + \rho(F_1;F_2) + 1,$$
де $\rho(0;x_{2m_k}) < C \quad (k = 1,2,...)$ внаслідок обмеженості послідовності $\{x_{1m_k}\}$. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса, з послідовності $\{x_{2m_k}\}$ можна виділити збіжну послідовність $\{x_{2m_{k_\nu}}\}$
$$\lim_{\nu\to\infty} x_{1m_{k_\nu}} = x^{**}$$
Внаслідок замкненості множини F_2 точка x^{**} належить цій множині. З нерівності (9) маємо
$$\rho(F_1;F_2) \le \rho(x_{1m_{k_\nu}};x_{2m_{k_\nu}}) < \rho(F_1;F_2) + 1/m_{k_\nu}$$

і, переходячи до границі при $v \to \infty$, дістаємо
$$\rho\left(F_1; F_2\right) \le \rho(x^*; x^{**}) \le \rho\left(F_1; F_2\right),$$
Тобто
$$\rho\left(F_1; F_2\right) = \rho(x^*; x^{**})$$
Оскільки F_1 і F_2 без спільних точок, то $\rho(x^*; x^{**}) > 0$. Теорему доведено. ◄

§ 2. *Границя та неперервність функцій багатьох змінних*

За допомогою функцій однієї змінної розв’язувався цілий ряд задач геометрії, механіки, фізики. Однак у цих науках є задачі, які приводять до функцій не однієї змінної, а двох, трьох і більшого числа змінних. Наприклад формула Клапейрона
$$p = \frac{RT}{V} = f(T, V)$$
Виражає залежність між об’ємом V, абсолютною температурою T і тиском p газу. Тут одна величина p певним чином залежить від двох інших величин V і T, тобто величина p є функція двох величин V і T.

Якщо розглянути об’єм циліндра із висотою H і радіуса R, цей об’єм $V = \pi R^2 H$ є функція двох змінних R і H. Об’єм V прямокутного паралелепіпеда із сторонами, що дорівнюють x, y і z, запишеться у вигляді
$$V = xyz$$
і, отже, об’єм V є функція трьох змінних x, y і z, визначена для всіх точок (x, y, z) першого октанта $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Ми навели приклади функцій двох і трьох змінних, Нижче буде дано означення функцій n змінних, де $n-$ фіксоване натуральне число. Для цього треба розглянути деякі властивості множин, на яких ці функції задані.

2.1. Поняття функції, графік функції двох змінних

Нехай дано множину $E \subset \mathbb{R}_n$. Якщо кожній точці $x \in E$, за певним законом, поставлено у відповідність одне і тільки одне дійсне число u, то кажуть, що на множині E визначена функція і записують $u = f(x)$.

Оскільки точка $x \in E$ характеризується своїми координатами $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то функція $f(x)$, визначена на множині E, є функція n незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, кожна з яких змінюється на деякій множині дійсних чисел.

Залежно від змісту розглядуваного питання ми будемо дивитися на функцію $u = f(x)$ або як функцію n незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ і записуватимемо $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, або як на функцію однієї змінної x, що є точкою n вимірного евклідового простору. У випадку $n = 2$ замість $f(x_1, x_2)$ писатимемо $f(x, y)$, а у випадку $n = 3$ замість $f(x_1, x_2, x_3)$ - також $f(x, y, z)$.

Якщо функція $u = f(x)$ визначена на множині $E \subset \mathbb{R}_n$, то множина E називається ***областю визначення****, або* ***областю існування****, цієї функції, і позначають $D(f)$*

Якщо функцію задано аналітично (за допомогою однієї або декількох формул) і при цьому не вказано області її визначення, то під останньою розуміють множину всіх тих точок $x \in \mathbb{R}_n$, при яких цей аналітичний вираз має смисл, тобто має певне дійсне значення, і в процесі проведені всіх необхідних обчислень за цією формулою виходять тільки дійсні числа.

Множину чисел $u = f(x)$ *називають* ***множиною значень функції*** $f(x)$ *на множині* $E \subset \mathbb{R}_n$ *і записують*

$$E(f) = \left\{u \in \mathbb{R}_n \middle| u = f(x),\ x \in D(f)\right\}$$

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ може бути представлена за допомогою таблиці або аналітично. Ця формула може бути використана для складення таблиці значень функції для відповідних пар незалежних змінних.

Якщо функціональна залежність $z = f(x, y)$ дістається як результат зміни величини z при деяких експериментальних дослідженнях деякого явища, як безпосередньо таблицю значень z, як функцію двох змінних.

Лінії які обмежують дану область будемо називати *межею області.* Точки області, які не належать межі, будемо *називати внутрішніми точками* області. Область разом з її межею *називається замкненою областю.*

Приклад 1. Визначити область визначення функції. $z = 2x - y.$

► Аналітичний вираз $2x - y$ є визначеним для всіх значень x і y. Тому, функція $z = 2x - y$ визначена у всіх точка $(x; y) \in \mathbb{R}_2$. ◄

Приклад 2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

► Залежна змінна z приймає дійсні якщо підкореневий вираз невід'ємний, тобто x і y повинні задовольняти нерівності

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ або } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Всі точки $(x; y) \in \mathbb{R}_2$, координати яких задовольняють даним нерівностям належать кругу радіуса 1 з центром у початку координат і границі круга $x^2 + y^2 = 1.$◄

Приклад 3. $z = \ln(x + y).$

► Логарифм визначений тільки для додатних чисел, отже вираз під знаком логарифму повинен задовольняти таким нерівностям

$$x + y > 0 \text{ або } y > -x.$$

Звідси випливає, що дійсна область визначення функції z є півплощина, яка лежить над прямою $y > -x$. Точки цієї прямої не включаються. ◄

Приклад 4. $w = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}$

► Дана функція w є функція чотирьох змінних x_1, x_2, x_3, x_4, яка визначена для значень, які задовольняють такій умові

$$1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^3 \geq 0. ◄$$

2.2.Графік функції двох змінних

Надамо загальне означення графіка функції від n невідомих.

Означення 1*. *Нехай на множині* $G \subset \mathbb{R}_n$ *визначена функція* $u = f(x)$ *і нехай* $\mathbb{R}_{n+1}^{xu} - (n+1)$ *вимірний евклідовий простір точок* $(x,u) = (x_1, x_2, ..., x_n, u)$. *Геометричне місце точок простору* $\mathbb{R}_{n+1}^{xu}$ *типу* $(x, f(x))$, *де* $x \in G$, *називається графіком функції* f .

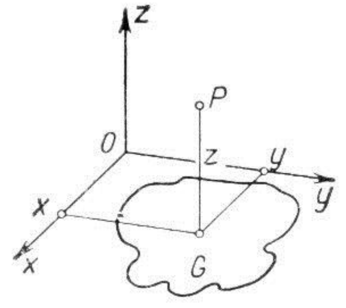

Рис. 1

Розглянемо функцію

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

яка визначена у області $G \subset \mathbb{R}_2$ (в окремому випадку це може бути вся площина $(x;y)\in \mathbb{R}^2$) і система прямокутних координат $Oxyz$ (Рис. 1). В кожній точці $(x;y)$ проведемо перпендикуляр і відкладемо відрізок, який дорівнюється значенню функції $f(x,y)$. Ми дістанемо точку P у просторі з координатами

$$x,\ y,\ z=f(x,y).$$

Геометричне місце точок P, координати яких задовольняють рівнянню (1), є графік функції двох змінних.

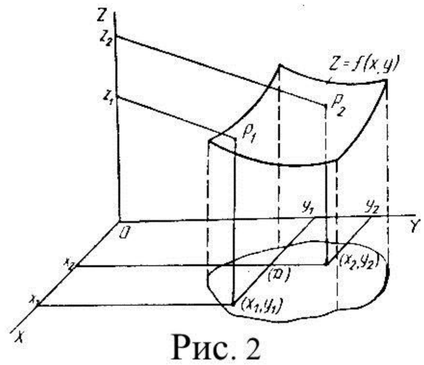

Рис. 2

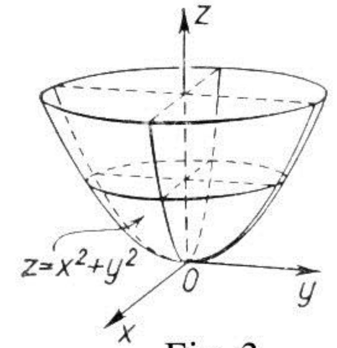

Fig. 3

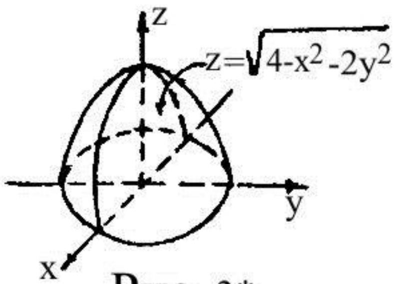

Рис. 3*

Рівняння (1) визначає поверхню у просторі. Отже, графіком функції двох незалежних змінних є поверхня, яка проектується на площину xy у область визначення функції. Всі перпендикуляри до площини xy перетинають поверхню $z=f(x,y)$ у не більш ніж в одній точці (Рис.2)

Приклад 5. *Графіком функції $z=x^2+y^2$ є параболоїд обертання (Рис. 3)*

Приклад 6. *Графіком функції $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$ є верхня частина еліпсоїда* $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ (Рис. 3*).

2.3 . Границя функції двох змінних

Околом точки $M_0(x_0,y_0)$ радіуса r є множина точок $(x;y)\in \mathbb{R}^2$, які задовольняють нерівності $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r;$ тобто множина всіх $(x;y)\in \mathbb{R}^2$ які лежать в середині круга радіуса r з центром в точці $M_0(x_0,y_0)$.

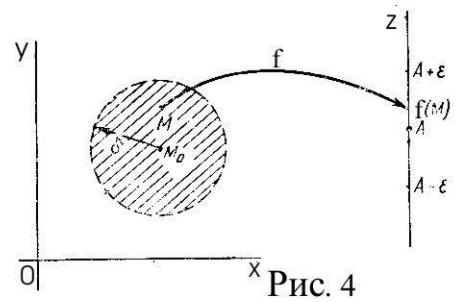

Рис. 4

Означення 4 (*за Коші***).** *Число A називається границею функції $f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх точок $M(x,y)$ для яких $\overline{MM_0}<\delta$ виконується така нерівність*

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

Якщо A є границя функції $f(x,y)$ при $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$, то символічно це записується так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \qquad (2)$$

або використовуючи логічні оператори, означення набуває вигляд

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):(\forall M\in\bigcup(\delta,M_0))\Rightarrow f(x,y)\in\bigcup(\varepsilon,A).$$

Означення 5. (*за Гейне***)** *Число A називається границею функції $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо для будь-якої збіжної послідовності точок* $\{M_k(x_k,y_k)\}$,

$k=1,2,3,...\left(M_k \in \bigcup\left(r,M_0\right)\right)$ *до точки* $M_0(x_0,y_0)$ *відповідна числова послідовність значень функцій* $\{f(M_k)\}$ *збігається до числа* A або

$A=\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \Leftrightarrow \forall P_k(x_k,y_k): \lim\limits_{k\to\infty} P_k(x_k,y_k)=P_0(x_0,y_0) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(P_k)=f(P_0).$

Означення 6. *Якщо функція* $f(M)$ *визначена у деякому околі* $O\left(M_0;\delta\right)$ *точки* M_0 *крім, майже, самої точки* M_0*, то в цьому випадку границя функції* f *за множиною* $E_0=O\left(M_0;\delta\right)$ *при* $M\to M_0$ *називається просто границею функції і позначається* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$

Означення 7. *Якщо множиною* E_0 *є пряма, яка проходить через точку* M_0 *у деякому напрямку, то в цьому випадку границя функції* f *за множиною* E_0 *при* $M\to M_0$ *називається границею функції в даному напрямку в точці* M_0.

Означення 8. *Якщо множиною* E_0 *є множина точок деякої кривої, яка проходить через точку* M_0*, то в цьому випадку границя функції* f *за множиною* E_0 *при* $M\to M_0$ *називається границею функції за даною кривою в точці* M_0.

Зауваження. *Очевидно, що якщо у функції* f *існує границя в точці* M_0*, то вона існує в цій точці і у будь-якому напрямку і за всякою кривою, причому всі ці границі збігаються з вказаною границею функції.*

Приклад. 7 *Нехай* $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

► Ця формула задає функцію у всіх точках площини, крім початку координат $(0,0)$. Дослідимо границі цієї функції за різними напрямками в точці $(0,0)$. Рівняння прямої, яка проходить через початок координат $(0,0)$ у напрямку вектора (α,β), має вигляд $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2>0$. Маємо

$$f(\alpha t,\beta t)=\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}\to 0 \quad \text{при } t\to 0,$$

тобто границя за будь-яким напрямком існує і дорівнює нулю. Якщо ж $y=x^2$, то

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2},$$

і, отже, границя вздовж параболи $y=x^2$ також існує, але дорівнюється $\frac{1}{2}$.

Таким чином, для даної функції існує єдина і та ж границя за будь-яким напрямком, а границя за вказаною параболою, хоча і існує, відмінна від загального значення границь за напрямком, звідси висновок, що границя в точці $(0,0)$ не існує. ◄

2.3.1. Головні властивості границі функцій

1⁰. *Якщо* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A \quad \lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B$, *то*

1) $\lim\limits_{M\to M_0}\left[f(M)+g(M)\right]=A+B=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)+\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$;

2) $\lim\limits_{M\to M_0}\left[f(M)\cdot g(M)\right]=A\cdot B=f(M)\cdot\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\left[\dfrac{f(M)}{g(M)}\right]=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}; \quad \left(B\neq 0\right).$

2⁰. *Якщо функція* $f(M)$ *має границю в точці* M_0, *тоді існує окіл цієї точки де функція* f *обмежена.*

3⁰. *Якщо* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A>0 \ \ (A<0)$, *то існує окіл точки* M_0 *такий, що у всіх точках* M $f(M)>0 \ \ (f(M)<0)$.

2.3.2. Повторні границі

Поруч з вказаними границями у функцій багатьох змінних можна розглядати і границі інших видів, які пов'язані з послідовним переходом до границі, наприклад, за різними координатами. Границі такого виду *називаються повторними границями*; вони представляють специфіку функцій багатьох змінних.

Приклад 1*. Розглянемо функцію

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & якщо \quad x\neq 0 \ \ і \ \ y\neq 0,\\ 0, & якщо \quad x=0 \ \ і \ \ y=0, \end{cases}$$

Яка визначена на всій площині. Дослідимо різні її границі.

Очевидно, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, що ж стосовно повторних границь

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right]$$

і

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}+\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right],$$

то вони не існують, оскільки вже не існують наступні границі

$$\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}, \ (y\neq 0) \ \ \text{і} \ \ \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}, \ (x\neq 0).$$

Приклад 2*. Для функції $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, яка визначена на всій площині, крім початку координат , обидві повторні границі існують і

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

Але ж границя функції не існує, як легко бачити, границя вздовж координатних вісей дорівнює нулю, а вздовж прямої $y=x$ границя дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

Зауваження. *Таким чином, тільки із існування границі функції в даній точці не випливає існування повторних границь в цій точці, і, навпаки, із існування повторних границь не випливає існування границі у відповідній точці.*

Але ж певний зв'язок між цими поняттями може бути встановлений.

Теорема 1*. *Нехай функція* $f(x,y)$ *визначена на множині* D, *яка містить всі точки прямокутного околу* $P((x_0,y_0),\delta_1,\delta_2)$ *точки* (x_0,y_0), *крім того, може бути, що точки прямих* $x=x_0$ *і* $y=y_0$ *також належать цьому околу. Якщо існує границя функції* f *в точці* (x_0,y_0) *за множиною* D *і якщо при будь-кому* $y\in(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)$, $y\neq y_0$ *існує границя*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=g(y) \qquad (1^*)$$

тоді повторна границя $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ *існує і*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x,y) \qquad (2^*)$$

► Нехай $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)=A$ і нехай фіксоване число $\varepsilon>0$. Існує прямокутний окіл $P=P((x_0,y_0);\eta_1,\eta_2)$, $0<\eta_1<\delta_1$, $0<\eta_2<\delta_2$ такий, що якщо $0<|x-x_0|<\eta_1$, $0<|y-y_0|<\eta_2$, *то*

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Оскільки існує границя (1*) для будь-якого y такого, що $0<|y-y_0|<\eta_2$, то беручи до уваги (2*), випливає, що

$$|g(y)-A|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

А це і означає, що $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=A$.Теорема доведена. ◄

Надамо геометричну інтерпретацію повторної границі

Означення границі функції $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ має на увазі, що x прямує до x_0 незалежно від того, як y прямує до y_0, тільки необхідно, щоб точка (x,y) належала області визначення функції $D(f)$. Якщо ми зафіксуємо змінну y, тоді функція $f(x,y)$ буде функцією від однієї змінної x, де $x\in[a(y);b(y)]$ (Fig.5).

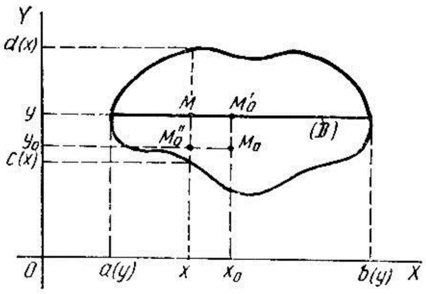

Рис. 5

Поставимо питання про існування границі

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A(y), \tag{3}$$

яка залежить від y. Границя (3) означає, що точка M прямує до точки $M_0'=(x_0;y)$. Тоді поставимо питання про існування границі

$$\lim_{y\to y_0} A(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \tag{4}$$

яка є повторною границею. Границя (4) означає, що точка M_0' прямує до точки M_0 вздовж прямої $x=x_0$.

Аналогічно може бути введена наступна повторна границя

$$\lim_{x\to x_0} B(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y), \tag{5}$$

де

$$B(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Границя (5) означає, що спочатку точка M прямує до точки $M_0''=(x,y_0)$ вздовж прямої $x=const$, після чого M_0'' прямує до точки M_0 вздовж прямої $y=y_0$. (Рис. 5)

Отже, повторні границі (4) і (5) показують, що змінна точка $M(x,y)$ прямує до точки $M_0(x_0,y_0)$ вздовж сторін прямокутника $MM_0'MM_0''$ паралельно координатним вісям.

Зауваження. *Ми не повинні вважати, що повторні границі повинні бути рівними*

Приклад 7. *Знайти повторні границі функції* $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *в точці* $M_0(0,0)$.

► Розглянемо наступні границі

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Отже, повторні границі різні.

Ми повинні зауважити, що співвідношення (2), як так звана подвійна границя $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, відрізняється від повторних границь (4) і (5).

Теорема 1. *Якщо існує подвійна границя* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ *і для всякого* y *існує скінченна границя* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A(y)$*, тоді існує повторна границя*

$$\lim_{y\to y_0} A(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

яка дорівнюється границі подвійної границі A

► Оскільки, існує границя A функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0), тоді приймаючи до уваги (2) випливає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що при; $0<|x-x_0|<\delta$; $0<|y-y_0|<\delta$ справджується нерівність $|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Звідси, і приймаючи до уваги означення границі, випливає, що $|A(y)-A|<\varepsilon$, $0<|y-y_0|<\delta$. Ці нерівності і означають, що

$$\lim_{y\to y_0} A(y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A. \blacktriangleleft$$

Приклад 8. *Обчислити границю функції* $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$ *в точці* $M_0(0,0)$*, користуючись означенням границі за Гейне.*

► Область визначення функції $D(f)=|(x,y):x\neq y|$. виберемо таку довільну послідовність точок $(P_k)=(x_k,y_k)$, що

$$x_k\neq y_k,\, x_k\to 0,\, y_k\to 0.$$

Тоді

$$f(P_k)=\frac{x_k^3-y_k^3}{x_k-y_k}=x_k^2+x_k y_k+y_k^2,$$

звідси

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=\lim_{\substack{k\to\infty\\ \left(\substack{x_k\to 0\\ y_k\to 0}\right)}}(x_k^2+x_k y_k+y_k^2)=0. \blacktriangleleft$$

Приклад 9. *Застосовуючи означення границі за Коші, довести, що* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=0.$

► Виберемо будь-яке число $\varepsilon>0$ і знайдемо таке $r(\varepsilon)$, що для всякої точки $P(x,y)\in \mathrm{U}(r;0,0)$ виконується така нерівність $|f(x,y)-0|<\varepsilon$. Оскільки для будь-якої точки $M(x,y)\in D(f)$ наступне співвідношення справджується

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

тоді

$$|f(x,y)-0|=|x^2+xy+y^2|\le x^2+y^2+|xy|.$$

Оцінимо $|xy|$:

$$\left(|x|-|y|\right)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2 > 0 \Rightarrow |xy| \le \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Отже,

$$|f(x,y)-0| \le \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{3}{2}\rho^2(0,M) \Rightarrow \rho(0,M) < \sqrt{\frac{3}{2}\varepsilon},$$

де $\rho(0,M)$ є відстань від $M(x,y)$ до точки $O(0,0)$.

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$ ми знайшли таке $r(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, що для будь-якої точки $P(x,y) \in U(r,P)$ наступна нерівність виконується

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x-y} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x-y} = 0. ◄$$

2.4. Неперервність функцій багатьох змінних

Означення 6[1]. (*за Коші***)** *Нехай функція $f(x)$ визначена на множині $E \subset \mathbb{R}^n$ називається неперервною в точці $x_0 \in E$ відносно множини E, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ для всіх } x \in E \cap S(x_0;\delta) \qquad (6)$$

Якщо точка x_0 є внутрішньою з множини E, то для достатньо малих $\delta > 0$

$$E \cap S(x_0;\delta) = S(x_0;\delta)$$

У цьому випадку функцію, неперервну в точці x_0 відносно множини E, називають просто неперервною в цій точці.

Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ *називається ізольованою точкою множини E*, якщо достатньо малий окіл цієї точки не містить точок цієї множини E, відмінних від точки x_0.

Якщо точка x_0 - ізольована точка множини $E \subset \mathbb{R}^n$, то при достатньо малому $\delta > 0$ множина $E \cap S(x_0;\delta)$ буде містить тільки одну точку $x = x_0$. А для точки $x = x_0$ нерівність (3*), очевидно, правильна для будь-якого $\varepsilon > 0$. Таким чином, *всяка функція $f(x)$, визначена на множині $E \subset \mathbb{R}^n$, непевна відносно множини E в кожній ізольованій точці цієї множини.*

Означення 6*. *Якщо точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^n$ є граничною для множини E, то неперервність функції $f(x)$ в точці x_0 відносно множини E означає існування границі цієї функції в цій точці відносно цієї множини E і правильна рівність*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) = f(x_0) \qquad (7)$$

Означення 6.** *Якщо позначити через $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, то умова (4*) має вигляд*

$$\lim_{\substack{\rho(x,x_0)\to 0\\ x\in E}} \Delta f(x_0) = 0 \qquad (8)$$

Число $\Delta f(x_0)$ називається приростом функції $f(x)$ в точці x_0, що відповідає зміні аргументу від точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in E$ до точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$. Оскільки

$$\rho(x;x_0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{0i})^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2},$$

де $\Delta x_i=(x_i-x_{0i})$ *- приріст аргументу* x_i $(i=1,2,...,n)$, *то неперервність функції* $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ *в точці* $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$ *означає, що приріст цієї функції в цій точці прямує до нуля, коли приріст всіх її аргументів прямує до нуля.*

Означення 6⁰. (за Гейне) *Функція* $f(x)$, *визначена на множині* $E\subset\mathbb{R}_n$, *називається неперервною в точці* $x_0\in E$ *відносно множини* E, *якщо для кожної послідовності точок* $x_m\in E$ $(m=1,2,...)$, $x_m\to x_0$ $(m\to\infty)$ *послідовність* $\{f(x_m)\}$ *збігається до* $f(x_0)$.

Аналогічно як і для функцій однієї змінної, можна довести еквівалентність означень за Коші і за Гейне

2.4.1. Неперервність складеної функції

Означення. *Нехай функція* $\varphi_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ *визначена на множині* $E_1\subset\mathbb{R}_p$, *а функція* $f(x)$, *де* $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E_2\subset\mathbb{R}_n$, *визначена на* E_2, *причому для будь-якої точки* $t\in E_1$ *точка* $x=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$, *де* $x_k=\varphi_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$, *належить множині* E_2. *Тоді функція*

$$f(x)=f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)) \qquad (9)$$

розглядається як функція точки t, *буде визначена на множині* $E_1\subset\mathbb{R}_p$. *У цьому випадку функцію (9) називають складеною функцією або суперпозицією функцій* f *і* φ_k $(k=1,2,...,n)$.

Теорема 1. *Нехай маємо складену функцію* $f(x)=f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$. *Якщо функції* $\varphi_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ *неперервні в точці* $t_0\in E_1\subset\mathbb{R}_p$ *відносно множини* E_1, *а функція* $f(x)$ *неперервна в точці* $x_0=(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0),...,\varphi_n(t_0))\in E_2\subset\mathbb{R}_n$ *відносно множини* $E_2\subset\mathbb{R}_n$, *то складена функція* $f(x)=f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$ *неперервна в точці* $t_0\in E_1\subset\mathbb{R}_p$ *відносно множини* E_1.

► Задамо число $\varepsilon>0$. В наслідок неперервності функції $f(x)$ в точці $x_0=(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0),...,\varphi_n(t_0))$ існує $\delta*$ окіл $S(x_0;\delta*)\subset\mathbb{R}_n$ цієї точки такий, що

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \text{ для всіх } x\in E_2\cap S(x_0;\delta*)\subset\mathbb{R}_n \qquad (9)$$

Внаслідок неперервності $\varphi_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ в точці $t_0\in E_1\subset\mathbb{R}_p$ для числа $\frac{\delta*}{\sqrt{n}}>0$ ($\delta*$ - радіус кола $S(x_0;\delta*)\subset\mathbb{R}_n$) знайдеться δ_k - окіл $S(t_0;\delta_k)\subset\mathbb{R}_p$ точки t_0 такий, що $|\varphi_k(t)-\varphi_k(t_0)|<\frac{\delta*}{\sqrt{n}}$ для всіх $t\in E_1\cap S(t_0;\delta**)\subset\mathbb{R}_p$ будуть правильними нерівності,

$$|\varphi_k(t)-\varphi(t_0)|<\frac{\delta*}{\sqrt{n}} \ (k=1,2,...,n) \qquad (10)$$

Якщо

$$t\in E_1\cap S(t_0;\delta**)\subset\mathbb{R}_p$$

то, враховуючи (10), дістаємо:

$$\rho(x;x_0)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k(t)-\varphi_k(t_0))^2}<\sqrt{\frac{\delta^{*2}}{n}\cdot n}=\delta^*,$$

тому точка $x=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$ належить множині $E_2\bigcap S(x_0;\delta^*)\subset\mathbb{R}_n$, і внаслідок (9), маємо:

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|f(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))-f(\varphi_1(t_0),...,\varphi_n(t_0))\right|<\varepsilon \qquad (11)$$

Таким чином, для числа $\varepsilon>0$ ми показали існування δ^{**}- околу $S(t_0;\delta^{**})\subset\mathbb{R}_p$ точки $t_0\in E_1\subset\mathbb{R}_p$ такого, що для всіх $t\in E_1\bigcap S(t_0;\delta^{**})$ правильна нерівність (10). Цим доведено неперервність складеної функції

$$f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t))$$

в точці $t_0\in E_1\subset\mathbb{R}_p$ відносно множини E_1. ◄

Означення 7*. *Функція, неперервна в кожній точці деякої множини називається неперервною на цій множині.*

Означення 8*. *Функція $f(x)$, визначена на множині $E\subset\mathbb{R}_n$ називається рівномірно неперервною на цій множині, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для будь-яких точок x' і x'' з множини E, для яких відстань $\rho(x';x'')<\delta$, правильна нерівність $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.*

Неважко бачити, з рівномірної неперервності функції на множині E випливає неперервність цієї функції на цій множині. Обернене твердження, взагалі кажучи, неправильне. Однак якщо функція $f(x)$ неперервна на обмеженій замкненій множині $F\subset\mathbb{R}_n$, то правильне і обернене твердження.

Наведемо без доведення теореми про властивості неперервних функцій

Теорема 2. (*Вейєрштрасса*) *Функція $f(x)$, неперервна на замкненій обмеженій множині $F\subset\mathbb{R}_n$, обмежена на цій множині.*

Теорема 3. (*Вейєрштрасса*) *Функція $f(x)$, неперервна на замкненій обмеженій множині $F\subset\mathbb{R}_n$, серед усіх своїх значень має і найбільше, і найменше.*

Теорема 4. (*Кантора*) *Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненій обмеженій множині $F\subset\mathbb{R}_n$, то вона рівномірно неперервна на цій множині.*

Теорема 5. (*Больцано-Коші*) *Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненій зв'язній множині $E\subset\mathbb{R}_n$ і якщо $f(x_1)<C<f(x_2)$, де $x_1\in E$ і $x_2\in E$, то існує точка $x_0\in E$, в якій $f(x_0)=C$.*

Теорема 6. (*Больцано-Коші*) *Якщо функція $f(x)$ неперервна в області $G\subset\mathbb{R}_n$ і якщо $f(x_1)<C<f(x_2)$, де $x_1\in G$ і $x_2\in G$, то існує точка $x_0\in G$, в якій $f(x_0)=C$.*

Приклад 9. *Функція $z=x^2+y^2$ визначена у всіх точках площини $\mathbb{R}_2$ і неперервна у цих точках*

Приклад 10. *Функція $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ визначена у всіх точках площини за винятком початку координат $x=0$, $y=0$.*

► Дослідимо поведінку функції z вздовж пучка прямих $y=kx$ $(k=const)$. (Fig.5*). Очевидно, що вздовж будь-якої лінії $z=\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}=const$.

Це означає, що функція z вздовж будь-якої лінії, яка проходить через початок координат,

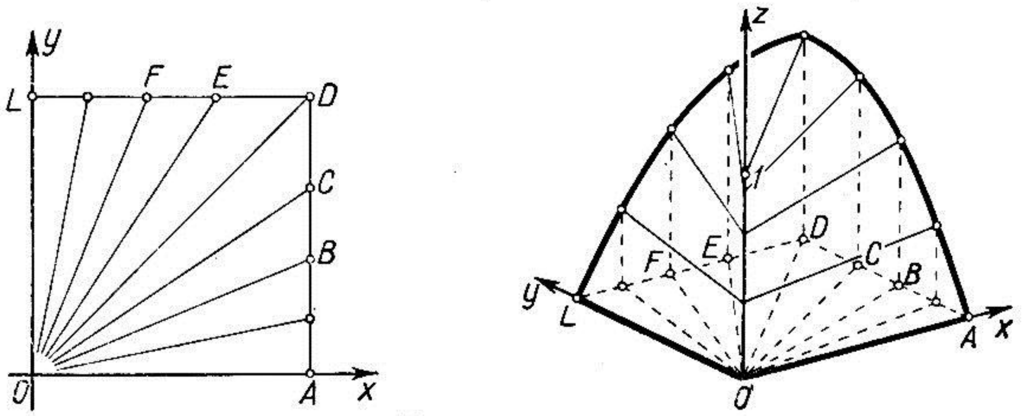

Рис. 5*

приймає постійне значення, яке залежить від кутового коефіцієнта k прямої. Отже, рухаючись до початку координат вздовж різних ліній, ми дістаємо різні значення границь, а це означає, що функція $f(x,y)$ не має границі якщо $(x,y)\in \mathbb{R}_2$. Отже задана функція, не є непевною у початку координат. З іншого боку, очевидно, що задана функція неперервна у всіх інших точках визначення функції.

Практичні заняття - 1.1

Знайти область визначення наступних функцій

1) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$	2). $z=(2x+3y-1)/(x-y)$.
3) $z=y\sqrt{\cos x}$	4) $z=\ln(-x-y)$,
5) $z=\sqrt{\log_a\left(x^2+y^2\right)}$	6) $\sin^{-1}\dfrac{x}{y^2}+\sin^{-1}(1-y)$
7) $z=\cos^{-1}\dfrac{x}{x+y}$	8) $u=\ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$
9) $z=xy+\sqrt{\ln\dfrac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$	10) $\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$
11) $f(r,\varphi)=r\sqrt{\cos 2\varphi}$,	12) $f(r,\varphi)=r\sqrt{\sin\varphi}$
13) $z=\ln x-\ln\sin y$	14) $u=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$
15 $z=\sin^{-1}\left(2y\left(1+x^2\right)-1\right)$	16) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$
17) $z=\ln\left(x\ln(y-x)\right)$	18) $u=\ln\sin(x+y)$

Самостійна робота

Знайти область визначення функцій

I	1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$	2. $z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}$	3. $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$
II	1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y}}$	2. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}$	3. $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$

III	1. $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$	2. $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$	3. $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$

Практичні заняття - 1.2

1. *Знайти границю заданих функцій*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$	2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$
3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{xy}$	4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to k}}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$
5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
7) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$	8) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\left(x^2-y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2-y^2}$

2. *Знайти точки розриву заданих функцій*

1) $z=\ln\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}$	2) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$
3) $z=\dfrac{1}{(x-y)^2}$	4) $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$
5) $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$	6) $z=\cos\dfrac{1}{xy}$

Самостійна робота

Знайти границі і точки розриву функцій

I	$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,	$b)\ z=\dfrac{1}{\sin\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi y}$
II	$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$,	$b)\ z=\dfrac{x^2+2y}{y^2-2x}$.
III	$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$,	$b)\ u=\dfrac{1}{y^2+x^2-z^2}$.

§ 3. *Частинні похідні диференціали*

3.1. Частинний і повний приріст функції

Розглянемо лінію перетину PS поверхні $z=f(x,y)$ з площиною $y=const$ паралельно площині xOz (Рис. 6)

Оскільки y залишається сталою, то z змінюється вздовж лінії PS в залежності від x. При зростанні незалежної змінної x на Δx; змінна z буде зростати, і це зростання *називається частинним приростом функції*

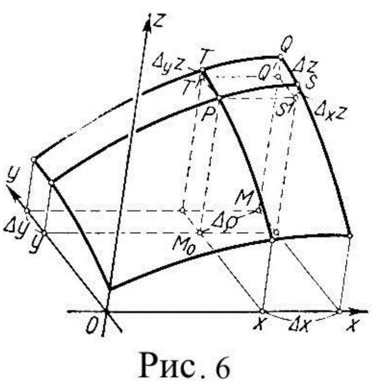

Рис. 6

$f(x,y)$ *по* x, і позначають $\Delta_x z$ (відрізок SS' на Рис. 6), отже

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \Delta_x f(x,y) \quad (1)$$

Подібно, якщо x залишається сталим, а y зростає на Δy, тоді z також зростає, і це зростання *називається частинним приростом функції* $f(x,y)$ *по* y, і позначають $\Delta_y z$ (відрізок TT' на Рис. 6), отже

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta_y f(x,y) \qquad (2)$$

Функція дістала приріст $\Delta_y z$ вздовж лінії перетину поверхні $z = f(x,y)$ з площиною $x = const$ паралельно площині yz.

Нарешті, при зростанні аргументу x на Δx, і аргументу y на Δy, для z ми дістанемо новий приріст Δz, який *називається повним приростом функції* z і визначається наступним чином

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta f(x,y) \qquad (3)$$

На Рис. 6 Δz є відрізок QQ'.

Ми повинні зауважити, що, взагалі кажучи, повний приріст функції не дорівнюється сумі частинних приростів $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Приклад. *Знайти частинні і повний приріст функції* $z = xy^2$ *в точці* $P_0(1;2)$ *якщо* $\Delta x = 0{,}1; \quad \Delta y = 0{,}2.$

► Одержимо

$$\Delta_x z = f(1{,}1;2) - f(1;2) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x = 4\cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

$$\Delta_y z = f(1;2{,}2) - f(1;2) = x_0(y_0+\Delta y)^2 - x_0 y_0^2 = 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2 = 0{,}84.$$

$$\Delta z = f(1{,}1;2{,}2) - f(1;2) = (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)^2 - x_0 y_0^2 = 1{,}324.$$

Аналогічно можна знайти частинні і повний приріст функцій декількох змінних. Отже, для функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$ отримаємо:

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)$$

$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)$$

$$\Delta_z u = f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

3.2. Частинні похідні функції

Означення 1. *Частинною похідною по* x *від функції* $z = f(x,y)$ *в точці* $(x_0;y_0)$ *називається границя відношення частинного приросту по* x *функції* $f(x;y)$ *в точці* $(x_0;y_0)$ *до приросту аргументу* Δx *при* $\Delta x \to 0$ *при умові, що границя існує, тобто*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Частинні похідні по x від функції $z = f(x,y)$ позначаються такими символами

$$z'_x \qquad f'_x(x_0,y_0); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

Означення 2. *Частинною похідною по* y *від функції* $z = f(x,y)$ *в точці* $(x_0;y_0)$ *називається границя відношення частинного приросту по* y *функції* $f(x;y)$ *в точці* $(x_0;y_0)$ *до приросту аргументу* Δy *при* $\Delta y \to 0$ *при умові, що границя існує, тобто*

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні по y від функції $z=f(x,y)$ позначаються такими символами

$$z_y^{'}\qquad f_y^{'}(x_0,y_0);\qquad \frac{\partial z}{\partial y};\qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Зазначимо, що в означеннях частинних похідних по x і по y від функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) брали участь лише значення цієї функції в точках, що лежать на прямій $y=y_0$ на якій змінна y стала і, отже функція $f(x,y)$ в точках цієї прямої є функцією однієї змінної x. Тому *для знаходження частинної похідної по* x *від функції* $f(x,y)$ *в точці* (x,y) *треба цю функцію диференціювати як функцію однієї змінної* x, *вважаючи змінну* y *за сталу.* Аналогічно *при знаходженні частинної похідної по* y *від функції* $f(x,y)$ *в точці* (x,y) *треба цю функцію диференціювати як функцію однієї змінної* y, *вважаючи змінну* x *за сталу.*

Приклад 1: *Знайти частинні похідні функцій*

1) $z=x^2+\sin\left(x+y^2\right)$, 2) $z=x^y$.

► 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\cos\left(x+y^2\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cos\left(x+y^2\right)$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.◄

Якщо функція $u=f(x_1;x_2;...,x_n)$ від n незалежних змінних $x_1;x_2;...,x_n$ визначена у деякому околі точки $x_0=(x_{01};x_{02};...,x_{0n})$, то частинні похідні за змінною x_i від цієї функції у цій точці визначається рівністю

$$\frac{\partial f(x_{01};x_{02};...,x_{0n})}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_{x_i} f(x_{01};x_{02};...,x_{0n})}{\Delta x_i}$$

де

$$\Delta_{x_i} f(x_{01};x_{02};...,x_{0n})=f(x_{01};x_{02};...x_{0i}+\Delta x_i;...,x_{0n})-$$
$$-f(x_{01};x_{02};...,x_{0i};...,x_{0n})$$

є частинний приріст по x_i функції $f(x_1;x_2;...,x_n)$ в точці $x_0=(x_{01};x_{02};...,x_{0n})$. Частинні похідні за змінною x_i від функції $u=f(x_1;x_2;...,x_n)$ в точці $x_0=(x_{01};x_{02};...,x_{0n})$ позначаються також

$$u_{x_i}^{'}(x_1;x_2;...,x_n)\text{ або }f_{x_i}^{'}(x_1;x_2;...,x_n).$$

Нехай $u=f\left(x,y,z,t\right)$, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,y,z,t\right)-f(x,y,z,t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y,z,t\right)-f(x,y,z,t)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x,y,z+\Delta z,t\right)-f(x,y,z,t)}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x,y,z,t+\Delta t\right)-f(x,y,z,t)}{\Delta t}.$$

Приклад 2. *Знайти* $u_x^{'}$, $u_y^{'}$, $u_z^{'}$, $u_t^{'}$, *якщо* $u=xy+\sin^2\left(z-xt\right)$.

► $u_x^{'}=y-t\sin 2\left(z-xt\right)$, $u_y^{'}=x$,

$$u_z' = \sin 2(z - xt), \qquad u_t' = -x\sin 2(z - xt). \blacktriangleleft$$

3.3. Геометрична інтерпретація частинних похідних функцій від двох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ представляє рівняння поверхні, яка наведена на Рис. 7. Викреслимо площину $x = const$. Перетин цієї площини і поверхні утворює площину $PTMN$. Для заданого x розглянемо деяку точку $M(x,y)$ на площині xOy. Вибраній точці $M(x,y)$ відповідає точка $P(x,y,z)$ на поверхні $z = f(x,y)$. Залишаючи x сталим, дамо приріст змінної y на $\Delta y = MN = PT'$. Тоді функція z дістане приріст $\Delta_y z = TT'$. Точці $N(x, y+\Delta y)$ буде відповідати точка $T(x, y+\Delta y, z+\Delta_y z)$ на поверхні $z = f(x,y)$.

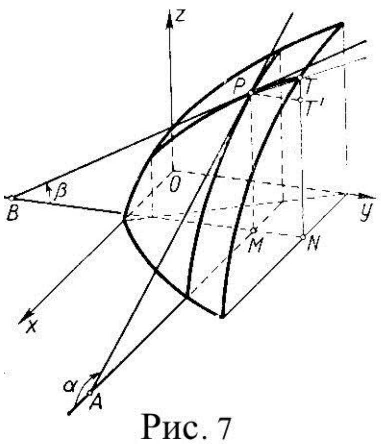

Рис. 7

Відношення $\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ дорівнюється тангенсу кута, який утворений січною лінією PT з додатнім напрямком y :

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \tan\angle TPT'$$

Відповідно

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

дорівнюється тангенсу кута β, який утворений дотичною PB до дуги PT в точці P з додатнім напрямком осі y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \tan\beta$$

Отже, *частинна похідна* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *дорівнюється тангенсу кута нахилу дотичною до кривої на поверхні* $z = f(x,y)$*, яка утворена перетином площиною* $x = const$ *і поверхнею* $z = f(x,y)$.

Аналогічно частинна похідна $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *дорівнюється тангенсу кута нахилу дотичною до кривої на поверхні* $z = f(x,y)$*, яка утворена перетином площиною* $y = const$ *і поверхнею* $z = f(x,y)$

§ 4. *Повний приріст функції. Диференціал*

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в $\delta-$околі точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ і нехай точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ взята з проколотого $\delta-$околу точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді різниця

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

називається повним приростом функції у даній точці $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Означення 1. *Функція* $z = f(x,y)$*, визначена в точці* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *називається диференційованою в точці* (x,y)*, якщо її повний приріст у цій точці можна зобразити у вигляді*

$$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (4)$$

де числа A *і* B *не залежать від* Δx *і* Δy*, а* $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ *і* $\beta(\Delta x, \Delta y)$ *прямують до нуля, якщо* Δx *і* Δy *прямують до нуля.*

Оскільки $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ належить проколотому околу точки (x, y), то $\Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0$. Числа A і B, в загалі кажучи, залежать від x і y, а α і β - від $x, y, \Delta x\, i\, \Delta y$. Рівність (1.10) можна записати і так

$$\Delta f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \gamma\rho, \qquad (5)$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \gamma = 0$.

Справді, якщо правильна рівність (5), де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, то, позначивши через $\gamma = \dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}$, маємо

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\rho = \gamma\rho,$$

де

$$|\gamma| = \frac{|\alpha||\Delta x| + |\beta||\Delta y|}{\rho} = |\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho} + |\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho}$$

Оскільки $0 \le \dfrac{|\Delta x|}{\rho} \le 1$, $0 \le \dfrac{|\Delta y|}{\rho} \le 1$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \gamma = 0$. Таким чином, з (4) випливає (5). Навпаки , нехай правильна (1.10*), де

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0 \text{ і } \lim_{\rho \to 0} \gamma = 0.$$

Тоді

$$\gamma\rho = \gamma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \gamma\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= \gamma\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \gamma\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y$$

Оскільки

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \le 1, \quad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \le 1$$

і $\gamma \to 0 \quad (\rho \to 0)$, то, позначаючи через $\alpha = \gamma\dfrac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ і $\beta = \gamma\dfrac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, дістаємо $\alpha \to 0 \;\; (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$, $\beta \to 0 \;\; (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$. Отже, із (5) випливає (4).

Означення 2. *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *диференційована в точці* (x, y)*, тоді лінійна (відносно* Δx *і* Δy*) частина* $A\Delta x + B\Delta y$*, цього приросту, називається диференціалом* $z = f(x, y)$ *в точці* (x, y) *і позначається* dz.

Таким чином

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

Отже

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

Доведемо декілька важливих теорем.

Теорема 1.*Якщо функція* $z = f(x, y)$ *диференційована в точці* (x, y)*, то вона в цій точці неперервна.*

► Справді, якщо функція $z = f(x,y)$ диференційована в точці (x,y), то повний диференціал в ці точці відносно Δx і Δy запишеться у вигляді

$$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + \gamma\rho$$

де A і B постійні в точці (x,y). Звідси $\Delta f(x,y) \to 0$ при $\rho \to 0$. А це означає, що функція $f(x,y)$ неперервна в точці (x,y). ◄

Теорема 2. (*Необхідні умови***)** *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *диференційована в точці* (x,y)*, то в цій точці існують частинні похідні* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$*, причому, якщо повний приріст записати у вигляді (4) або (5), то*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = A, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = B$$

► Якщо функція $z = f(x,y)$ диференційована в точці (x,y), то її повний диференціал у цій точці запишеться у вигляді

$$\Delta f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

Якщо взяти $\Delta y = 0$, а $\Delta x \neq 0$, то повний приріст функції в точці (x,y) буде частинним приростом по x цієї функції в цій точці (x,y), і рівність (4) запишеться у вигляді

$$\Delta_x f(x,y) = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

де $\alpha \to 0$ $(\Delta x \to 0)$. Звідси

$$\frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

При $\Delta x \to 0$ права частина останньої рівності прямує до числа A, отже, й ліва її частина прямує до числа A при $\Delta x \to 0$. А це означає, що функція $f(x,y)$ в точці (x,y) має частинну похідну (скінчену) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ і справджується рівність $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = A$.

Якщо взяти $\Delta x = 0$, а $\Delta y \neq 0$, то в такий спосіб переконаємося в існуванні частинної похідної по y від функції $f(x,y)$ у точці (x,y) і правильна рівність $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.◄

Наслідок. *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *диференційована в точці* (x,y)*, то ї повний приріст у цій точці може бути записаний у вигляді*

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma\rho,$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0$, $\gamma \to 0$ $(\rho \to 0)$

У випадку диференційованості $f(x,y)$ в точці (x,y) лінійна відносно Δx і Δy - частина повного її приросту в цій точці, тобто вираз $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$, *називається повним диференціалом функції* $f(x,y)$ *в точці* (x,y) і позначається

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \qquad (6)$$

повний диференціал у фіксованій точці (x,y) є функцією двох змінних Δx і Δy, визначеною для всіх Δx і Δy. Рівності (4) і (5) правильні лише для тих Δx і Δy, для яких $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ належить області визначення функції. Якщо ж і точку (x,y)

вважати за змінну, то повний диференціал функції $f(x,y)$ є функцією чотирьох змінних $x, y, \Delta x$ і Δy.

За означенням, *диференціалом незалежної змінної називають приріст цієї незалежної змінної, тобто* $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Диференціал функції $f(x,y)$ в точці (x,y) після цієї умови запишеться

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (7)$$

Рівність (5) можна записати так:

$$\Delta f(x,y) = df(x,y) + \gamma\rho,$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0$, $\gamma \to 0 \ (\rho \to 0)$.

Звідси

$$\frac{\Delta f(x,y) - df(x,y)}{\rho} = \gamma \to 0 \ (\rho \to 0)$$

Тобто різниця між повним приростом диференційованої функції в точці (x,y) і її диференціалом у цій точці є нескінченно мала величина більш високого порядку, ніж $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. З цієї причини *повний диференціал функції* в точці *називають головною частиною повного приросту* цієї функції у цій точці і з цієї причини користуються наближеною рівністю

$$\Delta f(x,y) \approx df(x,y),$$

яку можна також записати у вигляді

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \qquad (8)$$

Якщо Δx і Δy записати у вигляді

$$\Delta x = X - x, \ \Delta y = Y - y,$$

то $x + \Delta x = X$, $y + \Delta y = Y$, $f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(X,Y)$

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(Y-y)$$

Таким чином, повний диференціал функції $f(x,y)$ в точці (x,y) є лінійною функції точки $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. Ця лінійна функція $f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(Y-y)$ від X і Y в достатньо малому околі точки (x,y) з точністю до нескінченно малої більш високого порядку, ніж $\rho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$, дорівнює $f(X,Y)$.

Теорема 3. ***(****Достатні умови****)*** *Нехай функція* $z = f(x,y)$ *в деякому* $\delta-$*околі точки* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *має скінченні частинні похідні* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$*, які неперервні в самій точці* (x_0, y_0)*, тоді функція* $f(x,y)$ *диференційована в цій точці* (x_0, y_0).

► Розглянемо повний приріст функції $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0)

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (9)$$

Додамо і віднімемо у правій частині (9) $f(x_0, y_0 + \Delta y)$. Дістанемо:

$$\Delta f(x_0,y_0)=\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right]+\left[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right],(10)$$

де $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta$.

Вираз, що стоїть у перших дужках, є приростом функції $f(x,y_0+\Delta y)$ однієї змінної x в точці x_0. Оскільки ця функція диференційована в $\delta-$околі точки x_0 в наслідок існування частинної похідної $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ в $\delta-$околі точки (x_0,y_0), то до приросту цієї функції можна застосувати теорему Лагранжа. За цією теоремою маємо:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=\frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)}{\partial x}\Delta x,$$

де $0<\theta_1<1$.

Аналогічно

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

де $0<\theta_2<1$.

Рівність (1.12) тепер можна записати у вигляді

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y}\Delta y \qquad (1.13)$$

Внаслідок неперервності функцій $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ і $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в точці (x_0,y_0) маємо

$$\frac{\partial f(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\alpha(x_0,y,\Delta x,\Delta y)$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)}{\partial y}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y),$$

де $\alpha\to 0$ і $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$.

Повний приріст функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) ми зобразили у вигляді (5). Отже, функція $f(x,y)$ диференційована в точці (x_0,y_0). Теорему доведено. ◄

Приклад 1. *Обчислити диференціал функції* $f(x,y)=\ln(x+y^2)$

► Оскільки, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$. Дістанемо

$$df(x,y)=\frac{1}{x+y^2}dx+\frac{2y}{x+y^2}dy=\frac{dx+2ydy}{x+y^2}. ◄$$

Співвідношення

$$d_x f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx$$

називається частковим диференціалом функції $z=f(x,y)$ *по* x*, а*

$$d_y f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

частковим диференціалом функції $z=f(x,y)$ *по* y.

Користуючись вище зазначено термінологією $df(x,y)$, $d_x f(x,y)$ і $d_y f(x,y)$, диференціал функції $z=f(x,y)$ можна записати у вигляді

$$df(x,y)=d_x f(x,y)+d_y f(x,y)$$

Означення 3. *Функція* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *від* n *незалежних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$, *яка визначена, в околі точки* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in \mathbb{R}_n$ *називається диференційованою в цій точці, якщо повний приріст*

$$\Delta f(x_0) = f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n\right) - f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$$

цієї функції можна зобразити в такому вигляді:

$$\Delta f(x_0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + A_3\Delta x_3 + ... + A_n\Delta x_n + \gamma\rho,$$

де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} > 0$ і $\gamma \to 0 \ (\rho \to 0)$

Означення 3. *Якщо функція* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *диференційована в точці*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ \text{то}\ A_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

є лінійна функція

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

від n *змінних* $\Delta x_1,\ \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ *називається диференціалом (повним диференціалом) цієї функції* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *в точці* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *і позначається* $df(x)$. *Якщо за означенням взяти*

$$\Delta x_1 = dx_1,\ \Delta x_2 = dx_2, ...,\ \Delta x_n = dx_n,$$

то диференціал функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *в точці* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *запишеться у вигляді*

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}dx_n$$

Означення 4. *Функція, диференційована в кожній точці області* $D \subset \mathbb{R}_n$ ***називається диференційованою в цій області****, а функція, що має в деякій точці (області) неперервні частинні похідні з усіх змінних,* ***називається неперервно диференційованою в цій точці (області).*** Для диференційованих функцій від n $(n > 2)$ незалежних змінних правильні теореми 1-3.

Приклад 2. *Знайти повний диференціал функції* $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

► Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\sin 2z$$

за всіма значеннями x, y, z. Отже повний диференціал має вигляд

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z dx + 2y\sin^2 z dy + \sin 2z dz).$$ ◄

Практичні заняття - 1.3

1. *Знайти частинні похідні таких функцій*:

1) $z = x^2\sin^2 y$, 2) $z = \ln\left(xy + x^2 y\right)$ 3) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$,

4) $z = \arctan xy$ 5) $z = \arctan\frac{y}{x}$ 6) $z = \arcsin\left(x + y\right)$

7) $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{y}}$ 8) $z=\arctan\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ 9) $u=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}}$

10) $u=\arctan\dfrac{xy}{z}$ 11) $z=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ 12) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$

13) $z=x^{y^2}$, 14) $z=x\sqrt{y}+y/\sqrt{x}$ 15) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2. *Обчислити* $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$ *в точці* $M_0(1{,}1{,}1)$, *якщо* $u=\ln\left(1+x\ \ +y^2+z^3\right)$.

3. *Обчислити частинні похідні функції* $z=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ *в точці t* $M_0(3;4)$

4. *Знайти частинні і повний диференціали таких функцій*

1) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 2) $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$, 3) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$,

4) $u=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{z^2-y^2-x^2}$, 5) $u=x^{yz}$, 6) $z=\sqrt{x^2+y\ \ -9}$.

Самостійна робота

I. *Знайти*

a) *частинні похідні функції* $u=\sin^2\left(x\cos^2 y+y\sin^2 x\right)$

b) *частинні і повний диференціали функції* $u=\ln\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

II. *Знайти*

a) *частинні похідні функції* $u=\arcsin\sqrt{xy^2z^3}$,

b) частинні і повний диференціали функції $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}$.

III. *Знайти*

a) частинні похідні функції $u=\tan^2\left(x-y^2+z^3\right)$,

b) частинні і повний диференціали функції $u=\sqrt[3]{\left(x^2-y^3\right)^2}$.

4.1. *Застосування диференціала для оцінювання похибки обчислення*

Нехай деяка величина u є функція величин $x_1,x_2,...,x_n$,
тобто $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, і нехай $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$ похибка, яку дістали при обчислені значень величин $x_1,x_2,...,x_n$. Тоді величина u буде відрізнятися від точного значення на величину з похибкою

$$\Delta u=f\,(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,...,x_n+\Delta x_n)-f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$$

Для достатньо малих за абсолютною величиною величин $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$ ми можемо замінити повним диференціалом

$$\Delta u\approx\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n$$

У цьому випадку значення частинних похідних похибки аргументів можуть бути як додатними, так і від'ємними. Замінивши їх абсолютними величинами дістанемо нерівність

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right||\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right||\Delta x_2| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right||\Delta x_n| \qquad (1)$$

Якщо члени $|\Delta^* x_1|, |\Delta^* x_2|, \ldots, |\Delta^* x_n|$, $\Delta^* u$ вважатимемо *за максимальні абсолютні похибки* відповідних величин (границі абсолютних похибок), то, очевидно, можливим прийняти

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right||\Delta^* x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right||\Delta^* x_2| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right||\Delta^* x_n| \qquad (2)$$

Приклади:

1. *Нехай* $u = x + y + z$, *то* $|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|$.

2. *Нехай* $u = x - y$, *то* $|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|$.

3. *Нехай* $u = xy$, *то* $|\Delta^* u| = |x||\Delta^* y| + |y||\Delta^* x|$.

4. *Нехай* $u = \frac{x}{y}$, *то* $|\Delta^* u| = \frac{|y||\Delta^* x| + |x||\Delta^* y|}{y^2}$.

5. *Гіпотенуза* c *і катет* a *прямокутного трикутника* ABC *відповідно дорівнюються* $c = 75, a = 32$ *і визначені з максимальними абсолютними похибками* $|\Delta^* c| = 0,2$, $\Delta^* a = 0,1$ *Обчислити кут* A *якщо* $\sin A = \frac{a}{c}$; *а також обчислити максимальну абсолютну похибку* $|\Delta^* A|$ *при обчислені кута* A.

► $\sin A = \frac{a}{c}$, $\quad A = \arcsin\frac{a}{c}$, звідси,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

За формулою (2) дістанемо

$$|\Delta^* A| = \frac{0,1}{\sqrt{75^2 - 32^2}} + \frac{32 \cdot 0,2}{75\sqrt{75^2 - 32^2}} = 0,00275 \text{ радіан, або}$$

$$|\Delta^* A| = 9'38''.$$

Отже

$$A = \arcsin\frac{32}{75} \pm 9'38''. ◄$$

6. У *прямокутному трикутнику* ABC, *катет* $b = 121,56$ *і кут* $A = 25^0 21'40''$, *а максимальна абсолютна похибка при визначені катета* b *становить* $|\Delta^* b| = 0,05$ *метрів і максимальна абсолютна похибка при визначені кута* A - $|\Delta^* A| = 12''$.

Обчислити максимальну абсолютну похибку при обчислені сторони a *за формулою* $a = b\tan A$.

► За формулою (2) маємо:

$$|\Delta^* a| = |\tan A||\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}|\Delta^* A|.$$

Підставляючи приблизні значення (і пам’ятаючи, що $|\Delta^* A|$ необхідно виразити у радіанах), отримуємо

$$|\Delta^* a| = \tan 25^0 21'40'' \cdot 0,05 + \frac{121,56}{\cos^2 25^0 21'40''} \cdot \frac{12}{206265} = 0,0324 \text{ метрів. } ◄$$

Відношення похибки Δx до величини абсолютного значення x *називається відносною похибкою величини.* І позначають δx,

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

Максимальна відносна похибка величини x є відношення максимальної абсолютної похибки до абсолютної величини x і позначають $|\delta^* x|$

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \qquad (3)$$

Для того, щоб обчислити максимальну абсолютну похибку функції u, поділимо всі члени (2) на u і отримаємо:

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left|\frac{f_{x_1}'}{f}\right||\Delta^* x_1| + \left|\frac{f_{x_2}'}{f}\right||\Delta^* x_2| + \ldots + \left|\frac{f_{x_n}}{f}\right||\Delta^* x_n| \qquad (4)$$

але

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{f} = \frac{\partial}{\partial x_1}\ln|f|, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{f} = \frac{\partial}{\partial x_2}\ln|f|, \ \ldots, \ \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{f} = \frac{\partial}{\partial x_n}\ln|f|$$

Беручи до уваги одержані вирази, то (4) прийме вид

$$|\delta * u| = \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\ln|f|\right||\Delta * x_1| + \left|\frac{\partial}{\partial x_2}\ln|f|\right||\Delta * x_2| + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\ln|f|\right||\Delta * x_n| \qquad (5)$$

Або скорочено:

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \ln|f|| \qquad (6)$$

З формул (5) і (6) випливає, що *максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці логарифму цієї функції*

Формула (6) дає правило використання при наближених обчисленнях

1. Нехай $u = xy$.

Використовуючи результат *прикладу 3* дістанемо

$$|\delta^* u| = \frac{|x||\Delta^* y|}{|xy|} + \frac{|y||\Delta^* x|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} = |\delta^* x| + |\delta^* y|;$$

тобто, *максимальна відносна похибка добутку дорівнює суми максимальних відносних похибок множників*

2. Якщо $u = \frac{x}{y}$, то, використовуючи *приклад 4*, дістанемо

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|$$

тобто, *максимальна відносна похибка добутку дорівнюється сумі максимальних відносних похибок чисельника і знаменника*

Приклад. *Період коливання маятника обчислюється за формулою*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

де ***l*** *довжина маятника, а* g *гравітаційне прискорення*

Чому дорівнює відносна похибка при визначені періоду T *за даною формулою, якщо прийняти* $\pi \approx 3{,}14$ *(з точністю 0,005) l=1метр (с точністю 0,01м),* $g = 9{,}8\, м/сек^2$ *(з точністю* $0{,}02\, м/сек^2$ *)*

► За формулою (6) максимальна відносна похибка є

$$\left|\delta^* T\right| = \left|\Delta^* \ln T.\right|$$

але

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g.$$

Обчислимо $\left|\Delta^* T\right|$. За умовою задачі маємо $\pi = 3{,}14$, $\Delta^*\pi = 0{,}005$, $l = 1\text{м}$, $\Delta^* l = 0{,}01\text{м}$, $g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$, $\Delta^* g = 0{,}02\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ отримаємо

$$\left|\Delta^* \ln T\right| = \frac{\Delta^*\pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{l} + \frac{\Delta^* g}{g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2\cdot 9{,}8} = 0{,}0076$$

Отже, максимальна відносна похибка складає $\left|\delta^* T\right| = 0.0076$ або $\left|\delta^* T\right| = 0.76\%$. ◄

§ 5. *Похідні складної функції.*

Теорема 1. *Якщо функція* $x = \varphi(t)$ *і* $y = \phi(t)$ *диференційовані в точці* $t_0 \in \mathbb{R}^1$, *а функція* $z = f(x, y)$ *диференційована в точці* (x_0, y_0), *причому* $x_0 = \varphi(t_0)$ *і* $y_0 = \phi(t_0)$, *то складна функція* $z = f(\varphi(t), \phi(t))$ *диференційована в точці* t_0 *і справджується рівність*

$$\frac{dz(\varphi(t_0), \phi(t_0))}{dt} = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot\frac{d\varphi(t_0)}{dt} + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\cdot\frac{d\phi(t_0)}{dt} \qquad (1)$$

або коротше:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{d\phi}{dt}$$

► Якщо аргумент t в точці t_0 дістає приріст Δt, то функції $x = \varphi(t)$ і $y = \phi(t)$ в точці t_0 матимуть приріст $\Delta x(t_0) = \Delta\varphi(t_0)$ і $\Delta y(t_0) = \Delta\phi(t_0)$ в точці t_0. Оскільки функції $x = \varphi(t)$ і $y = \phi(t)$ в точці t_0 диференційовані, то вони в цій точці неперервні. Отже $\Delta x(t_0) \to 0$ $(\Delta t \to 0)$ і $\Delta y(t_0) \to 0$, $(\Delta t \to 0)$. Функція $z = f(x, y)$, за умовою диференційована в точці (x_0, y_0), тому її повний приріст можна зобразити у вигляді

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y(t_0) + \gamma\rho, \qquad (2)$$

де

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2(t_0) + \Delta y^2(t_0)}; \ \gamma \to 0, \ (\rho \to 0)$$

Якщо строго проводити доведення, то рівність (2) буде правильною при умові $\Delta x^2(t_0) + \Delta y^2(t_0) \neq 0$. Тоді, якщо γ розглядувати як функцію Δx і Δy, буде неперервною в точці (0,0), а рівність (2) буде справджуватись при будь-яких $\Delta x(t_0)$ *і* $\Delta y(t_0)$ за достатньо малими $\Delta t \neq 0$.

Поділивши рівність (2) на Δt, дістанемо

$$\frac{\Delta f(x_0, y_0)}{\Delta t} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t} + \gamma\frac{\rho}{\Delta t} \qquad (3)$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то, як було зазначено вище, $\Delta x(t_0) \to 0$, $\Delta y(t_0) \to 0$, тому $\gamma \to 0$

Внаслідок диференційованості функцій $\varphi(t)$ і $\phi(t)$ в точці t_0

$$\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t} \to \frac{d\varphi(t_0)}{dt}, \ \frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t} \to \frac{d\phi(t_0)}{dt},$$

$$\frac{\rho}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_0)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_0)}{\Delta t}\right)^2} \to \sqrt{\left(\frac{d\varphi(t_0)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\phi(t_0)}{dt}\right)^2}$$

тому $\gamma\dfrac{\rho}{\Delta t}\to 0$.

Переходячи до границі в рівності (3) при $\Delta t\to 0$, дістаємо рівність (1). Теорему доведено. ◄

Похідна, яка стоїть у лівій частині рівності (1), є звичайною похідною від складної функції $f(\varphi(t),\phi(t))$ однієї змінної t. Однак, щоб її відрізнити від частинних похідних, які містяться в цій рівності,її називають повною похідною функції $f(\varphi(t),\phi(t))$ в точці $t=t_0$.

Наслідок. *Якщо функція* $z=f(x,y)$ *диференційована в точці* (x_0,y_0), *а функція* $y=\phi(x)$ *диференційована в точці* x_0, *причому* $y_0=\phi(x_0)$, *то складна функція* $z=f(x,\phi(x))$, *що розглядається як функція однієї змінної, диференційована в точці* x_0, *причому*

$$\frac{df(x_0),\phi(x_0))}{dx}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\frac{d\phi(x_0)}{dx} \tag{4}$$

або коротше

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d\phi}{dx}$$

Тут у лівій частині рівності (4) ми маємо справу з повною похідною відносно x від складної функції $f(x,\phi(x))$ в точці $x=x_0$. Перший доданок правої частини цієї рівності є частинною похідною по x від функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0).

Теорема 1*. *Якщо функція* $f(x_1,x_2,...,x_n)$ *від* n *змінних* $x_1,x_2,...,x_n$ *диференційована в точці* $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})\in\mathbb{R}_n$, *а функції диференційовані в точці* $t_0\in\mathbb{R}_1$, *причому*

$$x_1(t_0)=x_{01},\ x_2(t_0)=x_{02},\dots,\ x_n(t_0)=x_{0n},$$

то складна функція $f(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ *диференційована в точці* t_0, *причому*

$$\frac{df(x_0)}{dt}=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}\frac{dx_1(t_0)}{dt}+\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}\frac{dx_2(t_0)}{dt}+...+\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\frac{dx_n(t_0)}{dt} \tag{5}$$

Похідна, яка стоїть у лівій частині рівності (5), називається повною похідною від функції $f(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ в точці t_0.

Теорема 2. *Якщо функція* $z=f(u,v)$ *диференційована в точці* $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}_2$, *а функції* $u=u(x,y)$ *і* $v=v(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *- мають (скінченні) частинні похідні* $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$, *причому* $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, *то складна функція* $f(u(x,y),v(x,y))$ *в точці* (x_0,y_0) *має частинні похідні по* x *і* y, *причому справджуються рівності*

$$\frac{\partial f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}, \tag{6}$$
$$\frac{\partial f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\partial y}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \tag{7}$$

► Нехай змінна x в точці (x_0,y_0) дістає приріст $\Delta x\neq 0$. Тоді функції і $v(x,y)$ в точці (x_0,y_0) матимуть частинні прирости $\Delta_x u(x_0,y_0)$ і $\Delta_x v(x_0,y_0)$. Внаслідок існування в точці (x_0,y_0) (скінченних) частих похідних $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$, маємо $\Delta_x u(x_0,y_0)\to 0$ $(\Delta x\to 0)$, $\Delta_x v(x_0,y_0)\to 0$ $(\Delta x\to 0)$. Оскільки функція $f(u,v)$ диференційована в точці (u_0,v_0), то відповідний приріст функції $f(u(x,y),v(x,y))$ в точці (u_0,v_0) запишеться так:

$$\Delta_x f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\Delta_x u(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\Delta_x v(x_0,y_0)+\gamma\rho, \tag{8}$$

де

$$\rho=\sqrt{\left(\Delta_x u(x_0,y_0)\right)^2+\left(\Delta_x v(x_0,y_0)\right)^2},\ \gamma\to 0\ (\rho\to 0).$$

Рівність (8) справджується при умові $\left(\Delta_x u(x_0,y_0)\right)^2+\left(\Delta_x v(x_0,y_0)\right)^2\neq 0$.

Розглядаючи γ як функцію від Δu і Δv, ми довизначаємо її у точці $(0,0)$, узявши $\gamma(0,0)=0$, Так довизначена функція буде неперервною в точці $(0,0)$, а рівність (8) буде правильною при будь яких $\Delta_x u$ і $\Delta_x v$ при достатньо малому $\Delta x\neq 0$. Поділивши рівність (8) на $\Delta x\neq 0$, дістанемо:

$$\frac{\Delta_x f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\Delta x}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u(x_0,y_0)}{\Delta x}+$$

$$+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v(x_0,y_0)}{\Delta x}+\gamma\frac{\rho}{\Delta x} \tag{9}$$

якщо $\Delta x\to 0$, то, як було визначено раніше, $\Delta_x u(x_0,y_0)\to 0$, $\Delta_x v(x_0,y_0)\to 0$, тому $(\rho\to 0)$ i $\gamma\to 0$. Оскільки існують частині похідні $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$, то при $\Delta x\to 0$

$$\frac{\Delta_x u(x_0,y_0)}{\Delta x}\to\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x},\ \frac{\Delta_x v(x_0,y_0)}{\Delta x}\to\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

$$\left|\frac{\rho}{\Delta x}\right|=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x u(x_0,y_0)}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_x v(x_0,y_0)}{\Delta x}\right)^2}\to\sqrt{\left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2},$$

тому $\gamma\dfrac{\rho}{\Delta x}\to 0$ $(\Delta x\to 0)$. Перейшовши до границі в рівності (9) при $\Delta x\to 0$, дістанемо рівність (6), Аналогічно можна довести і рівність (7). Теорему доведено. ◄

Приклад 1. *Знайти повну похідну по t від функції* $z=\cos^2(t^2+t-1)-\sin(t^3-2t)$.

► Позначивши $x(t)=t^2+t-1$ і $y(t)=t^3-2t$, цю функцію зобразимо у вигляді складної функції від t:

$$z=f(x,y)=\cos^2 x-\sin y \tag{10}$$

Функція (10), що розглядається як функція двох змінних x і y, диференційована у всій площині xOy, оскільки вона має частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2\cos x\sin x$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\cos y$, неперервні в цій площині. Функції $x(t)=t^2+t-1$ і $y(t)=t^3-2t$ диференційовані на всій числовій прямій $-\infty<t<+\infty$, таким чином, для даної функції $z(t)$ виконані всі умови теореми 1. За теоремою 1, для $-\infty<t<+\infty$ маємо:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}=$$

$$=-\sin 2x\cdot(2t+1)-\sin y\cdot(3t^2-2)=$$

$$=-(2t+1)\sin 2(t^2+t-1)-(3t^2-2)\sin(t^3-2t).\ ◄$$

Приклад 2. *Обчислити частинні похідні по x і y від функції*

$$z = \arctan^2 (x^2 + y)^3 + \arcsin(x^2 + 3y^2). \qquad 11)$$

► Перший доданок функції (11) визначається в усій площині xOy, щодо другого - то він визначається у всіх точках (x, y), для яких $x^2 + 3y^2 \le 1$, тобто у точках еліпса

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(1/\sqrt{3}\right)^2} \le 1$$

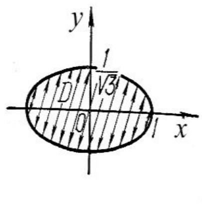

Рис.1*

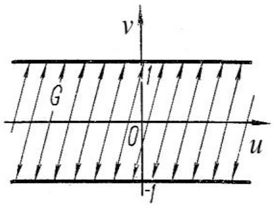

Рис. 2*

Отже, функція (11), що розглядається як функція від x і y, визначена у замкненій області. Внутрішні точки цієї замкненої області утворюють область D у просторі $\mathbb{R}_2$ (Рис. 1*). у точках цієї області можна обчислювати похідні (якщо вони існують) по x і y від функції (11).

Функцію (11) зобразимо у вигляді функції від двох змінних u і v

$$z = \arctan^2 u + \arcsin v \qquad (12)$$

Де

$$u = (x^2 + y)^3, \quad v = x^2 + 3y^2.$$

Функція (12), що розглядається як функція двох змінних u і v, визначена у замкненій області

$$\overline{G} = \{(u, v) : -\infty < u < +\infty, -1 \le v \le +1\} \text{ (Рис. 2*).}$$

Внутрішні точки цієї замкненої області утворюють область G, в точках якої функція (12) диференційована, оскільки вона в цій області G має непевні частинні похідні

$$\frac{\partial z(u,v)}{\partial u} = \frac{2\arctan u}{1+u^2}, \quad \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Як ми бачимо, що в межових точках області G, тобто на прямих $v = 1$ і $v = -1$, функція (12) не має частинної похідної відносно v. Функції $u = (x^2 + y)^2$ і $v = x^2 + 3y^2$, що розглядаються як функції від x і y диференційовані у всій площині xOy, оскільки в цій площині вони мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x(x^2 + y)^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^2 + y)^2$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$ і $\frac{\partial v}{\partial y} = 6y$. Однак, у зовнішніх точках області D функція (11) не визначена і, отже, в цих точках не можна говорити про частинні похідні по x і y від цієї функції. Межові точки області D, тобто точки еліпса $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(1/\sqrt{3}\right)^2} = 1$, функціями $u = (x^2 + y)^2$ і $v = x^2 + 3y^2$ відображаються на деяку множину точок прямої $v = 1$, в яких не існує частина похідна $\frac{\partial z}{\partial v}$. Точки ж області D, в чому легко переконатися, функціями $u = (x^2 + y)^2$ і $v = x^2 + 3y^2$ відображаються на деяку множину точок області G, в яких функція (12)диференційована.

Таким чином, всі умови теореми 2 виконані тільки в точках області D, для цих точок , за теоремою2, маємо:

$$\frac{\partial z(u(x,y), v(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} =$$

$$=\frac{2\arctan u}{1+u^2}\cdot 6x(x^2+y)^2+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}2x=$$

$$=\frac{12\arctan(x^2+y)^3}{1+(x^2+y)^6}\cdot x(x^2+y)^2+\frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2+3y^2\right)^2}}.$$

$$\frac{\partial z(u(x,y),v(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=$$

$$=\frac{2\arctan u}{1+u^2}\cdot 3(x^2+y)^2+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}6y$$

$$=\frac{6(x^2+y)^2\arctan(x^2+y)^3}{1+(x^2+y)^6}+\frac{6y}{\sqrt{1-(x^2+3y^2)^2}}.$$

Приклад 3. *Нехай* $z=\ln\left(u^2+v\right)$, $u=e^{x+y^2}$, $v=x^2+y$ *Обчислити частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

► $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v};\quad \frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2};$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Застосовуючи формули (6) і (7), отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{u^2+v}\left(ue^{x+y^2}+x\right);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v}\left(4uye^{x+y^2}+1\right). \blacktriangleleft$$

Зауваження 2. *За результатами теореми 2 наведемо таке правило:* ***частинна похідна складної функції*** $w=f(u(x,y),v(x,y))=F(x,y)$ ***дорівнюється сумі добутків частинних похідних заданої функції за проміжними аргументами*** (u,v) ***на частинні похідні цих аргументів за відповідною незалежною змінною*** (x,y)

Для випадку складної функції будь-якого числа проміжних аргументів це правило істотним чином узагальнюється. Наприклад, якщо складна функція $F(\xi,\eta,\zeta)$, яка задана співвідношеннями: $u=f(x,y,z)$, де $x=\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, $y=\phi(\xi,\eta,\zeta)$, $z=\chi(\xi,\eta,\zeta)$, тоді при відповідних умовах будемо мати:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \zeta}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{15}$$

В окремому випадку, якщо $u=f(\xi,\eta,z)$, де $z=\varphi(\xi,\eta)$, тобто, якщо u залежить від ξ і η як безпосередньо, так і через проміжну змінну z, то, покладаючи у (13) і (14) $x=\xi$ і $y=\eta$. Зауважимо, що в цьому випадку $\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{\partial \xi}{\partial \xi}=1$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{\partial \eta}{\partial \eta}=1$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}=0$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}=0$, отримаємо такі формули:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta}=\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{16}$$

де $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ і $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ - повні частинні похідні, які обчислюються за змінними ξ і η, які входять в u як безпосередньо, так і безпосередньо через функцію $z=\varphi(\xi,\eta)$, а $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ і $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ - частинні похідні від $u=f(\xi,\eta,z)$ відповідно за змінними ξ і η, які входять у вираз $f(\xi,\eta,z)$ явно, і, отже, при обчисленні $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$ і $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ аргумент z розглядається сталим. Ці похідні взяті в круглі дужки, щоб їх позначення якось відрізнялось від позначення повних частинних похідних.

Приклад 4. *Обчислити частинні похідні складної функції*

$w=\sqrt{u^2+v^2}$, *де* $u=x\cos y$, $v=y\sin x$.

► Функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ всюди мають частинні похідні: $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-x\sin y$,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y\cos x, \ \frac{\partial v}{\partial y}=\sin x.$$

Частинні похідні функції w:

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \ \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

існують і неперервні при $u^2+v^2\neq 0$.

Отже, застосовуючи відповідні формули, отримаємо:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\cos y+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\ y\cos x=\frac{x\cos^2 y+y^2\cos x\sin x}{\sqrt{x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x}}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot(-x\sin y)+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\sin x=\frac{y\sin^2 x-x^2\cos y\sin y}{\sqrt{x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x}}.$$ ◄

Приклад 5. *Перевірити рівність* $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$, *якщо* $z=x+y+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, *де* $\varphi(t)$ *- будь-яка функція від* t.

► Функція z залежить від x і y безпосередньо і через проміжний аргумент $t=\frac{x}{y}$, при цьому, оскільки функція $t=\frac{x}{y}$ (для $y\neq 0$) диференційована, то за теоремою про диференційованість складної функції $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, а з нею і функція z диференційована для $y\neq 0$ і формула (16) правильна. Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=1+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=1+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

(φ' означає похідну функції φ за аргументом t)

Звідси дістанемо:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y}+y+\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)=x+y\ .$$

Тобто, дійсно, $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$. ◄

5.1. Інваріантність форми диференціала

За умовами тереми 2 попереднього пункту, функція $f(u(x,y),v(x,y))$, що розглядається у вигляді функції від (x,y), маючи в точці (x_0,y_0) частинні похідні по x і y, обчислювальні за формулами (6) і (7) взагалі кажучи, не буде диференційованою в точці (x_0,y_0). Щоб ця функція була диференційована в точці (x_0,y_0), треба, щоб функції $u=u(x,y)$ і $v=v(x,y)$ були диференційованими в точці (x_0,y_0).

Теорема 3. *Якщо функції* $u=u(x,y)$ *і* $v=v(x,y)$ *диференційовані в точці* (x_0,y_0)*, а функція* $z=f(u,v)$ *диференційована в точці* (u_0,v_0)*, причому* $u(x_0,y_0)=u_0$*,* $v(x_0,y_0)=v_0$*, то складна функція* $f(u(x,y),v(x,y))$*, що розглядається як функція від* (x,y) *диференційована в точці* (x_0,y_0)*, причому повний диференціал цієї функції в точці* (x_0,y_0) *можна обчислити за формулою*

$$df(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}du(x_0,y_0)+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}dv(x_0,y_0)\ ,\qquad (17)$$

де

$$du(x_0,y_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}dy\qquad (18)$$

$$dv(x_0,y_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}dy\qquad (19)$$

як і за формулою

$$df(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))=\frac{\partial f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\partial x}dx+\frac{\partial f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\partial y}dy\ ,\qquad (20)$$

де

$$\frac{\partial f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\partial x}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}dy\qquad (21)$$

$$\frac{\partial f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))}{\partial y}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\qquad (22)$$

Якщо функція $f(u,v)$ двох незалежних змінних u і v диференційована в точці (u,v), то диференціал цієї функції в цій точці запишемо у вигляді

$$df(u,v)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}dv$$

де $du=\Delta u$ і $dv=\Delta v$.

Якщо ж функція $f(u,v)$ диференційована в точці (u,v) і функції $u=\varphi(x,y)$ і $v=\phi(x,y)$ двох незалежних змінних x і y диференційовані в точці (x,y), причому $\varphi(x,y)=u$ і $\phi(x,y)=v$, то в наслідок теореми (3), складна функція $f(u(x,y),v(x,y))$ буде диференційована в точці (x,y), причому

$$df(u,v)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}du(x,y)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}dv(x,y) \qquad (22^*)$$

Тобто форма повного диференціала функції, де $du(x,y)$ і $dv(x,y)$ - повні диференціали функцій $u=\varphi(x,y)$ і $v=\phi(x,y)$ точці (x,y).

Отже, будуть u і v незалежними змінними чи вони будуть диференційованими від незалежних змінних x і y, диференціал обчислюється за формулою

$$df(u,v)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}dv, \qquad (22^*)$$

тобто форма повного диференціала функції $f(u,v)$ та сама, стала, незмінна, інваріантна.

Щодо змісту формули (22*), то він різний залежно від того, будуть u і v незалежними змінними, чи вони будуть диференційованими функціями від незалежних змінних x і y.

У першому випадку $du=\Delta u$ і $dv=\Delta v$. В другому - du і dv є повні диференціали функцій $u=\varphi(x,y)$ і $v=\phi(x,y)$. Таким чином, *у двох розглянутих випадках зберігається (інваріантна) тільки форма повного диференціала, а зміст формули (22*) різний для різних випадків*, розглянутих вище.

5.2. Властивості диференціалів

Використовуючи інваріантність форми повного диференціала, легко довести рівності:

$$d(Cu)=Cdu \qquad (23)$$

$$d(u+v)=du+dv \qquad (24)$$

$$d(u-v)=du-dv \qquad (25)$$

$$d(u\cdot v)=vdu+udv \qquad (26)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2} \qquad (v\neq 0) \qquad (27)$$

при умові, що u і v є незалежними змінними або диференційованими функціями від незалежних змінних x і y. З цих рівностей випливає, зокрема, твердження: *якщо функції u і v диференційовані у деякій точці, то в цій точці будуть диференційовані функції Cu, $u+v$, $u-v$, $u\cdot v$, u/v (при $(v\neq 0)$)*

Доведемо, наприклад (26).

► Позначивши через $z=u\cdot v$, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=v, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=u \qquad (28)$$

Будуть u і v незалежними змінними чи вони будуть диференційованими функціями незалежних змінних x і y, частинні похідні (28) - неперервні функції, тому функція $z=u\cdot v$ диференційована, і її повний диференціал, дорівнює

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=vdu+udv.$$

Рівність (26) доведено. ◄

Приклад 6. *Знайти диференціал функції*

$$z=\sin(u^2+2u)\tan(u-2v^3)$$

незалежних змінних u і v.

► Позначивши $x = u^2 + 2v$ і $y = u - 2v^3$, дану функцію зобразимо у вигляді складної функції від x і y:

$$z = \sin x \tan y$$

Використавши формулу (26), знайдемо:

$$dz = \tan y d \sin x + \sin x d \tan y .$$

Оскільки

$$d \sin x = \cos x dx, \qquad d \tan y = \frac{dy}{\cos^2 y},$$

$$dx = d(u^2) + d(2v) = 2udu + 2dv, \; dy = du - 6v^2 dv,$$

то

$$dz = \tan(u - 2v^3)\cos(u^2 + 2u)\,(\,2udu + 2dv\,)+$$
$$+\sin(u^2 + 2v) \cdot \frac{du - 6v^2 dv}{\cos^2(u - 2v^3)}.$$

Згрупувавши члени, які містять du і dv, дістанемо:

$$dz = \left(2u\tan(u - 2v^3)\cos(u^2 + 2v) + \frac{\sin(u^2 + 2v)}{\cos^2(u - 2v^3)} \right) du +$$
$$+ \left(2\tan(u - 2v^3)\cos(u^2 + 2v) - \frac{6v^2 \sin(u^2 + 2v)}{\cos^2(u - 2v^3)} \right) dv.$$

Практичні заняття – 1.4

1. *Знайти повний диференціал таких функцій:*

1) $z = x^2 + xy^2 + \sin y$, 2) $z = \ln(xy)$, 3) $z = e^{x^2 + y^2}$,

4) $u = \tan(x - y) + 6^{x+z}$, 5) $u = \arcsin\dfrac{x}{yz}$, 6) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2. *Знайти* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, *якщо*

1) $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$;
2) $z = \sqrt{\dfrac{1+u}{1-v}}$, $u = -\cos x$, $v = \cos y$;
3) $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^2 + y^2$;
4) $z = u^2 \ln v$, $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

3. *Знайти* $\dfrac{du}{dt}$, *якщо* :

1) $u = e^{2x-3y}$, *де* $x = \tan t, y = t^2 - t$;
2) $u = x^y$, *де* $x = \ln t, y = \sin t$;
3) $u = \arctan\dfrac{y}{x}$, *де* $x = e^{2t} + 1, \; y = e^{-2t} - 1$;
4) $u = \dfrac{yz}{x}$, *де* $x = e^t, \; y = \ln t, \; z = t^2 - 1$.

4. *Знайти* dw, *якщо*

1) $w = f(u,v)$, *де* $u = \cos(xy)$, $v = x^5 - 7y$;

2) $w = f(u,v)$, *де* $u = \sin\dfrac{x}{y}$, $v = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$;

3) $w = f(x,y,z)$, *де* $x = s^2 + t^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = 2st$.

5. *Виконати наближене обчислення*:

1) $\sqrt{(4.06)^2 + (3.07)^2}$,	2) $(2.01)^{3.03}$,	3) $\sqrt{(1.02)^3 + (1,97)^3}$,
4) $\sin 28^o \cdot \cos 61^o$,	5) $(1.02)^3 \cdot (1.97)^3$.	

Самостійна робота

I	1. *Знайти повний диференціал* $z = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$.
	2. *Виконати наближене обчислення:* $\sqrt{(4.05)^2 + (2.93)^2}$
	3. *Знайти* $\dfrac{du}{dt}$, *якщо* $u = \ln\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2+1}$.
II	**1.** *Знайти повний диференціал функції* $u = \arctan\dfrac{xy}{z}$.
	2. *Виконати наближене обчислення* $\sin 32^o \cdot \cos 59^o$.
	3. *Знайти* $\dfrac{du}{dt}$, *якщо* $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$
III	**1.** *Знайти повний диференціал функції* $u = \ln\tan\dfrac{y}{x}$.
	2. *Виконати наближене обчислення* $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right)$
	3. *Знайти* $\dfrac{du}{dt}$, *якщо* $u = \sin^{-1}(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^2$.

§ 6. Похідні функцій означуваних неявно

Нехай функція $F(x,y)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Її графік, в загалі кажучи, є деяка поверхня P, рівняння якої у прямокутній системі координат має вигляд $z = F(x,y)$. Ця поверхня з площиною xOy може мати спільні точки. Позначимо через M множину всіх точок, спільних для поверхні P і площини xOy. Зрозуміло, що $M \subset D$. Ця множина може бути поверхнею (наприклад, поверхня $z = x^2 + y^2 + 1$ з площиною xOy не має спільних точок), може складатися з однієї точки (наприклад, поверхня $z = x^2 + y^2$ з площиною xOy має тільки одну спільну точку (0,0)), може містити скінченну і нескінченну множину їх. Якщо M - не порожня множина, то координати точок цієї множини є розв'язками рівняння

$$F(x,y) = 0 \quad (1)$$

Функція y від x, визначена на множині $E \neq \varnothing$, яка, будучи підставлена в рівняння (1), перетворює її у тотожність, правильну для всіх $x \in E$, *називається неявно заданою* *функцією,* або просо *неявною функцією.* Якщо рівняння (1) вдається розв'язати відносно y, тобто y виразити як деяку функцію від x, то ця неявна функція стає *явною.* Якщо ж функцію y від x задано за допомогою рівності $y = f(x)$, тобто явно, то, перенісши $f(x)$ в ліву частину цієї рівності, дістанемо рівняння $y - f(x) = 0$ вигляду (1) і, отже, ця функція стає неявно заданою або неявною функцією. Таким чином, поняття неявної функції не зв'язано з будь-якою властивістю цієї функції, а відображає лише спосіб задання, визначення, діставання її.

Перш за все нас цікавить така задача. *Яким умовам повинна задовольняти функція $F(x, y)$, щоб у достатньо малому $\delta-$околі точки $M_0 = (x_0, y_0)$, що належить області D, у якій функція $F(x, y)$ визначена, рівняння (1) визначало одну і тільки одну функцію $y = f(x)$, неперервну в деякому околі точки x_0 графік якої міститься в $\delta-$околі точки $M_0 = (x_0, y_0)$ і проходить через точку (x_0, y_0), тобто $y_0 = f(x_0)$.* Функція $y = f(x)$, задана рівнянням (1), буде неявною функцією або неявно заданою. Внаслідок означення неявної функції рівність

$$F(x, f(x)) = 0$$

має місце для всіх x, взятих з достатньо малого околу точки x_0. На поставлене запитання відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1. (*Існування неперервної неявної функції*). *Якщо:*

1) функція $F(x, y)$ визначена і неперервна в $\delta-$околі $O(M_0, \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$;

2) при кожному фіксованому $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функція $F(x, y)$, як функція від y, в $\delta-$околі точки (x_0, y_0) строго монотонна;

3) $F(x_0, y_0) = 0$, то в деякому δ_1-околі точки x_0 $(\delta_1 < \delta)$ рівняння (1) означає єдину неперервну функцію $y = f(x)$, графік якої міститься в $\delta-$околі точки (x_0, y_0) і проходить через точку (x_0, y_0), тобто $f(x_0) = y_0$.

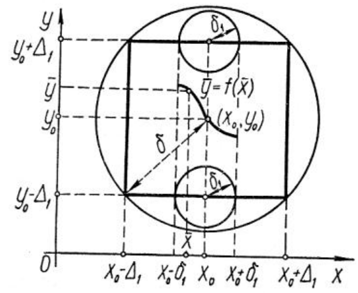

Рис. 1

► Впишемо квадрат в $\delta-$околі точки (x_0, y_0) (Рис.1)

$$D = [x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1; y_0 - \Delta_1, y_0 + \Delta_1], \text{ де } \Delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta.$$

Розглянемо функцію $z(y) = F(x_0, y)$ для $y \in [y_0 - \Delta_1, y_0 + \Delta_1]$. Ця функція внаслідок умови 1) буде неперервною на відрізку $[y_0 - \Delta_1, y_0 + \Delta_1]$, а внаслідок умови 2) вона строго монотонна на цьому відрізку. Нехай ця функція зростає. Оскільки в наслідок умови 3) $z(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, то в точці $y_0 - \Delta_1$ її значення від'ємне, а в точці $y_0 + \Delta_1$ додатне, тобто $z(y_0 - \Delta_1) = F(x_0, y_0 - \Delta_1) < 0$, $z(y_0 + \Delta_1) = F(x_0, y_0 + \Delta_1) > 0$. Оскільки точки $y_0 - \Delta_1$ і $y_0 + \Delta_1$ належать $\delta-$околу точки (x_0, y_0), в точках якого функція $F(x, y)$ внаслідок умови 1) неперервна, то знайдуться δ_1-околи точок $(x_0, y_0 - \Delta_1)$ і $(x_0, y_0 + \Delta_1)$ $(0 < \delta_1 \le \delta - \Delta_1)$, в яких функція $F(x, y)$ буде в першій від'ємною, а в другій додатною.

Візьмемо довільну фіксовану точку $x \in (x_0 - \Delta_1, x_0 + \Delta_1)$ (Рис. 1) і розглянемо функцію $z(y) = F(x, y)$ від y на відрізку $[y_0 - \Delta_1, y_0 + \Delta_1]$. Оскільки $z(y_0 - \Delta_1) = F(x, y - \Delta_1) < 0$, $z(y_0 + \Delta_1) = F(x, y + \Delta_1) > 0$, а внаслідок умови 1) функція $z(y) = F(x, y)$ на відрізку $(y_0 - \Delta_1, y_0 + \Delta_1)$ неперервна, то за теоремою Больцано-Коші, існує точка $y \in [y_0 - \Delta_1, y_0 + \Delta_1]$, в якій $z(y) = F(x, y) = 0$. Внаслідок зростання функції

$z(y)=F(x,y)$ на відрізку $[y_0-\Delta_1, y_0+\Delta_1]$ така точка $y\in[y_0-\Delta_1, y_0+\Delta_1]$, в якій $z(y)=0$, буде єдиною. Зазначимо, що коли точка $x=x_0$ то $z(y)=F(x,y)=F(x_0,y_0)=0$, отже $y=y_0$. Таким чином, кожній точці $x\in(x_0-\Delta_1, x_0+\Delta_1)$ у відповідність поставлена єдина точка $y\in(y_0-\Delta_1, y_0+\Delta_1)$ така, що $F(x,y)=0$, тобто y є функція від x, $y=f(x)$, визначена на інтервалі $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$, графік якої міститься в $\delta-$околі точки (x_0,y_0) проходить через точку (x_0,y_0), причому ця функція задовольняє рівняння (1), тобто $F(x,y)=F(x,f(y))=0$. Тепер, коли існування неявної функції доведено, можна записати $y=f(x)$, де $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$, причому графік функції $y=f(x)$ міститься в $\delta-$околі точки (x_0,y_0) і проходить через точку (x_0,y_0), тобто $y_0=f(x_0)$; функція $y=f(x)$ задовольняє рівняння (1), тобто перетворює його в тотожність, правильну для $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$.

Доведемо, що функція $y=f(x)$ неперервна в $\delta-$околі точки x_0. Неперервність функції $y=f(x)$ випливає з того, що ми для будь-якого числа $\delta>0$ вказали число $\delta_1>0$ таке, що для всіх $x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$, тобто для всіх, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta_1$, графік функції $y=f(x)$ міститься в $\delta-$околі точки (x_0,y_0), тобто $|f(x)-f(x_0)|<\delta$. А це означає, що функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0. Якщо точка x належить інтервалу $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ і відмінні від точки x_0, то для точки $(x, f(x))$, у якій $F(x, f(x))=0$, можна повторити всі побудови, які провели вище для точки (x_0,y_0) і, отже, в цій точці x функція $y=f(x)$ буде також неперервною. Теорему доведено. ◄

Доведемо теорему, яка дає достатні умови для того, щоб неявна функція $y=f(x)$ мала неперервну похідну.

Теорема 2. (*Диференційованість неявної функції*) *Якщо:*

1) функція $F(x,y)$ визначена і має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ в $\delta-$околі точки (x_0,y_0);

2) $F(x_0,y_0)=0$; 3) $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$, то в деякому δ_1-околі точки x_0 $(\delta_1<\delta)$ існує єдина неперервна функція $y=f(x)$, яка задовольняє рівняння (1), графік якої міститься в δ_1-околі точки (x_0,y_0) і проходить через точку (x_0,y_0), тобто $f(x_0)=y_0$. Ця функція $y=f(x)$ в δ_1-околі точки x_0 має неперервну похідну, обчислювану за формулою

$$\frac{df(x)}{dx}=-\frac{\partial F(x,y)/\partial x}{\partial F(x,y)/\partial y} \qquad (2)$$

де $y=f(x)$.

► Нехай виконані всі умови теореми 2. Внаслідок неперервності частинних похідних $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ в $\delta-$околі точки (x_0,y_0) функція $F(x,y)$ буде неперервною в $\delta-$околі цієї точки. Можемо припускати, що $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}>0$. В наслідок неперервності функції $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ в точки (x_0,y_0) буде існувати в δ^*-околі цієї точки $(\delta^*\le\delta)$, в усіх точках якого $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}>0$. Тому для фіксованого $x\in(x_0-\delta^*, x_0+\delta^*)$ функція $F(x,y)$, розглядувана як функція від y буде зростати в $\delta*-$околі точки (x_0, y_0), оскільки ця функція має тут додатну похідну $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} > 0$. Таким чином, при виконані умов теореми 2 виконані і умови тереми 1. За теоремою 1, існує єдина функція $y = f(x)$, яка задовольняє рівнянню (1), визначена і неперервна в $\delta_1 -$околі точки x_0 $(\delta_1 < \delta*)$, графік якої міститься в $\delta*-$околі точки (x_0, y_0) і проходить через точку (x_0, y_0).

Довільній фіксованій точці $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ надамо приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Тоді набуде приросту і функція $y = f(x)$, то її координати задовольняють рівняння (1). Тому

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ і } F(x + \Delta x, y(x) + \Delta y(x)) = 0 \tag{3}$$

Внаслідок неперервності частинних похідних $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ і $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ в $\delta -$околі точки (x_0, y_0), в цьому околі $F(x, y)$ буде диференційованою. Тому її повний приріст в точці $(x, y(x))$

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y(x) + \Delta y(x)) - F(x, y(x))$$

можна зобразити у вигляді

$$\Delta F(x, y) = \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y}\Delta y(x) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$, при Δx і $\Delta y \to 0$, $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$ звідси з (3) маємо

$$\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y}\Delta y(x) + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0.$$

Оскільки $\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y} > 0$, то з останньої рівності дістаємо:

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x} + \beta} \tag{4}$$

Внаслідок неперервності функції $y = f(x)$ в точці x маємо $\Delta y \to 0$ $(\Delta x \to 0)$, тому $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Права частина (4), а також, і її ліва частина має границю при $\Delta x \to 0$. Цим рівність (2) доведено. Оскільки $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ і $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ неперервні в $\delta -$околі точки (x_0, y_0) і функція $y = f(x)$ неперервна в $\delta_1 -$околі точки x_0, то за теоремою про неперервність складної функції, випливає неперервність $\delta_1 -$околі точки x_0 функцій $\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x}$ і $\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y}$. Але тоді буде неперервна в $\delta_1 -$околі точки x_0 і функція

$$-\frac{\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y(x))}{\partial y}} = f'(x) \tag{5}$$

Теорему доведено. ◄

Якщо виконано умови 1)-2) теореми 2 $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$, а $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} \neq 0$, то в теремі 2 можна поміняти місцями x і y. Рівняння (1) в цьому випадку означає в $\delta_1 -$околі точки y_0 єдину неперервну функцію $x = \varphi(y)$, графік якої міститься в $\delta*-$околі точки (x_0, y_0) і проходить через точку (x_0, y_0), Ця функція має неперервну похідну, обчислювану за формулою

$$\varphi'(y) = -\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}} \qquad (6)$$

де $x = \varphi(y)$. В точці $y = y_0$ ця похідна дорівнює нулю: $\varphi'(y_0) = 0$.

Якщо деяку криву задано рівнянням виду (1), в якому функція $F(x, y)$ задовольняє умовам тереми 2 в околі деякої точки (x_0, y_0) цієї кривої, то до такої кривої в точці (x_0, y_0) існують дотична і нормаль, рівняння яких мають відповідно вигляд

$$y - y_0 = -\frac{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}(x - x_0), \quad y - y_0 = \frac{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}(x - x_0).$$

Їх можна записати у більш симетричному вигляді

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(y - y_0) - \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(x - x_0) = 0 \qquad (8)$$

Рівняння (6) і (7) залишаються правильними і тоді, коли одна з похідних $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}$ або $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}$ перетворюються у нуль.

Якщо $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}$=0, то точка (x_0, y_0) кривої, заданої рівнянням (1), *називається особливою*.

Нарешті зазначимо, що формули (5) і (6) дають змогу знаходити похідні вищих порядків від неявних функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ заданих рівнянням (1).

Приклад 2. *Змінні* x *і* y *зв'язані таким рівнянням* $e^y - e^x + xy = 0$. *Знайти* $\dfrac{dy}{dx}$.

► Тут

$$F(x,y) = e^y - e^x + xy = 0; \ \frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \ \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x.$$

Відповідно, користуючись формулою (4), дістанемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}. \ ◄$$

6.1. Неявні функції багатьох змінних

Якщо розглянути рівняння виду

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

або більш загального виду

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0, \qquad (2)$$

то прийдемо до поняття *неявної функції багатьох змінних*. Тут може трапитись, що рівняння (1) не означає неявної функції. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$

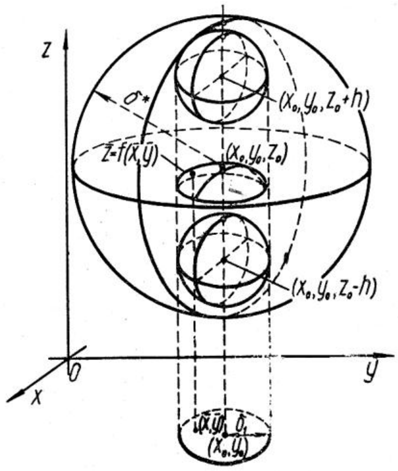

Рис. 3*

не визначає z як неявну функцію, оскільки не задовольняє ніяким дійсним значенням x, y, z. У цьому випадку виникає питання про те, яку умову треба накласти на функцію $F(x, y, z)$, щоб у достатньо малому δ_1 – околі точки (x_0, y_0) існувала єдина неперервна функція $z = f(x, y)$, яка задовольняє рівняння (1) і графік якої міститься в δ – околі точки (x_0, y_0, z_0) і проходить через точку (x_0, y_0, z_0), де $z_0 = f(x_0, y_0)$. Таку функцію називаємо *неявною функцією, заданою рівнянням (1).* Якщо неявна функція, задана рівнянням (1) існує, то при яких достатніх умовах, накладених на функцію $F(x, y, z)$, ця неявно задана функція $z = f(x, y)$ буде диференційована в точці (x_0, y_0) або в усіх точках δ_1 – околу точки (x_0, y_0).

Сформулюємо теорему, яка дає достатні умови для існування єдиної диференційованої функції $z = f(x, y)$ в δ_1 – околі точки (x_0, y_0), що задовольняє рівнянню (1).

Теорема 1. *Якщо:*

1) функція $F(x, y, z)$ *визначена і має неперервні частинні похідні* $\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}$ *в* δ *– околі точки* (x_0, y_0, z_0)

2) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, *3)* $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$,

то в деякому δ_1 *– околі точки* (x_0, y_0) $(\delta_1 < \delta)$ *існує єдина неперервна функція* $z = f(x, y)$, *яка задовольняє рівняння (1) і графік якої міститься в* δ *– околі точки* (x_0, y_0, z_0) *і проходить через точку* (x_0, y_0, z_0), *тобто* $f(x_0, y_0) = z_0$. *Ця функція* $z = f(x, y)$ *в* δ_1 *– околі точки* (x_0, y_0) *має неперервні частинні похідні першого порядку по* x *і* y, *обчисленні за формулами*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial F(x, y, z)/\partial x}{\partial F(x, y, z)/\partial z}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(x, y, z)/\partial y}{\partial F(x, y, z)/\partial z} \qquad (3)$$

де $z = f(x, y)$.

Приклад 3. $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$.

Приклад 4. $e^z + x^2 y + z + 5 = 0.$

Тут $F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5 = 0,\quad \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xy,\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2,$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Розглянемо інший метод обчислення похідної функції $z = f(x, y)$. Повний диференціал функції $F(x, y, z) = 0,$ має вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0. \quad (*)$$

З рівняння (*) знайдемо dz і відповідно $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 5. *Знайти* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, *якщо* $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$

$$► \frac{\partial F}{\partial x}=2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=-4y-z+1; \quad \frac{\partial F}{\partial z}=6z-y.$$

Застосовуючи формули (3) дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{6z-y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-4y-z}{6x-y}. ◄$$

Інший метод.

► Диференціюючи дане рівняння, дістанемо вираз:

$$2xdx-4ydy+6zdz-ydz-zdy+dy=0.$$

Знайдемо dz. Ми отримали повний диференціал функції заданої неявної

$$dz=\frac{2xdx+\left(1-4y-z\right)dy}{y-6z},$$

Звідси дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{6z-y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-4y-z}{6x-y}. ◄$$

§ 7. *Неявні функції, означувані системою рівнянь*

7.1. Неявна функція однієї змінної, задана системою двох рівнянь.

Неявна функція може бути задана і системою рівнянь. Система рівнянь

$$F_1(x,y,z)=0, \quad F_2(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

При деяких умовах, накладених на функції F_1 і F_2 буде означати дві неявні функції

$$y=\varphi(x) \qquad z=\phi(x) \qquad (2)$$

від однієї незалежної змінної x. Справді, знайшовши з першого рівняння системи (1) z як неявну функцію від x і y, $z=\varphi_1(x,y)$ і підставивши цю функцію в друге рівняння цієї системи, дістанемо:

$$F_2(x,y,\varphi_1(x,y))=0$$

Звідси знайдемо $y=\varphi(x)$ і, підставивши $y=\varphi(x)$ в рівність $z=\varphi_1(x,y)$, дістанемо $z=\varphi_1(x,\varphi(x))=\phi(x)$. Тепер залишається з'ясувати питання, за яких умовах всі ці операції можливі і які властивості матимуть неявні функції (2)?

На поставлені питання дає відповідь наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо: 1) функції* $F_1(x,y,z)$ і $F_2(x,y,z)$ *в* $\delta-$*околі точки* (x_0,y_0,z_0) *мають неперервні частинні похідні першого порядку по* x, y *і* z,

2) $F_1(x_0,y_0,z_0)=0, \quad F_2(x_0,y_0,z_0)=0$

$$3)\ f(x_0,y_0,z_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial F_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial F_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (3)$$

то в деякому δ_1-*околі точки* x_0 $(\delta_1<\delta)$ *існує одна пара функцій*

$$y=\varphi(x) \text{ і } z=\phi(x) \qquad y_0=\varphi(x_0) \text{ і } z_0=\phi(x_0), \qquad (4)$$

неперервних в цьому околі, які задовольняють систему (1).

Функції (4) в δ_1-*околі точки* x_0 *мають неперервні похідні, обчислювальні за формулами:*

$$y'=\varphi'(x)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z} & \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z} & \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z}\end{vmatrix} \qquad (5)$$

$$z' = \phi'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (6)$$

7.2. Неявні функції від двох незалежних змінних, задані системою двох рівнянь.

Розглянемо систему двох рівнянь

$$F_1(x,y,u,v) = 0, \quad F_2(x,y,u,v) = 0 \quad (7)$$

Ця система при певних умовах, накладених на $F_1(x,y,u,v)$ і $F_2(x,y,u,v)$, означає дві неявні функції $u = \varphi(x,y)$ і $v = \phi(x,y)$ від двох незалежних змінних x і y.

Теорема 2. *Якщо: функції* $F_1(x,y,u,v)$ і $F_2(x,y,u,v)$ *в* $\delta -$*околі точки* (x_0, y_0, u_0, v_0) *мають неперервні частинні похідні першого порядку по* x, y, u *і* v.

2) $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \qquad F_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$

3) $$f(x_0, y_0, u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x_0, y_0, z_0)}{\partial u} & \frac{\partial F_1(x_0, y_0, z0)}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2(x_0, y_0, z_0)}{\partial u} & \frac{\partial F_2(x_0, y_0, z_0)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (8)$$

то в деякому $\delta_1 -$*околі точки* (x_0, y_0) $(\delta_1 < \delta)$ *існує єдина пара функцій*

$$\begin{cases} u = \varphi(x,y) \quad i \quad v = \phi(x,y) \\ u_0 = \varphi(x_0, y_0) \quad i \quad v_0 = \phi(x_0, y_0) \end{cases}, (9)$$

неперервних у цьому околі, які задовольняють у ньому систему (7). Функції (9) в $\delta_1 -$*околі точки* (x_0, y_0) *мають неперервні частинні похідні першого порядку по* x *і* y *і справджуються такі формули:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Для знаходження частинних похідних неявно заданих функцій від двох змінних, при виконанні усіх умов теореми 2, доцільно застосовувати такий метод.

Нехай задана система двох рівнянь

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0, \end{cases}$$

які визначають диференційовані функції u і v від x і y і Якобян

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Тоді диференціали і частинні похідні можна знайти із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0 \end{cases}.$$

Приклад 6. *Система рівнянь*

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ xu + yv = 1 \end{cases}$$

визначає u *і* v *як функції від* x *і* y. *Знайти* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

► Перший метод

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \\ v + x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

Звідси:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y},$$

відповідно

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

Інший метод**.** Знаходимо диференціали заданих рівнянь

$$\begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ xdu + udx + ydv + vdy = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему рівнянь відносно du і dv, отримаємо

$$du = -\frac{(u+y)dx + (v+y)dy}{x-y},\ dv = \frac{(u+x)dx - (v+x)dy}{x-y}.$$

Звідси:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v+y}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}.$$

Нехай диференційована функція z змінних x і y задана параметричними рівняннями $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$ і

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тоді диференціал функції можна знайти з такі системи рівнянь

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases}$$

Якщо диференціал $dz = pdx + qdy$ відомий, то можна знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Приклад 7. *Функція z від x і y задана рівняннями*

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3 \ (u \neq v).$$

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

► Перший метод**.** Після диференціювання ми отримали три рівняння, які зв'язують диференціали від п'яти змінних

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2udu + 2vdv, \\ dz = 3u^2du + 2v^2dv. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь знаходимо du і dv:

$$du = \frac{2vdx - dy}{2(v-u)}, \quad dv = \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}.$$

підставляючи du і dv в третє рівняння дістанемо:

$$dz = 3u^2 \frac{2vdx - dy}{2(v-u)} + 3v^2 \frac{dy - 2udx}{2(v-u)} = -3uvdx + \frac{3}{2}(u+v)dy. \qquad (*)$$

Звідси: $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$

Інший метод. З третього рівняння знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (*)$$

Після диференціювання першого і другого рівнянь по x і y дістанемо такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

З першої і другої систем рівнянь дістанемо відповідно:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}; \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}; \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

Підставляючи отримані частинні похідні в рівняння (*) дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{v}{v-u} + 3v^2 \frac{u}{u-v} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \frac{1}{2(u-v)} + 3v^2 \frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$ ◄

§ 8. *Поверхні рівня. Лінії рівня*

Нехай в області D простору (x, y, z) визначена функція

$$u = u(x, y, z)$$

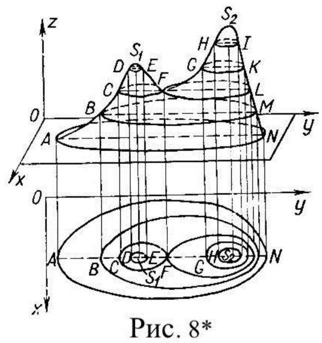

Рис. 8*

У цьому випадку ми говоримо, що в області D визначене скалярне поле. Наприклад: а) $u(x, y, z)$ визначає температуру в точці $M(x, y, z)$, в цьому випадку ми зазначаємо, що визначене скалярне поле температур; б) якщо D є поле рідини або газу і $u(x, y, z)$ означає густину, тоді скалярним полем є густина. Викреслити графік функції від трьох змінних не вдається. Тому для з'ясування особливостей функції і її графіка звертаються до так званої поверхні рівня, а у двохвимірному просторі – звертаються до ліній рівня.

Розглянемо точки області D в яких функція $u(x, y, z)$ має фіксоване значення C.

Означення 1. *Поверхня рівня скалярного поля $u(x, y, z)$ є геометричне місце точок, в яких приймає стале значення. Рівняння поверхні рівня записують так:*

$$u(x, y, z) = C \tag{1}$$

де C стала.

Множина точок, які задовольняють рівнянню (1) утворює відповідну поверхню. Якщо стала C приймає різні значення, то ми отримаємо різні поверхні рівня.

Наприклад 1. *Нехай задане скалярне поле*

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

Тут, поверхнею рівня є рівняння

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = C$$

Тобто еліпсоїд з півосями $2\sqrt{C}, 3\sqrt{C}, 4\sqrt{C}.$

Якщо дано функцію $z = f(x, y)$, то зрівнявши цю функцію з сталим числом C взятим із множини значень цієї функції, дістанемо рівняння

$$f(x, y) = C, \tag{2}$$

яке на площині xOy означає, взагалі кажучи, деяку криву або декілька кривих. Беручи різні значення C, будемо діставати різні криві у площині xOy. Ці криві *називають лініями рівня.*

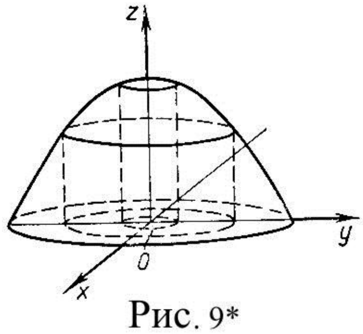

Рис. 9*

Означення 2. *Лінії рівня – це лінії, що лежать в області визначення функції, в точках яких функція $z = f(x, y)$ зберігає стале значення (на різних лініях рівня, взагалі кажучи, різні значення).*

Надаючи C різні значення через рівні проміжки, дістанемо сім'ю ліній рівня, яка є плоским графіком функції $z = f(x, y)$.

Наприклад, розглянемо плоский графік функції $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Ця функція може набувати значень, що належать відрізку $[0, 3]$. Тому за число C можна брати будь-яке число з цього відрізку. Взявши $C = 0, 1, 2, 3$, дістанемо чотири лінії рівня

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = C \qquad (C = 0, 1, 2, 3)$$

Перші три з яких є концентричними колами з центром у початку координат і радіусами, що дорівнюють 3, $\sqrt{8}$, $\sqrt{5}$ (Рис. 9*). Четверта лінія рівня, яка виходить при $C=3$ тут складається з однієї точки (0,0), в якій функція набуває найбільшого значення, що дорівнює 3.

До таких графіків вдаються при зображенні місцевості на топографічних картах. Лінія рівня на цих картах - крива, в точках якої висота місцевості над рівнем моря постійна.

Приклад 1. *Визначити лінії рівня функції* $z=1-x^2-y^2$.

► Рівняння $1-x^2-y^2=C$ визначає кола радіуса $\sqrt{1-C}$. В окремому випадку, коли $C=0$ дістаємо коло $x^2+y^2=1$. ◄

§ 9. *Похідна за напрямом*

Частинна похідна $\dfrac{\partial u(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$ в точці (x_0,y_0,z_0) виражає швидкість зростання функції $u(x,y,z)$ в точці (x_0,y_0,z_0) в додатному напрямі осі Ox. Однак для функції $u(x,y,z)$ можна поставити питання про швидкість її зростання в точці (x_0,y_0,z_0) в довільному напрямі.

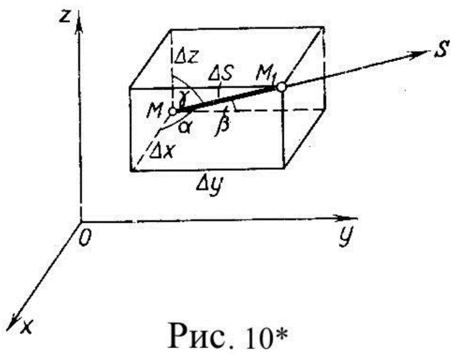

Рис. 10*

Розглянемо функцію $u=u(x,y,z)$ яка визначена в області D і деякій точці $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D$. Нехай напрям в точці M_0 задамо вектором $\vec{s}$ направляючі косинуси якого є $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Розглянемо пряму M_0M_1, яка проходить вздовж вектора $\vec{s}$. За додатній напрям на цій прямій візьмемо напрям вектора $\vec{s}$. На прямій M_0M_1 візьмемо довільну точку $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$. Отже, $\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$

Покладаємо, що функція $u(x,y,z)$ диференційована в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то в цій точці функція $u(x,y,z)$ має похідну у будь-якому напряму.

Зобразимо повний приріст функції у вигляді

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z\,, \quad (3)$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ прямують до нуля при $\Delta s\to 0$. Складемо частку лівої і правої частин рівності (3) і Δs, отримаємо:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s} \qquad (4)$$

Очевидно, що

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\quad \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\quad \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma$$

Відповідно рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_{cp}}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_{cp}}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_{cp}}\cos\gamma+$$

$$+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma \qquad (5)$$

Оскільки функція $u = u(x, y, z)$ диференційована в M_0, то в цій точці існує похідна функції $u = u(x, y, z)$ за будь-яким напрямом, тобто *границя відношення* $\frac{\Delta u}{\Delta s}$, *якщо* $\Delta s \to 0$ *називається похідною функції в точці за напрямом вектора* $\vec{s}$ і позначається $\frac{\partial u}{\partial s}$. Отже $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$. Переходячи до границі в рівності (5) справджується рівність

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (6)$$

Зауважимо, що в окремих випадках похідна за напрямом є частинні похідні: $\frac{\partial u}{\partial x}$ – похідна за напрямком вектора $\vec{i}$ (тобто за напрямом вісі Ox); $\frac{\partial u}{\partial y}$ – похідна за напрямом вектора $\vec{j}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$ – похідна за напрямом вектора $\vec{k}$.

Приклад 2. *Задана функція* $u = x^2 + y^2 + z^2$. Знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ в точці $M(1,1,1)$:

а) за напрямом вектора $\vec{s_1} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;

б) за напрямом вектора $\vec{s_2} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

► а) Знайдемо направляючі косинуси вектора $\vec{s_1}$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14.}}$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s_1}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Знайдемо значення частинних похідних в точці $M(1,1,1)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x|_M = 2, \ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2y|_M = 2, \ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 2z|_M = 2$$

Отже,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s_1}}\right|_M = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

б) Направляючі косинуси вектора $\vec{s_2}$ набувають такі значення

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Беручи до уваги значення частинних похідних попереднього випадку і формулу (6) набуваємо наступного значення похідної за напрямом вектора $\vec{s_2}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s_2}}\right|_M = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \ ◄$$

Приклад 3. *Знайти похідну функції*

$$f(x, y) = 5x^2 - 3x - y - 1$$

в точці $M(2;1)$ *за напрямом від цієї точки до точки* $N(5;5)$.

► Дістанемо вектор, який з'єднує дані точки M і N: $\overrightarrow{MN} = \vec{s} = (3;4) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Знайдемо направляючі косинуси вектора $\vec{s}$: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Частинні похідні даної функції в точці $M(2;1)$ набувають такі значення

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = \left.(10x-3)\right|_M = 17, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \left.(-1)\right|_M = -1$$

Отже: $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = 17\cdot\frac{3}{4} - 1\cdot\frac{4}{5} = 9,4$. ◄

§ 10. *Похідна вздовж направленої дуги. Градієнт*

10.1. Похідна вздовж направленої дуги

Розглянемо деяку точку $M(x,y,z)$, в якій визначено скалярне поле. Якщо з цієї точки переміщуватись в іншу точку $M(x_1,y_1,z_1)$, то значення функції може змінюватись – збільшуватись або зменшуватись. Цілком зрозуміло, що при переміщенні вздовж різних кривих швидкість цієї зміни буде різна. Так, наприклад, якщо рухатись вздовж кривої, яка лежить на поверхні рівня, то функція не буде змінювати свого значення. Якщо ж рухатись вздовж кривої, яка з'єднує точки на різних поверхнях рівня, то значення функції буде змінювати з тією чи іншою швидкістю. Для того, щоб оцінити швидкість зміни функції при переміщенні точки вздовж деякої кривої, доцільно ввести поняття похідної від функції вздовж кривої.

Означення 1. *Середньою швидкістю зміни функції вздовж дуги MM_1 називається відношення приросту функції (при переході від M до M_1) до довжини дуги MM_1. Тобто*

$$\frac{f(M_1) - f(M)}{\cup MM_1}$$

Однак середня швидкість не достатньо характеризує швидкість зміни функції. Середня швидкість не може оцінити поведінку функції в околі будь-якої точки M. Для того, щоб зробити це, будемо брати більш короткі відрізки дуги MM_1, якщо перейдемо до границі (точка M_1 рухається вздовж кривої, необмежено наближаючись до точки M) отримаємо істину швидкість зміни функції в точці M, тобто *похідну вздовж дуги в точці* M.

Перш за все введемо поняття *направленої кривої*. Нехай задана крива L, яка проходить через точку M, і на цій кривій вибрано деякий напрямок руху. Крива з вибраним напрямком називається *направленою кривою*.

Якщо L - направлена крива, а M і M_1 - дві точки цієї кривої, то під символом $\cup MM_1$ вважають довжину дуги MM_1 із знаком «плюс», якщо точка M_1 іде за точкою M, і з знаком «мінус», якщо точка M_1 стоїть попереду M.

Означення 2. *Похідна в точці M називається границя, до якої прямує границя відношення*

$$\frac{f(M) - f(M_1)}{\cup MM_1}$$

якщо точка M_1 рухаючись вздовж дуги L, прямує до точки M і записують

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \lim_{M\to M_1}\frac{f(M) - F(M_1)}{\cup MM_1}.$$

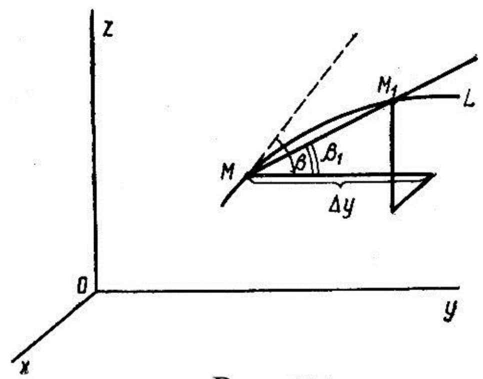

Рис. 11*

У чисельнику цього дробу стоїть приріст функції трьох змінних. Якщо вважати, що функція $f(M)$ диференційована, то приріст функції можна замінити повним диференціалом. Похибка δ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж ρ (де ρ - відтань від точки M до точки M_1). Тому

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \lim_{M \to M_1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \delta}{\cup MM_1} \qquad (1)$$

Знайдемо границі таких дробів:

$$\lim_{M \to M_1} \frac{\Delta x}{\cup MM_1} = \lim_{M \to M_1} \frac{\Delta x}{|MM_1|}\frac{|MM_1|}{\cup MM_1} = \cos\alpha \cdot 1 = \cos\alpha.$$

$$\lim_{M \to M_1} \frac{\Delta y}{\cup MM_1} = \lim_{M \to M_1} \frac{\Delta y}{|MM_1|}\frac{|MM_1|}{\cup MM_1} = \cos\beta \cdot 1 = \cos\beta.$$

$$\lim_{M \to M_1} \frac{\Delta z}{\cup MM_1} = \lim_{M \to M_1} \frac{\Delta z}{|MM_1|}\frac{|MM_1|}{\cup MM_1} = \cos\gamma \cdot 1 = \cos\gamma.$$

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{\delta}{\cup MM_1} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\delta}{|MM_1|}\frac{|MM_1|}{\cup MM_1} = 0 \cdot 1 = 0$$

Переходячи до границі в (1), дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ частинні похідні функції в точці M, а α, β, γ кути складені з додатними напрямами осей координат і дотичним вектором до направленої кривої L в точці M .(Рис. 11*). За формулою (2) дістаємо такий висновок:

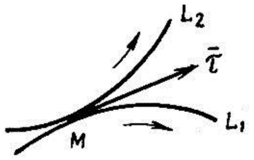

Рис. 12*

Похідна функції вздовж дуги L в точці M не залежить від виду дуги, а залежить тільки від напряму дотичного вектора в точці M.

Отже, якщо криві L_1 і L_2 проходять через точку M і мають в цій точці один і той же дотичний вектор, то похідна в цій точці вздовж дуги L_1 дорівнюється похідній вздовж дуги L_2 (Рис.12*).

Доведення цього факту випливає з формули (2).

Означення 3. *Похідна за напрямом вектора $\vec{\tau}$ в точці M називається похідна вздовж будь-якої дуги, яка проходить через точку M і дотикається вектора $\vec{\tau}$.*

Приклад 1. *Знайти похідну функції $z = \arctan\frac{y}{x}$ в точці $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, яка належить колу $x^2 + y^2 - 2x = 0$ у напрямку цього кола.*

► Як відомо, $y' = \tan\alpha$, де α є кут між дотичною до кола і додатнім напрямком осі Ox .

$$y'\big|_M = \left(\frac{1-x}{y}\right)\bigg|_M = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо частині похідні функції z в точці M.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_M -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_M = \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial L}\right|_M -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial L}\right|_M = \frac{5}{4}. \blacktriangleleft$$

10.2. Градієнт скалярного поля

Розглянемо скалярне поле

$$u = f(x, y, z)$$

і знайдемо похідну від u у напряму вектора $\vec{\tau}$, де $\vec{\tau} = ai + bj + ck$. Для цього спочатку знайдемо направляючі косинуси вектора $\vec{\tau}$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Отже:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}a + \frac{\partial u}{\partial y}b + \frac{\partial u}{\partial z}c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{3}$$

У чисельнику цього дробу стоїть скалярний добуток двох векторів: вектора $\vec{\tau}$ і вектора, складовими якого дорівнюються частинним похідним скалярного поля в даній точці M. Позначимо цей вектор символом $gradu$ (читається градієнт u); тоді за означенням маємо

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k \tag{4}$$

Отже,

$$\frac{gradu\cdot\vec{\tau}}{\left|\vec{\tau}\right|}$$

Беручи до уваги, що скалярний добуток двох векторів дорівнюється добутку їх числових значень на косинус кута між ними, остання рівність набуває такого вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}} = \frac{|gradu|\cdot\left|\vec{\tau}\right|\cdot}{\left|\vec{\tau}\right|}\cos\left(gradu,\vec{\tau}\right) = |gradu|\cdot\cos\left(gradu,\vec{\tau}\right), \tag{5}$$

де права частина рівності є проекція градієнта на напрям $\vec{\tau}$.

Отже, *похідна у напряму $\vec{\tau}$ дорівнює проекції градієнта на цей напрям.* Звідси випливає, що похідна в точці M буде *найбільшою в* напряму градієнта. Таким чином, ми прийшли до наступного: $gradu$ *це вектор, в напряму якого функція буде зростати з найбільшою швидкістю.*

Зауважимо, що в протилежному напряму градієнта функція швидше всього буде спадати.

Градієнт має цілком визначене значення (за величиною і за напрямком) в кожній точці даного поля. Отже, сам градієнт утворює нове поле, але вже є *векторне.*

Приклад 1. *Задано скалярне поле* $u=\frac{x^3y^2}{z}$. *За яким напрямом функція буде зростати швидше за все, якщо виходить з точки* $M(1,2,1)$.

► Знайдемо градієнт у довільній точці:

$$grad u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\frac{3x^2y^2}{z}\vec{i}+\frac{2x^3y}{z}\vec{j}-\frac{x^3y^2}{z^2}\vec{k}$$

У точці $M(1,2,1)$ *градієнт набуває такого значення:*

$$grad u\big|_M=12\bar{i}+4\bar{j}-4\bar{k}.$$

Дістали напрям, в якому функція зростає швидше за все (якщо виходить з точки M). Похідна у напрямку градієнта, тобто $\max\frac{\partial u}{\partial\vec{\tau}}$, дорівнює максимуму градієнта:

$$\max\frac{\partial u}{\partial\vec{\tau}}=\frac{\partial u}{\partial grad u}=\sqrt{12^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{176}\approx 13{,}3\,.$$ ◄

Теорема. *Нехай градієнт функції* $u=f(x,y,z)$ *в точці* M *відмінний від нуля. Тоді він перпендикулярний до будь-якої лінії, яка проходить через точку* M *і лежить на поверхні рівня*

► Проведемо через точку M лінію l, яка лежить на поверхні рівня (Рис. 13*). Так як функція не змінює свого значення рухаючись вздовж кривої l, то $\frac{\partial u}{\partial l}=0$. Але похідна вздовж дуги дорівнюється похідній за напрямком дотичного вектора $\vec{\tau}$, тому $\frac{\partial u}{\partial\vec{\tau}}$ також дорівнюється нулю. Скористаємося формулою (5)

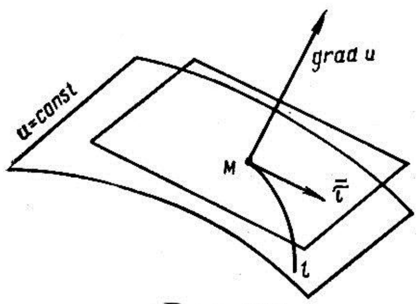

Рис. 13*

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{\tau}}=|grad u|\cdot\cos\left(grad u,\vec{\tau}\right)$$

Так як $\frac{\partial u}{\partial\vec{\tau}}=0$ і $grad u\neq 0$ (за умовою теореми), то $\cos\left(grad u,\vec{\tau}\right)=0$, тобто кут між вектором $\vec{\tau}$ і $grad u$ дорівнюється $\frac{\pi}{2}$. Теорема доведена. ◄

З цієї теореми випливає, що *всі дотичні, які проходять через точку* M, *до кривих, які лежать на поверхні рівня, розташовані в одній площині* (якщо $grad u\neq 0$ в точці M).

Дійсно, всі ці дотичні проходять через точку M і перпендикулярні одному і тому ж вектору - градієнту u. Значить, всі вони лежать в одній площині.

Означення. *Геометричне місце дотичних, які проведені в точці* M *до кривих, які лежать на поверхні рівня, називається дотичною площиною до цієї поверхні в точці* M.
Рівняння цієї площини легко записати. Якщо точка M має координати (x_0,y_0,z_0), то вектор перпендикулярний (направляючий вектор площини) до дотичної площини, градієнт – запишемо так:

$$grad u\big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_M\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_M\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_M\vec{k}$$

Якщо відома точка, через яку проходить шукана площина, і якщо знаємо вектор, перпендикулярний до площини, можна записати рівняння дотичної площини:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M (y-y_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M (z-z_0)=0 \qquad (6)$$

Відповідно, беручи до уваги, що градієнт u є направляючим вектором нормалі до поверхні рівня, то рівняння нормалі набуває такого вигляду:

$$\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M}=\frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M}=\frac{(z-z_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M} \qquad (7)$$

в параметричній формі прийматиме вигляд:

$$x=x_0+t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \qquad y=y_0+t\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \qquad z=z_0+t\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \qquad (8)$$

Приклад 3. *Записати рівняння дотичної площини і нормалі до параболоїда* $z=x^2+y^2$ *в точці* $M(2,1,5)$.

► Для того, щоб використати формули (7) і (8)для функції $u=f(x,y,z)$ поверхнею рівня якої є даний параболоїд. Тут $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$ і

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=-2x|_M=-4,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=-2y|_M=-2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=1$$

Отже, рівняння дотичної площини до даного параболоїда в точці M набуває виду:

$$-4(x-2)-2(x-1)+(z-5)=0$$

або

$$4(x-2)+2(x-1)-(z-5)=0$$

а рівняння нормалі має такий вигляд:

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-5}{1}$$

або

$$x=2-4t \qquad y=1-2t \qquad z=5+t\,. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Обчислити градієнт функції* $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ *в точці* $M(2,4)$ *і лінії рівня, яка проходить через дану точку.*

► Тут $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=x|_M=2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{2}{3}y\right|_M=\frac{8}{3}.$

Отже, $grad u=2\bar{i}+\frac{8}{3}\bar{j}.$

Рівняння лінії рівня, яка проходить через дану точку, має такий вигляд:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3} \text{ або } \frac{x^2}{\frac{3}{11}}+\frac{y^2}{\frac{9}{22}}=1.$$

Це рівняння еліпса де $a^2=\frac{3}{11}$ $b^2=\frac{9}{22}$. ◄

Приклад 5. *Задана функція* $u=x^2+y^2+z^2$.

а) Визначити градієнт функції в точці $M(1,1,1)$*;*

б) Визначити похідну функції в точці $M(1,1,1)$ *за напрямом градієнта.*

► *а*) вираз градієнта даної функції у довільній точці буде $grad u=2x\bar{i}+2y\bar{j}+2z\bar{k}.$ Звідси $grad u|_M=2\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k},\ \left|grad u\right||_M=2\sqrt{3}.$

б) Направляючі косинуси градієнта такі:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial gradu} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial gradu} = |gradu| = 2\sqrt{3}.$$ ◄

Практичні заняття - 1.5

1. *Визначити поверхні і лінії рівня таких скалярних функцій*

1) $u = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,	2) $u = x^2+y^2+z^2$	3) $u = x^2 - 2y$
4) $u(r,t) = \frac{\sin t}{r}, (r = \sqrt{x^2+y^2})$	5) $u = x^2+y^2$	6) $u = \frac{z}{x^2+y^2}$.

2. *Довести, що*

a) $gradc = 0, c = const.$	b) $grad(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1gradu_1 + c_2gradu_2$
c) $gradf(u) = f'(u)gradu,$	d) $grad\,u\cdot v = vgradu + ugradv,$
f) $grad\frac{u}{v} = \frac{vgradu - ugradv}{v^2}, v\neq 0.$	e) $gradf(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}gradu + \frac{\partial f}{\partial v}gradv.$

3. *Знайти кут* φ *між градієнтами скалярного поля* $u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ *в точках* $A(1,2,2)$ *і* $B(-3,1,0)$.

4. *Знайти* $gradf(r)$, *якщо* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5. *Знайти похідну функції* $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ *в даній точці* $P(x,y,z)$ *за напрямом радіус-вектора в цій точці.*

6. *а) Знайти кут між градієнтами функції* $u = \arcsin\frac{x}{x+y}$ *в точках* $A(1,1)$ *і* $B(3,4)$;

б) задані функції $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *і* $z = x - 3y + \sqrt{xy}$. *Знайти кут між градієнтами цих функцій в точці* $A(3,4)$.

7. *Знайти похідну функції* $z = x - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ *в точці* $M(3,1)$ *за напрямом від цієї точки до точки* $N(6,5)$.

8. *Знайти похідну функції* $z = \arctan xy$ *в точці* $A(1,1)$ *за напрямом бісектриси першого квадранта площини* xOy.

9. *Знайти похідну функції* $z = x^2y^2 - xy^2 - 3y - 1$ *в точці* $A(2,1)$ *за напрямом від цієї точки до початку координат*

10. *Знайти похідну функції* $z = \ln(x+y)$ *у точці* $A(1,2)$, *яка належить параболі* $y^2 = 4x$ *вздовж цієї параболи.*

11. *Знайти похідну функції* $z = \arctan\frac{y}{x}$ *у точці* $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *яка належить колу* $x^2 + y^2 - 2x = 0$ *вздовж цього кола.*

12. *Довести, що похідна функції* $z = \frac{y^2}{x}$ *у будь-якій точці еліпса* $2x^2 + y^2 = 1$ *за напрямком нормалі до цього еліпса дорівнюється нулю.*

13. *Довести, що похідна функції* $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ *у будь-якій точці* $M(x, y, z)$ *за напрямком від цієї точки до початку координат, дорівнює* $\frac{2u}{r}$, *де* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

14. *Довести, що похідна функції* $u = f(x, y, z)$ *за напрямком градієнта цієї функції дорівнює модулю градієнта.*

15. *Знайти похідну функції* $u = \frac{1}{r}$ *за напрямом градієнта цієї функції, якщо* $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

16. *Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні* $xyz^2 + 2y^2 + 3yz + 4 = 0$ *у точці* $M_0(0, 2, -2)$.

17. *Знайти рівняння нормалі до поверхні* $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ *у точці* $M_0(3,1,4)$.

18. *Скласти рівняння дотичної площини до еліпсоїда* $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ *паралельно площині* $x - y + 2z = 0$

Самостійна робота

I	*1. Знайти градієнт функції* $f(x, y, z) = \vec{r}^{\,2}$, *де* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$
	2. Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ *у точці* $M_0(1,-1,1)$
II	*1. Знайти градієнт функції* $f = \lvert\vec{r}\rvert$, *де* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$
	2 . Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні $z = 1 + x^2 + y^2$ *в точці* $M_0(1,1,z_0)$.
III	*1. Знайти точку, в якій градієнт функції* $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ *дорівнює* $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}.$
	2. Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до поверхні $x^2z - xyz + y^2 - x - 3 = 0$ *в точці* $M_0(-2, 3, z_0)$

§. 11. *Частинні похідні і диференціали вищих порядків*

11.1. Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ має в області $D \subset \mathbb{R}^2$ частинні похідні $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ і $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Ці частинні похідні, що розглядаються як функції двох змінних, самі можуть мати частинні похідні по x і y. Отже, ми можемо знову знайти частинні похідні (якщо вони існують). Таким чином, ми можемо знайти чотири частинні похідні функції другого порядку, оскільки кожну з функцій $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна диференціювати по x і y

Означення 1. *Частинні похідні від частинних похідних першого порядку* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *в точці* (x, y) *(якщо існують) називаються частинними похідними функції другого порядку від функції* $z = f(x, y)$ *в точці* (x, y) *і позначаються*

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$ *тут функція* $f(x, y)$ *двічі послідовно диференційована по* x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$ *тут* $f(x, y)$ *по-перше, диференційована по* x*, а одержаний результат диференціювали по* y;

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$ *тут* $f(x, y)$ *по-перше, диференційована по* y*, а одержаний результат диференціювали по* x*;*

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$ *тут функція* $f(x, y)$ *двічі послідовно диференційована по* y.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *називаються змішаними похідними.*

Похідні другого порядку можна знову диференціювати по x і y. Тоді ми отримаємо частинні похідні третього порядку. Очевидно, що їх буде вісім:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \quad \frac{{}^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Взагалі кажучи, *частинна похідна* $n-$*го порядку є перша похідна похідної* $(n-1)-$*го порядку.* Наприклад, $\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ є похідна $n-$го порядку; тут функція $f(x, y)$ по-перше, була диференційована p разів по x, а після чого $(n-p)$ разів по y.

Приклад 1. *Обчислити частинні похідні другого порядку функції*

$$f(x, y) = x^2 y + y^3.$$

► Знайдемо послідовно

$$1 \ \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(x^2 + 3y^2\right)}{\partial x} = 2x. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Обчислити* $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ *і* $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, *якщо*

$$f\left(x, y\right) = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1.$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Обчислити* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, *якщо* $u = z^2 e^{x+y^2}$.

$$\blacktriangleright \frac{\partial u}{\partial x} = z^2 e^{x+y^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2 e^{x+y^2}; \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2 e^{x+y^2};$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Знайти* $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ *і* $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$, *якщо* $u = e^{xy} \sin z$.

$$\blacktriangleright \frac{\partial u}{\partial x} = ye^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + xye^{xy} \sin z = e^{xy}\left(1 + xy\right) \sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy}\left(1 + xy\right) \cos z; \ \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xe^{xy} \cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + xye^{xy} \cos z = e^{xy}\left(1 + xy\right) \cos z$$

Отже, $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. $\blacktriangleleft$

Зауважимо, що частинні похідні $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$ і $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ тотожно рівні. Отже, правильна така терема.

Теорема. *Якщо частинні похідні другого порядку* $f''_{xy}(x, y)$ *і* $f''_{yx}(x, y)$ *існують у деякому околі точки* (x_0, y_0) *і якщо вони в цій точці неперервні, то*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} \quad \left(f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)\right).$$

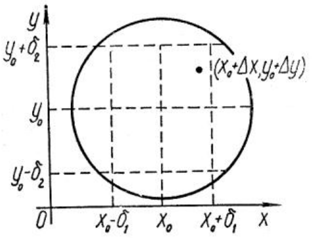

Рис. 1*

$\blacktriangleright$ В $\delta-$околі точки (x_0, y_0) візьмемо точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ($\Delta x \neq 0$ і $\Delta y \neq 0$) (Рис. 1*) і зафіксуємо її. Розглянемо частинний приріст по x від частинного приросту по y функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0), коли аргумент x дістає приріст Δx, а аргумент y - приріст Δy, тобто

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_x(f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) =$$

$$= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)) \quad (1)$$

Введемо в розгляд функцію

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) \qquad (2)$$

однієї змінної x. Ця функція визначена у $\delta_1 -$околі точки x_0, де $|\Delta x| < \delta_1 < \delta$ і δ_1 беремо з таким розрахунком, щоб точки $((x, y_0 + \Delta y), (x, y_0))$ містились у $\delta -$околі точки (x_0, y_0) (Рис. 1*). Знайдемо приріст функції $\varphi(x)$ в точці x_0, коли аргумент x дістає приріст Δx (точка $x_0 + \Delta x$ буде належати $\delta_1 -$околу точки x_0)

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) -$$
$$- f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)) \qquad (3)$$

Звідси і (1) маємо :

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta\varphi(x_0)$$

Оскільки функція $f(x, y)$ в $\delta -$околі точки (x_0, y_0) має частинні похідні $f''_{xy}(x, y)$ і $f''_{yx}(x, y)$, то в цьому околі і частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$. Тому функція $\varphi(x)$, визначена рівністю (2), будучи функцією однієї змінної x в $\delta_1 -$околі точки x_0 має похідну

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)$$

За теоремою Лагранжа,

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x =$$
$$= (f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0))\Delta x \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

Застосувавши терему Лагранжа до правої частини останньої рівності , дістаємо:

$$\Delta\varphi(x_0) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y$$

Звідси і з (3) маємо :

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y \qquad (4)$$

Розглянемо функцію

$$\phi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) \qquad (5)$$

Однієї змінної y. Ця функція визначена в $\delta_2 -$околі точки y_0, де $|\Delta x| < \delta_2 < \delta$ і δ_2 беремо з таким розрахунком, щоб точки $((x_0 + \Delta x, y), (x_0, y))$ містились у $\delta -$околі точки (x_0, y_0) (Рис. 1*). Знайдемо приріст функції $\phi(y)$ в точці y_0, коли аргумент y дістає приріст, який дорівнює Δy (точка $y_0 + \Delta y$ знаходиться у $\delta_2 -$околі точки y_0):

$$\Delta\phi(y_0) = \phi(y_0 + \Delta y) - \phi(y_0) = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0))$$

Звідси і (1) маємо:

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta\phi(y_0) \qquad (6)$$

Функція $\phi(y)$ в $\delta_2 -$околі точки y_0 має похідну, причому

$$\phi'(y) = f'_y(x_0 + \Delta x, y) - f'_y(x_0, y)$$

За теоремою Лагранжа,

$$\Delta\phi(y_0) = \phi(y_0 + \Delta y) - \phi(y_0) = \phi'(y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y = (f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y))\Delta y$$
$$(0 < \theta_3 < 1)$$

Використавши теорему Лагранжа до правої частини останньої рівності, дістаємо:

$$\Delta\phi(y_0) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x \quad (0 < \theta_4 < 1)$$

Звідси і (6) маємо:

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x$$

Порівнявши з (4), знайдемо

$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x$$

А після скорочення $\Delta x \Delta y \neq 0$ дістаємо:

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y) \qquad (7)$$

Внаслідок неперервності $f''_{xy}(x,y)$ і $f''_{yx}(x,y)$ в точці (x_0,y_0) в рівності (7) можна перейти до границі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)$

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)=f''_{yx}(x_0,y_0)$$

Теорему доведено. ◄

Частині похідні вищих порядків, у яких диференціювання відбувається за різними змінними, називаються *мішаними частинними похідними.* Частині ж похідні, які містять диференціювання лише за однією змінною, називаються *чистими частинними похідними.*

Усе сказане вище щодо частинних похідних від функцій двох змінних, однаковою мірою стосується і частинних похідних від функцій $n-$змінних.

11.2. Диференціал вищих порядків

Нехай $z=f(x,y)$ - диференційована функція в області $D\subset \mathbb{R}^2$ від незалежних змінних x і y, тоді (повний) диференціал цієї функції запишемо у вигляді

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Вважаючи $dx=\Delta x$ і $dy=\Delta y$ є довільні прирости незалежних змінних, тобто, вони є довільні числа, незалежні від x і y, які можуть бути диференційованими. Диференціал (1), який ми називаємо *диференціалом першого порядку*, розглядається як функція від x і y, сам може зображати диференційовану функцію в точці (x,y) (в області D) і, отже, від неї можна знайти диференціал в цій точці (в області D).

Означення 1. *Повний диференціал у точці* (x,y) *(в області* D*) від повного диференціала першого порядку* $df(x,y)$ *функції* $f(x,y)$ *називається повним диференціалом другого порядку від цієї функції в цій точці* (x,y) *(в області* D*) і позначається* $d^2f(x,y)$.

Припускаючи частинні похідні $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ і $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ функціями які мають частинні похідні у околі точки (x,y) (в області D), і неперервними в точці (x,y) (в області D), використовуючи властивості повного диференціала, знайдемо:

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y))=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

Застосовуючи формули повного диференціала до $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ отримаємо:

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy$$

Підставляючи отримані вирази у формулу $d^2f(x,y)$, дістанемо вираз

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (2)$$

Оскільки $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і ці мішані частинні похідні неперервні функції і dx і dy є довільні незалежні змінні, тоді другий повний диференціал набуває вигляду

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 \qquad (3)$$

Якщо ввести наступний диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, то формулу (3) можна записати у більш зручній форі

$$d^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y)$$

Якщо диференціал другого порядку функції $f(x,y)$, що розглядається, як функція незалежних змінних, сам є диференційованою функцією в точці (x,y) (в області D), то можна говорити про повний диференціал цієї функції в цій точці (в області D). Повний диференціал від повного диференціала другого порядку функції $f(x,y)$ в точці (x,y) (в області D) *називається повним диференціалом третього порядку* від цієї функції в точці (x,y) (в області D) і позначається $d^3 f(x,y)$. Якщо частинні похідні другого порядку від функції $f(x,y)$ мають частинні похідні по x і y в околі точки (x,y) (в області D), то диференціал третього порядку від функції $f(x,y)$ в точці (x,y) (в області D) виражається через частинні похідні третього порядку від цієї функції в точці (x,y) (в області D) так:

$$d^3 f(x,y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3 \qquad (4)$$

або

$$d^3 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(x,y).$$

Повний диференціал від повного диференціала $(n-1)-$го порядку функції $f(x,y)$ в точці (x,y) (в області D) *називається повним диференціалом $n-$го порядку* від цієї функції в точці (x,y)(в області D) і позначається $d^n f(x,y)$, тобто

$$d^n f(x,y) = d(d^{n-1} f(x,y))$$

або

$$d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Застосувавши формулу бінома Ньютона дістанемо:

$$d^n f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k \qquad (5)$$

де $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Зауваження. *Якщо x і y є деякі функції від ξ і η, то формула повного диференціала другого порядку не буде інваріантна.*

► Дійсно, нехай $z = f(x,y)$ де $x = x(\xi,\eta)$ і $y = y(\xi,\eta)$, то перший диференціал має вид

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

де dx і dy деякі функції, тоді справджується наступна рівність

$$d^2 f(x,y) = d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)dy +$$

$$+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d(dx)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d(dy)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2y$$

Звідси випливає, що формула повного диференціала другого порядку не є інваріантна. ◄

Нехай функція $u=f(x_1,x_2,...x_m)$ визначена в області $D\subset\mathbb{R}_n$ і достатнє $n-$ число раз диференційована у деякій точці $M\in D$, тоді справджується наступна формула

$$d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u. \qquad (5)$$

Приклад. *Знайти* d^2u, *якщо* $u=e^{xy}$.

► $du=e^{xy}d\left(xy\right)=e^{xy}(ydx+xdy)$

$$d^2u=d(e^{xy}(ydx+xdy))=e^{xy}d(xy)(ydx+xdy)+e^{xy}d(ydx+xdy)=$$
$$=e^{xy}(ydx+xdy)^2+e^{xy}2dxdy=e^{xy}(y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2). \text{ ◄}$$

Практичні заняття - 1.6

1. *Знайти* $\frac{dy}{dx}$, *якщо* $y\sin x-\cos(x-y)=0.$

2. *Знайти* $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ *якщо* $x-y+\arctan y=0.$

3. *Знайти* $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ *якщо* $x+y=e^{x+y}.$

4. *Знайти* $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$ *в точці* $M_0(1,-1)$, *якщо* $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$.

5. *Знайти* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M_0(1,-2,2)$, якщо $z^3-4xz+y^2-4=0.$

6. *Знайти* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, *якщо* $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0.$

7. *Обчислити частинні похідні другого порядку функцій*

1) $z=x^2-4x^2y+5y^2$; 2) $z=e^x\ln y-\sin y\ln x$;

3) $z=e^x(\sin y+\cos x)$; 4) $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$;

5) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 6) $z=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$.

8. *Знайти* $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, *якщо* $u=x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

9. *Знайти* $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$, *якщо* $u=\sin(xy)$.

10. *Знайти* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, *якщо* $z=f(u,v)$, *де* $u=x^2+y^2, v=xy$.

11. *Довести, що якщо* $u=1\big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, *то* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

12 . *Довести, що якщо* $u=\frac{x^2y^2}{x+y}$, *то* $x\frac{\partial u}{\partial x^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u.$

13. *Довести, що якщо* $u = \ln(x^2 + y^2)$, *то* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

14. $u = \varphi(x - at) + \phi(x + at)$, φ *і* ϕ *двічі диференційовані функції, то* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

15. *Довести, що якщо* $u = y\varphi(x^2 - y^2)$ *і* φ *диференційована функція, то*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}.$$

16. *Знайти повні диференціали другого порядку функцій:*

1) $z = xy^2 - x^2 y$; 2) $z = \ln(x - y)$; 3) $z = x\sin^2 y$;

4) $z = 2/2(x^2 + y^2)$; 5) $z = (x^2 + y^2 + z^2)$; 6) $z = e^{x^2 + y^3}$.

Самостійна робота

I	1. *Знайти* $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, *якщо* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
	2. *Довести, що якщо* $u = \ln\dfrac{1}{r}, r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, *то* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
	3. *Знайти* d^2u, *якщо* $u = xyz$.
II	1. *Знайти* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, *якщо* $z = \arctan\dfrac{x + y}{1 - xy}$.
	2. *Довести, що якщо* $u = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin\lambda x$, *то* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
	3. *Знайти* d^2u, *якщо* $u = e^x \cos y$.
III	1. *Знайти* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, *якщо* $z = \sqrt{2xy + y^2}$.
	2. *Довести, що якщо* $u = \arctan\dfrac{y}{x}$, *то* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$
	3. *Знайти* d^3u, *якщо* $u = x\cos y + y\sin x$.

§. 12. *Формула Тейлора для функції двох змінних*

Теорема Тейлора. *Нехай функція від двох змінних* $z = f(x, y)$ *неперервна і має неперервні частинні похідні до* $(n+1)-$*го порядку включно у* $\delta-$*околі точки* $M_0(x_0, y_0)$, *то для всіх* Δx *і* Δy, *які задовольняють умові* $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, *існує таке* $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y), 0 < \theta < 1$, *з чого випливає така формула:*

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+$$
$$\frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+r_n(\Delta x,\Delta y)\ (1)$$

або у символічному вигляді

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+r_n(\Delta x,\Delta y),$$

де

$$r_n(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).$$

Наведена формула *називається формулою Тейлора* $n-$*го порядку для* функції $f(x,y)$, а функція $r_n(\Delta x,\Delta y)$, її *залишковий член,* у формі Лагранжа.

► Нехай Δx і Δy зафіксовані так, що $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta$, тоді всі точки виду $x=x_0+t\Delta x$, $y=y_0+t\Delta y$, де $0\le t\le 1$ лежать на відрізку, який з'єднує точки (x_0,y_0) і $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ і тому всі вони належать $\delta-$околу точки (x_0,y_0). В наслідок цього

$$z=f(x,y)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)=\varphi(t) \quad 0\le t\le 1, \qquad (2)$$

перетворюється у складну функцію від t, яка визначена у замкненому інтервалі і має неперервні похідні до $(n+1)-$го порядку на відрізку [0,1] і тому для неї справедлива формула Тейлора $n-$го порядку за ступенями t із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\frac{\varphi'''(0)}{3!}t^3+\ldots+$$
$$+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{\varphi^{(n)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \qquad (3)$$

де $0<\theta<1$.
Покладаємо $t=1$. Отримаємо:

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\frac{\varphi'''(0)}{3!}+\ldots+$$
$$+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\varphi^{(n)}(\theta)}{(n+1)!} \qquad (4)$$

Виразимо праву частину формули (3) через функцію $f(x,y)$ і її похідних. Зауважимо, що оскільки змінні x і y функції $f(x,y)$ є функції від змінної t то, вони мають такі диференціали $dx=\Delta x dt$ і $dy=\Delta y dt$, де Δx і Δy деякі задані числа. Це означає, що ми можемо обчислити диференціали функції $z=f(x,y)$, користуючись формулою

$$d^p f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^p f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Delta x dt)+\frac{\partial}{\partial y}(\Delta y dt)\right)^p f(x,y)=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^p f(x,y)dt^p$$

Отже:

$$\frac{d^p f(x,y)}{dt^p} = \varphi^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^p f(x,y) \qquad (5)$$

Покладаємо $t = 0$. Тоді $x = x_0 + t\Delta x = x_0$, $y = y_0 + t\Delta y = y_0$ і формула (5) дістає вигляд

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^p f(x_0, y_0), \; p = 0,1,2,\ldots,n$$

Покладаємо $t = \theta$, тоді

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$$

Також зауважимо, що $\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$

Підставляючи $\varphi^{(p)}(0)$, $\varphi^{(p)}(\theta)$, $\varphi(1)$ у формулу (4), отримаємо

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) + r_n(\Delta x, \Delta y) \blacktriangleleft$$

Одержана формула часто використовується для апроксимації приросту Δf функції $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Приклад. *Розкласти у ряд Тейлора функцію* $f(x,y) = 2^{xy}$ *в точці* $P_0(1,1)$ *при* $n = 2$.

► Для будь-якої точки (x,y), яка лежить у $\delta -$околі точки P_0 формулу Тейлора другого порядку можна записати таким чином

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right) + r_2(\Delta x, \Delta y).$$

$$f(1,1) = 2, \; \Delta x = x - 1, \; \Delta y = y - 1,$$

$$df(x_0,y_0) = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)\right|_{P_0} = \left.\left(y2^{xy}\ln 2\Delta x + x2^{xy}\ln 2\Delta y\right)\right|_{P_0} = 2\ln 2\left((x-1) + (y-1)\right).$$

$$d^2 f(x_0,y_0) = \left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right)\right|_{P_0} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} y^2 2^{xy}\ln^2 2\Delta x^2 + 2\left(2^{xy}\ln 2 + xy2^{xy}\ln^2 2\right)\Delta x\Delta y + \\ +x^2 2^{xy}\ln^2 2\Delta y^2 \end{pmatrix}\right|_{P_0} =$$

$$= 2\ln 2\left((x-1)^2\ln 2 + (1+\ln 2)(x-1)(y-1) + (y-1)^2\ln 2\right).$$

отже,

$$2^{xy} = 2 + 2\ln 2\left((x-1) + (y-1)\right) +$$

$$+\left((x-1)^2\ln 2 + (1+\ln 2)(x-1)(y-1) + (y-1)^2\ln 2\right)\ln 2 + r_2(\Delta x, \Delta y). \blacktriangleleft$$

Теорема. *Якщо функція* $f(x,y)$ *в області* $D \subset \mathbb{R}^2$ *має неперервні частинні похідні по* x *і* y *до порядку* $(n+1)$ *включно, то в точках відрізку, який з'єднує дві точки* $(x_0, y_0) \in D$ *і* $(x,y) \in D$ *і цілком належить* D, *справджується така формула*

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))}{(n+1)!} \qquad (6)$$

де $\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ *- повний приріст функції* $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0),

$$d^n f(x_0,y_0) = \sum_{i=1}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i$$

є повний диференціал порядку k функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0)

Формула Тейлора у вигляді (6) дає вираз приросту $\Delta f(x_0,y_0)$ через диференціали різних порядків і може бути, таким чином, використана для приблизного обчислення цього приросту. Відкинувши у (6) залишковий (додатковий) член, отримаємо таку наближену формулу

$$\Delta f(x_0,y_0) \approx \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} \qquad (7)$$

яка зводить обчислення приросту функції $f(x,y)$ в даній точці (x_0,y_0) до обчислення значень диференціалів цієї функції різних порядків в цій точці. Похибка, яку ми робимо при обчисленні за формулою (7), дорівнює абсолютній величині відкинутого залишкового члена.

Наведемо інші форм запису формули Тейлора.

Якщо покласти $\Delta x = h$ і $\Delta y = l$, то $x = x_0 + h$, $y = y_0 + l$, відповідно $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + lt$, $dx = hdt$, $dy = ldt$, оскільки t незалежна змінна то $dt = \Delta t$. Але $\Delta t = 1 - 0 = 1$. Отже формулу (1) можна записати так

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0,y_0) +$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + l\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta l) \qquad (8)$$

Наведена формула справедлива тільки для таких значень h і l, щоб точка (x_0+h, y_0+l) належала $\delta -$околу точки (x_0,y_0).

Позначаючи у (8) $h = x - x_0$. $l = y - y_0$ дістанемо формулу

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(x_0,y_0) +$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)) \qquad (9)$$

Формули (6) і (9), очевидно, можуть бути безпосередньо розповсюджені на функції будь-якого числа змінних.

Зауваження 1. *На практиці досить часто доводиться мати справу з окремими випадками формули (9). Припустимо $x_0 = 0$ і $y_0 = 0$ правильна така формула*

$$f(x,y) = f(0,0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right)^k f(0,0) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\theta x), \theta y)$$

(10)

Інколи її називають *формулою Маклорена.*

Зауваження 2. *Поклавши у формулі Тейлора (9) $n = 1$ отримаємо формулу:*

$$f(x_0+h, y_0+l) - f(x_0,y_0) = h\frac{\partial f(x_0+\theta h, y_0+\theta l)}{\partial x} + l\frac{\partial f(x_0+\theta h, y_0+\theta l)}{\partial y},\ 0<\theta<1, \quad (11)$$

яка дає узагальнення формули Лагранжа на функції двох змінних.

Зауваження 2. *Якщо функція $f(x,y)$ в усіх точках області має похідні першого порядку по x і y, що дорівнюють нулю, то функція $f(x,y)$ стала у цій області.*

За допомогою формули (11) можна довести, що це так.

Практичні заняття - 1.7

1. *Розкласти функцію* $f(x+h, y+k)$ *за ступенями* h *і* k, *якщо* $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$.

2. *Розкласти функцію* $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ *за формулою Тейлора у околі точки* $M_0(-2,1)$

3. *Знайти приріст функції* $f(x,y)=x^2y$, *яка зміщується від точки* $A(1,1)$ *до точки* $B(1+h,1+k)$.

4. *Розкласти функцію* $f(x,y)=e^x\sin y$ *за формулою Маклорена при* $n=3$.

5. *Використовуючи формулу Тейлора обчислити приблизно до членів другого порядку такі вирази*:

a) $\sqrt{1.03^2+2.02^2}$, b) $\sqrt[3]{0.98^2+1.03^2}$, c) $(0.95)^{2.01}$.

6. *Розкласти за формулою Маклорена функцію* $f(x,y)=\cos x\sin y$ *до четвертого порядку включно*

7. *Розкласти функцію* $f(x+h, y+k, z+l)$ *за цілими додатними ступенями* h, k і l, *якщо* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$

8. *Розкласти функцію* $z=x^y$ *за ступенями* $(x-1),(y-1)$ *до третього порядку включно. Використавши одержаний результат, обчислити* $1{,}1^{1.02}$.

9. *Знайти приріст функції* $f(x,y)=x+y-6xy-39x+18y+4$, *яка проходить від точки* $M_0(5,6)$ *до точки* $M_1(5+h,6+k)$.

10. *Розкласти функцію* $f(x+h, y+k)$ *за ступенями* h *і* k, *якщо* $f(x,y)=x^3+2y^3-xy$.

§ 13. *Екстремум функції і її найбільше і найменше значення*

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена у деякій області D а точка $M_0(x_0,y_0)$ деяка внутрішня точка цієї області.

Означення 1. *Вважають, що функція* $f(x,y)$, *яка визначена в* $\delta-$*околі точки* (x_0,y_0), *має в цій точці максимум (тобто, коли* $x=x_0$ *і* $y=y_0$*), якщо для всіх точок* (x,y), *які належать проколеному* $\delta-$*околу цієї точки правильна нерівність*

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)$$

Іншими словами, *якщо в достатньо малому проколеному околі точки* (x_0,y_0) *повний приріст функції* $\Delta f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ *зберігає знак мінус, то функція* $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *має максимум.*

Означення 2. *Вважають, що функція* $f(x,y)$, *визначена в* $\delta-$*околі точки* (x_0,y_0), *має в цій точці мінімум (тобто, коли* $x=x_0$ *і* $y=y_0$*), якщо для всіх точок* (x,y), *які взяті з проколеного* $\delta-$*околу цієї точки правильна нерівність*

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)$$

Іншими словами, *якщо в достатньо малому проколеному околі точки* (x_0,y_0) *повний приріст функції* $\Delta f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ *зберігає знак плюс, то функція* $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *має мінімум*

Максимум і мінімум функції в точці називаються екстремумом цієї функції в цій точці.

Якщо функція $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *має максимум (мінімум), то тачка* (x_0,y_0) *називається точкою максимуму (мінімуму) цієї функції. Точки максимуму і мінімуму функції називаються точками екстремуму цієї функції.*

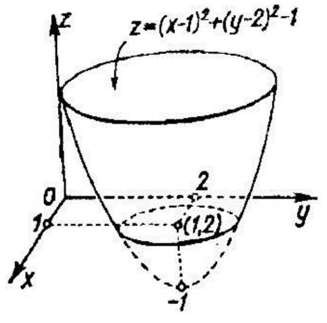

Рис.8

Приклад 1. Функція $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ досягає мінімуму при $x=1$, $y=2$, тобто в точці $(1,2)$. Дійсно $f(1,2)=-1$, і оскільки $(x-1)^2$ і $(y-2)^2$ додатні при $x\neq 1, y\neq 2,$ отже $(x-1)^2+(y-2)^2-1>-1$

Геометрична ілюстрація показана на (Рис. 8).

Приклад 2. Функція $z=\frac{1}{2}-\sin\left(x^2+y^2\right)$ при $x=0, y=0$ (координати початку координат) досягає максимуму (Рис. 9).

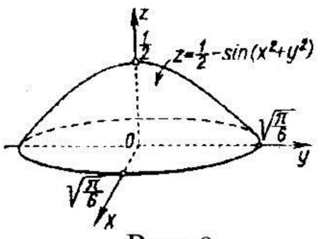

Рис. 9

Лінією рівня даної поверхні при $z=0$ є коло $x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$.

Дійсно, $f(0,0)=\frac{1}{2}$ в середині кола $x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$. Візьмемо точку (x,y), відмінну від точки (0,0). Тоді в кругу

$0<x^2+y^2<\frac{\pi}{6}$ $\qquad\qquad$ $\sin\left(x^2+y^2\right)>0$

і отже $f(x,y)=\frac{1}{2}-\sin\left(x^2+y^2\right)<\frac{1}{2},$

або

$$f(x,y)<f(0,0).\ ◄$$

Означення, яке було наведене раніше, максимуму і мінімуму функції можуть бути перефразовані іншим чином.

Нехай $x=x_0+\Delta x$ і $y=y_0+\Delta y$, отже

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta f.$$

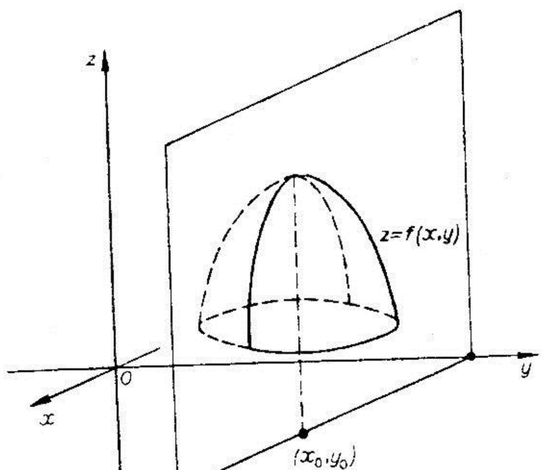

Рис. 10

1) *Якщо* $\Delta f<0$ *для всіх достатньо малих приростів незалежних змінних, то функція* $f(x,y)$ *досягає максимуму в точці* (x_0,y_0)

2) *Якщо* $\Delta f>0$ *для всіх достатньо малих приростів незалежних змінних, то функція* $f(x,y)$ *досягає мінімуму в точці* (x_0,y_0).

Теорема 1. *(Необхідні умови для екстремуму).*

Якщо функція $z=f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *досягає екстремуму і якщо в цій точці має частинні похідні першого порядку по змінним* x *і* y*, то ці похідні дорівнюють нулю:*

$$\frac{\partial(x_0,y_0)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

► Розглянемо функцію однієї змінної x

$$\varphi(x)=f(x,y_0)$$

Ця функція визначена в інтервалі $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ в точці $x=x_0$ має похідну першого порядку, причому $\varphi'(x_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Припустимо, що функція $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) має максимум (мінімум). Тоді для $0<|\Delta x|<\delta$ маємо:

$$\varphi(x_0+\Delta x)=f(x_0+\Delta x,y_0)<f(x_0,y_0)=\varphi(x_0),$$

$$\left(\varphi(x_0+\Delta x)=f(x_0+\Delta x,y_0)>f(x_0,y_0)=\varphi(x_0)\right),$$

а це означає, що функція $\varphi(x)$ в точці x_0 має максимум (мінімум), але за відомою теоремою (про необхідні умови екстремуму для функції однієї змінної) $\varphi'(x_0)=0$, тобто $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$. Аналогічно, розглянувши функцію однієї змінної y, $\phi(y)=f(x_0,y)$ переконаємось в тому, що $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$. Теорему доведено. ◄

Точка $(x_0,y_0)\in D$, *в якій частинні похідні першого порядку по змінним* x *і* y *від функції* $f(x,y)$ *дорівнюють нулю, називається стаціонарною точкою.*

Для знаходження стаціонарних точок потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

з двома невідомими x і y

Доведена теорема має просте геометричне тлумачення. Запишемо рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$:

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

Якщо точка (x_0,y_0) - точка екстремуму для $f(x,y)$, то за доведеною теоремою $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$, отже рівняння дотичної площини набуває такого вигляду: $z=z_0$ - площина перпендикулярна вісі Oz.

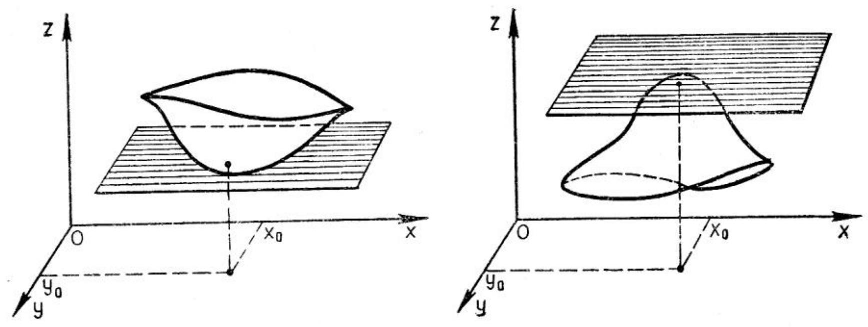

Рис. 10*

Отже, *якщо диференційована функція* $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *має екстремум, а відповідна поверхня* $z=f(x,y)$ *має в точці* (x_0,y_0,z_0) *дотичну площину, то вона перпендикулярна вісі* Oz, *тобто паралельна площині* xOy *(або збігається з нею).* (Рис. 10*)

Зазначимо, що теорема 1 дає лише необхідну умову для екстремуму функції, яка має частинні похідні першого порядку по x і y. Ці умови не є достатніми.

Точки, в яких всі частинні похідні першого порядку функції дорівнюють нулю або хоча б одна з них не існує (а і, які існують, дорівнюють нулю) *будемо називати підозрілими на екстремум.*

Наприклад, функція $f(x,y)=xy$ (Рис. 10). Для цієї функції часині похідні будуть

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$

У точці $(0,0)$ ці похідні обертаються в нуль, тобто точка $(0,0)$ є підозріла на екстремум точка; однак в цій точці функція, що розглядається не має

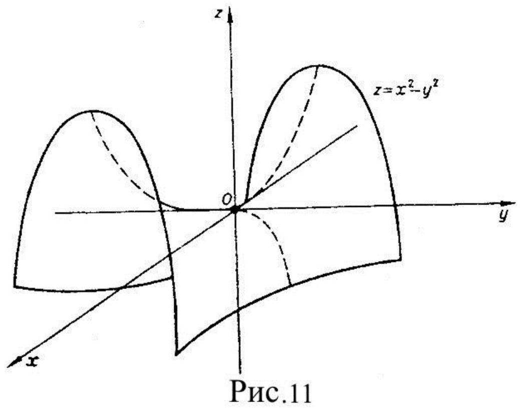

Рис.11

екстремуму, тому що не можна вказати такій окіл точки $(0,0)$, в якій різниця $f(x,y)-f(0,0)=xy$ була б невід'ємною (недоданою). Так, для точок (x,y), що знаходяться у першому ($x>0$, $y>0$) і третьому ($x<0$, $y<0$) квадрантах

$$f(x,y)=xy>f(0,0)=0;$$

для точок (x,y), що знаходяться у другому ($x<0$, $y>0$) і четвертому ($x>0$, $y<0$) квадрантах

$$f(x,y)=xy<f(0,0)=0,$$

які б малі не були при цьому за абсолютною величиною x і y.

Поверхня, яка виражається рівнянням $z=xy$ (гіперболічний параболоїд), поблизу точки $(0,0)$ розташовується частково над, а частково – під площиною xOy, яка є дотичною до поверхні.

Теорема 2. (*достатні умови для екстремуму*). *Нехай функція* $f(x,y)$ *у деякому* $\delta-$*околі своєї стаціонарної точки* (x_0,y_0) *має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Якщо*

$$\boldsymbol{1^0}.\ D=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

і
$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}<0\right), \tag{2}$$

то функція $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *має максимум.*

Якщо

$$\boldsymbol{2^0}.\ D=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

і
$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0\ \left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}>0\right) \tag{3}$$

то функція $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *має мінімум.*

Якщо

$$\boldsymbol{3^0}.\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2<0, \tag{4}$$

то функція $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *не має екстремуму.*

Якщо

$$\boldsymbol{4^0}.\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2=0,$$

то функція $f(x,y)$ *в точці* (x_0,y_0) *може мати як максимум, так і мінімум. В цьому випадку необхідні додаткові дослідження.*

► Нехай виконано умови теореми. Тоді для функції $f(x,y)$ можна написати формулу Тейлора

$$\Delta f(x_9,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2(x_0+\theta\Delta x,yy_0+\theta\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2(x_0+\theta\Delta x,yy_0+\theta\Delta y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2(x_0+\theta\Delta x,yy_0+\theta\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right],\ \text{де}\ 0<\theta<1 \tag{5}$$

правильна для точок $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, які належать проколеному околу точки (x_0, y_0). Оскільки (x_0, y_0) - стаціонарна точка функції $f(x,y)$, то $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$. Внаслідок неперервності частинних похідних другого порядку функції $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) маємо:

$$\frac{\partial^2 (x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 (x_0,y_0)}{\partial x^2}+\alpha,$$
$$\frac{\partial^2 (x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 (x_0,y_0)}{\partial x\partial y}+\beta,$$
$$\frac{\partial^2 (x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 (x_0,y_0)}{\partial y^2}+\gamma,$$

де α, β і $\gamma\to 0$ при $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$.

Позначимо через

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\quad B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\qquad C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

Формулу (5) можемо записати у вигляді

$$\Delta f=\frac{1}{2}\left[A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2\right]+\frac{1}{2}\left[\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2\right]\qquad(6)$$

Взявши точку $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ на колі з центром у точці (x_0, y_0) і радіусом $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0$, дістанемо $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$, де φ - кут, який утворює радіус цього кола, що з'єднує точку (x_0, y_0) з точкою $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, з додатнім напрямком осі Ox, $0\le\varphi\le 2\pi$, тоді формула (5) набуде такого вигляду:

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\rho^2}{2}\Big((A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+ +C\sin^2\varphi)+\varepsilon(\rho,\varphi)\Big)\qquad(7)$$

де $\varepsilon\to 0$ $(\rho\to 0)$ рівномірно відносно $\varphi\in[0,2\pi]$

1^0-2^0. Нехай виконана умова (2), тобто

$$AC-B^2>0.$$

В цьому випадку $AC>0$, тому $A\ne 0$;

$$A\cos^2\varphi+2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi=$$
$$=\frac{1}{A}\left[\left(A\cos\varphi+B\sin\varphi\right)^2+(AC-B^2)\sin^2\varphi\right]\qquad(8)$$

Останню рівність легко перевірити. Вираз, що стоїть у квадратних дужках, є функцією від φ, неперервною на відрізку $[0,2\pi]$.

За теоремою Вейєрштрасса, вона на цьому відрізку має найменше значення, тобто існує точка $\varphi_0\in[0,2\pi]$ така, що для всіх $\varphi\in[0,2\pi]$ правильна нерівність

$$\left(A\cos\varphi+B\sin\varphi\right)^2+(AC-B^2)\sin^2\varphi\ge$$
$$\ge\left(A\cos\varphi_0+B\sin\varphi_0\right)^2+(AC-B^2)\sin^2\varphi_0\qquad(9)$$

Легко побачити, що вираз, який стоїть у правій частині нерівності (8), більший від нуля. Справді, $AC-B^2>0$ за умовою. Якщо $\sin^2\varphi=0$, то $\varphi=0;\pi;2\pi$. Тоді $\left(A\cos\varphi_0+B\sin\varphi_0\right)^2=A^2>0$. В цьому випадку права частина нерівності (9) додатна. Якщо ж $\sin^2\varphi>0$, то $(AC-B^2)\sin^2\varphi_0>0$, отже права частина нерівності (9) знову-таки додатна. Оскільки другий доданок у рівності (7), що дорівнює $\varepsilon(\rho,\varphi)$, прямує до нуля при $\rho\to 0$, прямує до нуля рівномірно відносно $\varphi\in[0,2\pi]$, то при достатньо малому ρ, $0<\rho\le\rho_0$ він буде меншій від числа, яке стоїть у правій частині нерівності (9). Звідси і з (7), (8) і (9) випливає твердження, що повний приріст $\Delta f(x_0,y_0)$ в достатньо малому околі точки (x_0,y_0) зберігає знак, тобто $\Delta f(x_0,y_0)>0$, якщо $A>0$ і $\Delta f(x_0,y_0)<0$, якщо $A<0$.

А це означає, що при виконанні умови (2) функція $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) має максимум, якщо $A<0$ і мінімум, якщо $A>0$. Першу частину теореми доведено.

3⁰. Припустимо тепер що правильна нерівність (4), тобто

$$AC-B^2<0 \tag{10}$$

Тут можливі два випадки: а) $A\neq 0$ і б) $A=0$.

У випадку а) маємо рівність (7), з врахуванням (8) запишеться у вигляді

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\rho^2}{A}\Big\{\big(A\cos\varphi+B\sin\varphi\big)^2+$$
$$+(AC-B^2)\sin^2\varphi+\varepsilon(\rho,\varphi)\Big\} \tag{11}$$

Якщо $\varphi=0;\pi;2\pi$, то перший доданок, який стоїть у фігурних дужках рівності (11), дорівнює $A^2>0$, другий дорівнює нулю, а третій прямує до нуля при $\rho\to 0$. Тому вираз, який стоїть у фігурних дужках рівності (10), при достатньо малих ρ, $0<\rho\le\rho_0$ додатні при $\varphi=0;\pi;2\pi$. Таким чином, у точках прямої $y=y_0$, які знаходяться в достатньо малому проколеному околі точки (x_0,y_0), повний приріст функції $\Delta f(x_0,y_0)$ має знак числа A.

Кут $\varphi_1\neq 0;\pi;2\pi$ визначимо з рівняння

$$A\cos\varphi+B\sin\varphi=0,$$

Тобто

$$\cot\varphi=-\frac{B}{A}.$$

Тоді перший доданок, який стоїть у правій частині рівності (11), при $\varphi=\varphi_1$ дорівнює нулю, другий внаслідок (10), від'ємний, а третій прямує до нуля при $\rho\to 0$. Тому вираз, що стоїть у фігурних дужках рівності (10) при достатньо малих ρ, $0<\rho\le\rho_0$, від'ємний. Отже, в точках променя, що виходять з точки (x_0,y_0), і має з додатнім напрямком осі Ox кут φ_1, які потрапляють в достатньо малий проколений окіл точки (x_0,y_0), повний приріст $\Delta f(x_0,y_0)$ має знак протилежний знакові числа A. Отже, повний приріст $\Delta f(x_0,y_0)$ не зберігає знака у будь-якому околі точки (x_0,y_0). Функція $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) не має екстремуму.

У випадку б) повний приріст функції $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) згідно з рівністю (7), запишеться у вигляді

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{\rho^2}{2}\big[2B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi+\varepsilon(\rho,\varphi)\big], \tag{12}$$

де, внаслідок (9), $B\neq 0$ і $\varepsilon(\rho,\varphi)\to 0$ ($\rho\to 0$) рівномірно відносно $\varphi\in[0,2\pi]$.

Перший доданок, який стоїть у квадратних дужках рівності (12), можна записати у вигляді

$$\alpha(\varphi) = 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi).$$

Оскільки $2B\cos\varphi \to 2B \neq 0$ $(\varphi \to 0)$, то при $\varphi_1 \neq 0$, але достатньо близьким до нуля, будемо мати

$$|C\sin\varphi_1| < 2|B|\cos\varphi_1.$$

Тоді значення $\alpha(\varphi_1)$ і $\alpha(-\varphi_1)$ будуть протилежні за знаками. Оскільки $\varepsilon(\rho,\varphi_1) \to 0$ ($\rho \to 0$) і $\varepsilon(\rho,-\varphi_1) \to 0$ ($\rho \to 0$), то при достатньо малому ρ, $0 < \rho \le \rho_0$, повний приріст функції $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0), згідно (12), не зберігає знака. Таким чином, функція $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) не має екстремуму. Теорему доведено. ◄

Правило знаходження точок екстремуму функції двох незалежних змінних.

Щоб знайти точки екстремуму даної функції $f(x,y)$ двох незалежних змінних x і y, необхідно:

1) знайти перші частинні похідні функції $f(x,y)$ і визначити дійсні розв'язки системи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (1^*)$$

Із усіх розв'язків взяти тільки ті, які визначають внутрішні точки області, в якій задана функція $f(x,y)$;

2) знайти всі інші частинні похідні від даної функції і обчислити їх значення для кожного розв'язку $x = x_0$, $y = y_0$ системи (1);*

3) скласти вираз $D = AC - B^2$ в точці (x_0, y_0).

Якщо при цьому виявляється, що $D > 0$, то функція має в точці (x_0, y_0) екстремум, отже максимум, якщо $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$, і мінімум, якщо $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$.

Якщо ж $D < 0$, то в точці (x_0, y_0) функція $f(x,y)$ не має екстремуму.

Зауваження. *Відмітимо, що якщо $D > 0$, то числа $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$ і $C = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$ необхідно повинні бути однакових знаків, оскільки у протилежному випадку $D > 0$ неможливе, і, отже, замість перевірки умови $A > 0$, $A < 0$ можна перевіряти умови: $C > 0$ $C < 0$.*

Приклад 1. *Дослідити на максимум і мінімум таку функцію:*

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

► 1) Користуючись необхідними умовами існування екстремуму, знайдемо стаціонарні точки. Знайдемо частинні похідні $\partial f/\partial x$ і $\partial f/\partial y$ і прирівняємо нулю. Отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2 = 0$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Отже, $x = -\dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$. Точка $M_0\left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ є стаціонарна (критична) точка.

Застосуємо теорему 2. Знайдемо частинні похідні другого порядку в критичній точці $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ і визначимо характер критичної точки:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2; \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1; \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

Тут $\left(AC-B^2\right)\Big|_{M_0}=3>0$, тоді точка M_0 є точкою екстремуму. Оскільки $A\Big|_{M_0}=2>0$, то в точці $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ дана функція має мінімум, тобто $f(x,y)\Big|_{M_0}=z\Big|_{\min}-\frac{4}{3}$. ◄

Приклад 2. Дослідити на максимум і мінімум функцію $z=x^3+y^3-3xy$.

► 1) Знайдемо критичні точки, користуючись необхідними умовами існування екстремуму функції (теорема1). Отримаємо систему:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$$

Отже, ми дістали дві критичні точки: $M_1(1,1)$ і $M_2(0,0)$

2) Знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3.$$

3) Дослідимо характер першої критичної точки

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(1,1)}=6\,;\ B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\bigg|_{(1,1)}=-3\,; C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\bigg|_{(1,1)}=6$$

Відповідно $AB-C^2=36-9=27>0.$

Отже, в точці $M_1(1,1)$ функція досягає мінімуму, оскільки $A=6>0$, тобто $z_{\min}=-1.$

4) Дослідимо характер другої критичної точки $M_0(0,0)$.

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\bigg|_{(0,0)}=0;\ B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\bigg|_{(0,0)}=-3;\ C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\bigg|_{(0,0)}=0.$$

Тут $AB-C^2=-9<0.$ Звідси випливає, що друга критична точка не є точкою екстремуму. ◄

Приклад 3. *Розкласти дане додатне число a на три додатних числа таким чином, щоб їх добуток був максимальним.*

► Позначимо перше число через x, друге - через y, а третє набуває такого значення $a-x-y$. Добуток цих чисел є функція від двох змінних, тобто

$$u=xy(a-x-y)$$

Тут $x>0, y>0, a-x-y>0,$ тобто, $x+y<a, a>0.$ Отже, область визначення функції обмежена прямими

$$x=0, \quad y=0, \quad x+y=a.$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції u

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y(a-2x-y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x(a-x-2y).$$

Прирівнявши нулю отримаємо систему рівнянь:

$$y\left(a-2x-y\right)=0, \quad x\left(a-x-2y\right)=0$$

Розв’язавши систему отримаємо такі китичні точки

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad M_1(0,0),$$
$$x_2 = 0, \quad y_2 = a, \quad M_2(0,a),$$
$$x_3 = a, \quad y_3 = 0, \quad M_3(a,0),$$
$$x_4 = \frac{a}{3}, y_4 = \frac{a}{3}, M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right).$$

Перші три точки лежать на границі області, а остання в середині. На границі області функція u дорівнює нулю, а всередині області додатна; в точці $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ функція має максимум (оскільки тільки екстремальна точка всередині області). Максимальне значення добутку є

$$u_{\max} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Дослідимо характер критичних точок, користуючись достатніми умовами існування екстремуму функції. Знайдемо частинні похідні другого порядку функції u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y$$

та їх значення у відповідних точках:

1) в точці $M_1(0,0)$

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a$$

Не має екстремуму, оскільки $AC - B^2 = -a^2 < 0.$

2) В точці $M_2(0,a)$

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a$$

$AC - B^2 = -a^2 < 0.$ Функція не має ні мінімуму ні максимуму.

3) В точці $M_3(a,0)$ отримаємо

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2a; \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a$$

$$AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Екстремуму в цій точці не існує.

4) В точці $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ отримаємо

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2a}{3}; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2a}{3}; \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{a}{3}$$

Тут

$$AB - C^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0.$$

В точці $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ маємо максимум.

Тобто $u_{\max} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$ ◄

13.1. Найбільше і найменше значення функції двох змінних

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса в усій замкненій обмеженій області $\overline{D}$ функція $f(x, y)$ матиме найменше і найбільше значення, тобто існують дві точки $(x_1, y_1) \in \overline{D}$ і $(x_2, y_2) \in \overline{D}$ такі, що для будь-якої точки $(x, y) \in \overline{D}$ правильні нерівності

$$f(x_1, y_1) \le f(x, y) \le f(x_2, y_2).$$

Однак, теорема Вейєрштрасса, стверджуючи існування найменшого і найбільшого значень неперервної в замкненій обмеженій області $\overline{D}$ функції, нічого не говорить про те, як знайти це найменше і найбільше значення. В загальному випадку і немає правила для відшукання найменшого і найбільшого значень. Однак для певних класів функцій, які особливо часто трапляються на практиці, такі *правила є*.

Нехай функція $f(x, y)$ *неперервна в замкненій обмеженій області* $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ *і диференційована в області* D. *Максимуми і мінімуми функцій у точці іноді називають локальними екстремумами. Точки локального екстремуму містяться серед стаціонарних точок функції* $f(x, y)$. *Тому для відшукання локальних екстремумів треба розв'язати систему рівнянь*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

і знайти всі стаціонарні точки функції $f(x, y)$. *Після чого слід обчислити значення функції в цих стаціонарних точках (якщо стаціонарних точок скінченне число, то це зробити можна), вибрати точки, в яких функція набуває найменшого і найбільшого значень з усіх значень у стаціонарних точках. Потім треба порівняти ці значення із значеннями, яких набуває функція на межі області* D, *знайшовши, якщо це можливо, найбільше і найменше значення функції на межі* Γ *області* D, *ми можемо знайти шукані найменше і найбільше значення функції* $f(x, y)$ *в замкненій обмеженій області* $\overline{D}$.

Приклад 4. *Знайти екстремуми і найбільше та найменше значення функції* $z = 2x^3 - 3xy + y^2$ *в замкненому трикутнику, обмеженому прямими* $y = x$, $y = 3$, $x = -1$. (Рис.2*)

► Спочатку знайдемо стаціонарні точки функції $z = 2x^3 - 3xy + y^2$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 - 3y = 0, \\ z'_y = -3x + 2y = 0 \end{cases}$$

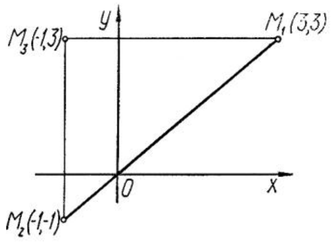

Рис. 2*

З другого рівняння знайдемо $y = \frac{3}{2}x$, підставивши у перше рівняння, дістанемо:

$$6x^2 - \frac{9}{2}x = 0$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{9}{8}$. Маємо одну стаціонарну точку $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$, оскільки друга точка (0,0) лежить на межі розглядуваної області (стаціонарні точки належать області).

Дослідимо на екстремум функцію в стаціонарній точці $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$. Маємо:

$$A = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 12x, \; B = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -3, \; C = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2,$$

$$D = AC - B^2\Big|_{(3/4,9/8)} = 12\cdot\frac{3}{4}\cdot 2 - (-3)^2 = 9 > 0 .$$

Отже, в точці $\left(\frac{3}{4},\frac{9}{8}\right)$ наша функція має екстремум. Оскільки

$C = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 > 0$, то в цій точці має мінімум, який дорівнює

$$f\left(\frac{3}{4},\frac{9}{8}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8} + \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{27}{64}.$$

Знайдемо найбільше та найменше значення функції на межі області. Межа складається з трьох відрізків $[M_2M_1]$, $[M_1M_3]$, $[M_2M_3]$. Знайдемо найбільше і найменше значення функції на кожному з цих відрізків. Для точок $(x,y)\in[M_2M_3]$ маємо: $x=-1$, $-1\le y\le 3$. $f(-1,y) = y^2+3y-2$. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $\varphi(y) = y^2+3y-2$ на відрізку $[-1,3]$. Визначимо стаціонарні точки функції $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = 2y+3 = 0, \qquad y_1 = -\frac{3}{2}$$

Оскільки точка $y_1\notin[-1,3]$, то стаціонарних точок функції $\varphi(y)$ на відрізку $[-1,3]$ немає. Найбільшого і найменшого значення функція $\varphi(y)$ набуває на кінцях відрізка $[-1,3]$. Маємо: $\varphi(-1) = -4$, $\varphi(3) = 16$.

Найменше значення функція $f(x,y)$ набуває на відрізку $[M_2M_3]$ має в точці $(-1,-1)$, що дорівнює $f(-1,-1) = -4$, а найбільше – в точці $(-1,3)$, що дорівнює $f(-1,3) = 16$.

Для точок $(x,y)\in[M_2M_1]$ маємо: $y = x$, $-1\le x\le 3$. $f(x,x) = 2x^3-3x^2+x^2 = 2x^2(x-1)$. Знайдемо найбільше і найменше значення функції $\varphi_1(x) = 2x^2(x-1)$ на відрізку $[-1,3]$. Визначимо стаціонарні точки $\varphi_1(x)$:

$$\varphi'_1(x) = 6x^2-4x = 2x(3x-2) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Обчислимо значення функції $\varphi_1(x)$ в стаціонарних точках і на кінцях відрізку $[-1,3]$:

$$\varphi_1(-1) = -4,\ \varphi_1(3) = 36,\ \varphi_1(0) = 0,\ \varphi_1(2/3) = -\frac{8}{27}$$

Найменше значення функція $f(x,y)$ набуває на відрізку $[M_2M_1]$ має в точці $(-1,-1)$, яке дорівнює $f(-1,-1) = -4$, а найбільше значення - в точці $(3,3)$, яке дорівнює $f(3,3) = 36$

Для точок $(x,y)\in[M_3M_1]$ маємо: $y=3$, $-1\le x\le 3$, $f(x,3) = 2x^3-9x+9$ Знайдемо найбільше і найменше значення функції $\varphi_2(x) = 2x^3-9x+9$ на відрізку $[-1,3]$. Визначимо стаціонарні точки $\varphi_2(x)$:

$$\varphi'_2(x) = 6x^2-9 = 0, \qquad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Оскільки $-\frac{\sqrt{6}}{2}\notin[-1,3]$, то є тільки одна стаціонарна точка $x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Обчислимо значення функції $\varphi_2(x)$ в стаціонарних точках і на кінцях відрізку $[-1,3]$:

$$\varphi_2(-1) = 16,\ \varphi_2(3) = 36,\ \varphi_2\left(\sqrt{6}/2\right) = 9-3\sqrt{6}$$

Найменшого значення функція $f(x,y)$ на відрізку $\left[M_2M_1\right]$ набуває в точці $\left(\sqrt{6}/2,3\right)$, що дорівнює $f\left(\sqrt{6}/2,3\right)=9-3\sqrt{6}$, а найбільшого – в точці $(3,3)$, що дорівнює $f\left(3,3\right)=36$. Таким чином, найменшого значення функція набуває на межі області і в точці $(-1,-1)$, а найбільшого – в точці $(3,3)$. Вони дорівнюються відповідно $f(-1,-1)=-4$ і $f(3,3)=36$. Порівнявши ці значення із значеннями функції в точці екстремуму, яка дорівнює $f(3/4,9/8)=-27/64$, переконуємося в тому , що найбільше і найменше значення функції $f(x,y)=2x^3-3xy+y^2$ в замкненому трикутнику досягаються у межових точках цього трикутника, і вони дорівнюються відповідно -4 і 36.◄

Приклад 5. *Знайти найбільше значення функції* $z=x^2+y^2$ *в області* $\overline{D}\,[-1\le x\le 1,\,-1\le x\le 1]$.

► Знайдемо критичні точки $z=x^2+y^2$ всередині області $\overline{D}$. Для цього, складемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y=0.\end{cases}$$

звідси, $x=y=0$, отже точка $O(0,0)$ є критична точка z. Оскільки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

в точці $O(0,0)$, $AC-B^2=4>0$, $A=2>0$, отже функція $z=x^2+y^2$ в точці $O(0,0)$ має мінімум і дорівнює нулю.

Тепер знайдемо найбільше і найменше значення функції на межі Γ області $\overline{D}$. На часті межі $\Gamma_1\,[x=1,\,-1\le y\le 1]$ маємо $z=1+y^2$, $\dfrac{dz}{dy}=2y$, отже $y=0$ є критична точка, оскільки $\dfrac{d^2z}{dy^2}=2>0$, тоді ця точка є точкою мінімуму і дорівнюється 1. На кінцях інтервалу Γ_1, в точках $(1,-1)$ і $(1,1)$ маємо $z(1,-1)=z(1,1)=2$. Користуючись умовами подібності ми можемо отримати такий же результат і в інших частинах межі:

$\Gamma_2\,[y=1,\,-1\le x\le 1]$, $\Gamma_3\,[x=-1,\,-1\le y\le 1]$ і $\Gamma_4\,[y=-1,\,-1\le x\le 1]$.

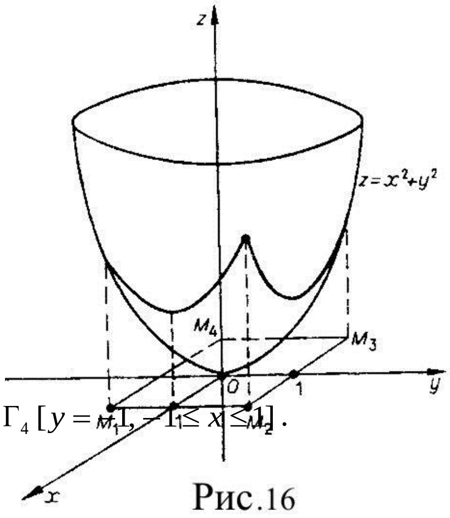

Рис.16

Отже, найменше значення функція $z=x^2+y^2$ в області $\overline{D}$ дорівнює нулю у внутрішній точці $O(0,0)$ області $\overline{D}$ і найбільшого значення, яке дорівнює 2, досягається у чотирьох точка межі: $M_1(1,-1)$, $M_2(1,1)$, $M_3(-1,1)$, $M_4(-1,-1)$ (Рис. 16).

Приклад 6. *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z=x^3+y^3-3xy$ *в області* $\left(0\le x\le 2,\,-1\le y\le 2\right)$.

► 1) Знайдемо частинні похідні першого порядку і отримаємо систему

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3\left(x^2-y\right)=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3\left(y^2-x\right)=0,$$

або
$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$
Розв'язавши систему, дістанемо дві критичні точки $P_1(0,0)$ і $P_2(1,1)$. $z(P_1) = 0, z(P_2) = -1.$

2) Дослідимо функцію на межі:

a) якщо $x = 0$ ми маємо $z = y^3$. ця функція монотонно зростає і $z|_{y=-1} = -1, z|_{y=2} = 8$ на кінцях інтервалу $[-1, 2]$;

b) якщо $x = 2$, ми маємо $z = 8 + y^3 - 6y$. Знайдемо значення цієї функції у критичних точках і на кінцях інтервалу $[-1, 2]$. Отже, $z' = 3y^2 - 6; z' = 0$, якщо $y^2 = 2$ або $y = \sqrt{2}$ у даній області $z|_{y=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}; z|_{y=1} = 13; z|_{y=2} = 4$;

c) якщо $y = -1$ маємо $z = x^3 - 1 + 3x$ і $z' = 3x^2 + 3 > 0$. Функція монотонно зростає від точки $z|_{x=0} = -1$ до точки $z|_{x=2} = 13$;

d) якщо $y = 2$ отримаємо $z = x^3 + 8 - 6x$ і $z' = 3x^2 - 6; z' = 0$
отже, $x = \sqrt{2}; z|_{x=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}; z|_{x=0} = 8;\ z|_{x=2} = 6$.

Після порівняння всіх значень функції ми можемо зробити наступний висновок: $z|_{найбільше} = 13$ в точці $(2,1)$; $z|_{найменше} = -1$ в точках $(1,1)$ і $(0,-1)$. ◄

§ 14. *Умовний екстремум*

До теперішнього часу при розгляданні екстремуму функції декількох змінних ми покладали, що аргументи функції є незалежні змінні. Однак, часто доводиться шукати екстремум функції, аргументи яких пов'язані одним або декількома співвідношеннями.

Нехай, наприклад, *необхідно із всіх трикутників даного периметру* $2p$ *знайти той, який має найбільшу площу* .

Тоді , якщо сторони трикутника позначити через x, y і z, то його площа S за формулою Герона має такий вигляд:
$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \tag{1}$$
де x, y і z, як сторони трикутника, повинні задовольняти таким умовам:
$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y \ge z,\ x + z \ge y\ z + y \ge x \tag{2}$$
Крім того за умовою задачі $x + y + z - 2p = 0$. *Отже, дана задача зводиться до дослідження на максимум функції (1) в замкненій області (2), припускаючи, що аргументи цієї функції пов'язані умовою* $x + y + z - 2p = 0$.

У подібних випадках максимум і мінімум *називається умовним (або невільним)* на відміну від безумовного (або вільного) максимуму і мінімуму, які може мати та ж функція при довільній зміні її аргументів.

Наведемо ще такий приклад. Функція $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (рівняння верхньої півсфери) має в точці $(0,0)$ безумовний максимум, який дорівнює 1; геометрично йому відповідає вершина M сфери. Максимум даної функції, наприклад, при умові $2x - 1 = 0$ (тобто умовний максимум) неважко бачити дорівнюється $\sqrt{3}/2$; він досягається в точці $(1/2, 0)$ і йому відповідає вершина M_1 півкола, отриманого при перетині півсфери площиною $x = 1/2$ і має в цій площині рівняння $y^2 + z^2 = 3/4$. Тут при знаходженні умовного екстремуму функції вільність зміни її аргументів обмежується лінією L, яка є проекцією півкола на площину xOy, і екстремальне значення виділяється порівнянням даного значення функції лише з тими її «суміжними» значеннями, які відповідають точкам, які лежать на лінії L.

Тепер наведемо точне означення умовного максимуму (мінімуму).

Нехай у деякій області D (або замкненій області D) задана функція

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3}$$

від аргументів x_1, $x_2, \ldots, x_n$, які зв'язані між собою k $(k < n)$ співвідношеннями

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \left(i = \overline{1,k}\right) \tag{4}$$

(так зване рівняння зв'язку) і нехай $M_0(x_{01}, x_{02}, .., x_{0n})$ - точка області D, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку (у випадку замкненої області – внутрішня точка із D).

Тоді *зазначають, що в точці* $M_0(x_{01}, x_{02}, .., x_{0n})$ *функція (3) має умовний максимум (мінімум), якщо існує такий окіл даної точки* M_0*, що для всіх її точок* $M(x_1, x_2, ..., x_n)$*, що задовольняють умовам зв'язку (4), виконуються нерівності:*

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ *- у випадку умовного максимуму і*

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ *- у випадку умовного мінімуму.*

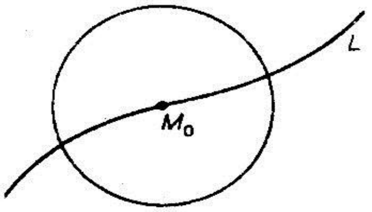

Рис. 12

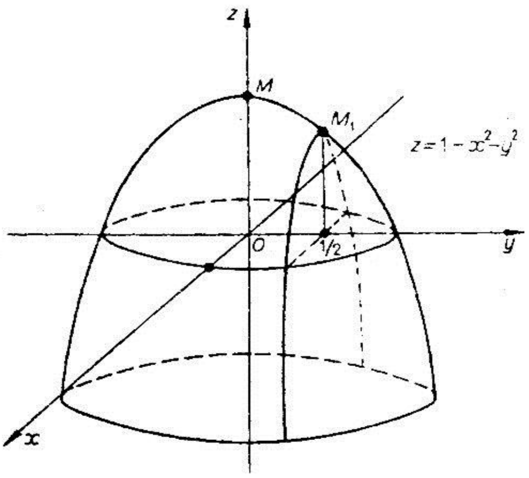

Рис. 13

Означення 1*. *Говорять, що в точці* $M_0(x_0, y_0)$ *яка лежить на лінії* L*, функція* $f(x, y)$ *має умовний максимум (мінімум), якщо у деякому околу точки* $M_0(x_0, y_0)$ *виконується нерівність* $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ *(або* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$*) в точках* $M(x, y)$ *на лінії* L *і відмінних від точки* M_0 *(Рис 12).*

Якщо рівняння кривої L є $\varphi(x, y) = 0$, тоді задача знаходження умовного екстремуму $z = f(x, y)$ на лінії L може бути сформульована таким чином: *знайти екстремум функції* $z = f(x, y)$ *в області* D *при умові, що* $\varphi(x, y) = 0$.

Тому, при знаходженні умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ не можна вважати, що аргументи x і y є незалежні змінні. Вони пов'язані співвідношенням $\varphi(x, y) = 0$, який називається *умовним рівнянням*.

Приклад 2. Безумовний максимум функції $z = 1 - x^2 - y^2$ (Рис. 13) в точці (0,0) дорівнює 1. Відносно цієї точки це є вершина параболоїда. Тепер приєднаємо умовне рівняння $y = 1/2$. Умовний максимум, очевидно, дорівнюється $3/4$. Він досягається в точці $(0,1/2)$ і відповідає точці M_1 вершині параболи, яка лежить на перетині параболоїда з площиною $y = 1/2$.

Наведемо метод знаходження умовного екстремуму функції

$$z = f(x, y)$$

з рівнянням зв'язку

$$\varphi(x, y) = 0$$

Припустимо, що рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ визначає y як однозначну диференційовану функцію від x: $y = \phi(x)$. *Підставляємо* $\phi(x)$ *замість* y *в рівняння* $z = f(x, y)$ *отримаємо функцію однієї змінної*

$$z = f(x, \phi(x)) = F(x),$$

в якому береться до уваги умова зв'язності. Екстремум (безумовний) функції $F(x)$ *вважають умовним екстремумом.*

Приклад 3. *Визначити екстремум функції*

$$z = x^2 + y^2 \qquad (*)$$

при умові

$$x + y - 1 = 0. \qquad (**)$$

►З рівняння зв'язку знайдемо $y = 1 - x$. Підставляємо це значення в рівняння (*), отримаємо функцію аргументу $x: z = x^2 + (x-1)^2$.

Дослідимо на екстремум: $f' = 2x + 2(x-1)$, звідси $x = 1/2$ є критична точка; $z'' = 4$, отже $x = 1/2$ $(y = 1/2)$ умовний мінімум функції z. (Рис. 14).◄

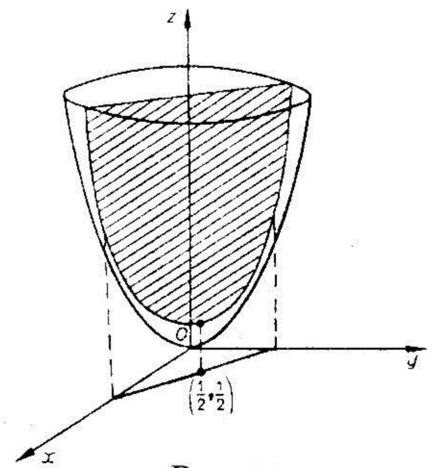

Рис. 14

14.1. Множники Лагранжа

► Нехай точка $M_0(x_0, y_0)$ є точка умовного екстремуму функції

$$z = f(x, y)$$

і рівняння зв'язку

$$\varphi(x, y) = 0$$

Задача знаходження екстремуму функції $f(x, y)$ може бути розв'язана не розв'язуючи рівняння (2) відносно x або y. Для тих значень x, в яких функція може мати максимум або мінімум частинна похідна відносно x повинна дорівнюватись нулю.

За формулою (1) знайдемо похідну $\frac{dz}{dx}$, пам'ятаючи, що y є функція від x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Звідси, в точках екстремуму

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

За рівнянням (2) знайдемо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad (4)$$

Рівняння (3) і (4) задовольняють всім x і y, які задовольняють рівнянню (1).

Помноживши рівняння (4) на невизначений коефіцієнт λ і додавши члени рівняння (3), дістанемо

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0, \qquad (5)$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (6)$$

Отриманому рівнянню задовольняють всі точки екстремуму. Виберемо λ таким, щоб значення x і y, які відповідають екстремуму функції z, щоб вираз у других дужках рівняння (6) дорівнювався нулю

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=0 \qquad (7)$$

Але ж , для цих же значень x і y, з цього ж рівняння маємо

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)=0,\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \qquad (7)$$

З цих рівнянь визначимо λ, яке виконує допоміжну роль, не потрібну ще для чогось.

Звідси робимо висновок, що рівняння (7) є необхідні умови умовного екстремуму; або рівняння задовольняють точкам екстремуму. Але вони не можуть бути умовним екстремумом для всіх x, y (і λ), які задовольняють рівнянням (7). Отже, необхідні додаткові дослідження у критичних точках. При розв'язуванні конкретних задач інколи необхідно досліджувати характер критичних точок, виходячи з умови задачі. Слід зауважити, що ліві частини рівнянь (7) є частинні похідні функції

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \qquad (8)$$

відносно змінних x, y (і λ). Функція $F(x,y,\lambda)$ *називається функцією Лагранжа.*

Отже, умовний екстремум функції $f(x,y)$ при умові $\varphi(x,y)=0$, будуть стаціонарними точками функції Лагранжа.

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

де λ деякий числовий множник

Наведений метод може буди застосований для дослідження умовного екстремуму функцій будь-якого числа змінних.

Правило знаходження умовного екстремуму

► *Щоб знайти точки можливого умовного екстремуму функції $z=f(x,y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x,y)=0$, необхідно виконати такі кроки:*

1⁰) *складаємо функцією Лагранжа*

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y), \qquad (9)$$

2⁰) *прирівнюємо нулю частинні похідні $\partial F/\partial x$ і $\partial F/\partial y$ функції (9) і приєднаємо рівняння зв'язку, отримаємо систему рівнянь*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0,\end{cases} \qquad (10)$$

З цієї системи знайдемо значення λ і координати x і y можливих точок екстремуму.

Питання існування і характер умовного екстремуму розв'яжемо, досліджуючи знаки другого диференціала функції Лагранжа

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

для множини значень x_0, y_0, λ *, які отримані з системи (10) відносно до умови*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \qquad ((dx)^2 + (dy)^2 \neq 0)$$

Якщо $d^2F < 0$*, то в точці* (x_0, y_0) *функція* $f(x, y)$ *має умовний максимум, якщо* $d^2F > 0$ *- умовний мінімум.*

В окремому випадку, якщо стаціонарна точка (x_0, y_0) *і детермінант* D *функції додатній*

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0) & F''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Тоді в точці (x_0, y_0) *функція* $f(x, y)$

має умовний максимум, якщо $A = F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$

і умовний мінімум, якщо $A = F''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ◄

Розв'яжемо **приклад 3,** використовуючи метод множників Лагранжа

Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + y^2$*, якщо* x *і* y *зв'язані умовами* $x + y = 1$

► Функція Лагранжа має вигляд

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Щоб знайти стаціонарні точки, складемо систему

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda = 0, \\ F'_y = 2y + \lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи отримаємо $x = y$; з третього рівняння системи (рівняння зв'язності) маємо $x = y = 1/2$ (координати можливого екстремуму). Отже, $\lambda = -1$. Функція Лагранжа набуває вигляду

$$F(x, y, -1) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

Для неї маємо $F''_{xx} = 2, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{yy} = 2,$

Отже,

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \; F''_{xx} = 2 > 0$$

Таким чином, ми отримали, що точка $M_0(1/2, 1/2)$ є точка умовного мінімуму функції $z = f(x, y)$, відносно умови $x + y = 1$. ◄

Приклад 4. *Розглянемо наступну задачу. Використовуючи кусок жерсті площа якої дорівнюється* $2a$*, скласти замкнений ящик, який має форму паралелепіпеда максимального об'єму.*

► Позначимо довжину, ширину і висоту ящика відповідно x, y і z. Задача зводиться до знаходження максимуму функції

$$w = xyz$$

При умові, що $2xy+2xz+2yz=2a$. Тут задача зводиться до знаходження умовного екстремуму: змінні x, y і z задовольняють умові $2xy+2xz+2yz=2a$. Отже ми дістали наступну задачу:

Знайти максимум функції

$$w = xyz \qquad (1^*)$$

при умові

$$xy+xz+yz-a=0\ (x>0, y>0, z>0). \qquad (2^*)$$

► Складемо функцію Лагранжа

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+xz+yz-a).$$

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо нулю

$$\begin{cases} F'_x = yz+\lambda(y+z)=0, \\ F'_y = xz+\lambda(x+z)=0, \\ F'_z = xy+\lambda(x+y)=0, \\ F'_\lambda = xy+xz+yz-a=0. \end{cases} \qquad (3^*)$$

Задача звелась до розв’язання системи рівнянь з чотирма невідомими (x, y, z і λ). Щоб розв’язати систему, помножимо перше рівняння (3*) на x, друге – на y, третє – на z і додамо. Беручи до уваги четверте рівняння, знайдемо, що $\lambda=\frac{3xyz}{2a}$. Підставляючи це значення λ в перші три рівняння (3*), отримаємо

$$yz\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0$$

$$xz\left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0$$

$$xy\left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0$$

Оскільки, очевидно, за умовою задачі x, y, z відмінні від нуля, отримаємо з останніх рівнянь

$$\left[1-\frac{3x}{2a}(y+z)\right]=0;\ \left[1-\frac{3y}{2a}(x+z)\right]=0;\ \left[1-\frac{3z}{2a}(x+y)\right]=0.$$

З перших двох рівнянь отримаємо, що $x=y,$ друге і третє рівняння доводять, що $y=z.$ Тоді з рівняння (2*) дістанемо $x=y=z=\sqrt{\frac{a}{3}}.$ Ця система значень x, y, z може дорівнювати максимуму або мінімум

Може бути доведено, що отриманий розв’язок визначає максимум. Це також очевидно з геометричного тлумачення (умова задачі вказує що об’єм ящика не може бути необмеженим; тому дійсно для визначених значень сторін об’єм буде максимальним). Отже, об’єм ящика буде максимальним і буде кубом, ребро якого дорівнюється $\sqrt{a/3}$. ◄

Практичні заняття - 1.8

1. *Дослідити на максимум і мінімум функції:*

1) $z=x^3y^2\lvert a-x-y\rvert$;	2) $z=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$;
3) $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$;	4) $z=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$;

5) $z = xy^2(1 - x - y)$,	6) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0,\ y > 0$;
7) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;	8) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$, $x > 0, y > 0$;
9) $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.	

2. Знайти умовний екстремум функцій

1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, *якщо* $x + y + 3 = 0$

2) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, *якщо* $x + y = 2$; 3) $z = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, *якщо* $x^2 + y^2 = 1$;

4) $z = xy^2$, *якщо* $x + 2y = 1$; 5) $z = 2x + y$, *якщо* $x^2 + y^2 = 1$.

6) $z = x - 2y + 5$ *в областях:*

a) $x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad x + y \le 1$;

b) $x \le 0,\quad y \ge 0,\quad y - x \le 1$.

7) *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ *в області* $x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad x + y \le 3$.

8) $z = xy$ *в області* $x^2 + y^2 \le 1$.

9) *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z = xy^2$ *в області* $x^2 + y^2 \le 1$.

3. *Знайти стаціонарні точки функцій*

1) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$	2) $z = e^{2x}(x^2 + y^2 + 2y)$;
3) $z = xy(a - x - y)$;	4) $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$;
5) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right)$.	6) $z = y\sqrt{1+y} + x\sqrt{1+x}$;
7) $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$;	8) $z = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

4. *З усіх трикутників з деяким параметром* $2p$, *визначити трикутник з найбільшою площею.*

5. *З усіх прямокутних паралелепіпедів який має даний об'єм* V *знайти такий, який має найменшу повну поверхню.*

6. *Вписати в еліпсоїд прямокутний паралелепіпед з найбільшим об'ємом.*

7. *В якій точці еліпса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *проведена дотична лінія, яка утворює з осями координат трикутник найменшої площі?*

Самостійна робота

Дослідити на екстремум функції

I. $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$.

II. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

III. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

§ 15. *Сингулярні точки кривої*

Нехай крива задана рівнянням

$$F(x,y)=0$$

Коефіцієнт дотичної до кривої визначається за формулою

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}$$

Якщо, при розгляді, в даній дочці $M(x,y)$ кривої, у всякому разі одна з частинних похідних $\frac{\partial F}{\partial x}$ і $\frac{\partial F}{\partial y}$ не дорівнює нулю, тоді в цій точці $\frac{dy}{dx}$ або $\frac{dx}{dy}$ повністю визначені. Крива $F(x,y)=0$, у цій точці має цілком визначену дотичну, і в цьому випадку точка $M(x,y)$ *називається простою точкою*. Але якщо у деякій точці $M_0(x_0,y_0)$ ми отримаємо, що

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0 \text{ і } \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0$$

тоді коефіцієнт дотичної буде невизначеним

Означення. *Якщо в точці $M_0(x_0,y_0)$ кривої $F(x,y)=0$ обидві частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x}$ і $\frac{\partial F}{\partial y}$ перетворюються у нуль, то така точка називається сингулярною точкою кривої*

Отже, сингулярна точка кривої визначається такою системою рівнянь

$$F(x,y)=0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Нехай у сингулярній точці $M_0(x_0,y_0)$ частинні похідні другого порядку

$$A=\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x^2}\qquad B=\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\qquad C=\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

одночасно не дорівнюються нулю і $\Delta=AC-B^2$, тоді

a) якщо $\Delta>0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ є ізольована точка;

b) якщо $\Delta<0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ називається вузловою точкою;

c) якщо $\Delta=0$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ називається точкою звороту першого роду (типу) або другого роду (типу) і точкою коливання.

Приклад 1. *Дослідити сингулярні точки кривої*

$$y^2-x(x-a)^2=0,\quad (a>0),$$

► Тут $F(x,y)=y^2-x(x-a)^2=0$ і тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x-a)(a-3x);\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

Розв’язуючи три рівняння одночасно,

$$F(x,y)=0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

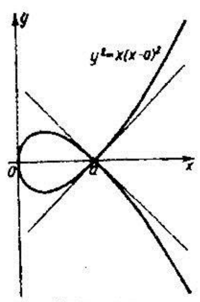

Рис.17

знайдемо систему значень x і y, які задовольняють їм:

$$x=a,\quad y=0.$$

Відповідно, точка $M_0(a,0)$ є сингулярна точка кривої

Дослідимо поведінку кривої у околі сингулярної точки і побудуємо криву.

Запишемо рівняння кривої у такій формі

$$y = \pm(x-a)\sqrt{x} \ .$$

Звідси випливає, що крива:

1) визначена тільки $x \geq 0$;

2) симетрична відносно вісі Ox;

3) перетинає вісь Ox в точках $(0,0)$ і $(a,0)$.

Решта точок сингулярні, як ми визначили. По-перше, дослідимо частину кривої з додатнім знаком:

Знайдемо першу і другу похідні y по x:

$$y' = \frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y'' = \frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

При $x = 0$ отримаємо $y' = \infty$. Отже, крива дотикається осі Oy у початку координат. При $x = \frac{a}{3}$ маємо $y = 0, \quad y'' > 0,$ означає, що при $x = \frac{a}{3}$ функція y має мінімум $y_{\min} = -\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$

На інтервалі $0 < x < a$ маємо $y' < 0;$ при $x > \frac{a}{3}, y' > 0;$ якщо $x \to \infty, \quad y \to \infty.$

При $x = a$ маємо $y' = \sqrt{a}$ це означає, що в точці $M_0(a,0)$ гілка кривої $y = (x-a)\sqrt{x}$ має дотичну $y = \sqrt{a}(x-a).$

Так як друга гілка кривої $y = -(x-a)\sqrt{x}$ симетрична першій відносно осі Ox, крива має також дотичну (до другої гилки) у сингулярній точці $y = -\sqrt{a}(x-a).$ Крива проходить через сингулярну точку двічі. *Така точка називається вузловою точкою* (Рис.17). ◄

Приклад 2. *Дослідити сингулярні точки кривої (півкубічної параболи)*

$$y^2 - x^3 = 0.$$

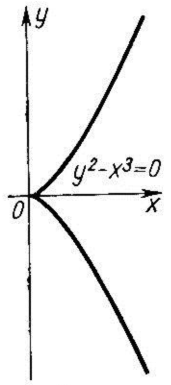

Рис. 18

► Координати сингулярних точок визначаються з таких рівнянь:

$$y^2 - x^3 = 0, \quad 3x^2 = 0, \quad 2y = 0.$$

Відповідно, $M_0(0,0)$ є сингулярна точка. Запишемо дане рівняння у вигляді $y = \pm\sqrt{x^3}$.

Для того, щоб викреслити криву, перш за все дослідимо гілку кривої, якій відповідає знак плюс відповідного рівняння, оскільки гілка кривої якій відповідає знак мінус буде симетрична відносно вісі Ox. (Рис. 18). Функція y визначена тільки для $x \geq 0$, вона від'ємна і зростає. Знайдемо першу і другу похідні функції $y = \sqrt{x^3}$:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \quad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

При $x = 0$ отримаємо $y = 0, \quad y' = 0.$ Отже дана гілка кривої має дотичну $y = 0$ у початку координат. Друга гілка кривої $y = -\sqrt{x^3}$ також проходить через початок координат і має ту ж саму дотичну $y = 0$. Отже, дві різні гілки кривої перетинаються у початку координат, мають оду і ту ж дотичну і розташовані по різні сторони дотичної. *Ця сингулярна точка називається точкою звороту першого роду.* ◄

Приклад 3. *Дослідити криву* $\left(y-x^2\right)^2-x^5=0.$

► Координати сингулярних точок визначимо з таких рівнянь

$$\left(y-x^2\right)^2-x^5=0,\quad -4x\left(y-x^2\right)-5x^4=0,\quad 2\left(y-x^2\right)=0,$$

які мають один розв'язок: $x=0,\quad y=0.$ Отже початок координат є сингулярна точка.

Перепишемо дане рівняння у такому вигляді $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$. З цього рівняння випливає, що x може приймати значення від 0 до $+\infty$.

Знайдемо першу і другу похідні

$$y'=2x\pm\frac{5}{2}\sqrt{x^3},\quad y''=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Дослідимо окремо гілки кривої відповідно з плюсом і мінусом. В обох випадках, коли $x=0$ маємо $y=0,\quad y'=0$. Це означає, що у обох гілках вісь Ox є дотичною прямою. Розглянемо спочатку гілку

$$y=x^2+\sqrt{x^5}.$$

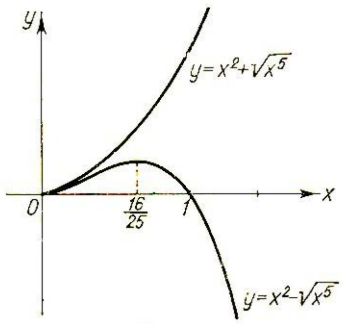

Рис. 19

Якщо x зростає від 0 до $+\infty$, y збільшується від 0 до ∞.

Друга гілка

$$y=x^2-\sqrt{x^5}.$$

Перетинає вісь Ox в точках $(0,0)$ і $(1,0)$. При $x=\frac{16}{25}$ функція $y=x^2-\sqrt{x^5}$ має максимум. Коли $x\longrightarrow+\infty$, тоді $y\to-\infty.$

Отже, в цьому випадку гілки кривої зустрічаються у початку координат; обидві гілки мають одну і ту ж дотичну і розташовані з тієї ж сторони від дотичної у точці дотику. *Тип сингулярної точки називається зворотною точкою другого роду.* (Рис. 19).◄

Проблем 4. *Дослідити криву*

$$y^2-x^4+x^6=0.$$

► Початок координат є сингулярна точка. Для того, щоб дослідити криву у околі цієї точки, перепишемо дане рівняння у вигляді

$$y=\pm x^2\sqrt{1-x^2}$$

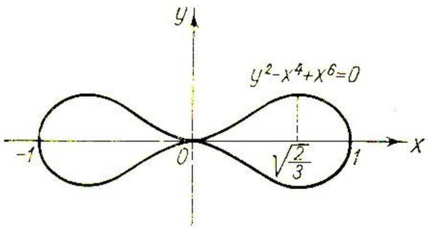

Fig. 20

Оскільки змінні рівняння кривої містить тільки парні ступені, то крива симетрична відносно осей координат і достатньо дослідити частину кривої, яка відповідає додатнім значенням x і y. З останнього рівняння випливає що x може змінюватись від 0 до 1, тобто, $0\le x\le 1.$ (Fig.20)

Знайдемо першу похідну гілки кривої, графіком якої є функція $y=x^2\sqrt{1-x^2}$;

$$y'=\frac{x\left(2-3x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x=0$ маємо $y=0,\quad y'=0$. Отже, крива дотикається вісі Ox у початку координат при $x=1$ маємо $y=0,\quad y'=\infty$; відповідно, в точці $(1{,}0)$ дотична паралельна вісі Oy. при $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ функція має максимум.

У початку координат (у сингулярній точці) дві гілки кривої, які відповідають знаку плюсу і мінусу перед радикалом, мають кратну дотичну. *Сингулярна точка цього типу називається точкою коливання (точкою звороту другого роду).* ◄

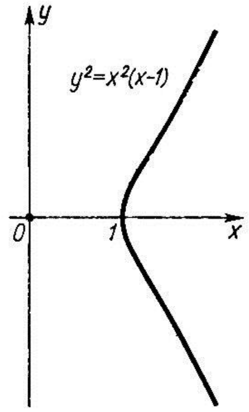

Рис. 21

Приклад 5. *Дослідити криву* $y^2-x^2(x-1)=0$.

► Запишемо систему рівнянь, які визначають сингулярні точки:

$y^2-x^2(x-1)=0\quad, -3x^2+2x=0,\qquad 2y=0.$

Система має розв’язок $x=0, y=0$. Тому, точка $(0{,}0)$ є сингулярна точка кривої. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y=\pm x\sqrt{(x-1)}.$$

Очевидно що x може змінюватись від 1 до ∞.

Знайдемо похідну $y'=\dfrac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$.

Якщо $x=1$ маємо $y'=\infty$; отже, в точці $(1{,}0)$ дотична до кривої паралельна вісі Oy.

Друга гілка кривої яка відповідає знаку мінус, симетрична першій відносно вісі Ox. Точка $(0{,}0)$ має координати, які задовольняють рівнянню, і, відповідно, належать кривій, але позаду неї немає точок, які належать кривій (Рис. 21). *Цей тип сингулярної точки називається ізольованою сингулярною точкою.*

Практичні заняття - 1.9

Знайти сингулярні точки наступних кривих, дослідити їх характер і скласти рівняння дотичної в цій точці

1) $x^3+y^3-3axy=0$;	2) $a^4y^2=x^4\sqrt{a^2-x^2}$;
3) $y^2=\dfrac{x^2}{2a-x}$;	4) $y^2=x^2(9-x^2)$;
5) $b^2x^2+a^2y^2=x^2y^2$;	6) $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$;
7) $x^4-2ax^2y-axy^2+a^2x^2=0$.	

Індивідуальні домашні завдання до частини І

Індивідуальні домашні завдання – 1.1

1. Знайти область визначення даних функцій

1.1 $z=\dfrac{3xy}{(3x-5y)}$.	1.2 $z=\arcsin(x-y)$.
1.3 $z=\sqrt{y^2-x^2}$.	1.4 $z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$.
1.5 $z=\dfrac{2}{\left(6-x^2-y^2\right)}$	1.6 $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$.
1.7 $z=\cos^{-1}(x+y)$.	1.8 $z=3x+\dfrac{y}{(2-x+y)}$.
1.9 $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$	1.10 $z=\ln\left(x^2+y^2-3\right)$.
1.11 $z=\sqrt{2x^2-y^2}$.	1.12 $z=4xy/(x-3y+1)$.
1.13 $z=\sqrt{xy}\Big/\left(x^2+y^2\right)$.	1.14 $z=\sin^{-1}(x/y)$.
1.15 $z=\ln\left(y^2-x^2\right)$	1.16 $z=x^3y/(3+x-y)$
1.17 $z=\cos^{-1}(x+2y)$.	1.18 $z=\sin^{-1}(2x-y)$.
1.19 $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$.	1.20 $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$.
1.21 $z=1\Big/\sqrt{x^2+y^2-5}$.	1.22 $z=4x+y/(2x-5y)$.
1.23 $z=\sqrt{3x-2y}\Big/\left(x^2+y^2+4\right)$	1.24 $z=5\Big/\left(4-x^2-y^2\right)$.
1.25 $z=\ln(2x-y)$.	1.26 $z=7x^3y/(x-4y)$.
1.27 $z=\sqrt{1-x-y}$.	1.28 $z=e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.
1.29 $z=1\Big/\left(x^2+y^2-6\right)$	1.30 $z=4xy\Big/\left(x^2-y^2\right)$.

2. Знайти частинні похідні і частинні диференціали наступних функцій

2.1 $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$.	2.2 $z=\arcsin\sqrt{xy}$.
2.3 $z=\tan^{-1}\left(x^2+y^2\right)$	2.4 $z=\cos\left(x^3-2xy\right)$.
2.5 $z=\sin\sqrt{y/x^3}$.	2.6 $z=\tan\left(x^3+y^2\right)$.
2.7 $z=\cot\sqrt{xy^3}$	2.8 $z=e^{-x^2+y^2}$.
2.9 $z=\ln\left(3x^2-y^4\right)$.	2.10 $z=\cos^{-1}(y/x)$.
2.11 $z=\cot^{-1}\left(xy^2\right)$.	2.12 $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$.
2.13 $z=\sin\sqrt{x-y^3}$.	2.14 $z=\tan\left(x^3y^4\right)$.
2.15 $z=\cot(3x-2y)$.	2.16 $z=e^{2x^2-y}$
2.17 $z=\ln\left(\sqrt{xy}-1\right)$.	2.18 $z=\sin^{-1}\left(2x^3y\right)$.
2.19 $z=\tan^{-1}\left(x^2/y^3\right)$.	2.20 $z=\cos\left(x-\sqrt{xy^3}\right)$.
2.21 $z=\sin\dfrac{x+y}{x-y}$.	2.22 $z=\tan\dfrac{2x-y^2}{x}$
2.23 $z=\cot\sqrt{x/(x-y)}$.	2.24 $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.
2.25 $z=\ln\left(3x^2-y^2\right)$	2.26 $z=\cos^{-1}\left(x-y^2\right)$.

2.27 $z=\tan^{-1}\dfrac{x^3}{y}$.	2.28 $z=\cos\dfrac{x-y}{x+y}$.
2.29 $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$.	2.30 $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

3. Обчислити значення частинних похідних $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ даної функції $f(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

3.1 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0(0,-1,1)$.	3.2 $f(x,y,z)=\ln\left(x+\dfrac{y}{2z}\right)$, $M_0(1,2,1)$.
3.3 $f(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{6},1,2\right)$.	3.4 $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+2y^3-z^3\right)$, $M_0(2,1,0)$.
3.5 $f(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$, $M_0(1,0,1)$.	3.6 $f(x,y,z)=\ln\cos\left(x^2y^2+z\right)$, $M_0\left(0,0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.
3.7 $f(x,y,z)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$, $M_0(3,4,2)$.	3.8 $f(x,y,z)=\tan^{-1}\left(xy^2+z\right)$, $M_0(2,1,0)$.
3.9 $f(x,y,z)=\sin^{-1}\left(x^2/y-z\right)$, $M_0(2,5,0)$.	3.10 $f(x,y,z)=\sqrt{z}\sin(y/x)$, $M_0(2,0,4)$.
3.11 $f(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}$, $M_0(-1,1,0)$.	3.12 $f(x,y,z)=\tan^{-1}\left(xz/y^2\right)$, $M_0(2,1,1)$.
3.13 $f(x,y,z)=\ln\sin(x-2y+\dfrac{z}{4})$, $M_0(1,1/2,\pi)$.	3.14 $f(x,y,z)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$, $M_0(1,1,2)$.
3.15 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$, $M_0(1,2,2)$.	3.16 $f(x,y,z)=\ln\left(x+y^2\right)-xz$, $M_0(5,2,3)$.
3.17 $f(x,y,z)=x^y\cdot\sqrt{z}$, $M_0(1,2,4)$.	3.18 $f(x,y,z)=-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_0\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.
3.19 $f(x,y,z)=\ln\left(x^3+\sqrt[3]{y}-z\right)$, $M_0(2,1,8)$.	3.20 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^4+y^2}$, $M_0(2,3,25)$.

3.21 $f(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z}$, $M_0(3,2,1)$.	3.22 $f(x,y,z)=\ln\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z\right)$, $M_0(1,1,1)$.
3.23 $f(x,y,z)=-\dfrac{2x}{\sqrt{z^2+y^2}}$, $M_0(3,0,1)$.	3.24 $f(x,y,z)=ze^{-\left(x^2+y^2\right)/2}$, $M_0(0,0,1)$.
3.25 $f(x,y,z)=\dfrac{\sin(x-y)}{z}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$.	3.26 $f(x,y,z)=\sqrt{z}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$ $M_0(4,1,4)$.
3.27 $f(x,y,z)=\dfrac{xz}{x-y}$, $M_0(4,1,4)$.	3.28 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}$ $M_0\left(3,4,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3.29 $f(x,y,z)=z^{-xy}$, $M_0(0,1,1)$.	3.30 $f(x,y,z)=\sin^{-1}\left(x\sqrt{y}\right)-yz^2$, $M_0(0,4,1)$.

4. Знайти повний диференціал даних функцій

4.1 $z=2x^3y-4xy^5$	4.2 $z=x^2y\sin x-3y$
4.3 $z=\tan^{-1}x+\sqrt{y}$	4.4 $z=\sin^{-1}(xy)-3xy^2$
4.5 $z=5xy^4+2x^2y^7$	4.6 $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$
4.7 $z=\ln(3x^2-2y^2)$	4.8 $z=5xy^2-3x^3y^4$
4.9 $z=\sin^{-1}(x+y)$	4.10 $z=\tan^{-1}(2x-y)$
4.11 $z=7x^3y-\sqrt{xy}$	4.12 $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$
4.13 $z=e^{x+y-4}$	4.14 $z=\cos(3x+y)-x^2$
4.15 $z=\tan\left((x+y)/(x-y)\right)$	4.16 $z=\cot\left(y/x\right)$
4.17 $z=xy^4-3x^2y+1$	4.18 $z=\ln(x+xy-y^2)$
4.19 $z=2x^2y^2+x^3-y^3$	4.20 $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}$
4.21 $z=\sin^{-1}\left((x+y)/x\right)$	4.22 $z=\tan^{-1}(x-y)$
4.23 $z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$	4.24 $z=y^2-3xy-x^4$
4.25 $z=\cos^{-1}(x+y)$	4.26 $z=\ln(y^2-x^2+3)$
4.27 $z=2-x^3-y^3+5x$	4.28 $z=7x-x^3y^2+y^4$
4.29 $z=e^{y-x}$	4.30 $z=\tan^{-1}(2x-y)$

5. Обчислити величину похідної складеної функції $u(x,y)$ в точці $t=t_0$, де $x=x(t)$, $y=y(t)$

5.1 $u=e^{x-2y}$, $x(t)=\sin t$, $y=t^3$, $t_0=0$
5.2 $u=\ln\left(e^x+e^{-y}\right)$, $x(t)=t^2$, $y=t^3$, $t_0=-1$
5.3 $u=y^x$, $x(t)=\ln(t-1)$, $y=e^{t/2}$, $t_0=2$

5.4 $u = e^{y-2x+2}$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi/2$
5.5 $u = x^2 e^y$, $x(t) = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi$
5.6 $u = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $x(t) = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = 1$
5.7 $u = x^y$, $x(t) = e^t$, $y = \ln t$, $t_0 = 1$
5.8 $u = e^{y-2x}$, $x(t) = \sin t$, $y = t^3$, $t_0 = 0$
5.9 $u = x^2 e^{-y}$, $x(t) = \sin t$, $y = \sin^2 t$, $t_0 = \pi/2$
5.10 $u = \ln\left(e^{-x} + e^y\right)$, $x(t) = t^2$, $y = t^3$, $t_0 = -1$
5.11 $u = e^{y-2x-1}$, $x(t) = \cos t$, $y = \sin t$, $t_0 = \pi/2$
5.12 $u = \sin^{-1}\left(x/y\right)$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$
5.13 $u = \cos^{-1}\left(2x/y\right)$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$
5.14 $u = x^2/(y+1)$, $x(t) = 1-2t$, $y = \tan^{-1} t$, $t_0 = 0$
5.15 $u = x/y$, $x(t) = e^t$, $y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$
5.16 $u = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right)$, $x(t) = t^2$, $y = t^3/3$, $t_0 = 1$
5.17 $u = \sqrt{x + y^2 + 3}$, $x(t) = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$
5.18 $u = \sin^{-1}\left(x^2/y\right)$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$
5.19 $u = y^2/x$, $x(t) = 1-2t$, $y = 1 + \tan^{-1} t$, $t_0 = 0$
5.20 $= \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$
5.21 $u = \sqrt{x^2 + y + 3}$, $x(t) = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$
5.22 $u = \sin^{-1}\left(x/2y\right)$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$
5.23 $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $x(t) = \sin 2t$, $y = \tan^2 t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$
5.24 $u = \sqrt{x + y + 3}$, $x(t) = \ln t$, $y = t^2$, $t_0 = 1$
5.25 $u = \left(y/x\right)$, $x(t) = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$, $t_0 = 0$
5.26 $u = \sin^{-1}\left(2x/y\right)$, $x(t) = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$
5.27 $u = \ln\left(e^{2x} + e^y\right)$, $x(t) = t^2$, $y = t^4$, $t_0 = 1$
5.28 $u = \tan^{-1}(x+y)$, $x(t) = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_0 = 1$
5.29 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, $x(t) = \ln t$, $y = t^3$, $t_0 = 1$
5.30 $u = \tan^{-1}(x\,y)$, $x(t) = t + 3$, $y = e^t$, $t_0 = 0$

6. Обчислити величину частинних похідних функції $z = z(x, y)$ в даній точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задана неявно.

6.1	$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 4$, $M_0(2, 1, 1)$
6.2	$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, $M_0(-1, 0, 1)$
6.3	$3x - 2y + z = xz + 5$, $M_0(2, 1, -1)$
6.4	$e^z + x + 2y + z = 4$, $M_0(1, 1, 0)$
6.5	$x^2 + y^2 + z^2 - z = 4$, $M_0(1, 1, -1)$

6.6	$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 3/2$, $\quad M_0(\pi/4, \pi/4, \pi/4)$
6.7	$e^{z-1} = \cos x \cdot \cos y + 1$, $\quad M_0(0, \pi/2, 1)$
6.8	$z^3 + 3xyz + 3z = 7$, $\quad M_0(1,1,1)$
6.9	$xy = z^2 - 1$, $\quad M_0(0,1,-1)$
6.10	$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2$, $\quad M_0(1,1,1)$
6.11	$x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$, $\quad M_0(1,2,1)$
6.12	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$, $\quad M_0(0,2,1)$
6.13	$z\cos x + x\cos y + y\cos z = \pi/2$, $\quad M_0(0, \pi/2, \pi)$
6.14	$2x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$, $\quad M_0(2,1,2)$
6.15	$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$, $\quad M_0(1,1,1)$
6.16	$x + y + z + 2 = xyz$, $\quad M_0(2,-1,-1)$
6.17	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$, $\quad M_0(0,1,-1)$
6.18	$e^z - xyz - x + 1 = 0$, $\quad M_0(2,1,0)$
6.19	$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0$, $\quad M_0(1,-1,2)$
6.20	$x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$, $\quad M_0(0,-2,2)$
6.21	$x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$, $\quad M_0(1,2,0)$
6.22	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - x - 3y - z = 0$, $\quad M_0(1,-1,1)$
6.23	$x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$, $\quad M_0(0,1,-1)$
6.24	$\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$, $\quad M_0(4,3,1)$
6.25	$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$, $\quad M_0(3,1,4)$
6.26	$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$, $\quad M_0(-2,-1,2)$
6.27	$x^3 - z^3 + 3xyz = 27$, $\quad M_0(3,1,3)$
6.28	$\ln z = x + 2y - z + \ln 3$, $\quad M_0(1,1,3)$
6.29	$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$, $\quad M_0(2,1,1)$
6.30	$z^2 = xy - z + x^2 - 4$, $\quad M_0(2,1,1)$

7. Задана функція $u(M) = u(x, y, z)$ і точки M_1 і M_2. Обчислити: (1) похідну функції в точці M_1 у напрямку вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; (2) grad $u(M_1)$

7.1 $\quad u(M) = x^2y + y^2z + z^2x$,	$M_1(1,-1,2)$, $\quad M_2(3,4,-1)$
6.2 $\quad u(M) = 5xz^2y^3x$,	$M_1(2,1,-1)$, $\quad M_2(4,3,0)$
7.3 $\quad u(M) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$,	$M_1(-1,2,1)$, $\quad M_2(3,1,-1)$
7.4 $\quad u(M) = z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}$,	$M_1(0,0,0)$, $\quad M_2(3,-4,2)$
7.5 $\quad u(M) = \ln(xy + yz + zx)$,	$M_1(-2,3,-1)$, $\quad M_2(2,1,-3)$
7.6 $\quad u(M) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$,	$M_1(1,1,1)$, $\quad M_2(3,2,1)$
7.7 $\quad u(M) = x^2y + xz^2 - 2$,	$M_1(1,1,-1)$, $\quad M_2(2,-1,3)$
7.8 $\quad u(M) = xe^y + ye^x - z^2$,	$M_1(3,0,2)$, $\quad M_2(4,1,3)$
7.9 $\quad u(M) = 3xy^2 + z^2 - xyz$,	$M_1(1,1,2)$, $\quad M_2(3,-1,4)$
7.10 $\quad u(M) = 5x^2yz - xy^2z + yz^2$,	$M_1(1,1,1)$, $\quad M_2(9,-3,9)$
7.11 $\quad u(M) = x/(x^2 + y^2 + z^2)$,	$M_1(1,2,2)$, $\quad M_2(-3,2,-1)$

7.12 $u(M)=y^2z-2xyz+z^2,$	$M_1(3,1,-1),\quad M_2(-2,1,4)$
7.13 $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz,$	$M_1(1,-1,2),\quad M_2(5,-1,4)$
7.14 $u(M)=\ln(1+x+y^2+z^2),$	$M_1(1,1,1),\quad M_2(3,-5,1)$
7.15 $u(M)=x^2+2y^2-4z^2-5,$	$M_1(1,2,1),\quad M_2(-3,-2,6)$
7.16 $u(M)=\ln(x^2+y^2+z+1),$	$M_1(1,-1,2),\quad M_2(-4,1,3)$
7.17 $u(M)=x-2y+e^z,$	$M_1(-4,-5,0),\quad M_2(2,3,4)$
7.18 $u(M)=x^y-3xyz,$	$M_1(2,2,-4),\quad M_2(1,0,-3)$
7.19 $u(M)=3x^2yz^3,$	$M_1(-2,-3,1),\quad M_2(5,-2,0)$
7.20 $u(M)=e^{xy+z^2},$	$M_1(-5,0,2),\quad M_2(2,4,-3)$
7.21 $u(M)=x^{yz},$	$M_1(3,1,4),\quad M_2(1,-1,-1)$
7.22 $u(M)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^3,$	$M_1(1,2,-1),\quad M_2(0,-1,3)$
7.23 $u(M)=\left(x-y\right)^z,$	$M_1(1,5,0),\quad M_2(3,7,-2)$
7.24 $u(M)=x^2y+y^2z-3z,$	$M_1(1,-2,-1),\quad M_2(12,-5,0)$
7.25 $u(M)=10/(x^2+y^2+z^2+1),$	$M_1(-1,2,-2),\quad M_2(2,0,1)$
7.26 $u(M)=\ln(1+x^2-y^2+z^2),$	$M_1(1,1,1),\quad M_2(5,-4,8)$
7.27 $u(M)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x},$	$M_1(-1,1,1),\quad M_2(2,3,4)$
7.28 $u(M)=x^3y+xy^2-6xyz,$	$M_1(1,3,-5),\quad M_2(4,2,-2)$
7.29 $u(M)=\frac{x}{y}-\frac{y}{z}-\frac{x}{z},$	$M_1(2,2,2),\quad M_2(-3,4,1)$
8.30 $u(M)=e^{x-yz}-3xyz,$	$M_1(1,0,3),\quad M_2(2,-4,5)$

Розв'язок типового варіанту

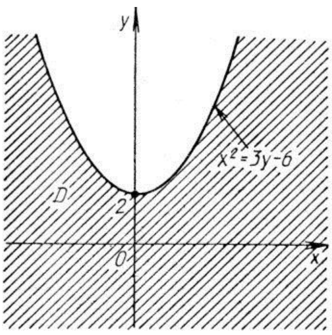

Рис. 1*

1. *Знайти область визначення функції* $z=\ln\left(x^2-3x+6\right)$.

► Логарифмічна функція визначена для додатних значень аргументу, тому $x^2-3y+6>0$, або $3y<x^2+6$. Отже, межа області буде лінія $x^2=3y+6$, тобто, парабола. Областю визначення даної функції є всі точки які лежать нижче межі (дуги параболи). (Рис. 1*). ◄

2. *Знайти частинні похідні і частинні диференціали функції* $z=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$.

► Перш за все знайдемо частинні похідні користуючись правилом диференціювання складної функції однієї змінної:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\left(x^2+5y^2\right)\right)^{-2/3}\cdot 2x\Bigg)=$$

$$=-\frac{2xe^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{\left(x^2+5y^2\right)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\left(x^2+5y^2\right)\right)^{-2/3}\cdot 10y\Bigg)=$$

$$=-\frac{10ye^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{\left(x^2+5y^2\right)^2}}.$$

Тепер ми можемо знайти частинні диференціали

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx=-\frac{2xe^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{\left(x^2+5y^2\right)^2}}\ dx$$

$$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{10ye^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}}{3\sqrt[3]{\left(x^2+5y^2\right)^2}}\ dy. \blacktriangleleft$$

3. *Обчислити значення частинних похідних* $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}$ *функції* $f(x,y,z)=\sqrt{xy}\cos z$ *в точці* $M_0(1,1,\pi/3)$.

$$\blacktriangleright\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{xy}}\cos z,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,\pi/3)}=0.25,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{xy}}\cos z,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1,\pi/3)}=0.25,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\sqrt{xy}\cdot\sin z,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,1,\pi/3)}=-0.86. \blacktriangleleft$$

4. *Знайти повний диференціал функції* $z=\tan^{-1}\sqrt{x/y}$.

$$\blacktriangleright\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x/y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{y/x}}{2(x+y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+x/y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{\sqrt{x/y}}{2(x+y)}$$

Використовуючи формулу повного диференціала, маємо

$$dz=\frac{\sqrt{y/x}}{2(x+y)}dx-\frac{\sqrt{x/y}}{2(x+y)}dy. \blacktriangleleft$$

5. *Обчислити повний диференціал складеної функції*

$z=\cos^{-1}\left(x^2/y\right)$, *де* $x=1+\ln t$, $y=-2e^{-t^2+1}$, *якщо* $t_0=1$.

► Користуючись формулою похідної складеної функції, ми маємо

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^4/y^2}}\cdot\frac{2x}{y}\cdot\frac{1}{t}-=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-x^4/y^2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(-2e^{-t^2+1}\right)\left(-2t\right).$$

Якщо $t_0=1$ *тоді* $x=1$, $y=-2$ ми дістанемо

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0=1}=\frac{4}{\sqrt{3}}. \blacktriangleleft$$

6. *Обчислити значення частинної похідної функції* $z=z(x,y)$, *яка задана неявно рівнянням* $4x^3-3y^3+2xyz-4xz=3-z^2$, *в точці* $M_0(0,1,-1)$.

► В цьому випадку

$F(x,y,z)=4x^3-3y^3+2xyz-4xz+z^2-3$, тому

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 12x^2 + 2yz - 4z\,,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 9y^2 + 2xz\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2xy - 4x + 2z$$

Відповідно, користуючись відповідними формулами, ми дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}\,.$$

Обчислимо значення $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ в точці $M_0(0,1,-1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(0,1,-1)} = 1, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(0,1,-1)} = -4.5\,. ◄$$

7. *Дана функція* $u(M) = \sqrt{x}/z - \sqrt{y}/x + 2xyz$ *і точки* $M_1(1,1,-1)$ *і* $M_2(-2,-1,1)$. *Обчислити: 1)похідну функції* $u(M) = u(x,y,z)$ *в точці* M_1 *у напрямку вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$*;* *2)* $grad(u(M_1))$.

► Обчислимо похідну функції $u(M) = u(x,y,z)$ в точці M_1 у напрямку вектора $\vec{\tau} = \overrightarrow{M_1M_2} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}\right|_{M_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\cos\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\sqrt{x}}{z^2} + 2xy\,, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = 1\,.$$

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{17}}\,,\ \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}\,,\ \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{17}}\,,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}\right|_{M_1} = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}}\,.$$

2) За означенням градієнта скалярного поля, дістанемо

$$grad\,u(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\vec{k} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j} + \vec{k}\,. ◄$$

Індивідуальні домашні завдання - 1.2

1. *Знайти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до даної поверхні* S *в точці* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1.1	$S\colon x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2,\ \ 1,\ \ -1).$
1.2	$S\colon x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy, \quad M_0(-2,\ \ 1,\ \ 2).$
1.3	$S\colon x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7, \quad M_0(1,\ \ 2,\ \ 1).$
1.4	$S\colon x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8, \quad M_0(-1,\ \ 1,\ \ 2).$

1.1	$S: x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0, \quad M_0(2, \quad 1, \quad -1).$
1.5	$S: 2x^2-y^2+z^2-4z+y=13, \quad M_0(2, \quad 1, \quad -1).$
1.6	$S: x^2+y^2+z^2-6y+4z=-4, \quad M_0(2, \quad 1, \quad -1).$
1.7	$S: x^2+z^2-5yz+3y=46, \quad M_0(1, \quad 2, \quad -3).$
1.8	$S: x^2+y^2-xz-yz=0, \quad M_0(0, \quad 2, \quad 2).$
1.9	$S: x^2+y^2-z^2+2yz+y-2z=2, \quad M_0(1,1,1).$
1.10	$S: x^2+y^2-z^2-2xz+2x=z, \quad M_0(1, \quad 1, \quad 1).$
1.11	$S: z=x^2+y^2-2xy+2x-y, \quad M_0(-1, \quad -1, \quad -1).$
1.12	$S: z=y^2-x^2+2xy-3y, \quad M_0(1, \quad -1, \quad 1).$
1.13	$S: z=x^2-y^2-2xy-x-2y, \quad M_0(-1, \quad 1, \quad 1).$
1.14	$S: x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13, \quad M_0(3, \quad 1, \quad 2).$
1.15	$S: z=x^2+y^2-3xy-x+y+2, \quad M_0(2,1,0).$
1.16	$S: 4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9, \quad M_0(1,-2,1).$
1.17	$S: 2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3, \quad M_0(1,2,1).$
1.18	$S: x^2-y^2+z^2-4x+2y=14, \quad M_0(3,1,4).$
1.19	$S: x^2+y^2-z^2+xz+4y=4, \quad M_0(1,1,2).$
1.20	$S: x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5, \quad M_0(-2,1,0).$
1.21	$S: x^2+y^2-xz+yz-3x=11, \quad M_0(1,4,-1).$
1.22	$S: x^2+2y^2+z^2-4xz=8, \quad M_0(0,2,0).$
1.23	$S: x^2-y^2-2z^2-2y=0, \quad M_0(-1,-1,1).$
1.24	$S: x^2+y^2-3z^2+xy=-2z, \quad M_0(1,0,1).$
1.25	$S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0, \quad M_0(1,-1,1).$
1.26	$S: x^2+y^2-z^2+6xy-z=8, \quad M_0(1,1,0).$
1.27	$S: z=2x^2-3y^2+4x-2y+10, \quad M_0(-1,1,3).$
1.28	$S: z=x^2+y^2-4xy+3x-15, \quad M_0(-1,3,4).$
1.29	$S: z=x^2+2y^2+4xy-5y-10, \quad M_0(-7,1,8).$
1.30	$S: z=2x^2-3y^2+xy+3x+1, \quad M_0(1,-1,2).$

2. *Знайти другі похідні даних функцій. Впевнитись, що*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

2.1	$z=e^{x^2-y^2}.$	2.2	$z=\cot(x+y).$
2.3	$z=\tan(x/y).$	2.4	$z=\cos(xy^2).$
2.5	$z=\sin(x^2-y).$	2.6	$z=\tan^{-1}(x+y).$
2.7	$z=\sin^{-1}(x-y).$	2.8	$z=\cos^{-1}(2x+y)$

2.9 $z=\cot^{-1}(x-3y)$.	2.10 $z=\ln\left(3x^2-2y^2\right)$.
2.11 $z=e^{2x^2+y^2}$.	2.12 $z=\cot(y/x)$.
2.13 $z=\tan\sqrt{xy}$.	2.14 $z=\cos\left(x^2y^2-5\right)$.
2.15 $z=\sin\sqrt{x^3y}$	2.16 $z=\sin^{-1}(x-2y)$.
2.17 $z=\cos^{-1}(4x-y)$.	2.18 $z=\tan^{-1}(5x+2y)$.
2.19 $z=\tan^{-1}(2x-y)$.	2.20 $z=\ln\left(4x^2-5y^3\right)$.
2.21 $z=e^{\sqrt{x+y}}$.	2.22 $z=\sin^{-1}(4x+y)$
2.23 $z=\cos^{-1}(x-5y)$.	2.24 $z=\sin\sqrt{xy}$.
2.25 $z=\cos\left(3x^2-y^3\right)$	2.26 $z=\arctan(3x+2y)$.
2.27 $z=\ln\left(5x^2-3y^4\right)$.	2.28 $z=\arctan(x-4y)$.
2.29 $z=\ln(3xy-4)$.	2.30 $z=\tan\left(xy^2\right)$.

3. *Перевірити, чи дана функція* $u(x,y)$ *задовольняє даному рівнянню чи ні?*

3.1	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=\frac{y}{x}.$
3.2	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3\left(x^3-y^3\right), \quad u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y^3.$
3.3	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right).$
3.4	$y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u=x^y.$
3.5	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u, \quad u=\frac{xy}{x+y}.$
3.6	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=e^{xy}.$
3.7	$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=\sin^2(x-ay).$
3.8	$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=y\sqrt{\frac{y}{x}}.$
3.9	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$
3.10	$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u=e^{-\cos(x+ay)}.$
3.11	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0, \quad u=(x-y)(y-z)(z-x).$
3.12	$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u, \quad u=x\ln\frac{y}{x}.$

3.13	$y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad u=\ln(x^2+y^2).$
3.14	$x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0, \quad u=\dfrac{y^2}{3x}+\sin^{-1}(xy).$
3.15	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0, \quad u=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}.$
3.16	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=e^{xy}.$
3.17	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right).$
3.18	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0, \quad u=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}.$
3.19	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1, \quad u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$
3.20	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u, \quad u=\left(x^2+y^2\right)\tan\dfrac{x}{y}.$
3.21	$9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=e^{-(x+3y)}\sin\left(x+3y\right).$
3.22	$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=xe^{y/x}.$
3.23	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}.$
3.24	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad u=\tan^{-1}\dfrac{x}{y}.$
3.25	$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \quad u=\sin^{-1}\dfrac{x}{x+y}.$
3.26	$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad u=\ln\left(x+e^{-y}\right).$
3.27	$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y^2}, \quad u=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}.$
3.28	$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x+y}{x-y}, \quad u=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}.$
3.29	$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{u}, \quad u=\sqrt{2xy+y^2}.$
3.30	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad u=\ln\left(x^2-y^2\right).$

4. *Дослідити на максимум і мінімум наступні функції*

4.1	$z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$
4.2	$z=x^3+8y^3-6xy+5.$
4.3	$z=1+15x-2x^2-xy-2y^2.$
4.4	$z=1+6x-x^2-xy-y^2$

4.5	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$
4.6	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$
4.7	$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$
4.8	$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$
4.9	$z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$
4.10	$z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$
4.11	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$
4.12	$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$
4.13	$z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$
4.14	$z = x^3 + y^3 - 3xy.$
4.15	$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$
4.16	$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$
4.17	$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$
4.18	$z = xy(12 - x - y).$
4.19	$z = xy - x^2 - y^2 + 9.$
4.20	$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
4.21	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$
4.22	$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$
4.23	$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$
4.24	$z = xy(6 - x - y).$
4.25	$z = x^2 - xy + y^2 + x + y.$
4.26	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
4.27	$z = (x-1)^2 + 2y^2.$
4.28	$z = xy - 3x^2 - 2y^2.$
4.29	$z = x^2 + 3(y+2)^2.$
4.30	$z = 2(x + y) - x^2 - y^2.$

5. *Знайти найбільше і найменше функції $z = z(x, y)$ в області $\overline{D}$ яка обмежена даними лініями*

5.1 $z = 3x + y - xy, \quad \overline{D}: \quad y = x, \quad y = 4, \quad x = 0.$

5.2 $z = xy - x - 2y, \quad \overline{D}: \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 3.$

5.3 $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad \overline{D}: \quad y = 0, \quad y = 2, \quad x = 1, x = 0.$

5.4 $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad \overline{D}: y = 0, y = 1, x = 1, x = 0.$

5.5 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \quad x - y + 1 = 0, \quad y = 0, \quad x = 3,.$

5.6 $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad \overline{D}: \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad x = 0.$

5.7 $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad \overline{D}: \quad x = 1, \quad y = 6, \quad y = 0, \quad x = 0.$

5.8 $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad \overline{D}: \quad x = 1, \quad y = 1, \quad y = 0, \quad x = 0.$

5.9 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad \overline{D}: y = 0, x + y - 3 = 0, x = 0.$

5.10 $z = x^2 + 2xy - 10, \quad \overline{D}: \quad y = 0, \quad y = x^2 - 4.$

5.11 $z = xy - 2x - y, \quad \overline{D}: \quad x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4.$

5.12 $z = \frac{1}{2}x^2 - xy, \quad \overline{D}: \quad y = 8, \quad y = 2x^2.$

5.13 $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \overline{D}: y = 0, \ x + y - 1 = 0, x = 0.$

5.14 $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad \overline{D}: \quad y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}, \quad y = 0.$

5.15 $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad \overline{D}: \quad x + y + 1 = 0, \quad y = 0, x = -3,.$

5.16 $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad \overline{D}: \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0, x = 5.$

5.17 $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, \quad \overline{D}: \quad x = 0, \ y = 2, \quad y = 0, x = 2,.$

5.18 $z = xy - 3x - 2y, \quad \overline{D}: \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = 4.$

5.19 $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \quad x = 0, \ y = 2, \quad y = 2x.$

5.20 $z = x^2 + xy - 2, \quad \overline{D}: \quad y = 4x^2 - 4, \quad y = 0.$

5,21 $z = x^2y(4 - x - y), \quad \overline{D}: \quad y = 0, \quad x + y - 6 = 0, x = 0.$

5.22 $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \overline{D}: \quad y = 2, \quad x = 0 \quad y = -1, x = 2.$

5.23 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad \overline{D}: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$

5.24 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad \overline{D}: \quad y = x + 1, \quad y = 0, x = 3,.$

5.25 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad \overline{D}: \quad x = 1, y = 2, y = 0, x = 0.$

5.26 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad \overline{D}: \quad y = x + 2, \quad y = 0, x = 2,.$

5.27 $z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad \overline{D}: \quad y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = 0.$

5.28 $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad \overline{D}: \quad y = -1, \quad y = 1, x = 1, x = -1.$

5.29 $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad \overline{D}: \quad y + x + 2 = 0, x = 0 \quad y = 0.$

5.30 $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad \overline{D}: \quad y = 0, \quad x = 0 \quad x + y = 6.$

Розв'язок типового варіанту

1. *Записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні* $S: z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ *в точці* $M_0(-1, 0, 1)$.

► Тут $u(x,u,z) = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4 - z$. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y - 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 3x + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -1$$

Тепер знайдемо значення похідних в точці M_0

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = -6 \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -1 \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -1$$

Користуючись формулою дотичної площини, тобто

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}(z - z_0) = 0$$

і нормалі

$$\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{(z-z_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}}$$

Ми дістанемо рівняння дотичної площини

$$-6(x+1)-(y-0)-(x-1)=0 \text{ або } 6x+y+z+5=0$$

Рівняння нормалі можна записати у наступній формі

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{1}=\frac{x-1}{1}$$

В параметричній формі воно набуває наступного виду $x=-1+6t, \quad y=t, \quad z=-1+t$. ◄

2. *Знайти другі частинні похідні функції* $z=\cos^{-1}\sqrt{x/y}$ *і впевніться ,що* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

► Перш за все знайдемо перші частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-x/y}`}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x/y}`}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x/y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}.$$

Після диференціювання кожну з цих похідних за змінними x і y ми дістанемо другі похідні даної функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y-x}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{2x(y-x)}=\frac{y=2x}{4x\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-y)^{3/3}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x}+y\big/\left(2\sqrt{y-x}\right)}{y^2(y-x)}\right)=-\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{2y}\cdot\frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x}=\frac{1}{4y\sqrt{x}(y-x)\sqrt{y-x}}.$$

Отже, ми бачимо, що змішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ рівні. ◄

3. *Перевірити, чи функція* $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$ *задовольняє рівнянню*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{4y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

чи ні?

► Знайдемо частинні похідні першого і другого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Якщо підставити ці вирази похідних у ліву частину даного рівняння, дістанемо

$$\frac{2(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+2xy\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

У правій частині рівняння ми маємо

$$\frac{4y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{8xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Результати які ми дістали, приводять нас до висновку, що дана функція не задовольняє даному рівнянню. ◄

4. *Дослідити на локальний екстремум функцію* $z=xy(x+y-2)$.

► Знайдемо перші частинні похідні даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y^2-2y;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2xy-2x.$$

Прирівнюючи нулю, ми дістанемо систему

$$\begin{cases} y(2x+y-2)=0, \\ x(x+2y-2)=0. \end{cases}$$

З цих рівнянь дістанемо критичні точки даної функції:

$$M_1(0,0),\quad M_2(2,0),\quad M_3(0,2),\quad M_4\left(2/3,2/3\right).$$

Застосовуючи відповідну теорему, про достатні умови існування екстремуму, ми впевнимося які з цих точок є точки екстремуму. Для цього, ми перш за все, дістанемо другі частинні похідні даної функції

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-2y-2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x.$$

Підставляючи в ці вирази координати цих критичних точок і приймаючи до уваги достатні умови існування екстремуму, ми маємо: в точці M_1 $\Delta=-4<0$, отже ця точка не є точкою екстремуму; в точці M_2 $\Delta=-4<0$, ця точка також не є точкою екстремуму; в точці M_3 $\Delta=-4<0$ і ця точка не задовольняє умовам існування екстремуму; в точці M_4 $\Delta=\frac{12}{9}>0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{3}>0.$ Отже, ця точка є точка мінімуму даної функції, тобто

$$z_{\min}=z\left(2/3,2/3\right)=-8/27.$$ ◄

4. *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z=xy-y^2+3x+4y$ *в області* $\overline{D}$ *яка обмежена лініями* $x=0,\ y=0,\ x+y-1=0$.(Рис. 2*)

► Знайдемо критичні точки функції $z=xy-y^2+3x+4y$ в середині області $\overline{D}$. Для цього утворимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=y+3=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-2y+4=0. \end{cases}$$

Розв'язок систему дає критичну $M(-10,-3)$. Ця точка лежить у зовнішності області. Отже, цю точку не будемо розглядати при розв'язанні задачі.

Тепер знайдемо найбільше і найменше значення функції на границі області $\overline{D}$. На стороні OA $(y=0;\ 0\le x\le 1)$ трикутника OAB функція z прийме вид $z=3x$. Отже, критичних точок на цій стороні немає так як $z'=3$. В точках O

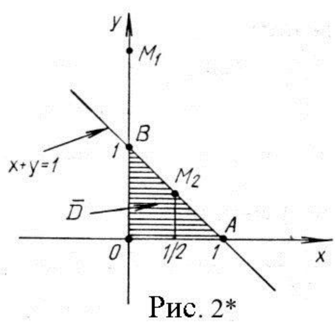

Рис. 2*

і A відповідно маємо $z(0,0)=0$ і $z(1,0)=3$. На стороні OB $(x=0, 0\le y\le 1)$ трикутника функція має вид $z=-y^2+4y$, тоді $z'=-2y+4$. Критична точка на цій стороні буде $y=2$. Тому, точка $M_1(0,2)$ не належить області $\overline{D}$. Значення функції в точці B наступне $z(0,1)=3$. Тепер знайдемо най менше і найбільше значення функції на стороні $x+y=1$. Тут $y=1-x,$ $z=-2x^2+2x+3,$ тоді $z'=-4x+2$ за необхідними умовами маємо $x=1/2$, тобто, критична точка $M_2(1/2,1/2)$ належить границі області $\overline{D}$. Величина функції в цій точці є $z(1/2,1/2)=3.5$. Порівнюючи всі значення функції які ми дістали приходимо до висновку, що

$z_{найбільше}=z(1/2,1/2)=3{,}5$, $z_{найменьше}=z(0,0)=0$. ◄

Частина II. Кратні інтеграли

§ 1. *Поняття подвійного інтеграла*

Поняття визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

пов'язане з такими задачами, як обчислення пройденого шляху при заданій швидкості, знаходження площі криволінійної трапеції і та. інш. Існують багато задач з аналогічними назвами, але відносяться до функцій не однієї, а декількох, скажімо двох, незалежних змінних. Типова задача такого роду є знаходження об'єму криволінійного циліндра (трьохвимірний аналог криволінійної трапеції)

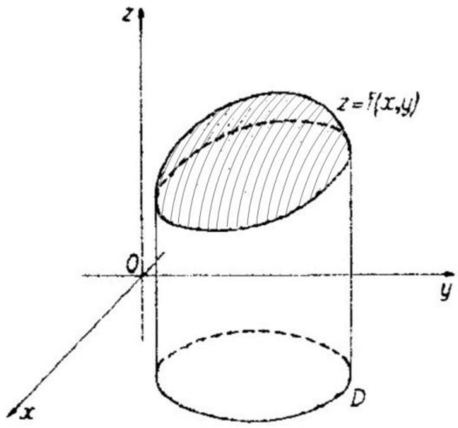

Рис. 1

Під криволінійним циліндром з основою D, яка лежить у площині xy, вважають тіло яке обмежене цією основою, деякою поверхньою $f(x, y)$ і боковою циліндричною поверхнею паралельно вісі z (Рис1.). *Область D є основою циліндричного тіла і є ортогональною проекцією на площину xy поверхні, яка обмежена циліндричним тілом.*

Для обчислення об'єму будемо дотримуватись таких принципів:

1^0) *якщо розбити об'єм на частини, тоді її об'єм буде дорівнюватись сумі об'ємів складених частин (адитивність);*

2^0) *об'єм прямого циліндра, обмеженого площиною $z = const$ паралельно площині xy, дорівнює добутку площі основи на висоту тіла.*

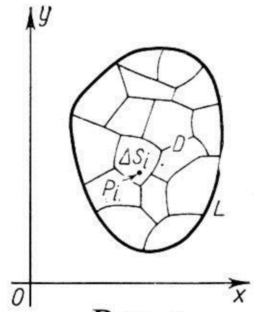

Рис. 2

На площині xy розглянемо замкнену область D, яка обмежена лінією L (Рис.2). Нехай в області D задана неперервна функція

$$z = f(x, y).$$

Використовуючи довільні лінії, поділимо область D на n частин $s_1, s_2, ..., s_n$, які назвемо підобластями і позначимо через $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$ їх площини. В кожній підобласті s_i виберемо точку P_i і отримаємо n точок

$$P_1, P_2, ..., P_n$$

Позначимо через $f(P_1), f(P_2), ..., f(P_n)$ значення функції у вибраних точках і утворимо суму добутків $f(P_i)\Delta s_i$:

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + ... + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i. \quad (1)$$

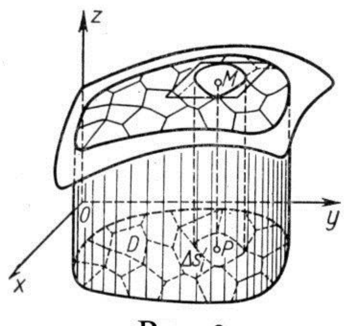

Рис. 3

Ми дістали інтегральну суму функції $f(x, y)$ в області D.

Якщо $f(x, y) \geq 0$ в області D, тоді кожний член $f(P_i)\Delta s_i$ геометрично зображає об'єм малих циліндрів з основою Δs_i і висотою $f(P_i)$. Сума V_n є сума об'ємів вибраних елементарних циліндрів визначених ступеневих тіл (Рис. 3).

Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум, яка утворена функцією $f(x,y)$ в даній області

$$V_{n_1}, V_{n_2}, \dots, V_{n_k}, \dots \qquad (2)$$

при розбитті області D на підобласті s_i різним чином. Будемо покладати, що максимальний діаметр підобласті s_i прямує до нуля, якщо $n_k \to \infty$, то наступне твердження справедливе.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x,y)$ постійна у замкненій області D, тоді існує границя послідовності (2) інтегральної суми (1), якщо максимальний діаметр підобласті s_i прямує до нуля якщо $n_k \to \infty$. Ця границя є сума деякої послідовності (2), тобто не залежить від шляху розбиття області на підобласті s_i і вибору точки P_i всередині підобласті s_i.*

Ця границя ***називається подвійним інтегралом Рімана від функції*** $f(x,y)$ по області D і правильні такі вирази:

$$\iint_D f(P)ds \quad \text{або} \quad \iint_D f(x,y)dxdy,$$

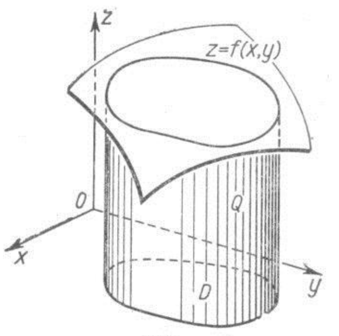

Рис. 4

тобто

$$\lim_{diam s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (3)$$

Область D називається областю інтегрування.

Якщо $f(x,y) \geq 0$, тоді подвійний інтеграл функцій $f(x,y)$ по області D дорівнює об'єму тіла Q, обмеженого поверхнею $z = f(x,y)$, площиною $z = 0$ і циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні вісі z, направляючою яких є границя області D (Рис. 4*a*).

1.2. Основні властивості подвійного інтеграла і його геометрична та фізична інтерпретація

1⁰. *Якщо $f(x,y) = 1$, тоді*

$$\iint_D ds = S_D,$$

де S_D площа області D.

2⁰. *Якщо підінтегральна функція $z = f(x,y) = \mu(x,y)$ є поверхнева густина матеріальної пластини представляє собою область D, то маса такої пластини може бути обчислена за формулою*

$$m = \iint_D \mu(x,y)ds \qquad (4)$$

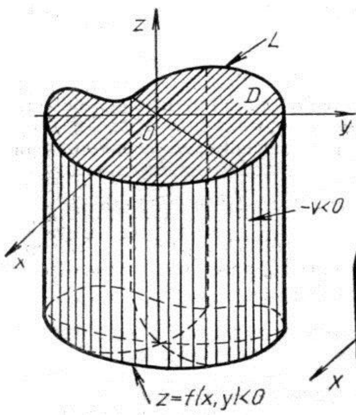

Рис. 4

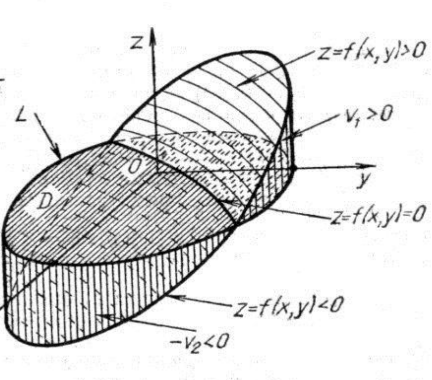

Рис. 5

3⁰. *Якщо $f(x,y) \leq 0$ в області D, то подвійний інтеграл дорівнює об'єму циліндричного тіла яке, знаходиться під площиною xy (Рис. 4), беруть із знаком " - "*

($-V$). Якщо функція в області D міняє знак, тоді подвійний інтеграл чисельно дорівнює різниці об'ємів циліндричних тіл, які знаходяться над площиною xy і під нею (Рис. 5), тобто

$$\iint_D f(x,y)ds = V_1 - V_2.$$

***4⁰.** Якщо функції $z = f_i(x,y)$ $\left(i=\overline{1,k}\right)$ неперервні в області D, то*

$$\iint_D \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x,y)\right) ds = \sum_{i=1}^{k} \iint_D f_i(x,y)ds. \qquad (5)$$

***5⁰.** Постійний множник може бути винесений за знак подвійного інтеграла, якщо $C-const$, тоді*

$$\iint_D Cf(x,y)ds = C\iint_D f(x,y)ds. \qquad (6)$$

***6⁰.** Якщо область D поділена на області $D_1, D_2, ..., D_k$ без спільних внутрішніх точок, і функція $f(x,y)$ неперервна в усіх точках області D, тоді*

$$\iint_D f(x,)ds = \iint_{D_1} f(x,)ds + \iint_{D_2} f(x,)ds + ... + \iint_{D_k} f(x,)ds. \qquad (7)$$

***7⁰** (теорема про середнє значення). Для неперервної функції $z = f(x,y)$ в області D, площа якої дорівнюється S_D, то тоді існує у всякому разі одна така точка $P(\xi,\eta) \in D$, що*

$$\iint_D f(x,y)ds = f(\xi,\eta)\cdot S_D. \qquad (8)$$

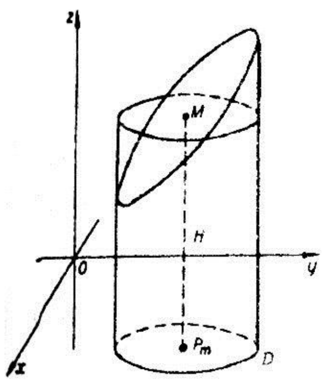

Рис.6

Теорема про середнє значення має таку геометричну інтерпретацію.

Якщо функція $f(x,y) \geq 0$ визначена у області D, то (8) означає, що існує прямий циліндр з основою D (з площею S_D) і висотою $H = f(\xi,\eta)$, об'єм якого дорівнює об'єму криволінійного циліндра (Рис. 6).

***8⁰.** Якщо в області D неперервні функції $f(x,y)$, $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ задовольняють нерівності $f_1(x,y) \leq$ $f(x,y) \leq$ $f_2(x,y)$, тоді*

$$\iint_D f_1(x,y)ds \leq \iint_D f(x,y)ds \leq \iint_D f_2(x,y)ds. \qquad (9)$$

***9⁰.** Якщо функція $z = f(x,y) \neq const$ неревна в області D і обмежена*

$$M = \max_{(x,y)\in D} f(x,y), m = \min_{(x,y)\in D} f(x,y),$$

тоді

$$mS_D \leq \iint_D f(x,y)ds \leq MS_D. \qquad (10)$$

§ 2. *Обчислення подвійних інтегралів. Повторні інтеграли.*

Означення інтеграла Рімана одночасно дає і спосіб його обчислення. Однак, цей спосіб, взагалі кажучи, досить складний. У деяких випадках задачу, пов'язану з обчисленням інтеграла Рімана, можна значно полегшити. У цьому параграфі ми й розглянемо такі випадки

2.1. Повторні інтеграли. Випадок прямокутної області

Нехай функція $f(x,y)$ визначена у замкненому прямокутнику П з сторонами паралельними вісям координат

$$\Pi = [a \le x \le b, \quad c \le y \le d]$$

Припустимо, що функція $f(x,y)$ неперервна у прямокутнику П і подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy \qquad (*)$$

представляє об'єм циліндричного тіла з основою П і обмежений поверхньою $z = f(x,y)$. Викреслимо площину $y = y_0$, $c \le y_0 \le d$ до осі Oy (Рис.7). Ця площина перетинає криволінійний циліндр і утворює криволінійну трапецію ABA_1B_1 яка обмежена зверху плоскою лінією L: $z = f(x, y_0)$, $y = y_0$. Площа отриманої криволінійної трапеції представляє собою визначений інтеграл

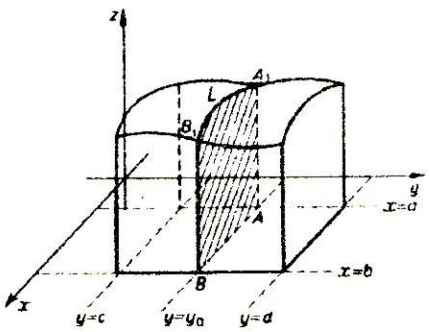

Рис.7

$$\int_a^b f(x, y_0)dx \qquad (11),$$

де інтегрування відбувається за змінною x а y_0 є другий аргумент підінтегральної функції, який у цьому випадку залишається постійний ($c \le y_0 \le d$). Площа (11) залежить від вибору величини y_0. Отже, запишемо

$$S(y) = \int_a^b f(x,y)dx \qquad (12)$$

Вираз (12) представляє собою площу січної площини циліндричного тіла як функцію від y. Тому об'єм криволінійного циліндра обчислюється за формулою

$$V = \int_c^d S(y)dy$$

З іншого боку, цей об'єм виражається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ за прямокутником Π. Отже,

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_c^d S(y)dy$$

Підставляючи (12), дістанемо:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Отримане співвідношення взагалі можна записати таким чином:

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \qquad (13)$$

Об'єм циліндричного тіла можна також дістати через площу січної площини $x = x_0$. Звідки випливає

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \qquad (14)$$

Кожну з виразів у правій частині (13) і (14) містять послідовні операції умовно прийнятих інтегралів від функції $f(x,y)$

Кожне з співвідношень *називаються повторними інтегралами від функції* $f(x,y)$ по прямокутнику Π при послідовному інтегруванні спочатку за аргументом y, а потім за аргументом x; або навпаки спочатку за аргументом x, а потім за аргументом y.

Порівнюючи (13) і (14), зауважимо, що якщо $f(x,y)$ неперервна у замкненому прямокутнику, тоді завжди можливо перейти до повторних інтегралів

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx, \qquad (15)$$

тобто *величина повторних інтегралів неперервної функції* $f(x,y)$ *у прямокутнику* Π *не залежить від порядку інтегрування*

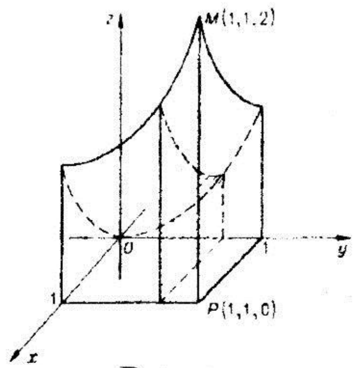

Рис. 8

Приклад 1. *Обчислити подвійний інтеграл від функції* $f(x,y)=x^2+y^2$ *по замкненому прямокутнику* $\Pi=[0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1]$.

► Маємо (Рис.8): $\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)dxdy=$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2)dy = \int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right)\int_0^1 dx = \frac{2}{3} \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Обчислити подвійний інтеграл*

$$\iint\limits_{\Pi}\frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

по прямокутнику $\Pi=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.

► Підінтегральна функція неперервна у даному прямокутнику, тому подвійний інтеграл і обидва повторних інтеграли існують і правильні рівності (13) і (14). Виходячи з особливостей підінтегральної функції, краще скористатися рівністю (14). Отже,

$$\iint\limits_{\Pi}\frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^1 dx\int_0^2 (1+x^2+y^2)^{-3/2}ydy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^2 (1+x^2+y^2)^{-3/2}d(1+x^2+y^2)=$$

$$=-\int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-1/2}\Big|_0^2 dx = -\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx =$$

$$=\left(\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\left(\ln\left|1+\sqrt{2}\right|-\ln\left|1+\sqrt{6}\right|\right)+\ln\sqrt{5} = \ln\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{5}}{1+\sqrt{6}}. \blacktriangleleft$$

2.2. Повторні інтеграли. Випадок довільної області.

Теорема 2. *Нехай функція* $f(x,y)$ *інтегрована за Ріманом у замкненій області* $\overline{G}$ *(Рис.9), обмеженій прямими* $x=a$, $x=b$ $(b>a)$ *і неперервними кривими*

$$y=\varphi_1(x) \text{ і } y=\varphi_2(x)$$

Причому $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ *для всіх* $x \in [a,b]$. *Якщо для будь-якого* $x \in [a,b]$ *існує інтеграл Рімана*

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$$

то існує повторний інтеграл Рімана

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

і правильна рівність

$$\iint_{\overline{G}} f(x,y) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (16)$$

► Замкнену область $\overline{G}$ візьмемо в замкнений прямокутник $\Pi = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$, де $c = \min\limits_{a \le x \le b} \varphi_1(x)$, $d = \max\limits_{a \le x \le b} \varphi_2(x)$ (Рис.9 *а*).

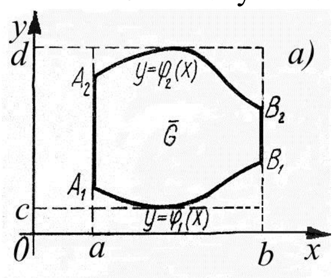

Рис. 9

Відрізки $[A_1, A_2]$ і $[B_1, B_2]$ можуть перетворюватись у точки. В прямокутнику Π задамо функцію

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{якщо} \quad (x,y) \in \overline{G}, \\ 0, & \text{якщо} \quad (x,y) \in \Pi \setminus \overline{G} \end{cases}$$

Функція $F(x,y)$, будучи інтегрованою в $\overline{G}$ і в $\Pi \setminus \overline{G}$, буде інтегрованою в $\Pi = \overline{G} \cup \Pi \setminus \overline{G}$.

Тому, враховуючи (17), маємо:

$$\iint_{\Pi} F(x,y)dxdy = \iint_{\overline{G}} F(x,y)dxdy + \iint_{\Pi \setminus \overline{G}} F(x,y)dxdy = \iint_{\overline{G}} F(x,y)dxdy \qquad (18)$$

Оскільки для будь-якого $x \in [a,b]$

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} F(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} F(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

то, за формулою (14)

$$\iint_{\Pi} F(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Звідси і з (18) дістаємо (16).

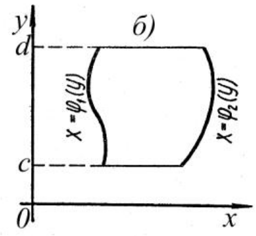

Рис. 9 б)

Аналогічно доводиться наступне твердження: *нехай функція* $f(x,y)$ *інтегрована за Ріманом у замкненій області* $\overline{G}$ *(Рис. 9б), обмеженій прямими* $y = c$ *і* $y = d$ $(d > c)$ *і неперервними кривими*

$$x = \varphi_1(y) \text{ і } x = \varphi_2(y),$$

причому $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ *для всіх* $y \in [c,d]$. *Якщо для будь-якого* $y \in [c,d]$ *існує інтеграл Рімана*

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx,$$

то існує повторний інтеграл

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

і правильна рівність

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (19)$$

Формули (16) і (19) правильні зокрема для функцій $f(x,y)$ неперервних у замкненій області $\overline{G}$, вигляду, зображеного на (Рис.9*а*) і (Рис.9*б*). Справді, функція $f(x,y)$, неперервна в замкненій області $\overline{G}$ вказаного вигляду, інтегрована за Ріманом у цій замкненій області і для будь-якого фіксованого $x \in [a,b]$ (відповідно $y \in [c,d]$) існує інтеграл

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy \qquad \text{(відповідно, інтеграл } \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y)dx\text{)}$$

як інтеграл від неперервної функції. Цей випадок найчастіше представлений на практиці. Нарешті, зазначимо, що у випадку коли, область G відмінна від розглянутих вище двох видів, то її слід розбити (якщо це можливо) на скінченне число областей, кожен з яких є областю розглянутого виду, а потім скористатись адитивною властивістю подвійного інтеграла. Наприклад, якщо функція неперервна в замкненій області $\overline{G}$ зображеній на (Рис. 9 в), то

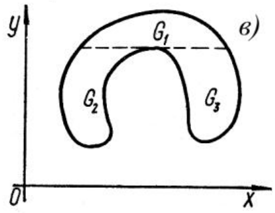

Рис. 9

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)dxdy + \iint_{G_3} f(x,y)dxdy,$$

причому перший інтеграл, який стоїть у правій частині останньої рівності, можна обчислити за формулою (16) і за формулою (19), а два інших - за формулою (19).

Приклад 2. *Обчислити подвійний інтеграл від функції* $f(x,y)=1-xy$ *в області* G, *обмеженій параболою* $y=x^2$ *і прямими* $y=-x$ *і* $x=1$.

► Область $\overline{G}=\{0\le x\le 1; -x\le y\le x^2\}$ зображена на Рис.10*. Подвійний інтеграл можна обчислити за формулою (16). Функція $f(x,y)=1-xy$ неперервна у всій площині xOy і зокрема у замкненій області $\overline{G}$, подвійний інтеграл в області G і подвійний інтеграл у замкненій області $\overline{G}$ від функції $f(x,y)=1-xy$ дорівнюють один одному, за формулою (16) маємо:

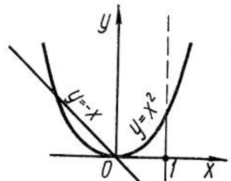

*Рис 10**

$$\iint_G (1-xy)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} (1-xy)dy = \int_0^1 \left(y - x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-x}^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^5}{2} + x + \frac{x^3}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Обчислити повторний інтеграл*

$$I_D = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2+y^2)dy \right) dx$$

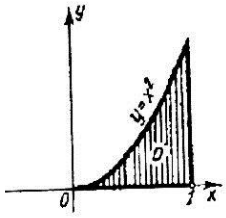

Рис. 10

► Визначимо область D. Тут D обмежена такими лініями: $y=0,\ y=x^2,\ x=0,\ x=1$ (Рис. 10)

$$S(x)=\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dy=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2}=x^4+\frac{x^6}{3}.$$

Інтегруючи отриману функцію у межах від 0 до 1, дістанемо

$$\int_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}=\frac{26}{105}. ◄$$

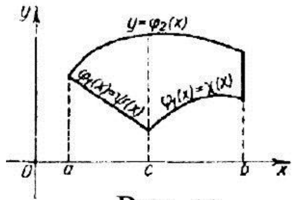

Рис. 11

Може статись, що область D така, що одна з функцій $y=y_1(x)$ $y=y_2(x)$ не може бути представлена одним аналітичним виразом у внутрішній області змінної x (від $x=a$ до $x=b$).

$y_1(x)=\phi(x)$ на інтервалі $[a,c]$ і $y_1(x)=\chi(x)$ на інтервалі $[c,b]$, де $\phi(x)$ і $\chi(x)$ є аналітичні функції (Рис. 11)

Тоді повторний інтеграл можна записати таким чином:

$$\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int_a^c\left(\int_{\varphi(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\right)dx+\int_c^b\left(\int_{\phi(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\right)dx$$

Ми матимемо подібний вираз для повторного інтеграла, якщо функція $y_2(x)$ визначена різними аналітичними виразами на різних інтервалах інтервалу $[a,b]$.

Приклад 4. *Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі* $I=\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}f(x,y)dy\right)dx.$

► Область інтегрування обмежена прямою $y=x$ і параболою $y=\sqrt{x}$ (Рис. 12), тобто $D:\left\{0\le x\le 1, x\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

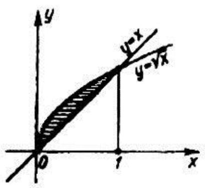

Рис. 12

Всяка лінія паралельна вісі X перетинає границю області не більше, ніж у двох точках, отже ми можемо обчислити інтеграл, використовуючи формулу (19), покладаючи $\varphi_1(y)=y^2$, $\varphi_2(y)=y$, $0\le y\le 1$, тобто $D:\left\{0\le y\le 1, y^2\le x\le y\right\}$. Отже

$$I=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y}f(x,y)dx\right)dy. ◄$$

Приклад 5. *Обчислити* $\iint_D e^{\frac{y}{x}}ds$, *якщо область D представляє собою трикутник, обмежений прямими лініями* $y=x, y=0$ *і* $x=1$ *(Рис. 13)*

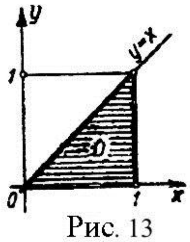

Рис. 13

► Перетворимо подвійний інтеграл у повторний, використовуючи формулу (16). Якщо скористатися формулою (19), то ми отримаємо інтеграл від функції $e^{\frac{y}{x}}$ за змінною x, але цей інтеграл не виражається через елементарні функції:

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}ds=\int_0^1\left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy\right)dx=\int_0^1\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)\Bigg|_0^x dx=\int_0^1 x(e-1)dx=\left((e-1)\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{e-1}{2}. ◄$$

Приклад 6. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D e^{x+y}ds$ *по області* D*, яка розташована між двома квадратами з центром у початку координат і сторонами паралельними координатним осям, якщо кожна сторона зовнішнього квадрата дорівнює 4, а внутрішнього дорівнює 2. (Рис. 14).*

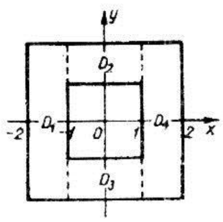

Рис. 14

► Область D регулярна. Тоді, прямі лінії $x=1$ і $x=-1$ ділять її на чотири підобласті D_1, D_2, D_3, D_4. Отже:

$$\iint\limits_D e^{x+y}ds = \iint\limits_{D_1} e^{x+y}ds + \iint\limits_{D_2} e^{x+y}ds + \iint\limits_{D_3} e^{x+y}ds + \iint\limits_{D_4} e^{x+y}ds.$$

$$D_1 = \{-2 \le x \le -1, -2 \le y \le 2\},\ D_2 = \{-1 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\},$$

$$D_3 = \{-1 \le x \le -1, -2 \le y \le -1\},\ D_4 = \{1 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\},$$

Представивши кожен з цих подвійних інтегралів у повторні інтеграли, ми дістанемо:

$$\iint\limits_D e^{x+y}ds = \int\limits_{-2}^{-1} e^x dx \int\limits_{-2}^{2} e^y dy + \int\limits_{-1}^{1} e^x dx \int\limits_{1}^{2} e^y dy + \int\limits_{-1}^{1} e^x dx \int\limits_{-2}^{-1} e^y dy +$$

$$+\int\limits_{1}^{2} e^x dx \int\limits_{-2}^{2} e^y dy = \left(e^{-1}-e^{-2}\right)\left(e^2-e^{-2}\right) + \left(e-e^{-1}\right)\left(e^2-e\right) +$$

$$+\left(e-e^{-1}\right)\left(e^{-1}-e^{-2}\right) + \left(e^2-e\right)\left(e^2-e^{-2}\right) = \left(e^3-e^{-3}\right)\left(e-e^{-1}\right) = 4sh3 \cdot sh1.$$ ◄

Практичні заняття - 2.1

1. *Обчислити повторні інтеграли*

1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_o^1 \left(x^2+2y\right)dx$,	2) $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} \left(x+2y\right)dx$,
3) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{\left(x+y\right)^2}$.	4) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r dr$.
5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$.	6) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi dr$.
7) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$.	8) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$.

2.Перетворити подвійні інтеграли $\iint\limits_D f(x,y)ds$ *у повторні за різними напрямками інтегрування за даною областю* D.

1) D - *прямокутник з вершинами* $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$, $C(0,1)$.
2) D - *трикутник з вершинами* $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.
3) D - *трапеція з вершинами* $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$.
4) D - паралелограм *з вершинами* $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(2,7)$, $D(1,5)$.
5) D: $\{x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1\}$ g) D: $\{x^2+y^2 \le x\}$)
6) D: $\{x^2+y^2 \le a^2\}$ k) D: $\{x \ge -1; y \ge x; y \le 1\}$

7) $D:\{y \le x \le y+2a;\ 0 \le y \le a\}$	
8) D *- обмежена лініями* $y = x^3+1;\ x=0;\ x+y=4.$	

3. *Змінити порядок інтегрування у наведених повторних інтегралах*

1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{2x} f(x,y)dy,$	2) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy,$	3) $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy,$
4) $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy,$	5) $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx,$	6) $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy,$
7) $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx,$	8) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy,$	9) $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{4ay}} f(x,y)dx,$
10) $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy.$		

Самостійна робота

I	1) *Привести подвійний інтеграл* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *до повторних інтегралів у різних напрямках інтегрування, якщо область* D *обмежена лініями:* $y=2x,\ x=0,\ y+x=3.$
	2) *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D xydxdy$, *якщо область* D *обмежена лініями* $y=x^2,\ \ y=2x.$
II	1) *Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі* $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3} f(x,y)dy$
	2) *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D xdxdy$, *якщо область* D *обмежена лініями* $x=0,\quad y=0,\quad y=\sqrt{4-x^2}$.
III	1) *Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі* $\int\limits_{-4}^{8} dy \int\limits_{\frac{x+4}{2}}^{\sqrt{3y+12}} f(x,y)dx$
	2) *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D x^2dxdy$, *якщо область* D *обмежена лініями* $x=2,\quad y=x,\quad y=1/x.$

§ 3. *Обчислення площі та об'єму за допомогою подвійних інтегралів*

3.1. Об'єм тіла. Як було встановлено у §1, об'єм тіла V обмеженого поверхнью $z=f(x,y)$, де $f(x,y)$ невід'ємна, площиною $z=0$ і циліндричною поверхнью, направляючі якої є границя області D і твірні паралельні осі z і дорівнюють функції $f(x,y)$ за областю D:

$$V = \iint_D f(x,y)ds = \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (20)$$

Зауважимо, що в (20) область D є ортогональна проекція частини поверхні $z = f(x,y)$ на площину XOY. Інколи поверхня, яка обмежує тіло, задається рівнянням $y = \varphi(x,z)$ або $x = \phi(y,z)$, в такому випадку проекція її (область D_1) береться на площині xOz, відповідно yOz, в (20) при цьому змінюються позначення змінних.

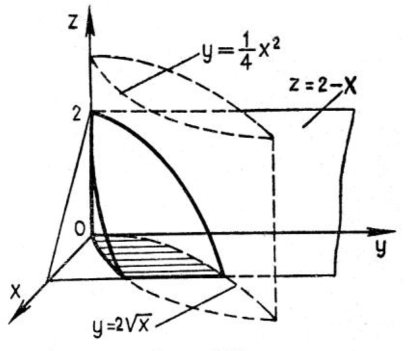

*Рис. 15**

Приклад. 1 *Обчислити об'єм тіла обмеженого поверхнями:* $z = 2 - x$, $z = 0$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2\sqrt{x}$

► Область інтегрування обмежена на площині xOy параболами $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2\sqrt{x}$ і прямою $x = 2$ (вздовж якої площина xOy перетинає площину $z = 2 - x$ (Рис. 15*). Отже:

$$D = \left\{0 \le x \le 2; \frac{1}{2}x^2 \le y \le 2\sqrt{x}\right\}.$$

Ми маємо:

$$\iint_D (2-x)dxdy = \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2\sqrt{x}} (2-x)dy = \int_0^2 \left(4\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right)dx = \frac{32\sqrt{2}-5}{15} \text{(куб. од.)} ◄$$

Приклад2. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями* $x = 0,\ y = 0,\ x + y + z = 1,\ z = 0.$ (Рис.15)

► $V = \iint_D (1 - x - y)dydx,$ де D являє собою трикутну область на площині xOy, яка обмежена прямими лініями $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1.$

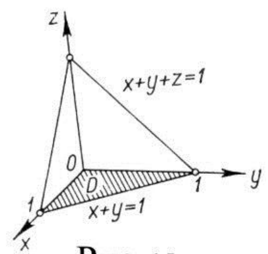

Рис. 15

Переходячи від подвійного інтеграла до повторного, ми обчислимо об'єм піраміди:

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$ Отже $V = \frac{1}{6}$ (куб. од.).◄

Зауваження 1. *Якщо тіло, об'єм якого необхідно обчислити, обмежене зверху поверхнею* $z = \Phi_2(x,y) \ge 0$, *а знизу поверхнею* $z = \Phi_1(x,y) \ge 0$ *і область* D *є проекція обох поверхів на площину* xOy, *тоді об'єм* V *цього тіла дорівнює різниці між об'ємами двох циліндричних тіл; для першого з цих циліндричних тіл область* D *представляє собою нижню основу, а поверхня* $z = \Phi_2(x,y)$ *- верхню основу; друге тіло також має нижньою основою область* D, *а поверхня* $z = \Phi_1(x,y)$ *її верхню основу (Рис. 34).*

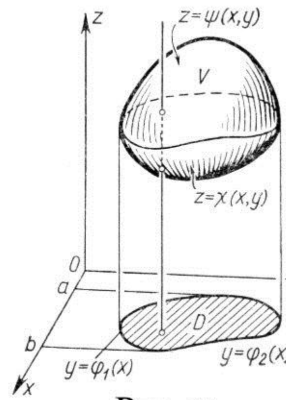

Рис. 34

Тому, об'єм V *дорівнює різниці двох подвійних інтегралів*

$$V = \iint_D \Phi_2(x,y)ds - \iint_D \Phi_1(x,y)ds,$$

або

$$V=\iint_D\left[\Phi_2(x,y)-\Phi_1(x,y)\right]ds. \qquad (21)$$

Зауваження 2. *Якщо в області D функція $f(x,y)$ змінює знак, тоді область D слід поділити на дві частини: 1) підобласть D_1 де $f(x,y)\ge 0$; 2) підобласть D_2 де $f(x,y)\le 0$. Покладаємо, що підобласті D_1 і D_2 такі, що подвійний інтеграл існує за цими областями тоді, інтеграл за D_1 буде додатнім і дорівнюватиме об'єму тіла, яке розташоване над площиною xOy. Інтеграл за областю D_2 буде від'ємним і дорівнюватиме за абсолютною величиною об'єму тіла, яке лежить під площиною xOy. Отже, інтеграл за областю D буде представляти різницю між відповідними об'ємами.*

3.2. Площа плоскої фігури

Якщо для функції $f(x,y)=1$ скласти за даною областю D інтегральну суму $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_1)\cdot\Delta s_i$, то дістанемо, що S - площа області D, але ж тоді і $\lim_{n\to\infty} S_n=S$, або за означенням подвійного інтеграла $S=\iint_D f(x,y)ds=\iint_D 1\cdot ds$. Умовно записують так:

$$S=\iint_D dxdy=S_n=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta s_i=S \qquad (21)$$

Якщо область D регулярна, тоді площа може бути виражена у вигляді повторного інтеграла

$$S=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\right)dx$$

Застосовуючи властивість обчислення визначеного інтеграла для внутрішнього інтеграла, дістанемо очевидну формулу

$$S=\int_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$$

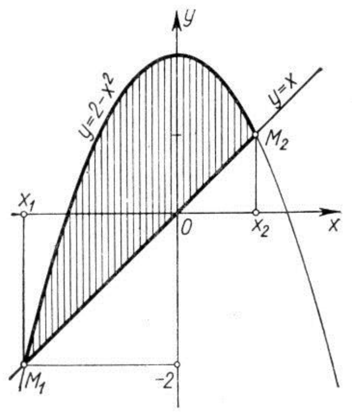

Fig. 17

Приклад 2. *Обчислити площу області, обмеженої кривими $y=2-x^2$, $y=x$.*

► Визначимо точки перетину даних кривих. (Рис. 17). У точках перетину ординати рівні, тобто $x=2-x^2$, звідси $x_1=-2,\ \ x_2=1.$ Дістаємо дві точки: $M_1(-2,-2),\ M_2(1,1).$ Звідси, шукана площа обчислюється за формулою:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\int_x^{2-x^2}dy\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{27}{6}.$$ ◄

§4. *Заміна змінних у подвійному інтегралі*

Нехай на площині xOy задана область, яка обмежена лінію L. Припустимо, що координати x і y є функції нових змінних u і v:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\phi(u,v); \qquad (22)$$

Нехай функції $\varphi(u,v)$ і $\phi(u,v)$ однозначні і неперервні, і нехай вони мають неперервні похідні у деякій області D'. Тоді за формулою (22) кожній парі u і v відповідає єдина пара чисел x і y. Дедалі покладаємо, що функції $\varphi(u,v)$ і $\phi(u,v)$ такі, що, якщо ми даємо x і y відповідні значення у області D, тоді за формулою (22) ми знайдемо величини u і v.

Розглянемо регулярні координати системи Ouv (Рис. 17). Із попереднього випливає, що кожній точці $P(x, y)$ на площині xOy (Рис.18) існує єдина відповідна точка $P'(u,v)$ на площині uOv з координатами u, v які, визначаються за формулою (22). *Числа u і v називаються криволінійними координатами точки* P.

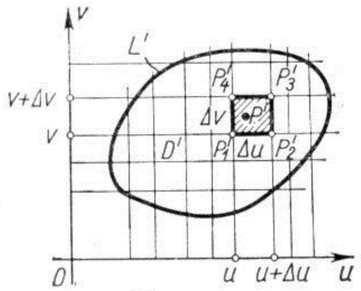

Рис. 17

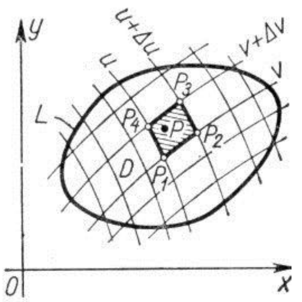

Рис. 18

Якщо на площині xOy точка описує замкнену лінію L, яка обмежує область D, тоді на площині uOv відповідна точка буде описувати замкнену лінію L' яка обмежує деяку область D'; і кожній точці області D' будуть відповідати відповідні точки області D.

Отже, формула (22) встановлює взаємно-однозначну відповідальність між точками області D і точками області D'.

Розглянемо на площині uOv регулярну підобласть $\Delta s'$, яка обмежена прямими лініями $u = const$, $u + \Delta u = const$, $v = const$, $v + \Delta v = const$ і розглянемо також криволінійну підобласть Δs відповідно у площині xOy. Позначимо площі цих підоблостей відповідно Δs і $\Delta s'$ (Рис. 17).

Тоді, очевидно, $\Delta s' = \Delta u \Delta v$.

Взагалі кажучи, площі Δs і $\Delta s'$ різні.

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D.

Для кожного значення функції $z = f(x, y)$ і області D відповідає функція $z = F(u,v)$, яка відрізняється на деяку величину в області D', де

$$F(u,v) = f(\varphi(u,v), \phi(u,v)).$$

Розглянемо інтегральні суми функції z в області D. Очевидно, що ми отримаємо таку рівність:

$$\sum f(x,y)\Delta s = \sum F(u,v)\Delta s'. \qquad (23)$$

Розглянемо прямокутник $P_1P_2P_3P_4$, площа якого дорівнює Δs на площині xOy (Рис. 17).

Визначмо координати вершин цього прямокутника:

$$\begin{aligned}
&P_1(x_1, y_1), \quad x_1 = \varphi(u,v), \quad y_1 = \phi(u,v) \\
&P_2(x_2, y_2), \quad x_2 = \varphi(u+\Delta u, v), \quad y_2 = \phi(u+\Delta u, v) \\
&P_3(x_3, y_3), \ x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), \ y_3 = \phi(u+\Delta u, v+\Delta v), \\
&P_4(x_4, y_4), \quad x_4 = \varphi(u, v+\Delta v), \ y_4 = \phi(u, v+\Delta v)
\end{aligned} \qquad (24)$$

Не беручи до уваги нескінченно малі більш високого порядку, ніж нескінченно малі Δu і Δv, тоді формули (24) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
&x_1 = \varphi(u,v), \quad y_1 = \phi(u,v) \\
&x_2 = \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u, \quad y_2 = \phi(u,v) + \frac{\partial \phi}{\partial u}\Delta u, \\
&x_3 = \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v, \ y_3 = \phi(u,v) + \frac{\partial \phi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \phi}{\partial v}\Delta v, \\
&x_4 = \varphi(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v, \ y_4 = \phi(u,v) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\Delta v.
\end{aligned} \qquad (25)$$

З цими застереженнями криволінійний прямокутник $P_1P_2P_3P_4$ можна розглядати як паралелограм. Площа Δs приблизно дорівнює подвійній площині трикутника $P_1P_2P_3$ яку знайдемо з такою формулою:

$$\Delta s = \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v.$$

Введемо позначення

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v}\end{matrix}\right\| = |J|.$$

Отже,

$$\Delta s \approx |J|\Delta s'. \qquad (26)$$

Детермінант J називається функціональним детермінантом функцій $\varphi(u,v)$ і $\phi(u,v)$. Його також називають Якобіан за ім'ям німецького математика Якобі.

Вираз у правій частині (26) називають ***елементом площі у криволінійній системі координат.*** За формулою (26) дістанемо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta s'} \approx |J| \qquad (27)$$

Рівність (26) є приблизною. Якщо максимальний діаметр елементів $\Delta s'$ і Δs прямують до нуля, тоді границя приймає точне значення, тобто

$$|J(u,v)| = \lim_{diam\Delta s' \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s'} \qquad (28)$$

Формули (26) і (27) вказують на те, що абсолютне значення Якобіана є коефіцієнт «розтяжіння» області s'(в даній точці (u,v)) при відображенні у область D, використовуючи формули перетворення (22) $x = \varphi(u,v), \quad y = \phi(u,v)$.

4.1. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Припустимо, що дві неперервні функції $x = \varphi(u,v)$ і $y = \phi(u,v)$ взаємно однозначно відображають область D у область D' і мають неперервні частинні похідні першого порядку. Припустимо також, що на площині xOy визначена неперервна функція $z = f(x,y)$.

Встановимо, що кожному значенню функції $z = f(x,y)$ в області D відповідає значення функції $z = F(u,v)$ в D', де $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \phi(u,v))$

Розглянемо інтегральну суму для функції $z = f(x,y)$ в D і D'. Дістанемо:

$$\sum_D f(x,y)\Delta s \approx \sum_{D'} F(u,v)|J|\Delta s' \qquad (29)$$

де $\Delta s = |J|\Delta s'$ і $J(u,v)$ Якобіан $\varphi(u,v)$ і $\phi(u,v)$. Переходячи у (29) до границі, якщо найбільший діаметр d' частинних площин у області D_k' прямує до нуля, ми дістанемо:

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D'} F(u,v)\left|J\right|ds'$$

або

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\phi(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv, \qquad (30)$$

де

$$J(u,u) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Формула перетворення координат (30) у подвійному інтегралі відома як *формула Остроградського*

Зауважимо, що якщо $d' \to 0$, то і найбільший діаметр d частинних площин у області D також буде прямувати до нуля, оскільки функції $x = \varphi(u,v)$ і $y = \phi(u,v)$ є неперервні.

Умова $J \neq 0$ є умовою взаємно однозначного відображення функціями $x = \varphi(u,v), \quad y = \phi(u,v)$.

Правило заміни змінних у подвійному інтегралі встановлює така теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб перетворити подвійний інтеграл у прямокутній системі координат у подвійний інтеграл у криволінійній системі координат, необхідно замінити змінні* x *і* y *функціями* $\varphi(u,v)$ *і* $\phi(u,v)$ *у підінтегральній функції* $f(x,y)$ *і елемент площі* $dxdy$ *виразом у криволінійній системі координат:* $dxdy = \left|J\right|dudv$.

Приклад 3. *Знайти площу фігури, яка обмежена гіперболами* $xy = a^2$ *і* $xy = b^2$*, де* $x > 0, \quad y > 0, \quad 0 < a < b$ *і прямими лініями* $y = \alpha x, \quad y = \beta x$*, де* $0 < \alpha < \beta$*. (Рис. 19а)*

► Знаходження площі даної фігури приводить до обчислення подвійного інтеграла $\iint_D dxdy$ безпосереднє, обчислення якого достатньо важке. Тому введемо криволінійну систему координат u і v

$$xy = u \quad \text{і} \quad \frac{y}{x} = v \qquad (31)$$

За умовою задач зрозуміло, оскільки $a^2 \le u \le b^2$, $\alpha \le v \le \beta$, то на площині uOv дістанемо прямокутник (Рис. 19b)

$$D' = \{a^2 \le u \le b^2, \quad \alpha \le v \le \beta\}$$

Ця область простіша, ніж задана умовою задачі у області D.

Тепер виразимо x і y, використовуючи (31) через u і v:

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}$$

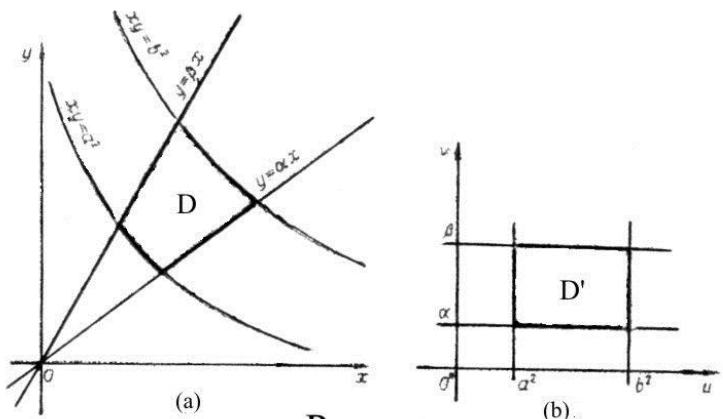

Рис. 19

Тоді:

$$J(u,u) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

За формулою (30) дістанемо, що $f(x,y)=1$

$$S=\iint_{D} dxdy=\iint_{D'}|J|dudv=\int_{a^2}^{b^2}du\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dv}{2v}=$$

$$=u\Big|_{a^2}^{b^2}\cdot\frac{1}{2}\ln v\Big|_{\alpha}^{\beta}=\frac{a^2-b^2}{2}\cdot\ln\frac{\beta}{\alpha}\ ◄.$$

4.2. Подвійний інтеграл у полярній системі координат

Обчислення подвійного інтеграла часто спрощується заміною прямокутних координат x і y полярними координатами ρ і φ, використовуючи формули

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,\ \text{де}\quad \rho\geq 0,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi \tag{32}$$

тоді

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\,.$$

Оскільки $|J|=\rho$, дістанемо елемент площі у полярній системі координат

$$ds=\rho d\rho d\varphi \tag{33}$$

і формула переходу від прямокутної системи координат до полярної системи координат набуває вигляду:

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \tag{34}$$

Розглянемо еліптичну (загальну) полярну систему координат, для якої

$$x=a\rho\cos\varphi,\ \ y=b\rho\sin\varphi,\ \text{де}\ \rho\geq 0,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi \tag{35}$$

Так як $|J|=ab\rho$, дістанемо:

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=ab\iint_{D'} f(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \tag{36}$$

Методи обчислення подвійного інтеграла у полярній системі координат, як і у випадку прямокутної системи координат, зводиться до переходу до подвійного інтеграла.

1⁰. Розглянемо випадок, якщо полюс O за межами області D. Нехай D є така, що початок направленого променя знаходиться у полюсі, то координатна пряма $\varphi=\text{const}$ перетинає її межу не більш, ніж у двох точках або вздовж відрізка. Зауважимо, що полярний кут φ змінюється від α до β: $\alpha\leq\varphi\leq\beta$. Тут α і β є границі інтегрування. Промінь $\varphi=\alpha$ проходить через точку A контура області D а промінь $\varphi=\beta$ через точку B (Рис. 20).

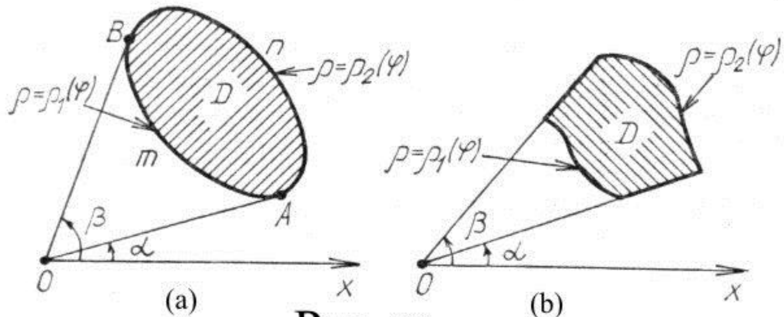

Рис. 20

Точки A і B ділять контур на дві частини: AmB і AnB. Нехай $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$ її полярні рівняння відповідно, де $\rho_i(\varphi)$ однозначні неперервні функції, які залежать від φ і задовольняють умовам $\rho_1(\varphi)\leq\rho_2(\varphi)$ для всіх $\varphi\in(\alpha,\beta)$.

Функції $\rho_1(\varphi)$ і $\rho_2(\varphi)$ є границі внутрішнього повторного інтеграла. Переходячи до повторного інтеграла дістанемо

$$\iint_D F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho,\varphi)\rho d\rho \qquad (37)$$

У окремому випадку площа S області D при $F(\rho,\varphi)=1$ набуває вигляду

$$S = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right] d\varphi$$

2⁰. Тепер покладаємо, що полюс O розташований в середині області і покладаємо, що деякий промінь $\varphi = const$ перетинає межу області тільки у одній точці або вздовж відрізка. Нехай $\rho = \rho(\varphi)$ є рівняння межі області D у полярній системі координат. Тоді:

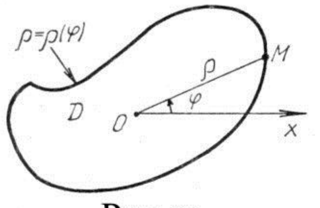

Рис. 21

$$\iint_D F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} F(\rho,\varphi)\rho d\rho \qquad (38)$$

3⁰. Якщо полюс O розташований на межі області D і рівняння межі у полярній системі координат має вигляд $\rho = \rho(\varphi)$, тоді у формулі (37) $\rho_1(\varphi) = 0, \quad \rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$, але α і β приймають різні значення (Рис. 22) і (Рис. 23). Звідси,

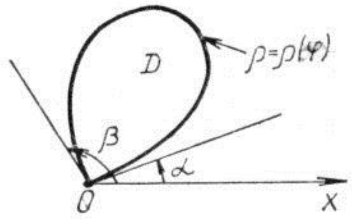

Рис. 22

$$\iint_D F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} F(\rho,\varphi)\rho d\rho \qquad (39)$$

Приклад 4. *Нехай необхідно обчислити подвійний інтеграл* $\iint_D (y-x)dxdy$, *обмежений прямими лініями*

$$y = x+1,\ y = x-3,\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9},\ y = -\frac{1}{3}x + 5.$$

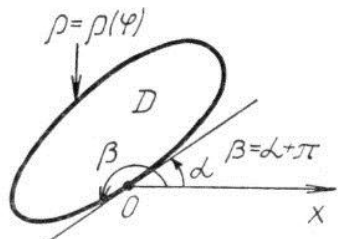

Рис. 23

► Безпосереднє обчислення інтеграла викликає труднощі. Проста заміна змінних приводить до інтегрування за прямокутником, сторони якого паралельні осям координат

Нехай

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{1}{3}x. \qquad (*)$$

Тоді прямі лінії $y = x+1, y = x-3$ будуть перетворюватись відповідно, у прямі лінії $u=1,\ u=-3$ на площині uOv; а прямі $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}, y = -\frac{1}{3}x + 5$ перетворяться у прямі $v = \frac{7}{3}, v = 5.$

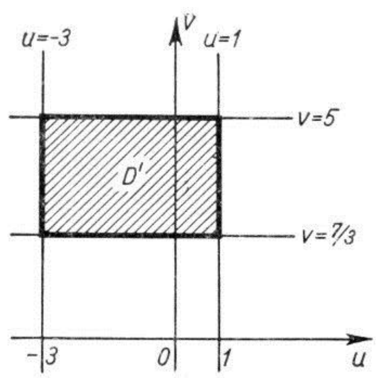

Рис. 24

Відповідно, задана область D перетвориться у прямокутну область D' (Рис. 24). Залишилося обчислити якобіан перетворення. Щоб зробити це, виразимо x і y через u і v. Розв'язуючи систему рівнянь (*), дістанемо:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \ y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$$

Відповідно,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}.$$

Абсолютне значення Якобіана дорівнюється є $|J| = \frac{3}{4}$. ◄

Приклад 5. *Обчислити подвійний інтеграл*

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

якщо область D *обмежена колом* $x^2 + y^2 = 1.$

► Область D є коло радіуса 1 з центром у початку координат. Розглянемо полярні координати $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$. У полярній системі координат $x^2 + y^2 = \rho^2$, а рівняння кола у полярній системі координат набуває такого вигляду $\rho = 1.$ Застосовуючи (37) дістанемо

$$\iint_D \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}. ◄$$

Приклад 6. *Обчислити подвійний інтеграл*

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$$

якщо область D *обмежена еліпсом* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

► Щоб розв’язати поставлену задачу, буде зручно застосувати еліптичну полярну систему координат, покладаючи $x = a\rho\cos\varphi,$ $y = b\rho\sin\varphi.$ Знайдемо Якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho$$

і

$$|J| = ab\rho, \ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \sqrt{1-\rho^2}.$$

Отже $D' = \left(0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\right)$. Тоді

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{2\pi ab}{3}. ◄$$

Практичні заняття - 2.2

Обчислити площу фігури, обмеженої такими лініями:

1. *Прямими лініями* $y = 0, \quad y = 1$ *і параболою* $y = x^2.$

2. *Прямою лінією* $y = x$ *і параболою* $y^2 = x.$

3. *Прямими* $x = 0, \quad y = 1, \quad y = 3$ *і гіперболою* $y = \frac{1}{x}.$

4. *Прямими* $y = x, \quad y = 0$ *і колом* $x^2 + y^2 = 2x$

5. *Прямою* $y = 2x$ *і параболою* $y^2 = x + 2.$

6. *Прямою* $x + y = 5$ *і гіперболою* $xy = 4$.

7. $x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2bx, \quad y = x,\ y = 0\ \ (0 < a < b).$

8. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right),\ x^2 + y^2 = 2ax.$

Самостійна робота

Обчислити площу фігури, обмеженої такими лініями

I	1) $x = 0, y = 0, x + y = 1.$	2) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2ax^3,$
II	1) $x = 1, y = 5x, x = y.$	2) $\left(x^3 + y^3\right)^2 = x^2 + y^2,\ x \ge 0, y \ge 0.$
III	1) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x = 4.$	2) $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x,$ $y = x,\ y = 0.$

§ 5. *Обчислення площі поверхні*

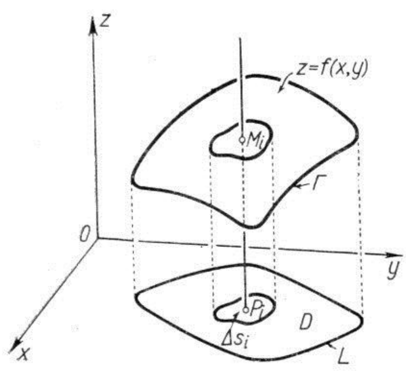

Рис. 25

Нехай необхідно обчислити площу поверхні, обмеженої лінією Γ (Рис. 25); поверхня визначається рівнянням $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні. Позначимо проекцію лінії Γ на площині xOy літерою L. Нехай область D обмежена лінією L на площині xOy. (Рис. 25). Довільним чином поділимо область D на n елементарних підоблостей Δs_1, Δs_2, $\Delta s_3, ..., \Delta s_n$. У кожній з підоблостей Δs_i виберемо точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$. Точці $P_i(\xi_i, \eta_i)$ на поверхні буде відповідати точка $M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$. Через точку M_i проведемо дотичну площину. Рівняння площини має вигляд

$$z - z_i = f_x^{'}(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y^{'}(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \tag{41}$$

На цій площині виділимо підобласть $\Delta\sigma_i$, яка проектується на xOy площину у вигляді Δs_i. Розглянемо суму всіх підоблостей $\Delta\sigma_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$$

Якщо найбільший діаметр підобласті $\Delta\sigma_i$ прямує до нуля то границю σ *цієї суми будемо називати площею поверхні, тобто*

$$\sigma = \lim_{diam\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i .$$

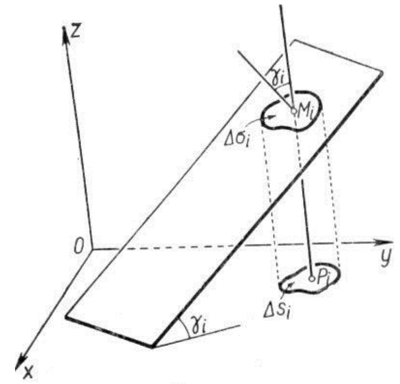

Рис. 26

Тепер обчислимо площу поверхні. Позначимо кут між дотичною площиною xOy через γ_i. Дістанемо (Рис. 26)

$$\Delta s_i = \Delta\sigma_i \cos\gamma_i$$

або

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta s_i}{\cos\gamma_i} \qquad (43)$$

Кут γ_i в той же час є кутом між віссю z і перпендикуляром до дотичної площини (40). Тому, беручи до уваги рівняння (40) і формулу аналітичної геометрії, маємо:

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f_x'(\xi_i,\eta_i)\right)^2+\left(f_y'(\xi_i,\eta_i)\right)^2}}$$

Звідси

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1+\left(f_x'(\xi_i,\eta_i)\right)^2+\left(f_y'(\xi_i,\eta_i)\right)^2}\,\Delta s_i$$

підставляючи у формулу (42), дістанемо

$$\sigma = \lim_{diam\Delta s_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f_x'(\xi_i,\eta_i)\right)^2+\left(f_y'(\xi_i,\eta_i)\right)^2}\,\Delta s_i$$

Оскільки границя інтегральної суми у правій частині останнього рівняння, за означенням, є подвійний інтеграл

$$\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,ds,$$

Отже:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \qquad (44)$$

Ця формула використовується для обчислення площі поверхні $z = f(x,y)$

Якщо рівняння поверхні задано у вигляді

$x = \mu(y,z)$ або у вигляді $y = \chi(x,z)$,

тоді відповідні формули для обчислення площі поверхні обчислюються у так

$$\sigma = \iint_{D'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)^2}\,dydz. \qquad (44')$$

$$\sigma = \iint_{D''} \sqrt{1+\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2}\,dxdz. \qquad (44'')$$

де D' і D'' є області у площинах yOz і xOz, на які проектується дана поверхня.

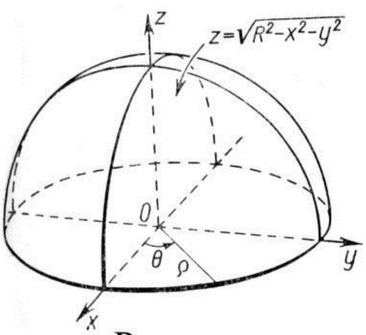

Рис. 27

Приклад 1. *Обчислити площу поверхні сфери (Рис. 27)* $x^2+y^2+z^2=R^2$.

► Обчислимо площу поверхні верхньої півсфери:

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. В цьому випадку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Звідки: $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Область інтегрування визначається умовою $x^2+y^2 \le R^2$.

Отже, за формулою (44) дістанемо:

$$\frac{1}{2}\sigma = \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dy\right)dx$$

Щоб обчислити отриманий інтеграл, застосуємо полярну систему координат. У полярній системі координат границя інтегрування визначається рівнянням $\rho = R.$ Звідси:

$$\sigma = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho\right)d\theta = 2R\int_0^{2\pi}\left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)\Big|_0^R d\theta \qquad \sigma = 2R\int_0^{2\pi} Rd\theta = 4\pi R^2. ◄$$

Приклад 2. *Обчислити площу тієї частини поверхні циліндра* $x^2+y^2=a^2$, *яка відсікається циліндром* $x^2+z^2=a^2$.

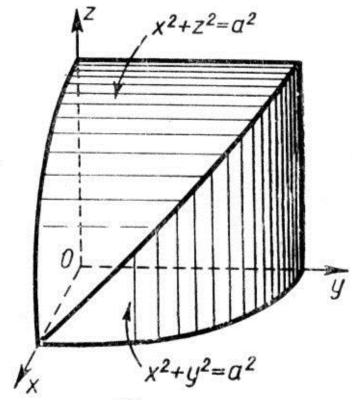

Рис. 28

► На Рис. 28 показана $1/8$ - частина необхідної поверхні. Рівняння поверхні має вид $y=\sqrt{a^2-x^2}$, тому

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Область інтегрування є чверть кола, тобто вона визначається умовами

$$x^2+z^2 \le a^2, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0.$$

Відповідно:

$$\frac{1}{8}\sigma = \int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{adz}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = a\int_0^a\left(\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a\int_0^a dx = a^2.$$

Отже, $\sigma = 8a^2$. ◄

Приклад 3. *Обчислити площу поверхні конуса* $y=2\sqrt{x^2+z^2}$ *, яка розташована всередині циліндра* $x^2+z^2=4x$ (Рис. 29).

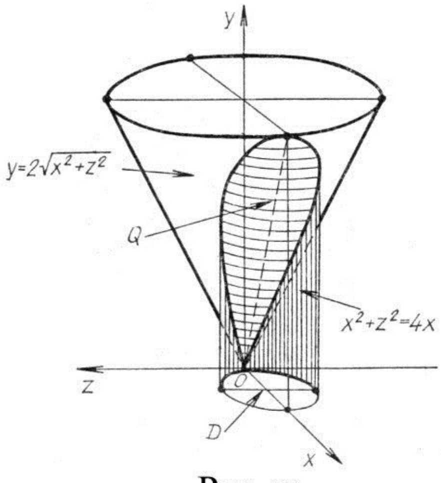

Рис. 29

► Оскільки поверхня задана функцією $y=f(x,z)$, то її площа може бути обчислення за формулою (44").

Проекцією області D є коло, обмежене кривою, оскільки

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{\sqrt{x^2+z^2}},$$

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1+\frac{4x^2}{x^2+z^2}+\frac{4z^2}{x^2+z^2}}dxdz =$$

$$= \sqrt{5}\iint_D dxdz = \left\|\begin{matrix} z=\rho\cos\varphi, \rho = 4\sin\varphi \\ x=\rho\sin\varphi, dxdz=\rho d\rho d\varphi\end{matrix}\right\| = \sqrt{5}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{4\sin\varphi}\rho d\rho = 8\sqrt{5}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{5}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 4\sqrt{5}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 4\pi\sqrt{5}. ◄$$

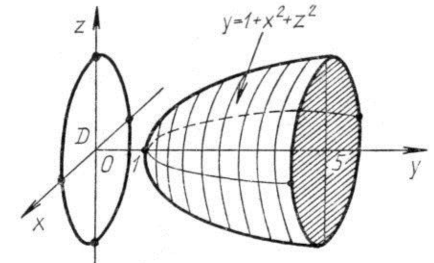

Рис. 30

Приклад 4. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:* $y = 1 + x^2 + z^2$, $y = 5$. *(Рис. 30)*

► Дане тіло обмежене параболоїдом обертання навколо вісі Oy і площиною $y = 5$, яка перпендикулярна осі Oy. Проекція цього тіла на площині xOz є коло, яке визначається рівняннями $y = 0$, $x^2 + z^2 \le 4$. Застосовуючи формулу (20) знайдемо об'єм тіла.

$$v = \iint_D (5 - 1 - x^2 - z^2) dxdy = \iint_D (4 - x^2 - z^2) dxdy$$

Перейдемо до полярної системи координат в інтегралі користуючись такими формулами: $x = \rho \cos\varphi$, $z = \rho \sin\varphi$,
тоді $dxdz = \rho d\rho d\varphi$ і

$$V = \iint_D (4 - \rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4\rho - \rho^4) d\rho = 2\pi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 8\pi \,.\ V = 8\pi$$ ◄

Практичні заняття - 2.3

1. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого площинами:* $z = 0, y + z = 2$ *і циліндром* $y = x^2$.

2. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого площиною:* $z = 0$ *і параболоїдом* $z = 3 - x^2 - y^2$.

3. *Обчислити об'єм тіла, який відсікається циліндром* $x^2 + y^2 = Rx$ *від сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Обчислити об'єм тіла, який обмежений такими поверхнями

4. $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 4, z = x^2 + y^2 + 1.$

5. $z = 0, \quad x^2 + y^2 = R, \quad x^2 + y^2 = z^2.$

6. $x^2 + y^2 - az = 0, \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right), z = 0 \left(a > 0\right).$

7. $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$

8. $2az = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2.$

9. *Обчислити площу частини поверхні площини* $x + y + z = a$, *яка відсікається циліндром* $y^2 = ax$ *і площиною* $x = a$.

10. *Обчислити площу частини поверхні циліндра* $x^2 + z^2 = a^2$, *яка відсікається циліндром* $y^2 = a(a - x)$.

11. *Обчислити площу частини поверхні конуса* $x^2 + z^2 = y^2$, *яка відсікається площинами* $x = 0$, $x + y = 2a$, $y = 0$.

12. *Обчислити площу частини поверхні циліндра* $x^2 + y^2 = 2ax$, *яка відсікається циліндром* $z^2 = 2a(2a - x)$.

13. *Обчислити площу частини поверхні сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, *яка відсікається циліндром* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \left(a > b\right)$.

14. *Обчислити площу частини поверхні конуса* $x^2 + y^2 = z^2$, *яка відсікається циліндром* $x^2 + y^2 = 2ax$.

15. *Обчислити площу частини поверхні площі* $x+y+z=2a$, *яка розташована у першому октанті і обмежена циліндром* $x^2+y^2=a^2$.

16. *Обчислити площу частини поверхні параболоїда* $x^2+z^z=2ax$, *яка обмежена параболічним циліндром* $y^2=ax$ *і площиною* $x=a$.

17. *Обчислити площу частини поверхні параболоїда* $x^2+y^2=z$, *яка лежить між параболоїдами* $z=3x^2+y^2-2$ *і* $z=3x^2+y^2-4$.

18. *Обчислити площу частини поверхні сфери* $x^2+y^2+z^2=1$, *яка лежить між площинами* $z=\frac{\sqrt{3}}{2}y, z=y\left(z\geq 0, y\geq 0\right)$.

Самостійна робота

I	***1.*** *Обчислити площу частини поверхні сфери* $x^2+y^2+z^2=a^2$, *яка відсікається циліндром* $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.
	2. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями* $y=x^2,\quad z=y,\quad x+y=2.$
II	***1.*** *Обчислити площу частини поверхні циліндра* $x^2+y^2=a^2$, *яка лежить між площинами* $z=mx$ *і* $z=0$.
	2. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями циліндра* $y^2+z^2=x$ *і площинами* $x=y, z=0.$
III	**1.** *Обчислити площу частини поверхні циліндра* $x^2+y^2=2ax$, *яка лежить між площиною* $z=0$ *і конусом* $x^2+y^2=z^2$..
	2. *Обчислити об'єм тіла обмеженого сферою* $x^2+y^2+z^2=a^2$ *і циліндром* $x^2+y^2=R^2, a>R.$

§ 6. *Механічні застосування подвійного інтеграла*

6.1. Маса плоскої фігури.

Нехай маса розподілена по замкненій області D, яка лежить у площині xOy з поверхневою щільністю деякою неперервною функцією $\mu(x,y)$. Ця маса утворює деяку неоднорідну площину. Знаючи поверхневу щільність $\mu(x,y)$ маси в кожній точці (x,y) $\in D$, обчислимо масу пластини.

Для цього беремо (T) розбиття області $D=D_{i=0}^{n}$. У замкненій кожній області D_i беремо точку P_i; тоді $\mu(P_i)$ є поверхнева щільність в точці P_i.

З точністю до нескінченно малих більш високого порядку добуток $\mu(P_i)\Delta s_i$ дає наближене значення величини маси області D_i. Тоді сума

$$S(T,\mu)=\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

дістане наближене значення маси пластини. Якщо найбільший діаметр областей D_i ($i=\overline{1,n}$) позначимо через $\lambda(T)$, то при $\lambda(T)\to 0$, то сума $S(T,\mu)$ буде дорівнювати подвійному інтегралу $\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$, тобто

$$m=\lim_{\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Таким чином, маса матеріальної пластини дорівнює подвійному інтегралу по області D від функції $\mu(x,y)$, яка виражає поверхневу щільність маси.

Приклад 1. *Визначити масу кругової пластини радіуса R, якщо поверхнева щільність $\mu(x,y)$ матеріальної площини у кожній $P(x,y)$ пропорційна відстані до точки (x,y) від центра кола, тобто $\mu(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$.*

► За формулою (1), маємо

$$m=\iint\limits_D k\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

де область інтегрування D є коло $x^2+y^2\le R^2$.

Переходячи до полярної системи координат, маємо

$$m=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^2d\rho=k2\pi\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^R=\frac{2}{3}k\pi R^3. \blacktriangleleft$$

6.2. Момент інерції площі плоскої фігури

Момент інерції I матеріальної точки M з масою m відносно деякої точки O дорівнює добутку маси m на квадрат відстані r від точки O: $I=mr^2$

Нехай область D розташована у площині xOy (Рис. 31). Визначимо момент інерції відносно початку координат.

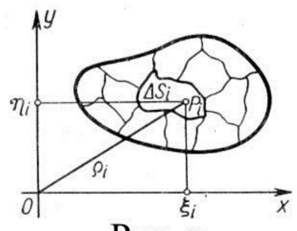

Рис. 31

Знову візьмемо розбиття (T) області $D=\{D_i\}_{i=1}^n$ і в кожній області візьмемо по одній точці $P_i(\xi_i,\eta_i)\in D_i$. Назвемо добуток маси області D_i на квадрат відстані від початку координат $r_i^2=\xi_i^2+\eta_i^2$ елементарним моментом інерції ΔI_i області D_i

$$\Delta I_i=\left(\xi_i^2+\eta_i^2\right)\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

і утворимо суму цих моментів

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2+\eta_i^2\right)\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

Ми дістали інтегральну суму функції

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\mu(x,y)$$

по області D.

Якщо максимальний діаметр елементарної області D_i прямує до нуля, то ми дістанемо момент інерції фігури D як границю інтегральних сум

Отже, момент інерції фігури відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy, \qquad (2)$$

де D є область яка збігається з даною плоскою фігурою

Інтеграли

$$I_{xx} = \iint\limits_D y^2 \mu(x,y)dxdy \qquad (3)$$

$$I_{yy} = \iint\limits_D x^2 \mu(x,y)dxdy \qquad (4)$$

називаються, відповідно, моментами інерції фігури D відносно осі x і відносно осі y.

Приклад 2. *Обчислити момент інерції площі однорідного круга D радіуса R відносно центра O.*

► За формулою (2) маємо:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$$

Для обчислення інтегралу перейдемо до полярних координат θ, ρ. Рівняння кола у полярних координатах є $\rho = R$. Отже:

$$I_0 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Обчислити момент інерції площі матеріальної фігури D, яка обмежена лініями $y^2 = 1 - x, x = 0, y = 0$ відносно осі Oy, якщо поверхнева щільність у кожній точці дорівнює y.*

► $$I_{xx} = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{24}. \blacktriangleleft$$

6.3. Координати центру гравітації площі плоскої фігури

Визначимо координати центру гравітації плоскої фігури D. Щільність плоскої фігури $\mu(x,y)$. Використовуючи відповідні формули з курсу фізики, дістанемо:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}. \qquad (5)$$

Вирази $M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy$ і $M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$ називаються статичними моментами плоскої фігури D відносно осі Ox і Oy. Інтеграл $\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$ виражає величину маси фігури.

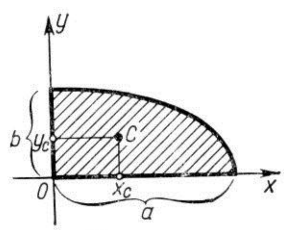

Рис. 32

Приклад 4. *Визначити координати центру гравітації чверті еліпса (Рис. 32) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, покладаючи, що поверхнева щільність у всіх точка дорівнює 1.*

► За формулами (5) маємо $$x_c = \frac{\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xdy}{\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{-\frac{b}{3a}(a^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y dy}{\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy} = \frac{4b}{3\pi}, \quad x_c = \frac{4a}{3\pi}, y_c = \frac{4b}{3\pi}. \blacktriangleleft$$

Практичні заняття - 2.4

1. *Обчислити масу плоско-паралельного шару кола радіуса* a, *якщо щільність у кожній точці P обернено пропорційна відстані до точки P від вісі циліндра (k є пропорційний множник).*

2. *Обчислити координати центру гравітації рівностороннього трикутника, якщо висотою є вісь* Ox, *а вершина трикутника розташована у початку координат.*

3. *Обчислити центр гравітації однорідної фігури, яка лежить у площині* xOy *і обмежена* $y^2 = 4x + 4, \quad y^2 = -2x + 4$.

4. *Обчислити центр гравітації фігури, яка лежить у площині* xOy *і обмежена лініями* $x^2 = y$ *і* $y^2 = x$, *якщо* $\mu(x, y) = xy$.

5. *Обчислити центр гравітації однорідної фігури, яка лежить у площині* xOy *і обмежена кардіоїдою* $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

6. *Обчислити момент інерції фігури відносно початку координат, яка обмежена лініями* $y = x^2$, $y = 1$ *і щільністю* $\mu(x, y) = x^2 y$.

7. *Обчислити момент інерції еліпса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

a) відносно вісі Oy ; *b) відносно початку координат* .

8. *Обчислити момент інерції відносно полюса фігури, яка обмежена колом* $\rho = 2a\cos\theta$.

9. *Обчислити момент інерції відносно полюса площі кардіоїди* $\rho = a(1 + \cos\theta)$

10. *Обчислити момент інерції відносно вісі* Oy *площі кола* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2a^2$

Самостійна робота

I	*Обчислити момент інерції однорідної фігури, яка обмежена лініями* $x + y = 2, x = 2, y = 2$ *відносно початку координат*.
II	*Обчислити координати центра гравітації однорідної фігури, яка обмежена лініями* $y = -x^2, \ y = 0$.
III	*Обчислити момент інерції площі прямокутника відносно перетину діагоналей, якщо довжини сторін дорівнюють 4 і 6 лінійним одиницям, а* $\mu(x, y) = 2$.

§ 7. *Потрійні інтеграли*

Нехай задана у просторі деяка обмежена поверхньою S область V. Нехай задана деяка неперервна функція $f(x,y,z)$, де x,y,z прямокутні координати області, в області V і на її границі.

Розіб'ємо область V довільним чином на області Δv_i; систему Δv_i будемо вважати елементами об'єму. Виберемо довільну точку P_i у кожній області Δv_i і знайдемо значення функції $f(P_i)$ в цих точках і утворимо інтегральну суму типу

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i \qquad (6)$$

Збільшимо без обмежень число областей Δv_i так, щоб найбільший діаметр Δv_i прямував до нуля. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна, тоді границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття область V, ні від вибору точки P_i і позначається символом $\iiint\limits_V f(P)dv$, *і називають потрійним інтегралом.* Тобто:

$$\lim_{diam\Delta v_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i = \iiint\limits_V f(P)dv$$

або

$$\iiint\limits_V f(P)dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz \qquad (7)$$

Якщо $f(x.y,z)$ розглядати як об'ємну густину у кожній підоблості області V, то інтеграл (7) визначає масу тіла, яка знаходиться в області V.

§ 8. *Обчислення потрійного інтеграла*

Припустимо, що довільна (трьохвимірна) область V обмежена замкненою поверхнью S і задовольняє таким властивостям:

1^0) *будь-яка пряма лінія паралельна вісі Oz проведена через внутрішні точки (які не лежать на межі S) області V перетинають поверхню S в двох точках;*

2^0) *внутрішні точки області V проектуються на площину xOy (двомірну) область D;*

3^0) *всяка частина області V перетинається площиною, паралельною будь-якій координатній площині (xOy, xOz, yOz), що відповідають властивостям* ***1^0*** *і* ***2^0*.**

Область V яка відповідає вище визначеним властивостям будемо *називати регулярною трьохвимірною областю..*

Наприклад: еліпсоїд, прямокутний паралелепіпед, тетраедр та інші є регулярні тривимірні області.

Нерегулярна тривимірна область приведена на Рис.33.

Нехай область V обмежена знизу поверхнею, яка задана рівнянням $z=\chi(x,y)$, а зверху рівнянням $z=\phi(x,y)$ (Рис. 34)

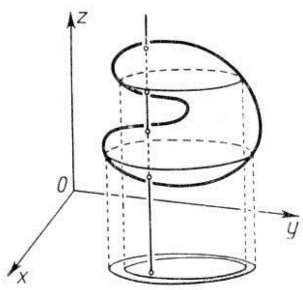

Рис. 33

Введемо поняття кратного повторного інтегралу I_V по області V функції від трьох змінних $f(x,y,z)$, яка визначена і неперервна в області V. Покладаємо, що область D є проекція області V на площину xOy і обмежена лініями

$$y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x), x=a, x=b.$$

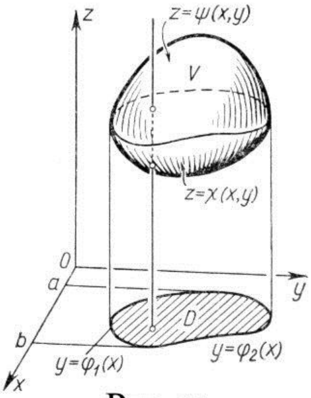

Рис. 34

Тоді потрійний повторний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ по області V визначається наступним чином:

$$I_V = \iint_D ds \int_{\chi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{\chi(x,y)}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dy \right] dx \quad (8)$$

Зауважимо, що результат інтегрування відносно z і, підставляючи межі у дужках (внутрішніх дужках), дістанемо функцію від x і y. Тоді обчислюємо подвійний інтеграл від цієї функції по області D за правилами, які були визначені раніше.

Зауваження 1. *Якщо область* V *є прямокутний паралелепіпед,* $\{a_1 \le x \le a_2,\quad b_1 \le y \le b_2,\quad c_1 \le z \le c_2\}$, тоді

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \quad (9)$$

Зауваження 2. *Якщо* $f(x,y,z) = f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$ *і область* V *є прямокутний паралелепіпед, то формула (9) прийме вид:*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} f_1(x)dx \int_{b_1}^{b_2} f_2(y)dy \int_{c_1}^{c_2} f_3(z)dz, \quad (10)$$

Тобто, *потрійний інтеграл дорівнює добутку інтегралів від кожної змінної*

Приклад 1. *Обчислити потрійний інтеграл від функції* $f(x,y,z) = xyz$ *по області* V, *яка обмежена площинами*: $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1.$

► Дана область регулярна. Вона обмежена знизу і зверху площинами $z=0$ і $z=1-x-y$ і проектується на площину xOy в область D, яка є трикутник, обмежений прямими $x=0, y=0$, $y=1-x$. Тоді потрійний інтеграл I_V обчислюється таким чином:

$$I_V = \iint_D \left[\int_0^{1-x-y} xyzdz \right] ds$$

Встановлюючи межи інтегрування за областю D, дістанемо:

$$I_V = \int_0^1 \left\{ \int_1^{1-x} \left[\int_o^{1-x-y} xyzdz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_1^{1-x} \left[\frac{xyz^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dy \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ \int_1^{1-x} xy(1-x-y)^2 \Big| dy \right\} dx = \frac{1}{12}\int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{360}. ◄$$

Приклад 2. *Обчислити потрійний інтеграл* $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ *по області, обмеженій площинами* $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

► Застосовуючи формулу (9), ми отримаємо:

$$\iiint_V (x+y+z)dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left. \frac{(x+y+z)^2}{2} \right|_0^1 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 \left[(x+y+1)^2 - (x+y)^2 \right] dy = \frac{1}{6}\int_0^1 \left. \left((x+y+1)^3 - (x+y)^3 \right) \right|_0^1 dx =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \left. \left((x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3 \right) \right|_0^1 dx = \frac{1}{6}\left[\frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 8 + \frac{1}{4} - 4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}. ◄$$

Приклад 3. *Обчислити потрійний інтеграл* $\iiint\limits_V x^3y^2zdxdydz$ *по області* V, *обмеженої площинами* $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2$, $z=2$, $z=5$

► Застосовуючи формулу (10) дістанемо:

$$\iiint\limits_V x^3y^2zdxdydz=\int\limits_1^3 x^3dx\cdot\int\limits_0^1 y^2dy\cdot\int\limits_2^5 zdz=\left(\frac{x^4}{4}\right)_1^3\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)_o^1\cdot\left(\frac{z^2}{2}\right)_2^5=\frac{1}{24}\cdot 80\cdot 25=\frac{250}{3}. ◄$$

Властивість 1. *Якщо область* V *поділена на дві області* V_1 *і* V_2 *площинами, паралельними будь-яким координатним площинам, тоді потрійний інтеграл по області* V *дорівнює сумі потрійних інтегралів за областями* V_1 *і* V_2.

Наслідок. *Для будь-якого розбиття області на скінченне число областей* $V_1,\ V_2,\ ...,\ V_n$ *паралельними координатними площинами, дістанемо рівність*

$$I_V=I_{V_1}+I_{V_2}+...+I_{V_n}.$$

Властивість 2. *(Теорема про оцінку потрійного інтеграла). Якщо* m *і* M *відповідно є найменше і найбільше значення функції* $f(x,y,z)$ *в області* V, *ми дістанемо нерівність*

$$mV\le I_V\le MV,$$

де V *є об'єм даної області, а* I_V *є потрійний повторний інтеграл функції* $f(x,y,z)$ *по області* V.

Властивість 3. (*Теорема про середнє значення) Потрійний повторний інтеграл* I_V *неперервної функції* $f(x,y,z)$ *по області* V *дорівнює добутку його об'єму* V *на значення функції у деякій точці* P *області* V; *тобто:*

$$I_V=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dy\right\}dx=f(P)\cdot V.$$

8.1. Обчислення об'єму тіла, застосовуючи потрійні повторні інтеграли

Якщо підінтегральна функція $f(x,y,z)=1$, тоді потрійний інтеграл по області V виражає *об'єм області* V:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$

Приклад. *Обчислити об'єм еліпсоїда* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

► Еліпсоїд (Рис. 35) обмежений зверху поверхнею $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$, а знизу $z=-c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

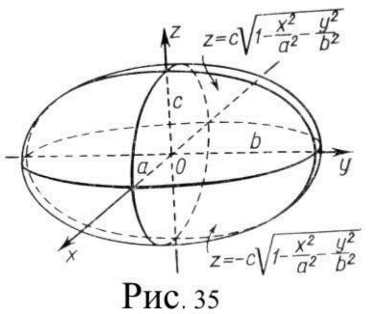

Рис. 35

Проекція еліпсоїда на площину xOy (область D) є еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Звідси потрійний повторний інтеграл набуває такого вигляду

$$V=\int\limits_a^b\left\{\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left[\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right]dy\right\}dx.$$

Обчислюючи внутрішній інтеграл, покладаємо, що x є постійна величина. Введемо підстановку

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin t, \quad dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t dt.$$

Змінна y змінюється від $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ до $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$; тому t змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Підставляючи нові границі у інтеграл, дістанемо

$$V = 2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\, b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t dt\right]dx =$$

$$= 2bc\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt\right]dx = \frac{bc\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Отже, $V = \frac{4}{3}\pi abc.$

Якщо $a = b = c,$ дістанемо об'єм сфери $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ ◄

Практичні заняття - 2.5

1. *Обчислити* $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(x+y+z\right)^2}$, *якщо область інтегрування обмежена координатними площинами і площиною* $x+y+z=1.$

2. *Обчислити* $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, *якщо область інтегрування обмежена координатними площинами і сферою* $x^2+y^2+z^2=1.$

3. *Обчислити* $\iiint\limits_V xdxdydz$, *якщо область інтегрування обмежена площинами* $z=0, z=3$ *і циліндром* $x^2+y^2=1.$

Обчислити такі інтеграли:

4. $\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_{\sqrt{xy}}^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$ **5.** $\int_0^3 dx\int_0^{2x} dy\int_0^{\sqrt{xy}} zdz$ **6.** $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax}} ydy\int_{a-x}^{2(a-x)} dz$

7. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$**,** $V = \left\{y=x^2, x=y^2, z=xy, z=0\right\}.$

У задачах 8 і 9 визначити межі інтегрування для інтеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ ***за відповідними областями****:*

8. *Область* V *обмежена конусом* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ *і площиною* $z=c.$

9. *Область* V *обмежена поверхнями* $z=1-x^2-y^2, z=c.$

10. *Обчислити об'єм тіла обмеженого поверхнями* $y=x^2, y+z=4, z=0.$

11. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями* $x^2+y^2=10x,\ x^2+y^2=13x,\ z=\sqrt{x^2+y^2}, y\ge 0.$

12. *Обчислити об'єм частини сфери* $x^2+y^2+z^2=1$, *яка розташована в середині конуса* $z^2=x^2+y^2.$

Самостійна робота

I	**1**. *Визначити межі інтегрування інтеграла* $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$, *якщо область* V *обмежена площинами* $x=0, y=0, z=0, 2x+3y+4z=12.$
	2. *Обчислити* $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, *якщо* V *обмежена поверхнями:* $z=x^2+y^2$, $z=1$.
II	**1.** *Визначити межі інтегрування інтеграла* $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$, *якщо область* V *обмежена площинами* $y=2x, y=x, z=0, x+z=2.$
	2. *Обчислити* $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, *якщо* V *обмежена поверхнями*: $y=x^2+z^2$, $y=1$.
III	**1.** *Визначити межі інтегрування інтеграла* $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$, *якщо область* V *обмежена поверхнями:* $y=x^2$, $z=0$, $y+z=4.$
	2. *Обчислити об'єм тіла, який обмежений поверхнями* $x^2+y^2=9, z=1, x+y+z=11.$

§ 9. *Заміна змінних у потрійному інтегралі*

Перетворення Декартової системи координат до циліндричних і сферичних координат у потрійному інтегралі представляють спеціальний випадок загального перетворення координат у просторі.

Нехай функції

$$x = x(u,v,w) \qquad y = y(u,v,w) \quad z = z(u,v,w)$$

взаємно однозначно відображають область V у Декартовій системі координат x,y,z у область V' у криволінійній системі координат $u,v,w.$ Нехай елемент об'єму Δv області V переходить до елементу об'єму $\Delta v'$ області V' і нехай

$$\lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |J|,$$

то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)|J|dudvdw$$

Як і у випадку подвійного інтеграла, J називається Якобяном. Аналогічно випадку подвійного інтеграла можна довести, що Якобян чисельно дорівнюється функціональному детермінанту третього порядку:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

9.1. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах

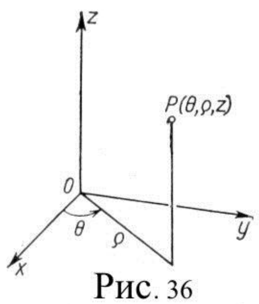

Рис. 36

У випадку циліндричних координат положення точки P у просторі визначається трьома числами $\theta, \quad \rho, \quad z$, де θ і ρ полярні координати проекції точки P на площину xOy і z є координата z точки P, тобто відстань від точки P до площини xOy; із знаком плюс, якщо точка розташована над площиною xOy, і мінус – якщо нижче площини xOy. Рис.36

У цьому випадку поділимо трьохвимірну область V на елементарні об'єми з поверхневими координатами $\theta=\theta_i$, $\rho=\rho_j$, $z=z_k$ (півплощини з'єднується з віссю Oz, круговий циліндр, вісь якого збігається з віссю Oz, площини перпендикулярні вісі Oz). Криволінійна «призма» наведена на Рис 37. Елемент об'єму є об'єм криволінійної призми. Отже маємо:

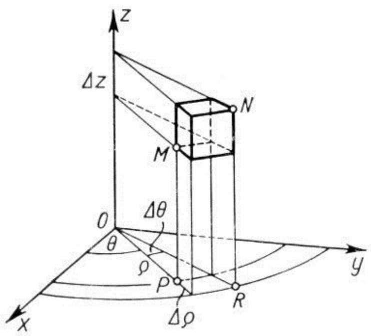

Рис. 37

$$\Delta v=\frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)\Delta\theta\Delta z-\frac{1}{2}\rho\Delta\theta\Delta z$$

$$\Delta v=\rho\Delta\rho\Delta\theta\Delta z-\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\Delta\theta\Delta z$$

Відкидаючи нескінченно малі величини більш високого порядку, дістанемо

$$\Delta v=\rho\Delta\theta\Delta\rho\Delta z$$

Отже, потрійний інтеграл функції $F(\theta,\rho,z)$ по області V' набуває вигляду:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} F(\theta,\rho,z)\rho d\rho d\theta dz \qquad (11)$$

Границі інтегрування визначаються за формою області V.

Якщо потрійний інтеграл функції $f(x,y,z)$ заданий у Декартовій системі координат, ми можемо звести до потрійного інтеграла в циліндричній системі координат, враховуючи, що

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad z=z,$$
$$\{0\le\rho<\infty, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad -\infty<z<+\infty\}$$

дістанемо:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz.$$

9.2. Потрійний інтеграл у сферичній системі координат

У сферичній системі координат положення точки P у просторі визначається трьома числами θ, r, φ де r є відстань від початку координат до точки у просторі, так званий радіус-вектор точки; φ є кут між радіусом вектором і віссю Oz; θ - кут між проекцією радіус-вектора на площину xOy і додатним напрямком вісі Ox, рухаючись у додатному напрямку (Рис. 38). Для будь-якої точки у просторі маємо

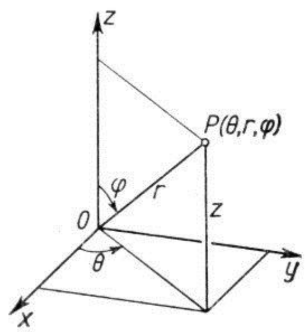

Рис. 38

$$0\le r<\infty, \qquad 0\le\varphi\le\pi; \quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Виділимо у області V елемент об'єму Δv координатними поверхнями $r=const$ (сфера), $\varphi=const$ (конічна поверхня з вершиною у початку координат), $\theta=const$ (півплощина яка проходить через вісь Oz). З точністю до скінчено малих більш високого порядку елемент об'єму Δv можна розглядати як паралелепіпед з ребрами довжини Δr, $r\Delta\varphi$, $r\sin\varphi\Delta\theta$, тоді елемент об'єму буде дорівнювати

$$\Delta v = r^2 \sin\theta \Delta r \Delta\theta \Delta\varphi$$

Потрійний інтеграл функції $F(\theta, r, \varphi)$ за областю V набуває вигляду

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V F(\theta,r,\varphi)r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi \qquad (12)$$

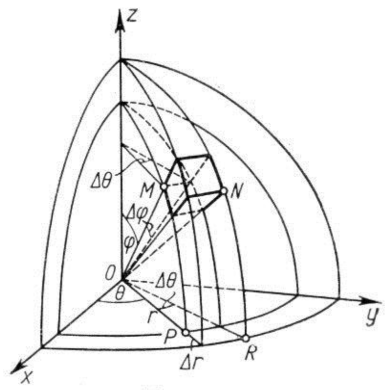

Рис. 39

Границі інтегрування визначаються сферою області V. Беручи до уваги Рис. 38, легко встановити відповідність між координатами у декартовій системі координат і сферичними координатами:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi.$$

У цьому випадку формула переходу потрійного інтеграла від декартової системі координат до потрійного інтеграла у сферичній системі координат набуває такого вигляду:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\cos\varphi)r^2 drd\theta d\varphi.$$

Практичні заняття - 2.6

Обчислити такі інтеграли, переходячи до циліндричних координат

1. $\iiint\limits_V ydxdydz$, $\quad V = \left\{x^2 + y^2 \le a^2, z \ge 0, z \le h\right\}$

2. $\iiint\limits_V zdxdydz$ $\quad V = \left\{x^2 + y^2 \le z^2, z \ge 0, z \le a\right\}$

3. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$ $\quad$ **4.** $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dx \int\limits_y^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\frac{x^2-y^2}{a}} \sqrt{x^2+y^2}dz$

5. $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{h}{a^2}\left(x^2+y^2\right)}^{h} \sqrt{x^2+y^2}dz$ $\quad$ **6.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}^{2} (x^2+y^2)dz$

Переходячи до сферичних координат обчислити такі інтеграли

7. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V = \left\{a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4a^2\right\}$

8. $\iiint\limits_V xyz^2dxdydz$, $\quad V = \left\{x^2+y^2+z^2 \le 1, x>0, y>0, z>0\right\}$

9. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **,** $V = \left\{x^2+y^2+z^2 \le z\right\}$

10. $\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$, **11.** $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} zdz,$

12. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{z}dz.$

Самостійна робота

Обчислити наведені інтеграли, якщо область V обмежена відповідними поверхнями

I	**1.** $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz,\ V=\left\{z\le 2,\quad x^2+y^2\le 2z\right\}$
	2. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ V=\left\{x^2+y^2+z^2\le z\right\}$
II	**1.** $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,\ V=\left\{0\le z\le a,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 2x\right\}$
	2. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{a-x^2-y^2-z^2}},\ V=\left\{x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0\ x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}$
III	**1.** $\iiint\limits_V zdxdydz,\ V=\left\{z\le h,\quad z^2\ge \frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\right\}$
	2. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz, V=\left\{R_1^2\le x^2+y^2+z^2\le R_2^2,\ R_1\le R_2\right\}$

Практичні заняття - 2.7

Обчислити об'єм тіла, обмеженого відповідними поверхнями:

1. $z=6-x^2-y^2$ і $z^2=x^2+y^2\ \left(z\ge 0\right)$
2. $z=x^2+y^2,\quad z=1.$
3. $2az=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=2ax,\quad z=0.$
4. $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=ax,\quad z=0.$
5. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=16, z=0, z^2=x^2+y^2, \\ x=0, y=0, z=0\left(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right). \end{cases}$
6. $az=x^2+y^2,\quad \sqrt{x^2+y^2}=z,\quad (a>0).$
7. $x^2+y^2+z^2=2az,\quad x^2+y^2\le z^2.$
8. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=b^2, z=0, \\ z^2=x^2+y^2, z\ge 0\quad \left(0\le a\le b\right). \end{cases}$
9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$

Самостійна робота

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

I	$x^2+y^2=2x,\quad x^2+y^2=2y,\quad x+2y=z,\quad z=0.$
II	$x^2+y^2=z,\quad x^2+2y^2=z,\quad y=x,\ y=2x,\ x=1.$
III	$x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2,\quad 4\left(x^2+y^2\right)=z^2.$

§ 10. *Момент інерції і координати центра гравітації тіла.*

10.1. Момент інерції тіла .

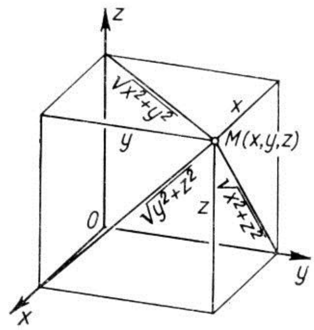

Fig. 40

Момент інерції матеріальної точки $M(x,y,z)$ з масою m відносно вісей координат Ox, Oy і Oz (Рис. 40) виражаються відповідно, формулами $I_{xx} = (x^2+z^2)m,\quad I_{yy} = (x^2+z^2)m,$ $I_{zz} = (x^2+y^2)m.$

Моменти інерції тіла виражаються відповідно такими інтегралами

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\mu(x,y,z)dxdydz.$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz,$$

де $\mu(x,y,z)$ є рідина субстанції.

Приклад 1. *Обчислити момент інерції однорідної області кругового циліндра з висотою* $2h$ *і радіуса* R *відносно діаметра середнього перерізу, густина якого дорівнює* γ_0.

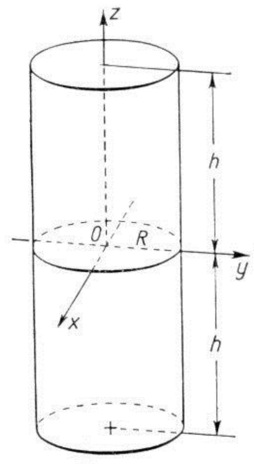

Рис. 41

► Виберемо координатну систему таким чином: сумістимо вісь Oz з віссю циліндра, а початок координат вважатимемо центром симетрії (Рис. 41). Тоді задача зводиться до обчислення моменту інерції циліндра відносно вісі Ox :

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\gamma_0 dxdydz.$$

Переходячи до циліндричної системи координат, дістанемо:

$$I_x = \gamma_0 \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R\left[\int_o^h \left(z^2\rho^2\sin^2\theta\right)dz\right]\rho d\rho\right\}d\theta =$$

$$= \gamma_0 \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R\left[\frac{2h^2}{3} + 2h\rho^2\sin^2\theta\right]\rho d\rho\right\}d\theta =$$

$$= \gamma_0\left[\frac{2h^3R^2}{6}2\pi + \frac{2hR^4}{4}\pi\right] = \gamma_0\pi hR^2\left[\frac{2}{3}h^2 + \frac{R^2}{2}\right]. \blacktriangleleft$$

10.2. Координати центра гравітації тіла

Розмірковуючи аналогічно, як і у випадку плоскої фігури, координати центра гравітації тіла у просторі визначаються наступними формулами:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\mu(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz},\ y_c = \frac{\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz},\ z_c = \frac{\iiint\limits_V z\mu(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz},$$

де $\mu(x,y,z)$ густина субстанції.

Вирази

$$M_x = \iiint\limits_V x\mu(x,y,z)dxdydz,\ M_y = \iiint\limits_V y\mu(x,y,z)dxdydz,\ M_z = \iiint\limits_V z\mu(x,y,z)dxdydz,$$

називаються статичними моментами тіла V відносно координатних площин yOz, zOx і xOy відповідно. Інтеграл $\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz$ виражає величину маси тіла V.

Приклад 2. *Визначити координати центра гравітації верхньої півсфери радіуса* $\boldsymbol{R}$ *з центром у початку координат, вважаючи густину постійною* γ_0.

► Півсфера обмежена поверхнями $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ і $z = 0.$ Координата гравітації z задається формулою

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma_0 dxdydz}{\iiint\limits_V \gamma_0 dxdydz}.$$

Переходячи до сферичної системи координат, дістанемо:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^R r\cos\varphi r^2 \sin\varphi dr \right] d\varphi \right\} d\theta}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^R r^2 \sin\varphi dr \right] d\varphi \right\} d\theta} = \frac{2\pi R^4 6}{32\pi R^3} = \frac{3}{8}R.$$

Очевидно, що в силу симетричності півсфери $x_c = y_c = 0.$

Практичні заняття – 2.8

1. *Обчислити координати цента гравітації і моменти інерції піраміди, яка обмежена площинами* $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2. *Обчислити момент інерції кругового правильного конуса відносно його вісі. Висота конуса дорівнює* h, *а радіус основи конуса* R.

3. *Обчислити момент інерції кругового правильного конуса відносно діаметра основи.*

4. *Обчислити координати центра гравітації тіла, обмеженого сферою радіуса* a *і конічною поверхнею з кутом при вершині* 2α, *якщо вершина конуса збігається з центром сфери. (*Oz *є вісь конуса і вершина лежить у початку координат).*

5. *Обчислити координати центра гравітації тіла обмеженого сферою радіуса* a *і двома площинами, які проходять через центр сфери і утворюють кут в* 60^0. *(за лінію перетину площин прийняти вісь* Oz, *а центр сфери початок координат).*

6. *Знайти масу* m *прямокутного паралелепіпеда* $0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le b,\quad 0 \le z \le c$, *якщо густина в точці* (x, y, z) *є* $\mu(x, y, z) = x + y + z$.

7. *Знайти масу* m *тіла, яке обмежене поверхнями* **s:** $x^2 + y^2 + z^2 \le c^2,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0,\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

8. *Обчислити центр гравітації тіла, який обмежений параболоїдом* $y^2 + 2z^2 = 4x$ *і площиною* $x = 2$.

Самостійна робота

I	*Знайти масу* m *тіла, обмеженого площинами* $x + y + z = 2,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,$ *якщо густина тіла є* $\mu(x, y, z) = 1/(x + y + z)^4$.
II	*Обчислити момент інерції тіла, обмеженого площинами* $x + 2y - z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ *відносно площини* yOz, *якщо густина є* $\mu(x, y, z) = x$.
III	*Обчислити координати центра гравітації однорідного тіла, яке обмежена поверхнями:* $2z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Індивідуальні домашні завдання - 2.1

1. *Представити* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *у формі повторного інтеграла із зовнішнім інтегралом відносно* x *та із зовнішнім інтегралом відносно* y, *якщо область* D *обмежена лініями*

1.1. $D:\quad y=\sqrt{4-x^2},\quad y=\sqrt{3x},\quad x\ge 0.$
1.2. $D:\quad x^2=2y,\quad 5x-2y-6=0.$
1.3. $D:\quad x=\sqrt{8-y^2},\quad y\ge 0,\quad y=x$
1.4. $D:\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad y\le 1,\quad y=\ln x.$
1.5. $D:\quad x^2=2-y,\quad x+y=0.$
1.6. $D:\quad y=\sqrt{2-x^2},\quad y=x^2.$
1.7. $D:\quad y=x^2-2,\quad y=x.$
1.8. $D:\quad x\ge 0,\quad y\ge 1,\quad y\le 3,\quad y=x.$
1.9. $D:\quad y^2=2x,\quad x^2=2y,\quad x\le 1.$
1.10. $D:\quad x\ge 0,\quad y\ge x,\quad y=\sqrt{9-x^2}.$
1.11. $D:\quad y^2=2-x,\quad y=x.$
1.12. $D:\quad x=\sqrt{2-y^2},\quad x=y^2,\quad y\ge 0.$
1.13. $D:\quad y\ge 0,\quad x+2y-12=0,\quad y=\lg x.$
1.14. $D:\quad x\le 0,\quad y\ge 1,\quad y\le 3,\quad y=-x.$
1.15. $D:\quad y=0,\quad y\ge x,\quad y=-\sqrt{2-x^2}.$
1.16. $D:\quad y\ge 0,\quad x=\sqrt{y},\quad y=\sqrt{8-x^2}.$
1.17. $D:\quad y=-x,\quad y^2=x+3.$
1.18. $D:\quad y=\sqrt{4-x^2},\quad x\ge 0,\quad x=1,\quad y=0.$
1.19. $D:\quad x=-1,\quad x=-2,\quad y\ge 0,\quad y=x^2.$
1.20. $D:\quad y\le 0,\quad x^2=-y,\quad x=\sqrt{1-y^2}.$
1.21. $D:\quad y\ge 0,\quad y\le 1,\quad y=x,\quad x=-\sqrt{4-y^2}.$
1.22. $D:\quad x\le 0,\quad y=1,\quad y=4,\quad y=-x.$
1.23. $D:\quad y=3-x^2,\quad y=-x.$
1.24. $D:\quad x=0,\quad x=-2,\quad y\ge 0,\quad y=x^2+4.$
1.25. $D:\quad x=0,\quad y=0,\quad y=1,\quad (x-3)^2+y^2=1.$
1.26. $D:\quad x=\sqrt{9-y^2},\quad y=x,\quad y\ge 0.$
1.27. $D:\quad x+2y-6=0,\quad y=x,\quad y\ge 0.$
1.28. $D:\quad y=-x,\quad 3x+y=3,\quad y=3.$
1.29. $D:\quad x\ge 0,\quad y=1,\quad y=-1,\quad y=\log_{1/2}x.$
1.30. $D:\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad y=1,\quad x=\sqrt{4-y^2}.$

2. *Обчислити подвійний інтеграл по області* D, *яка обмежена даними*

2.1. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy, \quad D: y=x^2, \quad x=y^2.$
2.2. $\iint\limits_D xy^2dxdy, \quad D: y=x^2, \quad 2x=y.$
2.3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D: y=x, \quad x=y^2.$
2.4. $\iint\limits_D yx^2dxdy, \quad D: y=2-x, \quad x=y, \quad x\ge 0.$
2.5. $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy, \quad D: y=x^2-1, \quad x\ge 0, \quad y\le 0.$
2.6. $\iint\limits_D (y-x)dxdy, \quad D: y=x, \quad \frac{1}{2}x=y, \quad x=2.$
2.7. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy, \quad D: y=x^2, \quad y=1.$
2.8. $\iint\limits_D (y+x)dxdy, \quad D: y=x^2-1, \quad y=-x^2+1.$
2.9. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy, \quad D: y=5x, \quad x=y, \quad x=3.$
2.10. $\iint\limits_D (x-2)ydxdy, \quad D: y=x, \quad \frac{1}{2}x=y, \quad x=2.$
2.11. $\iint\limits_D (y+1)dxdy, \quad D: y^2=x, \quad 5y=x.$
2.12. $\iint\limits_D x^2ydxdy, \quad D: y=2x^3, \quad y=0, \quad x=1.$
2.13. $\iint\limits_D (y^2+x^2)dxdy, \quad D: y^2=x, \quad x=1.$
2.14. $\iint\limits_D xydxdy, \quad D: y=x^3, \quad y=0, \quad x\le 2.$
2.15. $\iint\limits_D (x+y)dxdy, \quad D: y=x^3, \quad y=8, \quad y=0, x=3.$
2.16 $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy, \quad D: y=1-x^2, \quad y\ge 0.$
2.17. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy, \quad D: x=y^3, \quad y=x.$
2.18. $\iint\limits_D xy^3dxdy, \quad D: 1-x=y^2, \quad x\ge 0.$
2.19. $\iint\limits_D x(x+5)dxdy, \quad D: y=x+5, \quad x+y+5=0, x\le 0.$
2.20. $\iint\limits_D (x-y)dxdy, \quad D: y=x^2-1, \quad y=3.$
2.21. $\iint\limits_D (x+1)y^2dxdy, \quad D: y=3x^2, \quad y=3.$
2.22. $\iint\limits_D xy^3dxdy, \quad D: y=x^3, \quad y\ge 0, \quad y=4x.$

2.23. $\iint\limits_D \left(x^3 + y\right)dxdy, \quad D: y + x = 1, x + y = 2, x \le 1, x \ge 0.$
2.24. $\iint\limits_D xy^2 dxdy, \quad D: y = x, \quad y = 0, \quad x = 1.$
2.25. $\iint\limits_D \left(x^3 + 3y\right)dxdy, \quad D: y + x = 1, \quad y = x^2 - 1, x \ge 0.$
2.26. $\iint\limits_D xydxdy, \quad D: y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x + y = 2.$
2.27. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2} dxdy, \quad D: y = x, \quad xy = 1, \quad y = 2.$
2.28. $\iint\limits_D y\left(x^2 + 1\right)dxdy, \quad D: y = x^3, \quad y = 3x.$
2.29. $\iint\limits_D y^2 (2x + 1)dxdy, \quad D: x = 2 - y^2, \quad x = 0.$
2.30. $\iint\limits_D e^y dxdy, \quad D: y = \ln x, \quad x = 2, \quad y = 0.$

3. *Обчислити подвійний інтеграл у полярній системі координат*

3.1	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dy$
3.2	$\int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$
3.3	$\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\tan\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$
3.4	$\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx$
3.5	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dy$
3.6	$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$
3.7	$\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2 + y^2} dy$
3.8	$\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \tan\left(x^2 + y^2\right) dy$
3.9	$\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\left(x^2 + y^2\right) dy$
3.10	$\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\left(x^2 + y^2\right) dy$

3.11	$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(1+x^2+y^2\right) dy$
3.12	$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy$
3.13	$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}$
3.14	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$
3.15	$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$
3.16	$\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$
3.17	$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$
3.18	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2} dy$
3.19	$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cot\sqrt{x^2+y^2}}$
3.20	$\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2} dy$
3.21	$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right) dy$
3.22	$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos\left(x^2+y^2\right) dy$
3.23	$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy$
3.24	$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\cdot e^{x^2+y^2} dy$
3.25	$\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) dy$
3.26	$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}\,0}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dy$
3.27	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$

3.28	$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$
3.29	$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy$
3.30	$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

4. *Обчислити площу області на площині, яка обмежена даними лініями*

4.1	D:	$y^2=4x,\quad x+y=3,\quad y\ge 0$
4.2	D:	$6x^2=y,\quad x+y=2,\quad x\ge 0$
4.3	D:	$y^2=x+2,\quad x=2$
4.4	D:	$x=-2y^2,\quad x=1-3y^2,\quad y\ge 0,\quad x\le 0$
4.5	D:	$y=8\big/(x^2+4),\quad x^2=4y$
4.6	D:	$y=x^2+1,\quad x+y=3$
4.7	D:	$y^2=4x,\quad x^2=4y$
4.8	D:	$y=\cos x,\quad y\le x+1,\quad y\ge 0$
4.9	D:	$x=\sqrt{4-y^2},\quad y=\sqrt{3x},\quad x\ge 0$
4.10	D:	$y=x^2+2,\quad x=y,\quad x=2,\quad x\ge 0$
4.11	D:	$y=4x^2,\quad 9y=x^2,\quad y\le 2$
4.12	D:	$y=x^2,\quad y=-x,$
4.13	D:	$x=y^2,\quad x=\frac{3}{4}y^2+1$
4.14	D:	$y=\sqrt{2-x^2},\quad y=x^2$
4.15	D:	$y=x^2+4x,\quad y=x+4$
4.16	D:	$2y=\sqrt{x},\quad x+y=5,\quad x\ge 0$
4.17	D:	$y=2^x,\quad y=2x-x^2,\quad x=2,\quad x=0$
4.18	D:	$y=-2x^2+2,\quad y\ge -6$
4.19	D:	$y^2=4x,\quad x=8\big/(y^2+4)$
4.20	D:	$y=4-x^2,\quad y=x^2-2x$
4.21	D:	$x=y^2+1,\quad x+y=3$
4.22	D:	$x^2=3y,\quad y^2=3x$
4.23	D:	$x=\cos y,\quad x\le y+1,\quad x\ge 0$
4.24	D:	$x=4-y^2=4x,\quad x-y+2=0$
4.25	D:	$x=y^2,\quad x=\sqrt{2-y^2}$
4.26	D:	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=4x,\quad y\le\frac{1}{2}x,\quad y\ge 0$
4.27	D:	$y=x^2,\quad y=\frac{3}{4}x^2+1$

4.28	$D:$	$y^2 = 4 - x, \quad y = x + 2, \quad y = 2, \quad y = -2$
4.29	$D:$	$x = y^2, \quad y^2 = 4 - x$
4.30	$D:$	$xy = 1, \quad x^2 = y, \quad y = 2, \quad x = 0$

5. *Застосовуючи подвійний інтеграл обчислити площу плоскої фігури яка обмежена даними лініями, застосовуючи полярну систему координат*

5.1 $(x^2+y^2)^2 = a^2(4x^2+y^2)$	5.2 $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2)$
5.3 $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2(4x^2+3y^2)$	5.4 $(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$
5.5 $(x^4-y^4)^2 = (x^2+y^2)^3$	5.6 $\rho = a\sin^2 2\varphi$
5.7 $\rho = a\sin^2\varphi$	5.8 $\rho = a(1-\cos 2\varphi)$
5.9 $(x^2+y^2)^2 = a^2(2x^2+3y^2)$	5.10 $(x^2+y^2)^2 = a^2(5x^2+3y^2)$
5.11 $(x^2+y^2)^2 = a^2(7x^2+5y^2)$	5.12 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$
5.13 $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$	5.14 $(x^2+y^2)^3 = a^4y^2$
5.15 $(x^2+y^2)^3 = a^4x^2$	5.16 $\rho = a\cos^2\varphi$
5.17 $\rho^2 = a^2(1+\sin^2\varphi)$	5.18 $(x^2+y^2)^3 = a^2x^4$
5.19 $(x^2+y^2)^2 = 4(3x^2+4y^2)$	5.20 $(x^2+y^2)^3 = a^2x^2y^2)$
5.21 $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$	5.22 $(x^2+y^2)^3 = 4a^2xy(x^2-y^2)$
5.23 $\rho = a\sin 2\varphi$	5.24 $(x^2+y^2)^3 = 2ay^3$
5.25 $\rho = a\sin 5\varphi$	5.26 $\rho = 4(1+\cos\varphi)$
5.27 $\rho = 2a(2+\cos\varphi)$	5.28 $\rho^2 = a^2\cos 3\varphi$
5.29 $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$	5.30 $\rho = a\sin 3\varphi$

6. *Обчислити об'єм тіла обмеженого даними поверхнями*

6.1	$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.2	$z = 2 - (x^2 + y^2), \quad x + 2y = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.3	$z = x^2, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad z \ge 0$
6.4	$z = 2x^2 + 3y^2, \quad y = x^2, \quad y = x, \quad z \ge 0$
6.5	$z = 2x^2 + y^2, \quad y \le x, \quad x = 2, \quad y = 3x, \quad z \ge 0$
6.6	$z = x, \quad y = 4, \quad x = \sqrt{25 - y^2}, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.7	$y = \sqrt{x}, \quad y = x, \quad x + y + z = 2, \quad z \ge 0$
6.8	$y = 1 - x^2, \quad x + y + z = 3, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.9	$z = 2x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.10	$z = 4 - x^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.11	$2z = y^2, \quad 2x + 3y = 12, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$
6.12	$z = 10 + x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad x = 1, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

6.13	$z=x^2,\quad x+y=6,\quad y=2x,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0$
6.14	$z=3x^2+2y^2+1,\quad y=x^2-1,\quad y=1,\quad z\geq 0$
6.15	$3y=\sqrt{x},\quad y\leq x,\quad x+y+z=10,\quad y=1,\quad z\geq 0$
6.16	$y^2=1-x,\quad x+y+z=1,\quad x=0,\quad z=0$
6.17	$y=x^2,\quad x=y^2,\quad z=3x+2y+6,\quad z=0$
6.18	$x^2=1-y,\quad x+y+3=3=1,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0$
6.19	$x=y^2,\quad x+y+z=4,\quad x1,\quad z=0$
6.20	$z=2x^2+y^2,\quad x+y=1,\quad x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0$
6.21	$y=x^2,\quad z=2x+5y+10,\quad y=4,\quad z\geq 0$
6.22	$y=2x,\quad x+y+z=2,\quad x\geq 0,\quad z\geq 0$
6.23	$y=1-z^2,\quad y=x,\quad y=-x,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0$
6.24	$x^2+y^2=4y,\quad z^2=4-y,\quad z\geq 0$
6.25	$x^2+y^2=1,\quad z=2-x^2+y^2,\quad z\geq 0$
6.26	$y=x^2,\quad z+y=2,\quad z=0$
6.27	$z^2=4-x,\quad x^2+y^2=4x,\quad z\geq 0$
6.28	$z=x^2+2y^2,\quad y=x,\quad x\geq 0,\quad y=1,\quad z\geq 0$
6.29	$z=y^2,\quad x+y=1,\quad x\geq 0,\quad z\geq 0$
6.30	$x=y^2,\quad x=3,\quad z=x,\quad z\geq 0$

Розв'язок типового варіанту

1. *Представити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *у вигляді повторного із зовнішнім інтегралом відносно* x*, а також із зовнішнім інтегралом відносно* y*, якщо область* D *обмежена лініями:*

$$x=\sqrt{y},\quad x=\sqrt{2+y},\quad x=0,\quad x=2.$$

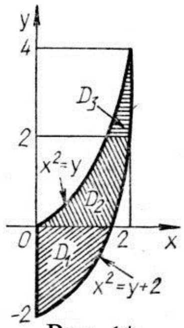

Рис. 1*

► Область D представлена на Рис. 1* і обмежена дугами $x^2=y+2,\quad x^2=y$, і прямими лініями $x=0,\quad x=2$. Отже

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy$$

З другого боку $D=D_1+D_2+D_3$;

$$D_1=\begin{Bmatrix}-2\leq y\leq 0,\\ 0\leq x\leq\sqrt{2+y}\end{Bmatrix},\quad D_2=\begin{Bmatrix}0\leq y\leq 2,\\ \sqrt{y}\leq x\leq\sqrt{y+2}\end{Bmatrix},\quad D_3=\begin{Bmatrix}2\leq y\leq 4,\\ \sqrt{y}\leq x\leq 2\end{Bmatrix}$$

Звідси

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0} dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx \blacktriangleleft$$

2. *Обчислити подвійний інтеграл* $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$ *по області* D *обмеженої лініям:* $x=0,\quad y=7-x,\quad y=\frac{1}{2}x+1$

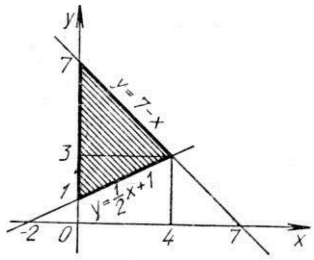

Рис. 2*

► Область D представлена на Рис. 2*. Якщо вибрати зовнішній інтеграл відносно x, тоді подвійний інтеграл вздовж цієї області може бути представлений одним повторним інтегралом

$$\iint\limits_D (x-2y)dxdy = \int\limits_0^4 \left(xy-y^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} dx = \int\limits_0^4 \left(-\frac{9}{4}x^2+21x-48\right)dx =$$

$$=\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{21}{2}x^2-48x\right)\Bigg|_0^4 = -72. ◄$$

3. *Обчислити подвійний інтеграл*

$$I = \int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\ln\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

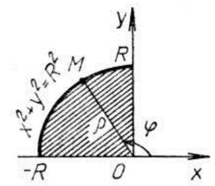

Рис. 3*

користуючись полярною системою координат. Знайти числове значення якщо $R=1$.

► Область інтегрування D є четверта частина кругу, яка лежить у другому квадранті (Рис. 3*). Введемо полярну систему координат

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad x^2+y^2=\rho^2, \ 0\le\rho\le R, \quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi, \ dxdy=\rho d\varphi d\rho$$

$$I = \int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\ln\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\rho d\rho =$$

$$\left(\pi-\pi/2\right)\left(\rho\ln(1+\rho)\right)\Big|_0^R$$

$$-\int\limits_0^R \frac{\rho}{1+\rho}d\rho = \frac{\pi}{2}\left(R\cdot\ln(1+R)-R+\ln(1+R)\right).$$

Якщо $R=1$ дістанемо $I=\dfrac{\pi}{2}(2\ln2-1)$.◄

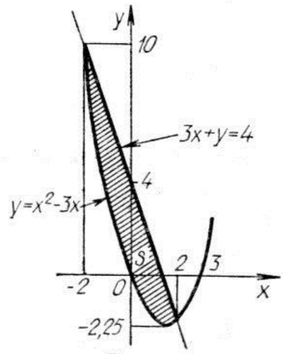

Рис. 4*

4. *Обчислити площу фігури обмеженої лініями* $y=x^2-3x$ *і* $3x+y-4=0$.

► Дана фігура на площині знизу обмежена параболою $y=x^2-3x$, а з верху прямою лінією $3x+y-4=0$. (Рис. 4*). Отже

$$S=\iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2-3x}^{4-3x} dy = \int\limits_{-2}^{2}(4-3x-x^2+3x)dx =$$

$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}. ◄$$

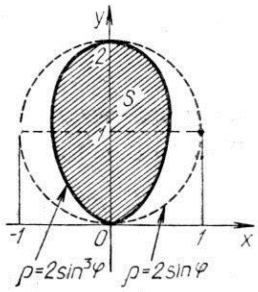

Рис. 5*

5. *Застосовуючи подвійний інтеграл і полярну систему координат обчислити площу фігури яка обмежена лінією* $(x^2+y^2)^2=2y^3$.

►Рівняння лінії у полярній системі координат набуває вигляду $\rho=2\sin^3\varphi$. (Рис. 5*). Полюс О лежить на границі області D. Отже,
ми дістанемо

$$S=\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin^3\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\sin^3\varphi} d\varphi =$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^3 d\varphi = =\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi-\cos^3 2\varphi)d\varphi=\frac{5}{8}\pi. ◄$$

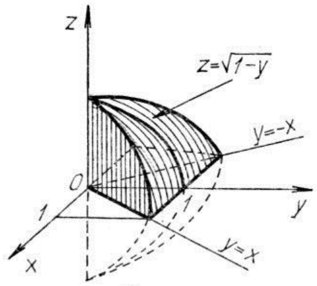

Рис. 6*

6. *Обчислити об'єм тіла обмеженого поверхнями* $z=\sqrt{1-y},\quad y=x,\quad y=-x,\ z=0$.

► Дане тіло обмежене зверху параболічним циліндром $z=\sqrt{1-y}$ (Рис. 6*), отже

$$V=\iint_D \sqrt{1-y}\,dxdy=2\int_0^1 dy\int_0^y \sqrt{1-y}\,dx=2\int_0^y y\sqrt{1-y}\,dy=$$

$$\left\|1-y=t^2,\ dy=-2tdt,\ y=0\Rightarrow t=1,\ y=1\Rightarrow t=0\right\|$$

$$=-4\int_1^0 (t^2-t^4)=-4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)=\frac{8}{15}. ◄$$

Індивідуальні домашні завдання - 2.2

***1.** У потрійному інтегралі* $\iiint_V f(x,y,z)dv$ *перейти до повторного, якщо область* V *обмежена даними поверхнями. Викреслити область інтегрування*

1.1	$V:\quad x=2,\quad y=2x,\quad y=3\sqrt{x},\quad z\ge 0,\quad z=4$
1.2	$V:\quad x=1,\quad y=2x,\quad z=\sqrt{3y},\quad z\ge 0$
1.3	$V:\quad x=2,\quad y=3x,\quad z=2(x^2+y^2),\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$
1.4	$V:\quad x=3,\quad y=x,\quad z=3x^2+y^2,\quad y\ge o,\quad z\ge 0$
1.5	$V:\quad y=2x,\quad y=2,\quad z=2\sqrt{x},\quad z\ge 0$
1.6	$V:\quad x=0,\quad y=x,\quad y=5,\quad z\ge 0,\quad z=2x^2+y^2$
1.7	$V:\quad x\ge 0,\quad y=2x,\quad x+y+z=3,\quad z\ge 0,\quad y=1$
1.8	$V:\quad x\ge 0,\quad y=3x,\quad y=3,\quad z\ge 0,\quad x=3\sqrt{z}$
1.9	$V:\quad x=5,\quad y=x/5,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad z=x^2+5y^2$
1.10	$V:\quad x=2,\quad y=4x,\quad y=2\sqrt{z},\quad z\ge 0$
1.11	$V:\quad x=3,\quad y=\frac{1}{3}x,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$
1.12	$V:\quad x=4,\quad y=x/4,\quad z\ge 0,\quad z=4y^2$
1.13	$V:\quad x\ge 0,\quad y=3x,\quad y=3,\quad z\ge 0,\quad z=2(x^2+y^2)$
1.14	$V:\quad x\ge 0,\quad y=4x,\quad y=8,\quad z\ge 0,\quad z=3x^2+y^2$
1.15	$V:\quad x\ge 0,\quad y=5x,\quad y=10,\quad z\ge 0,\quad z=x^2+y^2$
1.16	$V:\quad y=x,\quad y=-x,\quad y=2,\quad z\ge 0,\quad z=3(x^2+y^2)$
1.17	$V:\quad x=1,\quad y=2x,\quad y=3x,\quad z\ge 0,\quad z=2x^2+y^2$
1.18	$V:\quad y=x,\quad y=-2x,\quad y=1,\quad z\ge 0,\quad z=x^2+4y^2$
1.19	$V:\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x+y=1,\quad z=3x^2+2y^2$
1.20	$V:\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad 3x+2y=6,\quad z=x^2+y^2$
1.21	$V:\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x+y=2,\quad z=4-x^2-y^2$

1.22	$V: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x+y=3, \quad z=9-x^2-y^2$
1.23	$V: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad 3x+4y=12, \quad z=6-x^2-y^2$
1.24	$V: \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y=x, \quad y=3, \quad z=18-x^2-y^2$
1.25	$V: \quad x=2, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y=3x, \quad z=4(x^2+y^2)$
1.26	$V: \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y=2x, \quad y=4, \quad z=10-x^2-y^2$
1.27	$V: \quad x=3, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y=2x, \quad z=4\sqrt{y}$
1.28	$V: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad 2x+3y=6, \quad z=3+x^2+y^2$
1.29	$V: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x+y=4, \quad z=16-x^2-y^2$
1.30	$V: \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad 5x+y=5, \quad z=x^2+y^2$

2. *Обчислити даний потрійний інтеграл*

2.1	$\iiint\limits_V (2x^2+3y+z)dv, V: 2 \leq x \leq 3, \ -1 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 4$
2.2	$\iiint\limits_V x^2yzdv, \quad V: -1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3, \quad 2 \leq z \leq 3$
2.3	$\iiint\limits_V (x+y+4z^2)dv, V: -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \ -1 \leq z \leq 1$
2.4	$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv, V: \quad 0 \leq x \leq 3, \quad -1 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 2$
2.5	$\iiint\limits_V x^2y^2zdv, \quad V: \quad -1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2, \ -2 \leq z \leq 5$
2.6	$\iiint\limits_V (x+y+z)dv, \quad V: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 0, \ 1 \leq z \leq 2$
2.7	$\iiint\limits_V (2x-y^2-z)dv, \quad V: \quad 1 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 2, \ -1 \leq z \leq 0$
2.8	$\iiint\limits_V 2xy^2zdv, \quad V: \quad 0 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 0, \ 1 \leq z \leq 2\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
2.9	$\iiint\limits_V 5xyz^2dv, \quad V: \quad -1 \leq x \leq 0, \quad 2 \leq y \leq 3, \ 1 \leq z \leq 2$
2.10	$\iiint\limits_V (x^2+2y^2-z)dv, \quad V: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 3, \ -1 \leq z \leq 2$
2.11	$\iiint\limits_V (x+2yz)dv, \quad V: \quad -2 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 2$
2.12	$\iiint\limits_V (x+yz^2)dv, \quad V: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \ 0 = -1 \leq z \leq 3$
2.13	$\iiint\limits_V (xy+3z)dv, \quad V: \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \ 1 \leq z \leq 2$
2.14	$\iiint\limits_V (xy-z^2)dv, \quad V: \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \ -1 \leq z \leq 3$
2.15	$\iiint\limits_V (x^3+yz)dv, \quad V: \quad -1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$
2.16	$\iiint\limits_V (x^3+y^2-z)dv, \quad V: \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 0, \ 0 \leq z \leq 1$

2.17	$\iiint\limits_V (2x^2 + y - z^3)dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 1, \; 0 \le z \le 1$
2.18	$\iiint\limits_V x^2yz^2dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 2, \quad 1 \le y \le 2, \; -1 \le z \le 0$
2.19	$\iiint\limits_V (x + y - z)dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 4, \quad 1 \le y \le 3, \; -1 \le z \le 5$
2.20	$\iiint\limits_V (x + 2y + 3z^2)dv, \quad V: \quad -1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \; 0 \le z \le 2$
2.21	$\iiint\limits_V (3x^2 + 2y + z)dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \; -1 \le z \le 3$
2.22	$\iiint\limits_V (xy - z^3)dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 2, \; 0 \le z \le 3$
2.23	$\iiint\limits_V x^3yzdv, \quad V: \quad -1 \le x \le 2, \quad 1 \le y \le 3, \; 0 \le z \le 1$
2.24	$\iiint\limits_V (xy^2z)dv, \quad V: \quad -2 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \; 0 \le z \le 3$
2.25	$\iiint\limits_V xyz^2dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 0, \; 0 \le z \le 4$
2.26	$\iiint\limits_V (x + yz)dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 4, \; 0 \le z \le 2$
2.27	$\iiint\limits_V (x + y^2 - z^2)dv, \quad V: \quad -2 \le x \le 0, \quad 1 \le y \le 2, \; 0 \le z \le 5$
2.28	$\iiint\limits_V (x + y + z^2)dv, \quad V: \quad -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le 1, \; 2 \le z \le 3$
2.29	$\iiint\limits_V (x + y^2 - 2z)dv, \quad V: \quad 1 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 3, \; 0 \le z \le 1$
2.30	$\iiint\limits_V (x - y - z)dv, \quad V: \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 1, \; -2 \le z \le 1$

3. *Обчислити потрійний інтеграл застосовуючи циліндричну і сферичну системи координат*

3.1	$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dv, V: \; x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \ge 0, \, y \ge 0, \, z \ge 0$
3.2	$\iiint\limits_V y\sqrt{x^2 + y^2}dv, V: \; z \ge 0, \quad z = 2, \; y \ge \pm x, \, z^2 = 4(x^2 + y^2)$
3.3	$\iiint\limits_V z^2dv, V: \; 1 \le x^2 + y^2 \le 36, \, y \ge x, \; x \ge 0, \; z \ge 0$
3.4	$\iiint\limits_V ydv, V: \; x^2 + y^2 + z^2 = 32, \, y^2 = x^2 + z^2, \, y \ge 0$
3.5	$\iiint\limits_V xdv, V: \; x^2 + y^2 + z^2 = 8, \; x^2 = y^2 + z^2, \, x \ge 0$
3.6	$\iiint\limits_V ydv, V: \; 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16, \, y \le \sqrt{3}x, \, y \ge 0, \, z \ge 0$
3.7	$\iiint\limits_V ydv, V: \; z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, \, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.8	$\iiint\limits_V \frac{y^2dv}{x^2+y^2+z^2}, V: 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 36, x \ge 0, z \ge 0, y \ge \sqrt{3}x$
3.9	$\iiint\limits_V \frac{y^2dv}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, V:\ y \ge 0,\ y \le \sqrt{3}x, ,\ z = 3(x^2+y^2)$
3.10	$\iiint\limits_V \frac{x^2dv}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}, V:\ x^2+y^2+z^2 = 16,\ \ z \ge 0$
3.11	$\iiint\limits_V \frac{xzdv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ z = 2(x^2+y^2),\ y \le \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y \ge 0,\ z = 18$
3.12	$\iiint\limits_V \frac{xydv}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}, V:\ z = x^2+y^2,\ y \ge 0,\ y \le x, z = 4$
3.13	$\iiint\limits_V \frac{zdv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ x^2+y^2 = 4y,\ x+z = 4,\ \ z \ge 0$
3.14	$\iiint\limits_V \frac{ydv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ x^2+y^2 = 2x,\ x+z = 2,\ \ y \ge 0,\ z \ge 0$
3.15	$\iiint\limits_V \frac{xdv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ x^2+y^2 = 16y,\ x+z = 16,\ x \ge 0,\ \ z \ge 0$
3.16	$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dv, V:\ x^2+y^2 = 2x,\ x+z = 2,\ z \ge 0$
3.17	$\iiint\limits_V xydv, V:\ 2 \le x^2+y^2+z^2 \le 8,\ x \ge 0, z^2 = x^2+y^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
3.18	$\iiint\limits_V \frac{ydv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ x^2+y^2 = 2y,\ x^2+y^2 = 4y, x \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 6$
3.19	$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv, V:\ x^2+y^2+z^2 = 36,\ y \ge 0,\ y \le -x,\ z \ge 0$
3.20	$\iiint\limits_V \frac{xdv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ x^2+y^2 = 2x,\ x^2+y^2 = 4x,\ y \ge 0,\ y \le x, z \ge 0, z = 4$
3.21	$\iiint\limits_V \frac{zdv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ y \ge 0, y \le \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z \ge 0$
3.22	$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dv, V:\ x^2+y^2 = 2x,\ x+z = 2\ y \ge 0,\ z \ge 0,$
3.23	$\iiint\limits_V x^2dv, V:\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\ y \le x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$
3.24	$\iiint\limits_V \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}}, V:\ x^2+y^2 = 4y,\ \ y+z = 4,\ z \ge 0$
3.25	$\iiint\limits_V \frac{ydv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, V:\ 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\ y \le \sqrt{3}x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$
3.26	$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dv, V:\ x^2+y^2 = 2x,\ z = 3,\ y \ge 0,\ z \ge 0$
3.27	$\iiint\limits_V \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \le x, y \ge 0,\ z \ge 0$

3.28	$\iiint\limits_V xdv, V:\ x^2=2(y^2+z^2)=4, x=4, x\ge 0$
3.29	$\iiint\limits_V \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, V:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 9, y\le x, y\ge 0, z\ge 0$
3.30	$\iiint\limits_V xdv, V:\ z=\sqrt{18-x^2-y^2}, z=\sqrt{x^2+y^2}, x\ge 0$

4. *Використовуючи потрійний інтеграл обчислити об'єм тіла обмеженого даними поверхням. Викреслити фігуру*

4.1	$z^2=4-x,\quad x^2+y^2=4x$
4.2	$z=4-y^2,\quad x^2+y^2=4x,\quad z\ge 0$
4.3	$x^2+y^2=1,\quad z=2-x-y,\quad z\ge 0$
4.4	$z=y^2,\quad x+y=2,\quad x\ge 0,\quad z\ge 0$
4.5	$x=\sqrt{9-y^2},\quad x=\sqrt{25-y^2},\quad z=x,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0$
4.6	$z=4-x-y,\quad x^2+y^2=4,\quad z\ge 0$
4.7	$z=x^2,\quad x+y=7,\quad x-2y+2=0,\quad z\ge 0$
4.8	$x\ge 0,\quad z\ge 0,\quad z=y,\quad x=4,\quad y=\sqrt{25-x^2}$
4.9	$z\ge 0,\quad z=4-x,\quad x=2\sqrt{y},\quad y=2\sqrt{x}$
4.10	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad 2x-y=0,\quad z=x^2,\quad x+y=9$
4.11	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad y=2x,\quad z=x^2,\quad x=4$
4.12	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad y=2x,\quad z=\sqrt{y},\quad y=3$
4.13	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad y=2x,\quad z=y^2,\quad x=3$
4.14	$z\ge 0,\quad y^2=2-x,\quad z=3x$
4.15	$x\ge 0,\quad y=\sqrt{9-x^2},\quad z=2y$
4.16	$x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x+y=2,\quad z=x^2+y^2$
4.17	$z\ge 0,\quad z=5-x-y,\quad x^2+y^2=9$
4.18	$z\ge 0,\quad z=x,\quad x=\sqrt{4-y^2}$
4.19	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x+y=2,\quad z=x^2$
4.20	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad y=4,\quad z=x,\quad x=\sqrt{25-y^2}$
4.21	$z\ge 0,\quad z=y^2,\quad x^2+y^2=9$
4.22	$x\ge 0,\quad z\ge 0,\quad y\ge x,\quad x=1-x^2-y^2$
4.23	$z\ge 0,\quad z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2=4$
4.24	$z\ge 0,\quad y=2,\quad y=x,\quad z=x^2$
4.25	$z\ge 0,\quad x+y=2,\quad x^2+y^2=4$
4.26	$y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x-y=0,\quad 2x+y=2,\quad 4z=y^2$
4.27	$x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad 2x+y=2,\quad z=y^2$
4.28	$z\ge 0,\quad x=y^2,\quad x=2y^2-1,\quad z=1-y^2$
4.29	$x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad y=3-x,\quad z=9-x^2$

4.30	$x \ge 0, \quad z \ge 0, \quad x + y = 4, \quad z = 4\sqrt{y}$

Розв'язок типового варіанту

1. *Розставити границі інтегрування у потрійному інтегралі* $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ *, якщо область* V *обмежена поверхнями*

$$x = 1, \quad y = x, \quad z = 0, \quad z = y^2.$$

Викреслити область інтегрування.

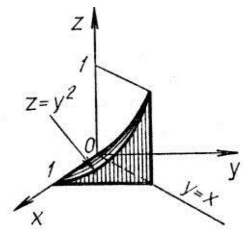

Рис. 1*

► $V = \left\{0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le z \le y^2\right\}$

Користуючись відповідною формулою, дістанемо

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y,z)dz$$

Область інтегрування приведена на Рис.1*◄

1. *Обчислити* $\iiint\limits_v (3x + 2y - z^3)dxdydz$ *,якщо* $V: \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 2, \qquad 1 \le z \le 3$.

► Для даної області V (Рис. 2*) користуючись відповідною області дістанемо $\iiint\limits_v (3x + 2y - z^3)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^3 (3x + 2y - z^3) =$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(3xz + 2yz - \frac{z^4}{4} \right)\Bigg|_1^3 dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(6x + 4y - 20\right)\Big|dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(6xy + 2y^2 - 20y\right)\Big|_0^2 dx = \int\limits_0^1 (12x - 32)dx = -26 \blacktriangleleft$$

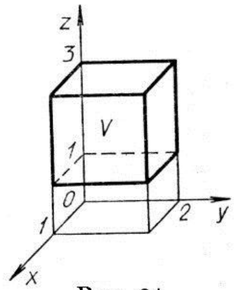

Рис. 2*

3. *Обчислити потрійний інтеграл* $\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{x^2 + y^2 - R^2}$, *використовуючи циліндричну систему координат вдовж області, яка лежить у першому квадранті і обмеженої площинами* $x = 0, \quad y = 0, \quad z = h$ *, і конусом* $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$.

► Область інтегрування V і проекція D на площині Oxy представлені на Рис. 3*.

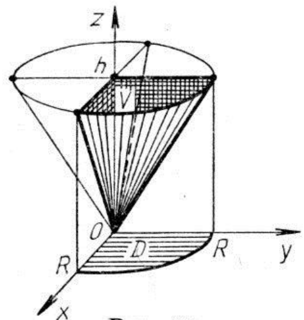

Рис. 3*

Користуючись циліндричними координатами $\rho, \ \varphi, \ z$ і формулами $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$ дана область інтегрування набуває такого вигляду $0 \le z \le h$, $\quad 0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \rho \le R$, і ми дістанемо: $z^2 = h^2\rho^2/R^2$, $\quad z = h\rho/R$

$$\iiint\limits_V \frac{xzdxdydz}{x^2 + y^2 - R^2} = \iiint\limits_V \frac{\rho z\cos\varphi d\varphi d\rho dz}{\rho^2 - R^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} d\rho \int\limits_{h\rho/R}^h zdz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2} \frac{z^2}{2}\Bigg|_{h\rho/R}^h d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \frac{\rho^2}{\rho^2 - R^2}\left(h^2 - \frac{h^2}{R^2}\rho^2\right)d\rho =$$

$$= -\frac{h^2}{2R^2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = -\frac{h^2}{2R^2}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R = -\frac{1}{6}Rh^2 \blacktriangleleft$$

4. *Користуючись потрійним інтегралом обчислити об'єм тіла обмеженого даними поверхнями:* $\qquad x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \ \ x + y = 2, \qquad 2z = x^2 + y^2$.

► Рівняння $2z = x^2 + y^2$ визначає параболоїд обертання, а інші поверхні - площини.

Дане тіло представлено на Рис. 4*. Його об'єм можна обчислити використовуючи відповідну формулу.

$$V: \quad \left\{0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2-x, \quad 0 \le z \le (x^2+y^2)/2\right\}$$

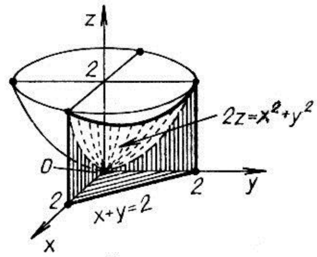

Рис. 4*

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{(x^2+y^2)/2} dz = \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2+y^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^2(2-x) + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(2x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(2-x)^3 \right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(2-x)^4 \right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}$$ ◄

Індивідуальні домашні завдання – 2.3

1. *Обчислити масу неоднорідної пластини* D *обмеженої даними лініями, якщо поверхнева густина у кожній її точці є* $\mu = \mu(x, y)$

1.1	$D: \quad y^2 = x, \quad x = 3, \quad \mu(x,y) = x$
1.2	$D: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1, \quad \mu(x,y) = x^2$
1.3	$D: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad 2x + 3y = 0, \quad \mu(x,y) = x$
1.4	$D: \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad \mu(x,y) = 4 - x$
1.5	$D: \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = x, \quad \mu(x,y) = x^2 + 2y^2$
1.6	$D: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \mu(x,y) = 2 - x - y$
1.7	$D: \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad \mu(x,y) = \sqrt{4-y}$
1.8	$D: \quad y = x, \quad y = -x, \quad y = 1, \quad \mu(x,y) = \sqrt{1-y}$
1.9	$D: \quad x = 0, \quad y = 2x, \quad x + y = 2, \quad \mu(x,y) = 2 - x - y$
1.10	$D: \quad x = 1, \quad x = y^2, \quad \mu(x,y) = 4 - x - y$
1.11	$D: \quad y = 0, \quad x^2 = 1 - y, \quad \mu(x,y) = 3 - x - y$
1.12	$D: \quad x^2 = y, \quad x = y^2, \quad \mu(x,y) = 3x + 2y + 6$
1.13	$D: \quad y = x^2, \quad y = 4, \quad \mu(x,y) = 2x + 5y + 10$
1.14	$D: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1, \quad \mu(x,y) = 2x^2 + y^2$
1.15	$D: \quad y^2 = 1 - x, \quad x = 0, \quad \mu(x,y) = 2 - x - y$
1.16	$D: \quad y = x, \quad y = \sqrt{x}, \quad \mu(x,y) = 2 - x - y$
1.17	$D: \quad y = x^2 - 1, \quad y = 1, \quad \mu(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 1$
1.18	$D: \quad y = x, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad \mu(x,y) = x^2 + 2y^2 + 10$
1.19	$D: \quad y = 2x, \quad y = 0, \quad x + y = 6, \quad \mu(x,y) = x^2$
1.20	$D: \quad x \ge, \quad y \ge 0, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad \mu(x,y) = 4 - x^2$
1.21	$D: \quad y = x^2, \quad y = 2, \quad \mu(x,y) = 2 - y$
1.22	$D: \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x + y = 1, \quad \mu(x,y) = x^2 + y^2$
1.23	$D: \quad y = x^2 + 1, \quad x + y = 3, \quad \mu(x,y) = 4x + 5y + 2$

1.24	$D:\quad y=x^2-1,\quad x+y=1,\quad \mu(x,y)=2x+5y+8$
1.25	$D:\quad y=0,\quad x=0,\quad y=4,\quad x=\sqrt{25-y^2},\quad \mu(x,y)=x$
1.26	$D:\quad y=x,\quad x=2,\quad y=3x,\quad \mu(x,y)=2x^2+y^2$
1.27	$D:\quad y=x,\quad y=x^2,\quad \mu(x,y)=2x+3y$
1.28	$D:\quad x=0,\quad x+2y+2=0,\quad x+y=1,\quad \mu(x,y)=x^2$
1.29	$D:\quad y=0,\quad x=0,\quad x+2y=1,\quad \mu(x,y)=2-x^2-y^2$
1.30	$D:\quad y=0,\quad x=0,\quad x+y=2,\quad \mu(x,y)=x^2+y^2$

2. *Обчислити статистичний момент однорідної пластини D обмеженої даними лініями, відносно вказаної осі, користуючись полярними координатами*

2.1	$D:\quad x^2+y^2-2ay=0,\quad x-y\le 0,\quad Ox$
2.2	$D:\quad x^2+y^2-2ax=0,\quad x+y\le 0,\quad Oy$
2.3	$D:\quad x^2+y^2+2ay=0,\quad x-y\ge 0,\quad Ox$
2.4	$D:\quad x^2+y^2+2ax=0,\quad x+y\ge 0,\quad Ox$
2.5	$D:\quad x^2+y^2-2ax\ge 0,\quad x^2+y^2+2ay\le 0,\quad x\le 0,\quad Ox$
2.6	$D:\quad x^2+y^2-2ay\ge 0,\quad x^2+y^2+2ax\le 0,\quad y\ge 0,\quad Oy$
2.7	$D:\quad x^2+y^2-2ay\le 0,\quad x^2+y^2-2ax\ge 0,\quad x\ge 0,\quad Ox$
2.8	$D:\quad x^2+y^2-2ax\le 0,\quad x^2+y^2+2ay\ge 0,\quad y\le 0,\quad Oy$
2.9	$D:\quad x^2+y^2-2ax\ge 0,\quad x^2+y^2+2ay\le 0,\quad x\ge 0,\quad Ox$
2.10	$D:\quad x^2+y^2+2ax\le 0,\quad x^2+y^2+2ay\ge 0,\quad y\le 0,\quad Oy$
2.11	$D:\quad x^2+y^2-2ay\le 0,\quad x^2+y^2+2ax\ge 0,\quad x\le 0,\quad Ox$
2.12	$D:\quad x^2+y^2-2ay\ge 0,\quad x^2+y^2-2ax\le 0,\quad y\ge 0,\quad Oy$
2.13	$D:\quad x^2+y^2+2ay=0,\quad x^2+y^2+ay=0,\quad x\le 0,\quad Ox$
2.14	$D:\quad x^2+y^2-2ax=0,\quad x^2+y^2-ax=0,\quad y\ge 0,\quad Oy$
2.15	$D:\quad x^2+y^2+2ay=0,\quad x^2+y^2+ay=0,\quad x\ge 0,\quad Ox$
2.16	$D:\quad x^2+y^2-2ay=0,\quad x^2+y^2-ay=0,\quad x\ge 0,\quad Ox$
2.17	$D:\quad x^2+y^2-2ay=0,\quad x^2+y^2-ay=0,\quad x\le 0,\quad Ox$
2.18	$D:\quad x^2+y^2+2ax=0,\quad x^2+y^2+ax=0,\quad y\ge 0,\quad Oy$
2.19	$D:\quad x^2+y^2-2ax=0,\quad x^2+y^2-ax=0,\quad y\le 0,\quad Ox$
2.20	$D:\quad x^2+y^2+2ax=0,\quad x^2+y^2+ax=0,\quad y\le 0,\quad Oy$
2.21	$D:\quad x^2+y^2+2ay=0,\quad x+y\le 0,\quad x\ge 0,\quad Ox$
2.22	$D:\quad x^2+y^2-2ay=0,\quad y-x\ge 0,\quad x\ge 0,\quad Ox$
2.23	$D:\quad x^2+y^2+2ax=0,\quad y-x\ge 0,\quad y\le 0,\quad Oy$
2.24	$D:\quad x^2+y^2-2ay=0,\quad x+y\ge 0,\quad x\le 0,\quad Ox$
2.25	$D:\quad x^2+y^2+2ax=0,\quad x+y\le 0,\quad y\ge 0,\quad Oy$
2.26	$D:\quad x^2+y^2-2ax=0,\quad y-x\le 0,\quad y\ge 0,\quad Ox$
2.27	$D:\quad x^2+y^2-2ax=0,\quad y-x\le 0,\quad x+y\ge 0,\quad Oy$
2.28	$D:\quad x^2+y^2-2ax=0,\quad y-x\ge 0,\quad x+y\ge 0,\quad Ox$

2.29	$D: \quad x^2+y^2+2ax=0, \quad y-x\geq 0, \quad x+y\leq 0, \quad Oy$
2.30	$D: \quad x^2+y^2+2ay=0, \quad y-x\leq 0, \quad x+y\leq 0, \quad Ox$

3. *Обчислити центр гравітації однорідного тіла яке приймає область V і обмежена даними поверхнями*

3.1	$V: \quad x=6(y^2+z^2), \quad y^2+z^2=3, \quad x=0$
3.2	$V: \quad y=3\sqrt{x^2+z^2}, \quad x^2+z^2=36, \quad y=0$
3.3	$V: \quad x=7(y^2+z^2), \quad x=28$
3.4	$V: \quad z=2\sqrt{x^2+y^2}, \quad x=8$
3.5	$V: \quad z=5(x^2+y^2), \quad x^2+y^2=2, \quad z=0$
3.6	$V: \quad x=6\sqrt{y^2+z^2}, \quad y^2+z^2=9, \quad x=0$
3.7	$V: \quad z=8(x^2+y^2), \quad z=32$
3.8	$V: \quad y=3\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=9$
3.9	$V: \quad 9y=x^2+z^2, \quad x^2+z^2=4, \quad y=0$
3.10	$V: \quad 3z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2=4, \quad z=0$
3.11	$V: \quad 6y=x^2+z^2, \quad y=8$
3.12	$V: \quad 8x=\sqrt{y^2+z^2}, \quad x=1/2$
3.13	$V: \quad 2x=y^2+z^2, \quad y^2+z^2=4, \quad x=0$
3.14	$V: \quad 4y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad x^2+z^2=16, \quad y=0$
3.15	$V: \quad 8x=y^2+z^2, \quad x=2$
3.16	$V: \quad z=9\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=36$
3.17	$V: \quad z=3(x^2+y^2), \quad x^2+y^2=9, \quad z=0$
3.18	$V: \quad x=2\sqrt{y^2+z^2}, \quad y^2+z^2=4, \quad x=0$
3.19	$V: \quad 4y=x^2+z^2, \quad y=9$
3.20	$V: \quad x=\sqrt{y^2+z^2}, \quad x=20$
3.21	$V: \quad y=x^2+z^2, \quad x^2+z^2=10, \quad y=0$
3.22	$V: \quad y=3\sqrt{x^2+z^2}), \quad x^2+z^2=16, \quad y=0$
3.23	$V: \quad 3x=y^2+z^2, \quad x=9$
3.24	$V: \quad y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=4$
3.25	$V: \quad x=y^2+z^2, \quad y^2+z^2=9, \quad x=0$
3.26	$V: \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z=3$
3.27	$V: \quad z=2\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2=9, \quad z=0$
3.28	$V: \quad 2z=x^2+y^2, \quad z=3$
3.29	$V: \quad z=x^2+y^2, \quad z=4$
3.30	$V: \quad z=x^2+y^2), \quad x^2+y^2=4, \quad z=0$

4. *Обчислити момент інерції однорідного тіла відносно даної осі. Тіло визначає область V, яка обмежена даними поверхнями*

4.1	$V: \quad y^2 = x^2 + z^2, \quad y = 4, \quad Oy$
4.2	$V: \quad x = y^2 + z^2, \quad x = 4, \quad Ox$
4.3	$V: \quad x = y^2 + z^2, \quad x = 9, \quad Ox$
4.4	$V: \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x = 2, \quad Ox$
4.5	$V: \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x = 2, \quad Ox$
4.6	$V: \quad y = x^2 + z^2, \quad y = 2, \quad Oy$
4.7	$V: \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x = 3, \quad Ox$
4.8	$V: \quad x = y^2 + z^2, \quad x = 3, \quad Ox$
4.9	$V: \quad y = 2\sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = 2, \quad Oy$
4.10	$V: \quad y = x^2 + z^2, \quad y = 3, \quad Oy$
4.11	$V: \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad Ox$
4.12	$V: \quad x = y^2 + z^2, \quad y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad Ox$
4.13	$V: \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z = 3, \quad Oz$
4.14	$V: \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 3, \quad Oz$
4.15	$V: \quad y^2 = x^2 + z^2, \quad x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0, \quad Oy$
4.16	$V: \quad 2y = x^2 + z^2, \quad y = 2, \quad Oy$
4.17	$V: \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x = 2, \quad Ox$
4.18	$V: \quad 2z = x^2 + y^2, \quad z = 2, \quad Oz$
4.19	$V: \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad y^2 + z^2 = 4, \quad x = 0, \quad Ox$
4.20	$V: \quad 2z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad Oz$
4.21	$V: \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad z = 2, \quad Oz$
4.22	$V: \quad x = 1 - y^2 - z^2, \quad x = 0, \quad Ox$
4.23	$V: \quad y = 4 - x^2 - z^2, \quad y = 0, \quad Oy$
4.24	$V: \quad x = 2(y^2 + z^2), \quad x = 3, \quad Ox$
4.25	$V: \quad z = 9 - x^2 - y^2, \quad z = 0, \quad Oz$
4.26	$V: \quad z = 4\sqrt{y^2 + z^2}, \quad z = 2, \quad Oz$
4.27	$V: \quad z = 3(x^2 + y^2), \quad z = 3, \quad Oz$
4.28	$V: \quad x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, \quad x = 2, \quad Ox$
4.29	$V: \quad y = 3(x^2 + z^2), \quad y = 3, \quad Oy$
4.30	$V: \quad z = 3 - x^2 - y^2, \quad z = 0, \quad Oz$

Розв'язок типового варіанту

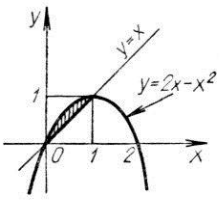

Рис. 1*

1. *Обчислити масу неоднорідної пластини* D. *Вона обмежена лініями* $y = 2x - x^2$, $y = x$ *і має поверхневу густину* $\mu(x, y) = x^2 + 2xy$ *у кожній її точці.*

► Для обчислення маси m неоднорідної пластини яка має поверхневу густину $\mu(x,y)$ використовуємо відповідну формулу

$$m=\iint\limits_d \mu(x,y)ds=\iint\limits_D (x^2+2xy)dxdy$$

Де область інтегрування представлена на Рис. 1*.

$$D:\quad \left\{0\le x\le 1,\quad x\le y\le 2x-x^2\right\}$$

Отже

$$m=\iint\limits_D (x^2+2xy)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x-x^2}(x^2+2xy)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y+xy^2\right)\Big|_x^{2x-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(x^5-5x^4-x^3\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}-x^5-x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}$$ ◄

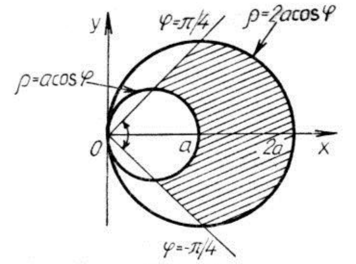

Рис. 2*

2 *Обчислити статистичний момент відносно осі Oy однорідної пластини D обмеженої лініями*

$$y=x,\qquad y=-x,\qquad x+y-2ax=0,\qquad x+y-ax=0$$

(застосувати полярну систему координат). Густина $\mu(x,y)=2$

► Статистичний момент відносно осі Oy даної пластини (Рис. 2*) можна обчислити за формулою $M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)ds$.

Використовуючи полярну систему координат $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$ область D перетвориться у область D' $\left\{-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad a\cos\varphi\le\rho\le 2a\cos\varphi\right\}$. От же

$$M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)ds=\iint\limits_{D'}2\rho^2\cos\varphi d\varphi d\rho=2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi}\rho d\rho=2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{14a^3}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{28a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{7a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/4}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{7a^3}{3}\left(\left(\varphi+\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4})\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)d\varphi\right)=\frac{7}{3}a^3\left(\frac{3}{8}\pi+1\right)$$ ◄

3. *Обчислити центр гравітації однорідного тіла яке приймає область V і обмежена поверхнями* $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$, $\quad y=2.$

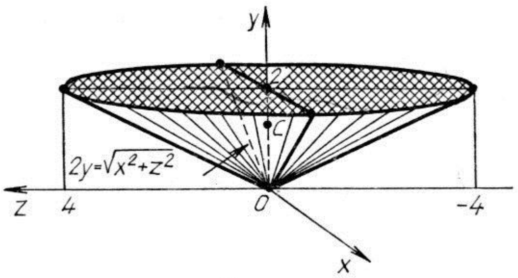

Рис. 3*

► Дане тіло симетричне відносно осі Oy (Рис. 3*), отже $x_c=z_c=0$, і

$$y_c=\frac{\iiint\limits_V ydxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz}$$

Використовуючи циліндричну систему координат:

$x=\rho\cos\varphi,\quad z=\rho\sin\varphi,\quad y=y$

Ми дістанемо область інтегрування

$$V':\quad\left\{0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 4,\quad \rho/2\le y\le 2\right\}$$

тоді

$$\iiint\limits_V ydxdydz = \iiint\limits_{V'} y\rho d\rho d\varphi dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho \int\limits_{\rho/2}^2 ydy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \rho \left(4 - \frac{\rho^2}{4}\right) d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{16}\right)\Bigg|_0^4 d\varphi = 8\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 16\pi .$$

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho d\rho d\varphi dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho \int\limits_{\rho/2}^2 dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \rho \left(2 - \frac{\rho}{2}\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{6}\right)\Bigg|_0^4 d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{32\pi}{3} .$$

Отже

$$y_c = \frac{48\pi}{32\pi} = \frac{3}{2}$$

і центр гравітації $C = (0, 3/2, 0)$.◄

4. *Обчислити момент інерції відносно вісі Оу однорідного тіла (густина* $\mu^*(x,y,z) = const$ *) області* V *обмеженої поверхньою* $y = 5 - x^2 - z^2$ *і площиною* $y = 1$.

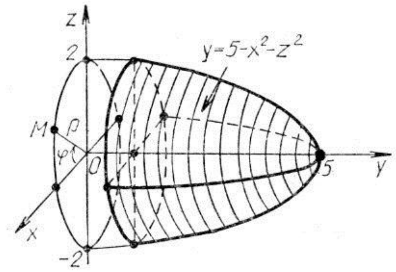

Рис. 4*

► За формулою

$$I_y = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)(x^2 + z^2)dv$$

і використовуючи циліндричну систему координат

$$x = \rho\cos\varphi, \quad z = \rho\sin\varphi, \quad y = y$$

область інтегрування V перетвориться у область V'

$$V': \quad \{0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 2, \quad 1 \le y \le 5 - \rho^2\}$$

$$I_y = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)(x^2 + z^2)dv = \mu\iiint\limits_{V'} \rho^2 d\varphi d\rho dy = \mu\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 \left(4 - \rho^2\right) d\rho =$$

$$= \mu\int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^4 - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \mu \cdot 2\pi \cdot \left(2^4 - \frac{2^6}{6}\right) = \frac{32}{3}\pi\mu . ◄$$

Частина III. Криволінійні та поверхневі інтеграли

§ 1. *Криволінійні інтеграли першого роду*

Нехай у просторі задано спрямлювану дугу AB: $x = x(l)$, $y = y(l)$, $0 \le l \le S$, де параметр $l -$ довжини дуги, яка з’єднує початкову точку $A(x(0), y(0), z(0)) \in AB$ із змінною точкою $M(x(l), y(l), z(l))$, $S -$ довжина кривої AB, і нехай на цій кривій задано функцію $f(x(l), y(l), z(l))$.

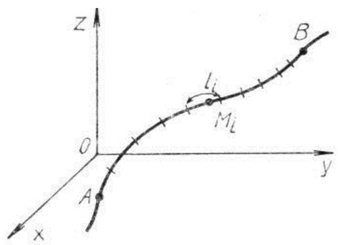

Рис. 1

Візьмемо (T) - розбиття відрізку $[0; S]$

$$(T):\ 0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_k < l_{k+1} < \ldots < l_n = S \qquad (1)$$

і складемо суму

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k))\Delta l_k, \qquad (2)$$

де $\Delta l_k = l_{k+1} - l_k$, $\tau_k \in [l_k; l_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, яка називається *інтегральною сумою*. Якщо при $\lambda(T) = \max\limits_{0<r<n-1} \Delta l_k \to 0$ інтегральна сума (2) має границю I, то цю границю називають ***криволінійним інтегралом першого роду*** від функції $f(x(l), y(l), z(l))$ по кривій AB і позначають

$$\int\limits_{AB} f(x(l), y(l), z(l))dl \text{ або } \int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$$

Отже, за означенням:

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k))\Delta l_k \qquad (3)$$

Інтегральна сума (2) є звичайною інтегральною сумою, складеною для функції $f(x(l), y(l), z(l))$ однієї змінної $l \in [0; S]$ і (T) - розбиття (1) відрізка $[0; S]$. Тому якщо існує визначений інтеграл $\int\limits_0^S f(x(l), y(l), z(l))dl$, то існує і криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$, і правильна рівність

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl = \int\limits_0^S f(x(l), y(l), z(l))dl \qquad (4)$$

Наприклад, криволінійний інтеграл першого роду існує, якщо функція $f(x(l), y(l), z(l))$ параметра $l \in [0; S]$ неперервна на відрізку $[0; S]$. Цей інтеграл існує й у випадку, коли функція $f(x, y, z)$, що розглядується функція трьох незалежних змінних x, y і z у деякій області, а спрямлювана крива AB лежить в цій області.

Однак формула (4) незручна для обчислення криволінійного інтеграла , оскільки часто буває важко знайти параметричне зображення рівняння спрямлюваної кривої у вигляді $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$, де $l -$ довжина дуги. Вкажемо формулу для обчислення криволінійного інтеграла $\int\limits_{AB} f(x, y, z)dl$ у випадку, коли спрямлювану криву AB, яка лежить у просторі R^3, задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ і параметр t змінюється монотонно у інтервалі $[\alpha, \beta]\,(\alpha < \beta)$, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$.

Нехай функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді правильна рівність

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x, y, z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt \qquad (5)$$

У випадку плоскої кривої формула (5) набуває вигляду

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \qquad (6)$$

Справді, при таких припущеннях відносно функцій $x(t)$ і $y(t)$ крива буде спрямлюваною. Довжина l дуги AB обчислюється за формулою

$$l(t) = \int\limits_{0}^{t} \sqrt{(x'(\tau))^2+(y'(\tau))^2}d\tau \qquad (7)$$

Якщо крива задана у полярній системі координат, тобто $\rho = \rho(\varphi)$, тоді $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$ і $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, отже правильна така формула:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho'^2+\rho^2}d\varphi \qquad (8)$$

Зокрема коли криву AB у прямокутних координатах задано рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, де $y(x)$ непевна на відрізку $[a,b]$ разом із своєю похідною першого порядку, формула (6) набуває вигляду:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx \qquad (9)$$

Формула (9) може бути записана у іншому вигляді. Покладаючи, що функція $y(x)$ неперервна функція разом з її похідної $y'(x)$, яка визначає дотичну до кривої AB не паралельну вісі Oy. Кут між дотичною і додатнім напрямком вісі Ox позначимо через φ, тоді ми дістанемо:

$$\tan\varphi = y'(x), \qquad |\cos\varphi| = \frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}$$

Тому

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} \frac{f(x,y(x))}{|\cos\varphi|}dx \qquad (10)$$

У окремому випадку, очевидно

$$\int\limits_{AB} dl = L$$

довжина дуги AB, тоді

$$L = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{|\cos\varphi|} \qquad (11)$$

У всіх випадках обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_{L} xydl$, *якщо* L *чверть еліпса* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *яка розташована у першій чверті*

► ***Перший метод***. Ми маємо:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y'(x) = -\frac{bx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}$$

Використовуючи формулу (9), дістанемо:

$$I = \int\limits_{0}^{a} x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}dx = \frac{b}{a^2}\int\limits_{0}^{a} x\sqrt{a^2-(a^2-b^2)x^2}dx$$

Після інтегрування дістанемо:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}\left[a^2-(a^2-b^2)x^2\right]^{3/2}\Big|_0^a = \frac{ab}{2}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

Слід зауважити, що відповідні перетворення, які ми виконали, ми застосували умови за яких кутовий коефіцієнт дотичної прямує до нескінченності якщо $x = a.$

2^0**.** ***Інший метод.*** Запишемо рівняння еліпса у параметричній формі, тобто $x = a\cos t,$ $y = b\sin t$, тоді

$$x'(t) = -a\sin t, \quad y'(t) = b\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Використовуючи формулу (6), дістанемо:

$$I = \int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$$

$$\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2} + b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}dt.$$

Покладаючи, що $\cos 2t = z$, тоді $\sin 2tdt = -\frac{1}{2}dz$ і

$$I = \frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}z}dz = \frac{ab}{4}\cdot -\frac{2}{a^2-b^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2-b^2}{2}z\right]^{3/2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}. ◄$$

Приклад 2. *Обчислити* $\int_L ydl,$ *де* L *є частина параболи* $y^2 = 2px$, *від початку координат до точки* (x_0, y_0).

► Беручи до уваги рівняння кривої, дістанемо $y\cdot y' = p$, тоді

$$ydl = y\sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{y^2+y^2y'^2} = \sqrt{p^2+2pxdx},$$

і

$$I = \int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}dx = \frac{1}{3p}\left[(p^2+y_0^2)^{3/2} - p^3\right]. ◄$$

Приклад 3. *Обчислити* $\int_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl,$ *де* L *один оберт конічної гвинтової лінії* $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

► $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt = \sqrt{2+t^2}dt.$

Тоді

$$I = \int_0^{2\pi}(2t-t)\sqrt{2+t^2}dt = \int_0^{2\pi}t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{3}(2-t^2)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}((1-2\pi^2)^{2/3}-1). ◄$$

Приклад 4 . *Обчислити* $I = \int_l \frac{dl}{x+2y+5}$ *вздовж відрізка прямої* $y = 2x-2$ *від точки* $A(0,-2)$ *до* $B(1, 0)$.

► $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+4}dx = \sqrt{5}dx.$

Отже

$$I = \int_0^1\frac{\sqrt{5}dx}{x+2(2x-2)+5} = \sqrt{5}\int_0^1\frac{dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln(5x+1)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6. ◄$$

1.1. Властивості криволінійних інтегралів першого роду

1⁰. $\int\limits_{L_{AB}} dl = l_{AB}$, *де* L_{AB} *є довжина дуги* AB.

2⁰. ***(Лінійність)*** *Якщо існують криволінійні інтеграли від функцій* $f(x,y,z)$ *і* $g(x,y,z)$ *вздовж дуги* L *а* $C_1 \wedge C_2$ *- довільні константи, тоді від функції* $C_1 f(x,y,z) + C_2 g(x,y,z)$ *існує криволінійний інтеграл вздовж дуги* L *такий,що .*

$$\int\limits_L [C_1 f(x,y,z) + C_2 g(x,y,z)]dl = C_1 \int\limits_L f(x,y,z)dl + C_2 \int\limits_L g(x,y,z)dl .$$

3⁰. ***(Адитивність)*** *Нехай* $L = \sum\limits_{i=1}^{n} L_i$ *і від* $f(x,y,z)$ *існує криволінійний інтеграл вздовж дуги* L, *тоді існує інтеграл* $\int\limits_{L_i} f(x,y,z,)dl$ *такий, що*

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} f(x,y,z)dl.$$

4⁰. *Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку інтегрування, тобто*

$$\int\limits_{MN} f(x,y,z)dl = \int\limits_{NM} f(x,y,z)dl.$$

5⁰. ***(Оцінка модуля інтеграла)*** *Якщо функція* $f(x,y,z)$ *інтегрована вздовж дуги* L, *то і функція* $|f(x,y,z)|$ *також інтегрована вздовж* L, *і*

$$\left|\int\limits_L f(x,y,z)dl\right| \le \int\limits_L |f(x,y,z)|dl.$$

6⁰. ***(Теорема про середнє значення)****. Якщо функція* $f(x,y,z)$ *неперервна вздовж дуги* L, *тоді існує така точка* $(\xi,\eta,\varsigma) \in L$, *що*

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = f(\xi,\eta,\varsigma)L,$$

де L *є довжина дуги* L.

7⁰. *Якщо* $f(x,y,z) = \mu(x,y,z)$ *є лінійна густина матеріалу дуги* L, *тоді її масу можна обчислити за формулою*

$$m = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl \qquad (12)$$

8⁰. *Координати центра гравітації матеріальної дуги* L_{AB} *з лінійною густиною* $\mu = \mu(x,y,z)$ *можна обчислити за формулами:*

$$x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} x\mu(x,y,z)dl,\ \ y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} y\mu(x,y,z)dl,\ z_c = \frac{1}{m}\int\limits_{L_{AB}} z\mu(x,y,z)dl. \qquad (13)$$

9⁰. *Момент інерції дуги відносно початку координат, відносно осей координат* Ox, Oy, Oz *і відносно координатних площин* Oxy, Oxz, Oyz *обчислюються за формулами:*

$$I_0 = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dl,\ \ I_x = \int\limits_{L_{AB}} (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dl,$$

$$I_y = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dl,\quad I_z = \int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dl,$$

$$I_{xy} = \int\limits_{L_{AB}} z^2\mu(x,y,z)dl,\quad I_{yz} = \int\limits_{L_{AB}} x^2\mu(x,y,z)dl,\ I_{xz} = \int\limits_{L_{AB}} y^2\mu(x,y,z)dl. \qquad (14)$$

Моменти інерції пов’язані такими співвідношеннями:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z, \quad I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Приклад 5. *Знайти координати центру гравітації одного оберту гвинтової лінії*

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad (0 \le t \le 2\pi),$$

якщо лінійна густина постійна.

► Застосуємо формули (13), дістанемо:

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2}\,dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2}\,dt} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Застосовуючи відповіні формули, дістанемо, що $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b2\pi^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = 2\pi b.$$

Отже, координати центру гравітації одного оберту гвинтової лінії є

$$x_c = 0,\ y_c = 0,\ z_c = \pi b. ◄$$

§ 2. *Криволінійні інтеграли другого роду*

2.1. *Задача про роботу сили.*

Нехай точка $P(x, y)$ під дією сили $\vec{F}$ рухається вздовж деякої плоскої лінії L від точки M до точки N. До точки $P(x, y)$ прикладена сила $\vec{F}$, яка змінюється за величиною і напрямком з руханням точки. Отже сила $\vec{F}$ є деяка функція від координати P:

$$\vec{F} = \vec{F}(P).$$

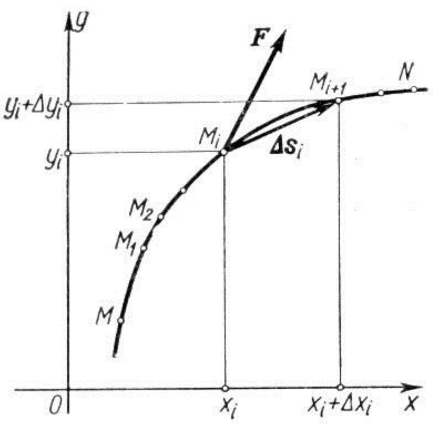

Fig. 2

Обчислимо роботу A сили як точки, яка переміщується від точки M до N (Рис. 2). Щоб розв'язати задачу, зробимо так. Криву MN розбиваємо на частини точками $M_0 = M$, M_1, M_2, …, $M_n = N$, які йдуть у напрямі від точки $M_0 = M$ до точки $M_n = N$. З'єднаємо точки M_i ($i =$ 0,1,2, …,n) послідовно відрізками прямих, дістанемо вписану ламану L_n: M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$. Припустимо, що точка рухається по ламаній L_n і що на кожній ланці $[M_iM_{i+1}]$ ($i = 0,1,2, \ldots, n-1$) ламаної L_n сила буде сталою і дорівнює її значенню, наприклад у точці $M_i \in [M_iM_{i+1}]$. Тоді робота A_i на ланці $[M_iM_{i+1}]$ ламаної дорівнюватиме

$$A_i = \vec{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{M_iM_{i+1}} \qquad (1)$$

Якщо вектори $\vec{F}(M_i)$ і $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ задані у проекціях на координатні осі

$$\vec{F}(M_i) = P(M_i)\vec{i} + Q(M_i)\vec{j},\ \overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j},$$

де $\vec{i}$ і $\vec{j}$ орти , $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, x_i, y_i - декартові координати точки M_i, то рівність (1) запишемо у такому вигляді:

$$A_i = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$$

Таким чином, робота сили вздовж вписаної ламаної L_n дорівнює

$$A(L_n) = \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$$

За роботу сили $\overrightarrow{F}(M)$ вздовж кривої MN природно взяти границю (якщо вона існує) роботи цієї сили вздовж вписаної ламаної лінії L_n, тобто

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i, \qquad (2)$$

де $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |M_i M_{i+1}|$.

Розв'язання поставленої задачі привело нас до необхідності вміти обчислювати границі виду (2).

2.2. Поняття криволінійного інтеграла другого роду, його існування і обчислення

Нехай у площині xOy дано неперервну криву AB

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta, \qquad (3)$$

$A = (x(\alpha), y(\alpha))$ - початкова і $B = (x(\beta), y(\beta))$ - кінцева точки цієї кривої, і нехай у точках кривої AB задано функцію $P(x, y)$. Розглянемо (Т) розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$

$$(T) \qquad \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots < t_n = \beta \quad (4)$$

і на кожному відрізку $[t_k, t_{k+1}]$ цього розбиття візьмемо по одній точці $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ складемо суми

$$S^{(1)}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k \qquad (5)$$

$$S^{(2)}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta y_k, \qquad (6)$$

де

$$x_k = x(\tau_k), \quad y_k = y(\tau_k), \quad x_k = x(t_k), \; y_k = y(t_k), \; \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Суми (5) і (6) *називаються інтегральними сумами.*

Позначимо через $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\lambda(T) = \max\limits_{0 \le k \le n-1} |\Delta t_k|$.

Якщо при $\lambda(T) \to 0$ інтегральні суми (5) (суми (6)) прямують до означеної границі I, то цю границю *називають криволінійним інтегралом по абсцисі* x *(по ординаті* y*)* від функції $P(x, y)$ вздовж кривої AB і позначають

$$I = \int_{AB} P(x, y)dx, \qquad (I = \int_{AB} P(x, y)dy)$$

Отже,

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k \qquad (7)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dy = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta y_k$$

Мовою «$\varepsilon - \delta$» означення криволінійного інтеграла від функції $P(x, y)$ по абсцисі x вздовж непевної кривої AB можна сформулювати так:

Число I називається криволінійним інтегралом від функції $P(x,y)$ по абсцисі x вздовж неперервної кривої AB, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon$$

для будь-якого (T) розбиття (4) відрізка $[\alpha, \beta]$, для якого $\lambda(t) < \delta$. Таким чином, якщо границя (7) інтегральної суми (5) існує, то вона не залежить ні від способу розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$ на n відрізків $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0,1,2,3,...,n-1$), ні від способу вибору точок τ_k з цих відрізків. Аналогічно формулюється поняття криволінійного інтеграла по ординаті y.

У випадку , коли вздовж дуги AB визначені дві функції і $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ і існують інтеграли $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ і $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$, суму цих інтегралів називають *повним криволінійним інтегралом (*або *криволінійним інтегралом загального виду)* вздовж дуги AB і позначають:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{8}$$

Під цим інтегралом розуміють суму інтегралів $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ і $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$, якщо кожний з них існує

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy \tag{9}$$

Всі ці інтеграли, розглянуті в цьому пункті, називають *криволінійними інтегралами другого роду*

З'ясуємо питання існування і обчислення криволінійного інтеграла другого роду.

Теорема 1. *Нехай дано неперервну криву AB*

$$x = x(t) \qquad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta \tag{10}$$

і функцію $P(x,y)$ неперервну в точках цієї кривої. Якщо $x(t)$ є функцією з обмеженою варіацією на відрізку $[\alpha, \beta]$, то існує криволінійний інтеграл по абсцисі $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ і правильна рівність

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = (S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))dx(t) \tag{11}$$

Якщо $y(t)$ є функцією з обмеженою варіацією на відрізку $[\alpha, \beta]$, то існує криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dy$ і правильна рівність

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dy = (S)\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))dy(t), \tag{12}$$

де в правих частинах рівностей (11) і (12) *стоять інтеграли Стільтьєса.*

► Візьмемо (T) розбиття (4) відрізка $[\alpha, \beta]$ і розглянемо інтегральні суми (5) і (6), що відповідають цьому розбиттю

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta x(t_k) \tag{13}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k)\Delta y_k = \sum_{k=0}^{n-1} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\Delta y(t_k), \qquad (14)$$

де

$$\Delta x(t_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k) = x_{k+1} - x_k = \Delta x_k; \ \Delta y(t_k) = y(t_{k+1}) - y(t_k) = y_{k+1} - y_k = \Delta y_k.$$

Праві частини (13) і (14) є інтегральні суми Стільтьєса, складені для (T) розбиття (4) відрізка $[\alpha, \beta]$, функції $P(x(t), y(t))$, неперервної на відрізку $[\alpha, \beta]$, відповідно по функціях $x(t)$ і $y(t)$, з обмеженими варіаціями на відрізку $[\alpha, \beta]$. За відповідною теоремою для визначеного інтеграла, інтегральні суми при $\lambda(T) \to 0$ прямують до інтеграла Стільтьєса, які стоять у правих частинах відповідно рівностей (11) і (12). Переходячи до границі при $\lambda(T) \to 0$ в рівностях (13) і (14), дістанемо рівності (11) і (12). Теорему доведено. ◄

Теорема 2. *Якщо неперервна крива (3) спрямлювана, а функція* $P(x, y)$ *неперервна в точках цієї кривої, то існують криволінійні інтеграли*

$$\int_{AB} P(x, y)dx \qquad i \qquad \int_{AB} P(x, y)dy$$

і правильні рівності (11) і (12)

► Якщо крива (10) спрямлювана, то $x(t)$ і $y(t)$ - функції з обмеженою варіацією, і правильність **теореми 2** випливає з **теореми 1.** ◄

Повертаючись до рівності (2), можна стверджувати, що робота сили

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

Вздовж спрямлюваної кривої AB виражається через посередність криволінійного інтеграла

$$A = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \qquad (2^*)$$

якщо проекції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ сила $\vec{F}(x, y)$ (а також сама сила $\vec{F}(x, y)$) є неперервними функціями в точках кривої AB.

Наслідок 1. *Якщо функція* $P(x, y)$ *неперервна в точках неперервної кривої (10), а функція* $x(t)$ *(функція* $y(t)$*) на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *має неперервну похідну першого порядку, то існує криволінійний інтеграл*

$$\int_{AB} P(x, y)dx \qquad \left(\int_{AB} P(x, y)dy \right)$$

і правильна рівність

$$\int_{AB} P(x, y)dx = (R)\int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)dt \qquad (15)$$

$$\int_{AB} P(x, y)dy = (R)\int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))y'(t)dt \qquad (16)$$

У правих частинах останніх рівностей стоять інтеграли Рімана, таким чином, обчислення криволінійного інтеграла при умовах **наслідку 1** зводиться до обчислення звичайного визначеного інтеграла.

Наслідок 2. *Якщо функції* $P(x, y)$ *і* $Q(x, y)$ *в точках спрямлюваної кривої (10) неперервні на відрізку* $[\alpha, \beta]$*, а функції* $x(t)$ *і* $y(t)$ *на цьому відрізку мають неперервні похідні першого порядку, то існує криволінійний інтеграл*

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (*)$$

і правильна рівність

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t)x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right] dt \qquad (17)$$

Справді, при умові **наслідку 2** за **наслідком 1** існують криволінійні інтеграли

$$\int_{AB} P(x,y)dx \qquad i \qquad \int_{AB} Q(x,y)dy \qquad (18)$$

і правильні рівність (15) і рівність

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y'(t)dt$$

Звідси і з (9) випливає (17).

Зазначимо, що коли неперервна крива AB в декартових координатах задана рівнянням $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ - неперервна функція на відрізку $\left[a,b\right]$, або рівнянням $x = \phi(y)$, де $\phi(y)$ - неперервна функція на відрізку $\left[c,d\right]$ і в точках цієї кривої функція $P(x,y)$ неперервна, то без всяких інших додаткових умов існують відповідно криволінійні інтеграли (18) і правильні рівності

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{a}^{b} P(x, \varphi(x))dx \qquad (19)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{c}^{d} P(\phi(y), y)dy \qquad (20)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} \left[P(x, \varphi(x) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \right] dx \qquad (21)$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{c}^{d} \left[P(\phi(y), y)\phi'(y) + Q(\phi(y), y) \right] dy \qquad (22)$$

У випадку просторової кривої криволінійний інтеграл функцій $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначаються аналогічно:

$$\int_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\lim_{\lambda(T)_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i]$$

Теорема 3. *Якщо у будь-якій області* D*, яка містить дугу* AB *функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$*, і* $R(x,y,z)$ *неперервні , тоді існує криволінійний інтеграл другого роду*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \qquad (23)$$

Нехай вектор $\vec{r}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ є радіус-вектор точки $M(x,y,z)$ $d\vec{r}(M) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, тоді підінтегральний вираз $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ представляє скалярний добуток $\vec{F}(M)$ і $d\vec{r}(M)$. Отже криволінійний інтеграл другого роду вздовж дуги AB вектор-функції $\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ можна скорочено записати таким чином $\int_{AB} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$.

2.3 Властивості криволінійних інтегралів другого роду

1^0. *(Лінійність)* *Якщо існують інтеграли*

$$\int\limits_{AB}\left(\overrightarrow{F_1},d\vec{r}\right) \quad i \qquad \int\limits_{AB}\left(\overrightarrow{F_2},d\vec{r}\right),$$

тоді для будь-яких дійсних C_1 *і* C_2 *існує інтеграл*

$$\int\limits_{AB}\left(C_1\overrightarrow{F_1}+C_2\overrightarrow{F_2},d\vec{r}\right),$$

такий, що

$$\int\limits_{AB}\left(C_1\overrightarrow{F_1}+C_2\overrightarrow{F_2},d\vec{r}\right)=C_1\int\limits_{AB}\left(\overrightarrow{F_1},d\vec{r}\right)+C_2\int\limits_{AB}\left(\overrightarrow{F_2},d\vec{r}\right) \qquad (24)$$

2^0. *(Адитивність)* *Якщо крива* AB *складається з дуг* AC *і* CB, *тоді існують інтеграли* $\int\limits_{AC}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$ *і* $\int\limits_{CB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$, *такі, що*

$$\int\limits_{AB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int\limits_{AC}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)+\int\limits_{CB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right) \qquad (25)$$

3^0. *У протилежність криволінійному інтегралу першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку, в якому точка кривої пробігає дугу* AB *(від* A *до* B *або від* B *до* A*) і змінює знак, якщо напрямок змінюється, тобто:*

$$\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=-\int\limits_{BA}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz \qquad (26)$$

2.4. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду

Розглянемо інтеграл другого роду $\int\limits_{AB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$, де AB визначена крива (A початкова точка і B кінцева) задана вектором $\vec{r}=\vec{r}(l)$, тут l довжина дуги, яка змінюється у напрямку орієнтованої дуги AB (Рис. 3*). Тоді

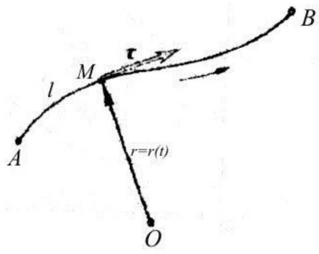

Рис. 3*

$$\frac{d\vec{r}}{dl}=\vec{\tau} \qquad \text{або} \qquad d\vec{r}=\vec{\tau}dl$$

де τ є одиничний вектор дотичного вектора до дуги в точці M.
Отже:

$$\int\limits_{AB}\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int\limits_{AB}\left(\vec{F},\vec{\tau}\right)dl, \qquad (27)$$

У правій частині рівності ми маємо лінійний інтеграл вздовж дуги кривої, тобто лінійний інтеграл першого роду.

Якщо змінюється орієнтація дуги AB, тоді дотичний одиничний вектор $\vec{\tau}$ змінюється на протилежний одиничний вектор $(-\vec{\tau})$, який змінює знак із зміною знака інтеграла

Приклад 1. *Обчислити криволінійний інтеграл від вектор-функції* $\vec{F}(x,y,z)=x^3\bar{i}+3zy^2\bar{j}-x^2y\bar{k}$ *вздовж відрізка прямої від точки* $M(3,2,1)$ *до точки* $N(0,0,0)$.

► Щоб знайти параметричне рівняння прямої MN, вздовж якої відбувається інтегрування, запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$$

і позначимо всі ці співвідношення параметром t; тоді дістанемо рівняння прямої у параметричній формі

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t.$$

Очевидно початковій точці відрізка MN відповідає значення параметра $t = 1$, а кінцевій точці - $t = 0$. Похідні x, y, z відносно параметра t легко знаходяться

$$x_t^{'} = 3, \quad y_t^{'} = 2, \quad z_t^{'} = 1.$$

Отже криволінійний інтеграл обчислюється наступним чином

$$\int_M^N x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz = \int_1^0 [(3t)^3 3 + 3t(2t)^2 2 - (3t)^2 2t]dt = \int_1^0 87t^3dt = -\frac{87}{4}.$$

Приклад 2. *Обчислити криволінійний інтеграл пари функцій* $P(x, y) = 6x^2y$ і $Q(x, y) = 10xy^2$ *вздовж кривої* $y = x^3$ *від точки* $M(1;1)$ *до точки* $N(2;8)$. *(Рис.3)*

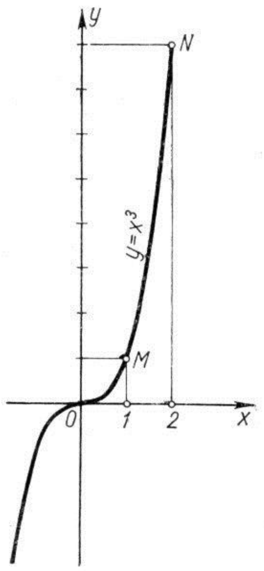

Рис. 3

► Для обчислення заданого інтегралу

$$\int_M^N 6x^2ydx + 10xy^2dy$$

необхідно скласти параметричне рівняння кривої. Оскільки рівняння кривої задано у явній формі і є спеціальним випадком параметричного рівняння, то тут абсциса x точки кривої може бути параметром і тоді параметричне рівняння кривої набуває вигляду

$$x = x, \quad y = x^3.$$

Параметр x змінюється від $x_1 = 1$ до $x_2 = 2$. Похідні відносно параметра набувають вигляду

$$x_x^{'} = 1, \quad y_x^{'} = 3x^2.$$

Отже:

$$\int_M^N 6x^2ydx + 10xy^2dy = \int_1^2 [6x^2x^3 \cdot 1 + 10x \cdot x^6 3x^2]dx = = \int_1^2 [6x^5 + 30x^9]dx = \left(_1^2 (x^6 + 3x^{10})\right|_1^2 = 1084. \blacktriangleleft$$

Практичні заняття - 3.1

Обчислити криволінійні інтеграли першого роду

1. $\int_L (x + y)dl$, де L є *контур трикутника* ABO *з вершинами* $A(1,0)$, $B(0,1)$ *і* $O(0,0)$.

2. $\int_L xydl$, *де* L *є контур квадрата* $|x| + |y| = a, (a > 0)$.

3. $\int_L y^2dl$, *де* L *є перша арка циклоїди* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

4. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, *де* L: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

5. *Знайти масу астроїди* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, *якщо густина у всіх точках задана формулою* $\mu(x, y) = k|xy|, (k > 0)$.

6. *Знайти масу кардіоїди* $r = a(1 - \cos\theta)$, *якщо* $\mu(P) = k\sqrt{r}$ $(k > 0)$.

7. *Знайти масу лемніскати* $r^2 = a^2\cos 2\theta$, *якщо* $\mu(P) = kr$ $(k > 0)$.

8. *Знайти масу першої чверті кола* $x^2+y^2=r^2$, *якщо* $\mu(P)=kx\ (k>0)$.

9. *Знайти масу півкола* $x^2+y^2=r^2$, *яке знаходиться у верхній півплощині,* $\mu(P)=ky^3\ (k>0)$.

Самостійна робота

I	**1.** *Обчислити криволінійний інтеграл* $\int_L \frac{dl}{x-y}$, *де* L *є відрізок прямої* $y=\frac{1}{2}x-2$, *який з'єднує точки* $A(0,-2)$ *і* $B(4,0)$.
	2. *Знайти масу додатної чверті еліпса* $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, *якщо* $\mu(P)=y$.
II	**1.** *Обчислити криволінійний інтеграл* $\int_L xydl$, *де* L *є контур паралелограма з вершинами* $A(0,0), B(4,0)$, $C(4,2)$ і $D(0,2)$.
	2. *Знайти масу одного оберту гвинтової лінії* $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3t$, *якщо густина в кожній точці дорівнює квадрату полярного радіуса*.
III	**1.** *Обчислити криволінійний інтеграл* $\int_L ydl$, *де* L *є частина параболи* $y^2=2px$, *яка відсікається параболою* $x^2=2py$.
	2. *Обчислити статичний момент одного оберту конічної гвинтової лінії* $x=t\cos t$, $y=t\sin t, z=t$ *відносно координатної площини* Oxy, *якщо густина* $\mu(x,y,z)=kz^2\ (k>0)$.

Практичні заняття - 3.2

Обчислити задані криволінійні інтеграли другого роду

1. $\int_{(0,0)}^{(\pi,2\pi)} -x\cos y dx + y\sin x dy$ *вздовж лінії, яка з'єднує точки* $A(0,0)$ і $B(\pi,2\pi)$.

2. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx+(y-x)dy$ *вздовж ліній* 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y=x^3$, 4) $x=y^2$.

3. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx+x^2dy$ *вздовж ліній* 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y=x^3$, 4) $x=y^2$.

4. $\int_L ydx-xdy$, *де* L є еліпс $x=a\cos t, y=b\sin t$ *у додатному напрямку обходу.*

5. $\int_L \frac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, *де* L *півколо* $x=a\cos t, y=a\sin t$ *від* $t_1=0$ *до* $t_2=\pi$.

6. $\int\limits_L (2a-y)dx-(a-y)dy,$ *де* L - перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

7. $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz,$ *де* L *відрізок прямої лінії, який з'єднує точки* $A(1,1,1)$ *і* $B(2,3,4)$.

8. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ вздовж прямої лінії

Самостійна робота

Обчислити:

I	**1)** $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy,$ *якщо* L *є дуга параболи* $y=x^2$, *яка з'єднує точки* $A(-1,1)$ *і* $B(1,1)$.
	2. $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy,$ *де* L *є перша арка циклоїди* $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.
II	**1)** $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy,$ *де* L *є дуга параболи* $y=x^2$, *яка з'єднує точки* $A(1,1)$ *і* $B(2,4)$.
	2) $\int\limits_L y^2dx+x^2dy,$ *де* L *верхня дуга півеліпса* $x=a\cos t,$ $x=b\sin t.$
III	**1)** $\int\limits_L 2xydx-x^2dy,$ *де* L *є дуга параболи від точки* $O(0,0)$ *до точки* $A(2,1)$.
	2) $\int\limits_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2},$ *де* L *є дуга півкола* $x^2+y^2=a^2$.

§ 3. *Обчислення площі області, обмеженої кривою, лінійним інтегралом*

Припустимо, що область D проектується на вісь Ox на інтервал $[a,b]$ і обмежена знизу кривою (l_1): $y=y_1(x)$, а зверху кривою $(l_2): y=y_2(x), [y_1(x)\le y_2(x)]$. Тоді площа області D обчислюється за формулою

$$S=\int\limits_a^b y_2(x)dx-\int\limits_a^b y_1(x)dx$$

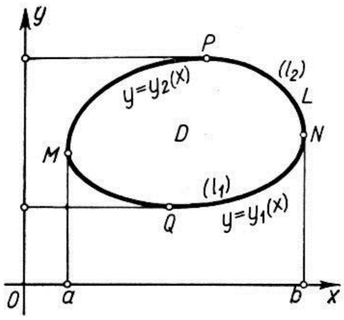

Рис. 4

Але перший інтеграл є лінійний інтеграл вздовж кривої $l_2\ (\cup MPN)$, оскільки $y = y_1(x)$ є рівняння кривої $l_1\ (\cup MQN)$, отже

$$\int_a^b y_2(x)dx = \int_{MPN} ydx$$

Другий інтеграл також є лінійний інтеграл вздовж кривої $l_1\ (\cup MQN)$, тобто

$$\int_a^b y_1(x)dx = \int_{MQN} ydx$$

За властивістю лінійних інтегралів другого роду

$$\int_{MPN} ydx = -\int_{NPM} ydx$$

Отже:

$$S = -\int_{NPM} ydx - \int_{MQN} ydx = -\int_L ydx \qquad (1)$$

Тут, крива L пробігається у додатному напрямку.

Аналогічно можна показати, що

$$S = \int_L xdy \qquad (2)$$

Додаючи (1) і (2) почленно і поділивши на 2, ми дістанемо іншу формулу обчислення площі S області D

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx. \qquad (3)$$

Приклад. *Обчислити площу еліпса* $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

► За формулою (3) дістанемо:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]dt = \pi ab. ◄$$

§ 4. *Формула Гріна*

Нехай область D, яка лежить у площині xOy, регулярна у напрямку осей Ox і Oy і обмежена замкненим контуром L. Межа області складається з графіків двох функцій $y = y_1(x)$ - знизу і $y = y_2(x)$ - зверху, визначених і неперервних на деякому відрізку $[a,b]$, причому $y_1(x) \le y_2(x)$, $(a \le x \le b)$.(Рис. 4)

Нехай у області D задані неперервні функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, які мають неперервні частинні похідні.

Теорема 1. *Нехай D - регулярна область відносно осей Ox і Oy у замкненій області $\overline{D}$. $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тоді правильна формула*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\Gamma^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad (1)$$

де Γ^+ - межа області D, що проходить у додатному напрямку.

► Оскільки область D регулярна відносно осі Oy, то її межа складається з графіків двох функцій $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$.

Застосовуючи формулу обчислення подвійного інтеграла, теорему Ньютона-Лейбніца, а також формулу для обчислення криволінійного інтеграла, дістанемо:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx = -\int\limits_{MN} P(x,y)dx - \int\limits_{NM} P(x,y)dx = -\int\limits_{L^+} P(x,y)dx .$$

Отже,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{MN} P(x, ydx - \int\limits_{NM} P(x, ydx = -\int\limits_{L^+} P(x,y)dx \qquad (2)$$

Але область D регулярна і відносно вісі Ox. Тому межа цієї області складається з графіків двох функції $x = x_1(y)$ і $x = x_2(y)$ визначених і неперервних на даному проміжку $[c, d]$. Використовуючи формулу для обчислення подвійного інтеграла, теорему Ньютона-Лейбніца, а також формулу для обчисленні криволінійного інтеграла, дістаємо:

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy = \int\limits_c^d \left(Q(x_2(y), y) - P(x_1(y), y) \right) dy =$$

$$\int\limits_c^d Q(x_2(y), y)dy - \int\limits_c^d O(x_1(y), y)dy = \int\limits_{QP} Q(x,y)dy + \int\limits_{PQ} Q(x,y)dy = \int\limits_{L^+} Q(x,y)dy .$$

Отже,

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int\limits_{QP} Q(x,y)dy + \int\limits_{PQ} Q(x,y)dy = \int\limits_{L^+} Q(x,y)dy \qquad (3)$$

Віднявши від останньої формули формулу (2), дістанемо формулу (1).◄

Ми покладали, що область D регулярна. Але можна показати, що формула (1) справедлива для будь-якої області, яку можна поділити на регулярні області

4.1. Узагальнення формули Гріна

Нехай D - область у площині xOy і нехай її межа Γ є простою кусково-гладкою кривою. Припустимо, що область D може бути розбита на скінченне число регулярних відносно вісей Ox і Oy областей D_i з кусково-гладкими межами γ_i ($i = \overline{1, p}$).

Нехай далі $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - функції неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій області $\overline{D}$. Тоді правильна формула (1). Справді, за доведеним

$$\iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\gamma_i^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ \ (i = \overline{1, p})$$

Склавши ці рівності, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{p} \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{i=1}^{p} \int\limits_{\gamma_i^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (4)$$

Внаслідок адитивної властивості подвійного інтеграла маємо

$$\sum_{i=1}^{p} \iint\limits_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (5)$$

Неважко побачити, що сума криволінійних інтегралів, які стоять у правій частині рівності (4), дорівнює криволінійному інтегралу $\int\limits_{\Gamma^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, оскільки криволінійні інтеграли по внутрішніх частинах меж γ_i області D_i беруться двічі, причому один раз у додатному, а другий - у від'ємному напрямі і, отже, сума кожних двох таких інтегралів дорівнює нулю.

4.2. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

Основне питання , що цікавитиме нас тут, полягає в тому, щоб з'ясувати умови накладання на функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, при яких криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, що з'єднує дві фіксовані точки A і B області D і, отже, його величина повністю визначається заданими функціями $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ і точками A і B. Розв'язання цього, цікавого з математичної точки зору, питання має велике практичне значення, оскільки робота сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ вздовж спрямлюваної кривої AB обчислюється за допомогою криволінійного інтеграла.

Перш за все встановимо еквівалентність деяких тверджень, що стосується інтеграла цього виду.

Теорема. *Нехай* $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ *неперервні разом зі своїми частинними похідними* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *і* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *в області* G *площини* xOy, *тоді виконання однієї з наступних умов 1, 2, 3, 4 необхідне і достатнє для кожного з трьох останніх.*

1^0. *Для будь-якої замкненої кусково-гладкої кривої* L, *що цілком лежить у* G, *правильна рівність*

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

2^0. *Для будь-яких точок* $A \in G$ *і* $B \in G$ *значення інтеграла*

$$\int_{AB} Pdx + Qdy \qquad (1)$$

по кусково-гладкій кривій $AB \in G$, *яка з'єднує точки* A *і* B, *не залежить від форми кривої* AB.

3^0. *Вираз* $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ *є повним диференціалом деякої функції* $u(x, y)$, *визначеній в області* G, *тобто* $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$du(x, y) = Pdx + Qdy \qquad (2)$$

У цьому випадку

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) \qquad (3)$$

4^0. *В області* G

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (4)$$

► Доведення теореми може бути відбуватися за такою логічною схемою $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Покажемо, що з умови 1^0 випливає 2^0, а з 2^0 випливає 3^0, а з 3^0 випливає 4^0, а з 4^0 випливає 1^0. Цим буде доведено, що за будь-якої умови 1^0, 2^0, 3^0 і 4^0 випливає кожна з трьох останніх.

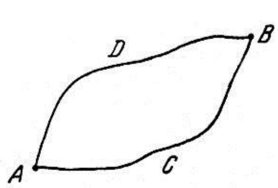

Рис. 5

<u>Перший крок.</u> $1^0 \to 2^0$, нехай правильне твердження 1^0, візьмемо дві довільні точки $A \in G$ і $B \in G$ і з'єднаємо їх кусково-гладкими кривими ACB і ADB (Рис. 5). Об'єднання цих кривих $ACB \cup ADB$ утворює замкнену кусково-гладку криву. Внаслідок

умови 1^0 маємо

$$\int\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = 0 \qquad (5)$$

Звідси з рівності

$$\int\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy - \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy = 0$$

Випливає рівність

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy$$

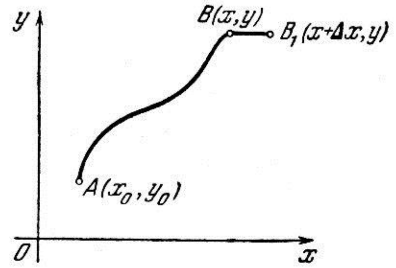

Рис. 6

Отже, перша умова доведена.

Другий крок. $2^0 \to 3^0$. Нехай правильне твердження 2^0. Візьмемо фіксовану точку $A\,(x_0, y_0) \in G$ і довільну точку $B(x, y) \in G$ і з'єднаємо їх кусково-гладкою кривою AB, що цілком лежить у G. Оскільки криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування, то його величина є функція точки $B(x, y)$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} Pdx + Qdy = U(x, y)$$

Покажемо, що для кожної точки $(x, y) \in G$ функція $U(x, y)$ диференційована і

$$dU = Pdx + Qdy$$

Для цього достатньо показати, що існують $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial U}{\partial y}$, і вони дорівнюють відповідно $P(x, y)$ і $Q(x, y)$. Обчислимо

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x}$$

Величина $\Delta U = U(x + \Delta x, y) - U(x, y)$ представляє собою інтеграл від $Pdx + Qdy$, взятий по шляху, який з'єднує точки (x, y) і $(x + \Delta x, y)$. Так як, за умовою цей інтеграл не залежить від виду кривої, то можна вважати, що шлях співпадає з горизонтальним відрізком BB_1 (Рис.6). Таким чином,

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{BB_1} Pdx + Qdy = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} P(x, y)dx = P(x + \theta \Delta x, y)$$

(в останній рівності ми використали теорему про середнє для інтеграла). Отже,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y)$$

оскільки $P(x, y)$ неперервна.

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$$

Третій крок. $3^0 \to 4^0$. Якщо $Pdx + Qdy$ є повний диференціал функції $U(x.y)$, тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$$

За умовою теореми про змішані похідні

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \qquad (7)$$

Четвертий крок. $4^0 \to 1^0$. Нехай рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ виконується і нехай L довільний контур, який лежить в області G. Оскільки ця область за умовою регулярна, то обмежена контуром L частина площини належить області G, в якій визначені функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх похідні, тому криволінійний інтеграл

$$\int_L Pdx + Qdy$$

за формулою Гріна може перетворитися у подвійний:

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

де G область обмежена контуром L. В силу (7) інтеграл справа дорівнює нулю. Отже, $\int_L Pdx + Qdy = 0$ для всякого замкненого контура L, який лежить в області G. Теорема доведена. ◄

Приклад. *Нехай* $du = (2xy+1)dx + (x^2 + 3y^2)dy$

$$u(x,y) = \int (2xy+1)dx = x^2 y + x + f_1(y)$$

$$u(x,y) = \int (x^2 + 3y^2)dy = x^2 y + y^3 + f_2(x)$$

Порівнюючи праві частини останніх рівнянь приходимо до висновку, що

$$f_1(y) = y^3 + C, \quad f_2(x) = x + C,$$

Отже

$$u(x,y) = x^2 y + x + y^3 + C.$$

Практичні заняття - 3.3

1. Обчислити інтеграли, використовуючи формулу Гріна

1. $\oint_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, *де* L *- утворює півкола* $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ *і вісь* Ox.

2. $\oint_L (x+y)^2 dx + (x-y)^2 dy$, *де* L *є контур, який утворюється функцією* $y = \sin x$ *і відрізком вісі* Ox *при* $0 \le x \le \pi$.

3. $\oint_{x^2+y^2=r^2} x^2 y dx - xy^2 dy.$

4. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, *де* L *є контур трикутника з вершинами* $O(0,0)$, $A(1,0)$ *і* $B(0,1)$.

5. $\oint_L (xy + x + y)^2 dx - (xy + x - y)dy$, *де* L*: 1) еліпс* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 2) *коло* $x^2 + y^2 = ax.$

2.Знайти функцію, яка задана повним диференціалом

6. $du = x^2 dx + y^2 dy$ **7.** $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$

8. $du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$**,** **9.** $du = \frac{xdx}{y\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{y^2(x^2+y^2)} \right) dy$

10. $du = (2x\cos y - y^2 \sin x)dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)dy$**.**

3.Обчислити площу фігури, обмеженої такими лініями:

11. *Еліпсом* $x = a\cos t, y = b\sin t.$

12. *Астроїдою* $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$.

13. *Кардіоїдою* $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = (2\sin t - \sin 2t).$

14. *Петлею декартового листа* $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$ $\left(x = \dfrac{3at}{1+t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \right).$

Самостійна робота

I	**1)** *Обчислити інтеграл* $\oint\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy, \quad L: x^2+y^2=R^2.$
	2) *Знайти функцію* $u(x,y)$**,** *якщо* $du = \left(\dfrac{x-2y}{(y-x)^2} + x\right)dx + \left(\dfrac{y}{(y-x)^2} - y^2\right)dy$
II	**1)** *Обчислити інтеграл* $\oint\limits_L (e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} - x^2\sin y)dy,\ L: x^2+y^2=R^2$
	2) *Знайти функцію* $u(x,y)$**,** *якщо* $du = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \left(\dfrac{e^y}{1+x^2} + 1\right)dy$
III	**1)** $\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$**,** *де* L *контур трикутника з вершинами* $A(1,1), B(2,2), C(1,3).$
	2) *Знайти функцію* $u(x,y)$**,** *якщо* $du = \dfrac{(3y-x)dx + (y-3x)dy}{(x+y)^3}.$

§ 5. *Поверхневий інтеграл першого роду*

Нехай задана обмежена поверхня S, в кожній точці якої визначена функція $u = f(x,y,z)$. Поділимо поверхню S довільним чином на декілька малих частин Δs_1, $\Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ і в кожній з них виберемо довільну точку M_1, $M_2, \ldots$ M_n. (Рис. 7). Тоді така сума

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k \qquad (1)$$

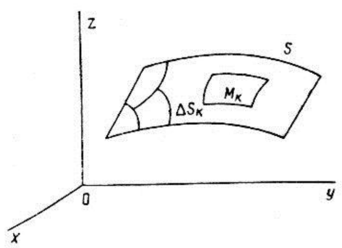

Рис. 7

називається інтегральною сумою для функції $f(x,y,z)$. *Границя інтегральної суми (якщо максимальний діаметр елементарної площини* Δs_k *прямує до нуля), якщо вона існує,* ***називається інтегралом першого роду по поверхні*** S від функції $f(x,y,z)$; він позначається символом $\iint\limits_S f(x,y,z)ds$. Таким чином, за означенням

$$\lim_{diam\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k = \iint_S f(x, y, z)ds \qquad (2)$$

Теорема. (<u>*Про існування інтеграла по поверхні*</u>). *Нехай S - обмежена, гладка або кусково-гладка поверхня, яка має скінченну площину. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна у всіх точках поверхні S і обмежена на цій поверхні, то границя інтегральної суми $\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k$ (якщо максимальний діаметр елементарної площини Δs_k прямує до нуля) існує.*

Інакше кажучи, існує інтеграл від функції $f(x, y, z)$ по поверхні S.

Розглянемо деякі задачі, які приводять нас до поняття інтеграла по поверхні.

<u>Задача 1.</u> (*Про масу матеріальної поверхні*). *Нехай в кожній точці матеріальної неоднорідної поверхні задана поверхнева густина $\rho(x, y, z)$.*

Поставимо перед собою задачу що до обчислення маси всієї поверхні S. Для цього обчислимо її спочатку наближено. Розіб'ємо поверхню S на декілька малих поверхень Δs_1, $\Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Якщо діаметри цих площин малі, а густина $\rho(x, y, z)$ є неперервною функцією, то можна вважати, що густина у всіх точках площини Δs_k однакова; Цю густину можна прийняти $\rho(M_k)$, де M_k - будь-яка точка площини Δs_k. Отже, маса Δs_k приблизно дорівнює $\rho(M_k)\ \Delta s_k$, а маса всієї поверхні приблизно дорівнює $\sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\Delta s_k$. Очевидно, що чим менше площадки Δs_k, тим точніше ця сума дістає величину маси. Точне значення можна дістати, якщо взяти границю цієї суми.

$$m = \lim_{diam\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$$

Але ця границя дорівнює інтегралу по поверхні.

Отже:

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)ds \qquad (3)$$

<u>Задача 2.</u> (*Про обчислення площі поверхні S*).

Очевидно, $S = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$

Якщо перейти до границі у цій рівності (при $diam\Delta s_k \to 0$), дістанемо:

$$S = \lim_{diam\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

Але у правій частині цієї рівності стоїть границя інтегральної суми (яка побудована для функції $f(x, y, z) = 1$)

Отже,

$$S = \iint_S 1\, ds \qquad (4)$$

тобто площа поверхні дорівнює інтегралу по цій поверхні від функції, яка тотожно дорівнює одиниці.

5.1. Властивості поверхневого інтеграла першого роду

1^0. *(Лінійність) Якщо існують інтеграли*

$$\iint_S f_1(x, y, z)ds \quad i \qquad \iint_S f_2(x, y, z)ds,$$

то для будь-яких дійсних C_1 *і* C_2 *існує інтеграл*

$$\iint_s \left(C_1 f_1(x,y,z,)+C_2 f_2(x,y,z,)\right)ds, \qquad (5)$$

такий, що

$$\iint_S \left(C_1 f_1(x,y,z,)+C_2 f_2(x,y,z,)\right)ds = C_1\iint_S f_1(x,y,z)ds + C_2\iint_S f_2(x,y,z)ds \qquad (6)$$

2⁰. *(Адитивність) Якщо поверхня* S *складається з поверхней* $S_1,\ S_2,\ S_3,\ldots,\ S_n$ *і існує інтеграл* $\iint_S f(x,y,z)ds$, *то існують інтеграли* $\iint_{S_1} f(x,y,z)ds$, $\iint_{S_2} f(x,y,z)ds$, ... , $\iint_{S_n} f(x,y,z)ds$, *такі, що*

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \sum_{k=1}^{n}\iint_{S_k} f(x,y,z)ds \qquad (7)$$

3⁰. *(<u>Теорема про середнє значення</u>). Нехай поверхня* S *обмежена, гладка або кусково-гладка і має скінченну площу, якщо функція* $f(x,y,z)$ *неперервна і обмежена на поверхні* S, *тоді існує така точка* $M_0(x_0,y_0,z_0)\in S$, *що*

$$\iint_S f(x,y,z)ds = f(x_0,y_0,z_0)\cdot S, \qquad (8)$$

де S *площа поверхні.*

5.2. Обчислення поверхневого інтеграла

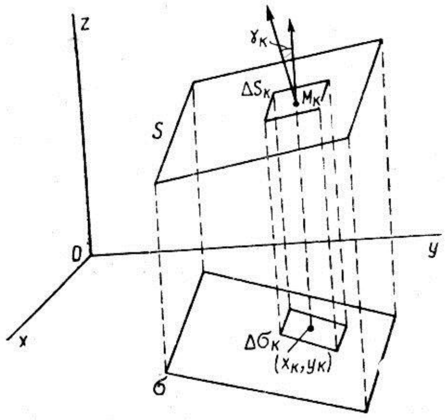

Рис. 8

Нехай поверхня S задана рівнянням $z=\varphi(x,y)$ і проектується на площину xOy в плоску область σ (Рис. 8). Розіб'ємо область S на елементарні частини $\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ ,\ldots,\ \Delta s_k,\ \ldots,\Delta s_n$ і розглянемо проекції цих частин на площину xOy: $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \ldots,\ \Delta\sigma_k,\ \ldots,\ \Delta\sigma_n$. Будемо вважати кожну площину Δs_k плоскою (наприклад, Δs_k замінимо відповідною частиною дотичної площини, проведеної у будь-якій точці M_k, де M_k - точка, яка лежить на Δs_k). Тоді між площинами Δs_k і $\Delta\sigma_k$ має місце таке співвідношення:

$$\Delta\sigma_k = \Delta s_k \cos\gamma_k,$$

де γ_k - гострий двогранний кут між площиною xOy і дотичною площиною в точці M_k. Цей кут дорівнює гострому куту між віссю Oz і нормаллю до поверхні в точці M_k. Отже:

$$\Delta s_k = \frac{\Delta\sigma_k}{\cos\gamma_k}$$

Таким чином,

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \lim_{diam\Delta s_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k = \lim_{diam\Delta\sigma_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,\varphi_k(x_k,y_k))\frac{\Delta\sigma_k}{\cos\gamma_k} \quad (9)$$

Під знаком границі опинилась інтегральна сума від двох змінних x і y. Її границя дорівнює подвійному інтегралу по області σ, отже

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\sigma f(x,y,\varphi(x,y))\frac{d\sigma}{\cos\gamma} \qquad (10)$$

Для того, щоб знайти $\cos\gamma$, зауважимо, що поверхня $z=\varphi(x,y)$ є поверхня рівня для функції $u(x,y,z)=z-\varphi(x,y)$. Тому нормаль до поверхні буде направлена вздовж градієнта $u(x,y,z)$, тобто вздовж вектора

$$gradu = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$$

тоді

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\partial\varphi/\partial x\right)^2 + \left(\partial\varphi/\partial y\right)^2 + 1}} \qquad (11)$$

Підставляючи знайдене значення $\cos\gamma$ у рівність (10), дістанемо:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\sigma f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{\left(\partial\varphi/\partial x\right)^2 + \left(\partial\varphi/\partial y\right)^2 + 1}d\sigma \qquad (12)$$

Зауваження 1. *Розглянемо поверхневий інтеграл функції* $\Phi(x,y,z)\cos\gamma$ *де* $\cos\gamma$ *є направляючим косинусом нормалі до поверхні* S *у напрямку осі* Oz. *Беручи до уваги (11) дістанемо:*

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\cos\gamma ds = \iint_\sigma \Phi(x,y,\varphi(x,y))\cos\gamma\frac{d\sigma}{\cos\gamma} = \iint_\sigma \Phi(x,y,\varphi(x,y))d\sigma \qquad (13)$$

Зауваження 2. *Якщо поверхня* S *задана рівнянням* $y=\varphi(x,z)$, *тоді поверхневий інтеграл набуває вигляду*

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\sigma f(x,\varphi(x,z),z)\frac{d\sigma}{\cos\beta} \qquad (14)$$

або

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\sigma f(x,\varphi(x,z),z)\sqrt{\left(\partial\varphi/\partial x\right)^2 + 1 + \left(\partial\varphi/\partial z\right)^2}d\sigma \qquad (15)$$

Зауваження 3. *Якщо поверхня* S *задана рівнянням* $x=\varphi(y,z)$, *тоді поверхневий інтеграл можна записати у такій формі*

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\sigma f(\varphi(y,z),y,z)\frac{d\sigma}{\cos\alpha} \qquad (16)$$

або

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\sigma f(\varphi(y,z),y,z)\sqrt{1 + \left(\partial\varphi/\partial y\right)^2 + \left(\partial\varphi/\partial z\right)^2}d\sigma \qquad (17^*)$$

Приклад 1. *Обчислити масу конічної поверхні* $z=\sqrt{x^2+y^2}$, *яка обмежена зверху площиною* $z=h$, *з поверхневою густиною в кожній точці пропорційно відстані від цієї точки до початку координат (з коефіцієнтом пропорційності C).*

► Тут, згідно з умовою поверхнева щільність $\rho(x,y,z)=C\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, і тому маса канонічної поверхні може бути обчислена за формулою:

$$m = \iint_S C\sqrt{x^2+y^2+z^2}ds = C\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}d\sigma =$$

$$= 2C\iint_\sigma \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = 2C\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h \rho^2 d\rho = \frac{4\pi C}{3}h^3 \text{ або } m = \frac{4\pi C}{3}h^3. \blacktriangleleft$$

§ 6. *Поверхневий інтеграл другого роду*

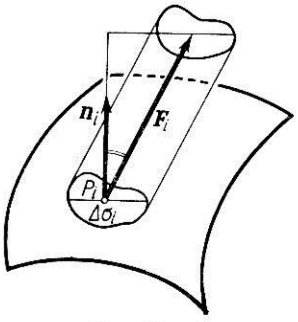

Рис.9

Нехай у області V трьохвимірного простору задана система координат xyz Нехай поверхня S обмежена заданою лінією L, яка задана у області V.

Відносно площини поверхні S покладаємо, що у кожній точці P у додатному напрямку вектора, який визначається одиничним вектором $\overrightarrow{n_0}(P)$, направляючі косинуси якого є неперервні функції у точках поверхні S

У кожній точці поверхні заданий вектор

$$\vec{F} = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k},$$

де

$$A_1(x,y,z), \quad A_2(x,y,z), \quad A_3(x,y,z)$$

є неперервні функції координат.

Поділимо поверхню довільним чином на підобласті Δs_i. У кожній підобласті виберемо довільну точку P_k і розглянемо суму

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}(P_k)\cdot\overrightarrow{n_0}(P_k)\right)\Delta s_k, \qquad (17)$$

де $\vec{F}(P_k)$ є значення вектора $\vec{F}$ в точці P_k; $\overrightarrow{n_0}(P_k)$ є одиничний вектор в точці, а $\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)$ є скалярний добуток цих векторів:

Границя суми (17), при яких діаметри підоблостей прямують до нуля, називається поверхневими інтегралами другого роду і позначаються символом

$$\iint_S \left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds \qquad (18)$$

Представимо одиничний вектор $\overrightarrow{n_0}$ у вигляді проекцій на координатні вісі.

$$\overrightarrow{n_0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

тут $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$ направляючі кути вектора $\overrightarrow{n_0}$ відносно координатних вісей. Підставляючи у (18) вирази векторів $\vec{F}$ і $\overrightarrow{n_0}$ у вигляді їх проекцій, дістанемо:

$$\iint_S \left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds = \iint_S \left(A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma\right)ds \qquad (19)$$

Добуток $\Delta x\cos\alpha$ є проекція Δs на площину xOy (Рис. 10), аналогічно дістаємо вирази для таких проекцій:

$$\Delta s\cos\alpha = \Delta\sigma_{xz}, \quad \Delta s\cos\beta = \Delta\sigma_{xy}, \quad \Delta s\cos\gamma = \Delta\sigma_{xy}$$

є проекції підоблості Δs на відповідні координатні площини

На цій основі інтеграл (19) можна записати таким чином:

$$\iint_S \left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds = \iint_S \left(A_1\cos\alpha + A_2\cos\beta + A_3\cos\gamma\right)ds =$$

$$= \iint_\sigma A_1(x,y,z)dydz + A_2(x,y,z)dzdx + A_3(x,y,z)dxdy \quad (20)$$

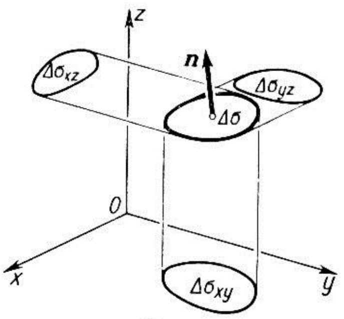

Рис. 10

6.1. Властивості повергнених інтегралів другого роду

1⁰. *Якщо* $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, *то*

$$\iint_S \left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds = \iint_S \left(\vec{F_1}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds + \iint_S \left(\vec{F_2}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds$$

2⁰. $$\iint_{s}\left(C\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds = C\iint_{s}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds$$

3⁰. *Поверхневий інтеграл поміняє знак, якщо орієнтація поверхні змінить напрям, тобто*

$$\iint_{S^+}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds = -\iint_{S^-}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds$$

4⁰. *Якщо* $S=\bigcup_{k=1}^{n} S_k$ *, то*

$$\iint_{S}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds = \sum_{k=1}^{n}\iint_{S_k}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds$$

5⁰. *Оцінка модуля інтеграла*

$$\left|\iint_{S}\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds\right| \le \iint_{S}\left|\left(\vec{F}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)\right|ds \le \max\left|\vec{F}(x,y,z)\right|\cdot P,$$

де P *є площа поверхні* S .

§ 7. *Векторний потік через поверхню*

Перш за все розглянемо поле швидкостей $\vec{V}$ деякої рідини у полі обмеженої поверхні S. Потік рідини через поверхню S є кількість рідини, яка проходить через поверхню S за одиницю часу.

Ми легко визначимо цей потік, якщо швидкість є постійною ($\vec{V}=const$) і поверхня S є площина. Потік рідини дорівнює об'єму циліндричного тіла з паралельними утворюючими довжини $\left|\vec{V}\right|$ і основою S, оскільки за одиницю часу кожний частинний об'єм змінюється на $\vec{V}$ (Рис. 11). Потік тоді буде

$$\Pi_s\left(\vec{V}\right) = Sh$$

де S площа основи, $H = \Pr_{\vec{n}}(\vec{V}) = \left(\vec{V}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)$ є висота циліндра, $\overrightarrow{n_0}$ є нормальний вектор до основи. Отже, $\vec{V}$ потік рідини через площину S дорівнює $\Pi_s\left(\vec{V}\right) = \left(\vec{V}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)\cdot S$

Якщо $\vec{V}$ змінюється неперервно і поверхня S гладка, тоді ми можемо поділити S на частини S_k ($k=\overline{1,n}$) такими малими, що можна покласти що S_k є площини поверхні і $\vec{V}$ на них постійна.

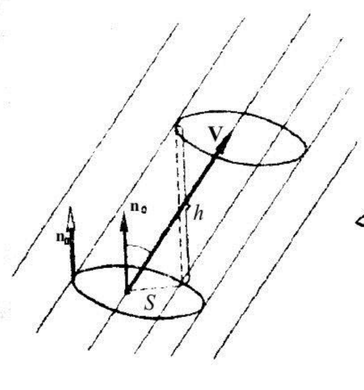

Рис. 11

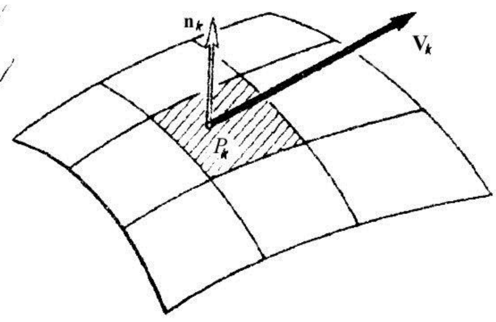

Рис. 12

Оскільки потік рідини через поверхню S дорівнює сумі потоків через всі S_k, ми отримаємо приблизну формулу для обчислення потоку

$$\Pi_s\left(\vec{V}\right) \approx \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{V}(P_k)\cdot\overrightarrow{n_0}(P_k)\right)\cdot\Delta s_k\,, \qquad (21)$$

де n є число частин S_k на яку поверхня S розділена, P_k є точки $k-$ої частини, Δs_k є площа S_k, $\left(\vec{V}(P_k)\cdot\vec{n_0}(P_k)\right)$ є скалярний добуток, де $\vec{V}$ і $\vec{n_0}$ обчислені в точці $P_k \in S_k$ (Рис. 12).

Потік через поверхню S береться за границю (21) якщо найбільший діаметр S_k прямує до нуля

$$\Pi_s\left(\vec{V}\right)=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{V}(P_k)\cdot\vec{n_0}(P_k)\right)\cdot\Delta s_k=\iint_S\left(\vec{V}\cdot\vec{n_0}\right)ds, \qquad (22)$$

де d є найбільший діаметр S_k.

Інтеграл (22), який визначає потік рідини, є визначений інтеграл скалярної функції $\left(\vec{V}\cdot\vec{n_0}\right)$ через поверхню S.

Означення. *Потік вектора $\vec{A}$ через поверхню S є інтеграл по поверхні S проекції вектора $\vec{A}$ на нормаль до поверхні*

$$\Pi_s\left(\vec{A}\right)=\iint_S\left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds=\iint_S\vec{A}_n ds \qquad (23)$$

Очевидно, інтеграл (23) існує, якщо вектор

$$\vec{A}=A_1(x,y,z)\vec{i}+A_2(x,y,z)\vec{j}+A_3(x,y,z)\vec{k}$$

є неперервним, тобто є неперервні її координати $A_1(x,y,z)$, $A_2(x,y,z)$, $A_3(x,y,z)$, і поверхня S гладка, тобто, вона має неперервно змінюючу дотичну поверхню.

7.1. Властивості векторного потоку через поверхню

1^0 *Лінійність*

$$\iint_S\left((\lambda\vec{A}+\mu\vec{B})\cdot\vec{n_0}\right)ds=\lambda\iint_S\left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds+\mu\iint_S\left(\vec{B}\cdot\vec{n_0}\right)ds, \qquad (23)$$

де λ є постійна.

2^0. *Адитивність. Якщо поверхня S поділена на S_1 і S_2 кусково-гладкими кривими, тоді потік через поверхню S буде дорівнюватись сумі потоків через поверхні S_1 і S_2*

$$\iint_S\left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds=\iint_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds+\iint_{S_2}\left(A\cdot\vec{n_0}\right)ds \qquad (24)$$

Ця властивість приводить нас до узагальнення векторного потоку через кусково-гладкі поверхні.

3^0. *Векторний потік через поверхню залежить від орієнтації поверхні (тобто від орієнтації нормалі до поверхні).*

Розглянемо таке питання. Виберемо циліндричну поверхню. Якщо у точці M на поверхні ми вибрали нормаль $\vec{n}$ і будемо безперервно рухатись, не відриваючись від поверхні, тоді ми повернемося до точки M з попередньою орієнтацію вектора $\vec{n}$.

Щоб дістати протилежного напрямку $\vec{A}$ ми повинні рухатись по протилежній поверхні. Поверхня такого виду називається поверхнею з двосторонньою орієнтацію. Такою, наприклад, як площина, сфера, еліпсоїд, поверхня куба і такі інші.

Існують *односторонні*, або *неорієнтовані* поверхні, на яких не можливо дістати ту ж саму орієнтацію нормалі. Прикладом такої поверхні є *лист Мьобіуса* (Рис.13). Якщо у деякій точці листа Мьобіуса

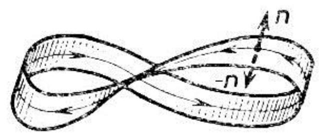

Fig. 13

виберемо нормаль $\vec{n}$, тоді існує деяка лінія на полосі така, що, якщо рухатися безперервно вздовж цієї лінії, ми прийдемо в ту ж саму точку поверхні але з протилежною орієнтацією нормалі.

Отже, на замкненій поверхні ми вибираємо такі точки, в яких є внутрішня або зовнішня нормаль (внутрішня нормаль до точок всередині тіла обмеженою замкненою поверхньою).

Позначимо через S^+ ту сторону поверхні S, на якій виберемо нормаль $\vec{n}$ і через S^- сторону поверхні S, на якій виберемо нормаль $-\vec{n}$. Ми дістанемо ($\overrightarrow{n_0} = -\overrightarrow{n_0}$)

$$\iint_{S^+} \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{n_0^+}\right) ds = -\iint_{S^-} \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{n_0^-}\right) ds \qquad (25)$$

Тобто, якщо орієнтація поверхні змінюється (тобто, напрямок нормалі $\overrightarrow{n_0}$ до поверхні S змінюється) потік вектора змінюється.

§ 8. *Потік вектора через замкнену поверхню. Формула Гауса-Остроградського*

Теорема. *Якщо у деякій просторової області $G \subset R^3$ координати вектора*

$$\vec{A} = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$$

неперервні і мають неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial A_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial A_2}{\partial y}$, $\dfrac{\partial A_3}{\partial z}$, *тоді потік $\vec{A}$ через замкнену кусково-гладку поверхню, яка лежить у області G, дорівнює потрійному інтегралу від* $\dfrac{\partial A_1}{\partial x} + \dfrac{\partial A_2}{\partial y} + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}$ *по області V, обмеженої поверхнею S*

$$\Pi_S(\vec{A}) = \oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{n_0}\right) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv \qquad (26)$$

або

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{n_0}\right) ds = \oint\!\!\!\oint_S \left(A_1 \cos\alpha + A_2 \cos\beta + A_3 \cos\gamma\right) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv \qquad (26^*)$$

Це є формула *Остроградського (або Гауса)*. Тут $\overrightarrow{n_0}$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні, і $\oint\!\!\!\oint_S$ позначає, що потік проходить через замкнену поверхню S.

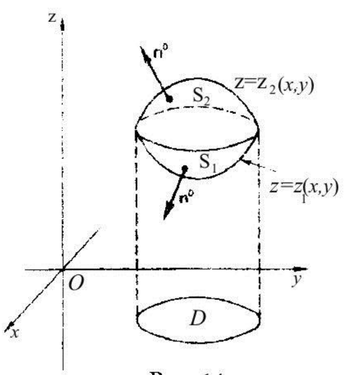

Рис. 14

► Розглянемо спочатку випадок який має тільки одну компоненту $\vec{A} = A_3(x, y, z)\vec{k}$, і покладаємо, що гладка поверхня S перетинається не більш як у двох частинах S_1 і S_2, які проектуються у одну і ту ж область D площини xOy (Рис. 14).

Зовнішня нормаль до S_2 утворює гострий кут γ з віссю Oz, а зовнішня нормаль до поверхні S_1 утворює тупий кут з віссю Oz.

Покажемо, що

$$\oint\!\!\!\oint_G A_3(x, y, z) \cos\gamma ds = \iiint_V \frac{\partial A_3}{\partial y} dv.$$

Як відомо

$$\iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial y}dv = \iint\limits_D ds \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial A_3(x,y,z)}{\partial z}dz = \iint\limits_D A_3(x,y,z_2(x,y))ds - \iint\limits_D A_3(x,y,z_1(x,y))ds$$

беручи до уваги (13), ми дістанемо:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial y}dv = \iint\limits_{S_2} A_3(x,y,z)\cos\gamma ds - \iint\limits_{S_1} A_3(x,y,z)\cos\gamma_1 ds$$

Оскільки $\gamma_1 = \pi - \gamma$, то вираз набуває вигляду

$$\iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial y}dv = \iint\limits_{S_2} A_3(x,y,z)\cos\gamma ds + \iint\limits_{S_1} A_3(x,y,z)\cos\gamma ds$$

Користуючись властивостями поверхневих інтегралів, дістанемо

$$\oiint\limits_G A_3(x,y,z)\cos\gamma ds = \iiint\limits_V \frac{\partial A_3}{\partial z}dv \qquad (27)$$

Якщо виконати ті ж самі операції з рештою доданків ми дістанемо:

$$\oiint\limits_G A_2(x,y,z)\cos\beta ds = \iiint\limits_V \frac{\partial A_2}{\partial y}dv \qquad (28)$$

$$\oiint\limits_G A_1(x,y,z)\cos\alpha ds = \iiint\limits_V \frac{\partial A_1}{\partial x}dv \qquad (29)$$

Об'єднуючи ці результати і застосовуючи лінійну властивість потоку і потрійних інтегралів, дістанемо *формулу Остроградського (26*)* і відповідно (26).◄

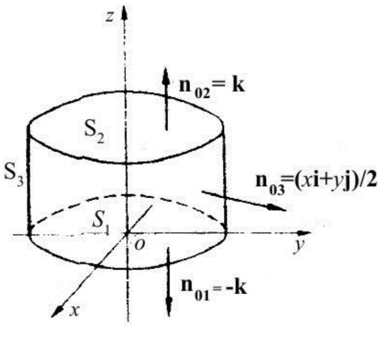

Рис. 15

Приклад 1. *Зайти потік вектора* $\vec{A} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$ *через замкнену поверхню* $S: \left\{x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 1\right\}$ *а) за означенням, в) за формулою Остроградського.*

► *а)* За означенням векторного потоку $\vec{A}$ (Рис.15.)

$$\Pi_S(\vec{A}) = \Pi_{S_1}(\vec{A}) + \Pi_{S_2}(\vec{A}) + \Pi_{S_3}(\vec{A})$$

де

$$\Pi_{S_1}(\vec{A}) = \iint\limits_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{01}}\right)ds = \iint\limits_{S_1}(z-1)ds = -\iint\limits_{S_1}d\sigma = -4\pi$$

оскільки на S_1 ми маємо $z = 0$;

$$\Pi_{S_2}(\vec{A}) = \iint\limits_{S_2}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{02}}\right)ds = -\iint\limits_{S_2}(z-1)ds = 0,$$

оскільки на S_2 ми маємо $z = 1$;

$$\Pi_{S_3}(\vec{A}) = \iint\limits_{S_3}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{03}}\right)ds = \iint\limits_{\sigma_3}x^2 d\sigma,$$

оскільки

$$\overrightarrow{n_{03}} = \frac{grad(x^2+y^2-4)}{\left|grad(x^2+y^2-4)\right|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{2}$$

Перейдемо до циліндричних координат

$$x = 2\cos\varphi, \quad y = 2\sin\varphi, \quad z = z, \quad d\sigma = 2d\varphi dz.$$

Тоді

$$\Pi_{S_3}(\vec{A}) = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 4\cos^2\varphi\cdot 2dz = 4\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = 8\pi.$$

Отже:

$$\Pi_S(\vec{A}) = -4\pi + 0 + 8\pi = 4\pi.$$

в) За формулою Остроградського

$$\Pi_S(\vec{A}) = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) = \iiint\limits_V (2+0-1)dv = \iiint\limits_V dv = 4\pi \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Знайти потік радіус-вектора* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *через поверхню сфери радіуса* R *від центра у початку координат: а) за означенням, в) за формулою Остроградського.*

► *а*) Оскільки для сфери $\overrightarrow{n_0} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})/R$, тоді $\left(\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0}\right) = (x^2 + y^2 + z^2)/R = R$, і тому

$$\Pi_S(\vec{A}) = \oiint\limits_S \left(\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_0}\right) ds = R \oiint\limits_S ds = 4\pi R^3.$$

в) За формулою Остроградського. Обчислимо

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 3$$

Тоді

$$\Pi_S(\vec{A}) = \iiint\limits_V 3dv = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3. \blacktriangleleft$$

Зауваження. *Якщо задана відкрита поверхня* S, *тоді доцільно розглянути замкнену поверхню і застосувати формулу Остроградського.*

Приклад 3. *Знайти потік вектора* $\vec{A} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$ *через поверхню* S: $x^2 + z^2 = y^2 \quad (0 \le y \le 1)$.

► Оскільки S є конічна поверхня з віссю якої є вісь Oy (Рис. 16). Замкнемо конус частиною площини S_0. Якщо позначимо Π_1 потік через поверхню S_0, ми дістанемо

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right)$$

де V є об'єм конуса S і S_0. Оскільки

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0 - 2y + 2y = 0$$

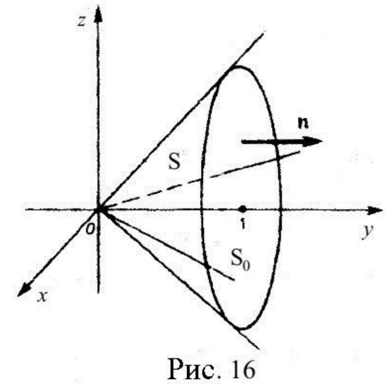

Рис. 16

Ми маємо $\Pi_1 + \Pi_2 = 0$, тобто, $\Pi_1 = -\Pi_2$, де

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_0} \left(\vec{A} \cdot \overrightarrow{n_0}\right) ds = \iint\limits_{S_0} \left(\vec{A} \cdot \vec{j}\right) ds =$$

$$= -\iint\limits_{S_0} y^2 ds = -\pi$$

Крім того на S_0 маємо $y = 1$. Звідси $\Pi_1 = \pi$. ◄

§ 9. *Дивергенція векторного поля*

9.1. Соленоїдне поле.

Розглянемо густину потоку поля швидкостей $\vec{V}$. Нехай S є замкнена поверхня. *Якщо потік через поверхню* S *є додатний, то це вказує на те, що потік, який виходить із простору обмеженого поверхнею* S, *більше потоку, який входить. Тобто, існують джерела всередині тіла обмеженого поверхньою* S, *які генерують потік.*

Отже, *якщо потік від'ємний, потік, який входить, більше потоку, який виходить. Ми зазначаємо, що є стоки у просторі обмеженого поверхньою* S, *які абсорбують потік.*

Отже, величина

$$\Pi_S(\vec{A}) = \oiint\limits_S \left(\vec{A} \cdot \vec{n_0}\right) ds$$

вказує на те, що векторний потік через поверхню S визначає існування джерел і стоків у просторі і деякому околі. Поняття векторного потоку через замкнену поверхню приводить нас до поняття ***дивергенції векторного поля.*** Це числова характеристика поля у кожній точці простору

Нехай M задана точна у векторному полі. Обмежимо її поверхнею довільного виду, тобто сферою достатньо малого радіуса. Позначимо через (V) область обмеженої поверхнею S і її об'єм V.

Визначимо потік вектора $\vec{A}$ через поверхню S. Ми маємо:

$$\Pi_S(\vec{A}) = \oiint\limits_S \left(\vec{A} \cdot \vec{n_0}\right) ds,$$

Розглянемо відношення

$$\frac{\oiint\limits_S \left(\vec{A} \cdot \vec{n_0}\right) ds}{V} \tag{28}$$

Оскільки, чисельник є потік, який утворюється в середині (V), тоді відношення (28) означає середню одиницю об'єму яка входить.

Означення . *Якщо (28) має скінчену границю коли (V) стягується в точку M, тоді ця границя називається **дивергенцією векторного поля** (дивергенцією $\vec{A}$) в точці M і позначається $div\vec{A}(M)$*. Отже за означенням

$$div\vec{A}(M) = \lim_{(V)\to M} \frac{\oiint\limits_S \left(\vec{A} \cdot \vec{n_0}\right) ds}{V} \tag{29}$$

Дивергенція векторного поля є скалярна величина, оскільки чисельник і знаменник у (29) є скалярні величини.

*Якщо $div\vec{A}(M) > 0$, в точці M ми маємо **джерела**, якщо $div\vec{A}(M) < 0$, тоді в точці M ми маємо **стоки**.*

За формулою (28), яка визначає дивергенцію, робимо висновки, що *дивергенція поля $\vec{A}$ в точці M є об'ємна густина поля $\vec{A}$ в точці*

Формула (28) інваріантна означенню дивергенції, тобто, означення не залежить від вибору системи координат, оскільки всі величини у (28) визначаються безпосередньо його полем і не залежить від вибору системи координат.

Тепер покажемо, як обчислюється дивергенція у прямокутній системі координат при умові, що координати вектора

$$\vec{A} = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$$

неперервні функції і мають неперервні частинні похідні $\partial A_1/\partial x$, $\partial A_2/\partial y$, $\partial A_3/\partial z$ у деякому околі точки M.

При цих умовах ми можемо застосувати теорему Остроградського-Гауса до векторного потоку векторного поля $\vec{A}$ через замкнену поверхню S у околі точки M

$$\oiint\limits_S \left(\vec{A} \cdot \vec{n_0}\right) ds = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv.$$

До потрійного інтеграла застосуємо теорему про середнє значення

$$\oiint\limits_S \left(\vec{A} \cdot \vec{n_0}\right) ds = \left.\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\right|_{M_{cp}} \cdot V.$$

Підставляючи у (29), знайдемо:

$$div\vec{A}(M) = \lim_{(V)\to M}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_{cp}}$$

Коли область (V) стягується в точку M, то точка M_{cp} також прямує до точки M, а оскільки поклали, що частинні похідні неперервні функції дістанемо

$$div\vec{A}(M) = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\Bigg|_{M}$$

Або в будь-якій точці, в якій визначено векторне поле, ми маємо

$$div\vec{A}(M) = \frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z} \qquad (30)$$

Ми покладаємо, що всі величини у (30) взяті у деякій точці. Вираз (30) наведений у прямокутній системі координат. Ми довели, що дивергенція векторного поля $\vec{A}$ існує, покладаючи, що $\partial A_1/\partial x$, $\partial A_2/\partial y$, $\partial A_3/\partial z$ є неперервні функції. Використовуючи (30), формулу Остроградського можна записати у такому вигляді

$$\oiint_S \left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds = \iiint_{(V)} div\vec{A}dv \qquad (31)$$

тобто *векторний потік векторного поля* $\vec{A}$ *через замкнену поверхню* S *дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції векторного поля* $\vec{A}$ *по області (V), яка обмежена поверхнею* S.

9.2. Деякі властивості дивергенції.

1⁰.*Дивергенція має лінійну властивість*

$$div\left(C_1\vec{A_1}+C_2\vec{A_2}+C_3\vec{A_3}+...+C_n\vec{A_n}\right)=$$
$$=C_1div\vec{A_1}+C_2div\vec{A_2}+C_3div\vec{A_3}+...+C_ndiv\vec{A_n}. \qquad (32)$$

2⁰. *Дивергенція постійного вектора* $\vec{a}$ *дорівнює нулю*

$$div\vec{a}=0 \qquad (33)$$

3⁰. *Дивергенція добутку скалярної функції* $u(M)$ *і вектора* $\vec{A}(M)$ *обчислюється за формулою*

$$div\left(u(M)\cdot\vec{A}(M)\right)=u(M)\cdot div\vec{A}(M)+\left(gradu(M)\cdot\vec{A}(M)\right) \qquad (34)$$

Якщо у всіх точках деякої області G дивергенція дорівнює нулю, тобто

$$div\vec{A}(M)=0 \qquad (35)$$

в області G*, тоді поле називається соленоїдним в цій області.*

Це випливає із теореми Гауса-Остроградського, що поле соленоїдне, якщо векторний потік через замкнену поверхню S, який міститься у цьому полі, дорівнює нулю

$$\oiint_S \left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds = 0 \qquad (36)$$

Звідси за формулою Остроградського

$$\oiint_S \left(\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)ds = \iiint_{(V)} div\vec{A}dv$$

Отже, ми маємо, що припущення $div\vec{A}(M)=0$ виконується.

9.3. Властивості соленоїдного поля

Розглянемо деяку плоску область S у векторному полі $\vec{A}$.

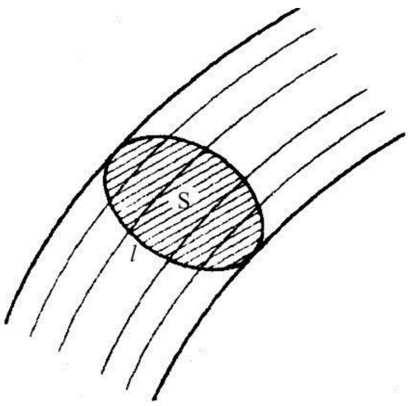

Рис. 17

Множина векторних ліній, які проходять через границю l площини S, називаються ***векторними трубками***.(Fig.17). Нехай S_1 є деяка поперечна січна трубки. Нормаль $\overrightarrow{n_1}$ до S_1 орієнтована у деякому напрямку як і векторне поле $\vec{A}$.(Рис.18)

Теорема 1. *В соленоїдному полі векторний потік векторного поля $\vec{A}$ через будь-яку січну векторної трубки однаковий.*

► Нехай S_1 і S_2 дві січні площини, які не перетинаються, деякої векторної трубки. Доведемо, що

$$\iint_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_1}\right)ds=\iint_{S_2}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_2}\right)ds$$

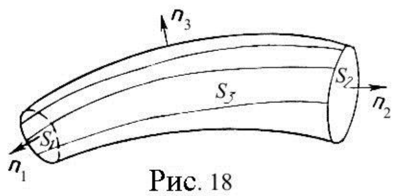

Рис. 18

Позначимо через S_3 частину поверхні трубки, яка розташована між січними S_1 і S_2. Поверхні S_1, S_2, S_3 разом утворюють замкнену поверхню S (Рис. 18).

Оскільки поле $\vec{A}$ за припущенням соленоїдне, ми маємо

$$\iint_{S}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds=0$$

За властивістю адитивності векторного потоку (37) перепишемо у такому вигляді:

$$\iint_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{01}}\right)ds+\iint_{S_2}\left(\vec{A}\cdot-\overrightarrow{n_{02}}\right)ds+\iint_{S_3}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{03}}\right)ds=0 \quad (38)$$

На поверхні S_3, яка утворена векторними лініями, маємо $\overrightarrow{n_{03}}\perp\vec{A}$, отже $\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{03}}\right)=0$ на S_3, і звідси останній інтеграл у лівій стороні (38) дорівнює нулю. Отже, з рівності (38) дістаємо:

$$\iint_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{01}}\right)ds=\iint_{S_2}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{02}}\right)ds\,. \blacktriangleleft$$

Нехай L є замкнений орієнтований контур і є границею поверхні S. Вважаючи, що поверхня S натягнута на контур L, зорієнтуємо нормальний вектор $\vec{n}$ до поверхні S так, що якщо дивитись з кінця нормалі, контур буде обходитись проти ходу часової стрілки. Іншими словами, обходячи поверхню вздовж контура так, що внутрішня частина поверхні S знаходилась ліворуч (Fig.19).

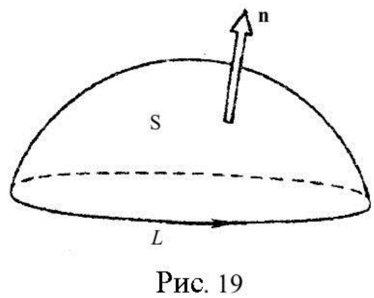

Рис. 19

Теорема 2. *В соленоїдному полі векторний потік векторного поля через будь-яку поверхню натягнуту на контур буде однаковий*

$$\iint_{S_1}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{01}}\right)ds=\iint_{S_2}\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{02}}\right)ds \quad (39)$$

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\,ds$*, де* S *є частина конічної поверхні* $x^2+y^2=z^2$*, яка лежить між поверхнями* $z=0$ *і* $z=2$.

► $u(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}$; $gradu=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$;

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}ds=\sqrt{2}\iint\limits_\sigma \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\left\|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{matrix}\right\|=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2d\rho=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$ ◄

Приклад 2. *Обчислити* $I=\iint\limits_S zdydz-4ydzdx+8x^2dxdy$, *де* S *є частина поверхні* $z=x^2+y^2+1$, *яка відсікається площиною* $z=2$. *Нормаль* $\vec{n}$ *поверхні* S *і віссю* Oz *утворює тупий кут* γ *(Рис. 20)*

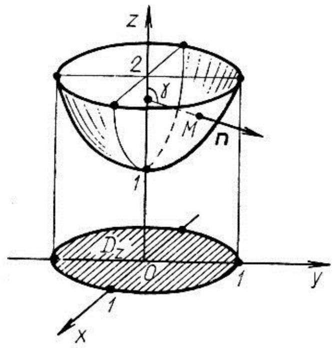

Рис. 20

► $u=z-x^2-y^2-1$; $gradu=-2x\vec{i}-2y\vec{j}+\vec{k}$,

тоді $\vec{n}=2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k}$,

оскільки $\cos\gamma<0$.

За умовою задачі $\vec{A}=z\vec{i}-4\vec{j}+8x^2\vec{k}$, тоді

$$I=\iint\limits_S\left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right)ds==\iint\limits_S(2xz-8y^2-8x^2)ds=$$

$$=\iint\limits_D(2x(x^2+y^2+1)-8(x^2+y^2)d\sigma=\left\|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi,\,0\le\varphi\le 2\pi\\ y=\rho\sin\varphi,\,0\le\rho\le 1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_0^{2\pi}\left(2\rho\cos\varphi(\rho^2+1)-8\rho^2\right)=-\int\limits_0^2 16\pi\rho^3=-4\pi.$$ ◄

Приклад 3. *Обчислити* $I=\iint\limits_S(x+y)dydz+(y+z)dxdz+(z+x)dxdy$, *якщо* S *є зовнішня поверхня тіла, яка обмежена площинами* $x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+2y+2z=6$. (Ри.21)

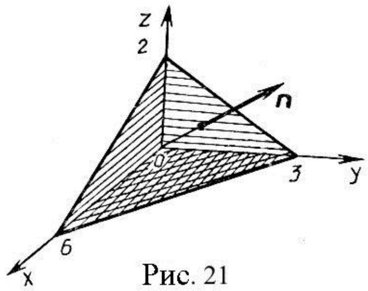

Рис. 21

► Оскільки $\vec{A}=(x+y)\vec{i}+y+z)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$ і, застосовуючи формулу Остроградського, дістанемо:

$$I=\iiint\limits_{(V)}3dv=3\int\limits_0^3dx\int\limits_0^{(6-x)/3}dy\int\limits_0^{6-x-2y/3}dz=18$$ ◄

Приклад 4. *Обчислити* $I=\iint\limits_s xdydz+dxdz+xz^2dxdy$, *де* S *є зовнішня частина сфери* $x^2+y^2+z^2=1$, *яка розташована у першому октанті*

► $$I_1=\iint\limits_{\sigma_{yz}}xdydz=\left\|x=\sqrt{1-y^2-z^2}\right\|=\iint\limits_{\sigma_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}dydz=$$

$$=\left\|\begin{matrix}y=\rho\cos\varphi,\,0\le\varphi\le\pi/2\\ z=\rho\sin\varphi,\,0\le\rho\le 1\end{matrix}\right\|=-\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\left(1-\rho^2\right)^{1/2}\frac{1}{2}d(1-\rho^2)=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

$$I_2=\iint\limits_{\sigma_{xz}}dxdz=\int\limits_o^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho=\frac{\pi}{4}.$$

$$I_3=\iint\limits_{\sigma_{xy}}xz^2dxdy=I_3=\iint\limits_{\sigma_{xy}}x(1-x^2-y^2)dxdy=$$

$$=\left\|\begin{matrix}x=\rho\cos\varphi,\,0\le\varphi\le\pi/2\\ y=\rho\sin\varphi,\,0\le\rho\le 1\end{matrix}\right\|=$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho\cos\varphi(1-\rho^2)\rho d\rho = \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Отже:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15} \blacktriangleleft$$

Практичні заняття – 3.4

1. *Обчислити поверхневий інтеграл першого роду* $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}ds$, *якщо* S *є частина поверхні конуса* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{9}$, *яка розташована між частинами площин* $z = 0$ і $z = 3$.

2. *Обчислити поверхневий інтеграл першого роду* $\iint_S xyzds$, *якщо* S *є частина площини* $x + y + z = 1$, *яка розташована у першому октанті.*

3. *Обчислити масу півсфери* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, *якщо поверхнева густина у кожній точці є* $\mu = x^2y^2$.

4. *Обчислити масу півсфера* $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, *якщо поверхнева густина у кожній точці є* $\mu = x^2 + y^2$.

5. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду*

$$\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

якщо S *є зовнішня частина площини* $x + 2y + z = 6$, *яка лежить у першому октанті.*

6. *Обчислити*

$$\iint_S (x+y)dydz + (y-x)dxdz + (z-2)dxdy \ \ i \ \iint_S xyzds,$$

якщо S *частина поверхні* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, *яка відрізається площинами* $z = 0$ *і* $z = 1$, *і кут між нормаллю до конуса і віссю* Oz *тупий.*

7. *Обчислити* $\iint_S xdydz + z^3dxdy$,

\якщо S *є зовнішня сторона сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

8. *Обчислити* $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$,

якщо S *є зовнішня сторона циліндра* $x^2 + y^2 = R^2$ *з основами* $z = 0$ *і* $z = h$.

9. *Довести, що об'єм тіла яке обмежене поверхнью* S,

$$V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy,$$

де S *є зовнішня сторона поверхні* S.

10. *Обчислити*

$$\iint_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy,$$

якщо S *є зовнішня сторона яка лежить у першому октанті і обмежена циліндром* $x^2 + y^2 = R^2$, *і площинами* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.

11. *Обчислити*

$$\iint\limits_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy,$$

якщо S *є зовнішня поверхня піраміди* $x=0,\quad y=0,\quad z=0,$ *і* $x+y+x=1$.

Самостійна робота

I	Обчислити $\iint\limits_S (y-2z)dxdy$, якщо S є верхня частина площини $6x+3y+2z=6$, яка лежить у першому октанті.
II	Обчислити $\iint\limits_S xyzds$, якщо S є частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, яка відрізається площиною $z=1$.
III	Обчислити $\iint\limits_S zdydz+(3-x)dxdz-zdxdy$, якщо S є зовнішня частина поверхні тіла яке обмежене поверхнями $z=0,\quad x^2+y^2=1,\quad z=x^2+y^2+2$.

Практичні заняття – 3.5

1. *Обчислити дивергенцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=(xy+z^2)\vec{i}+(yz+x^2)\vec{j}+(xz+y^2)\vec{k}$$

в точці $M(1,3,-5)$.

2. *Обчислити векторний потік векторного поля*

$$\vec{A}(M)=(x-3z)\vec{i}+(x+2y+z)\vec{j}+(4x+y)\vec{k}$$

через верхню частину площини $x+y+z=2$*, яка лежить у першому октанті*

3. *Обчислити векторний потік векторного поля*

$$\vec{A}(M)=2x\vec{i}+y\vec{j}+3z\vec{k}$$

через поверхню еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z}{16}^2=1$ *у напрямку зовнішньої нормалі, яка лежить у першому октанті*

4. *Обчислити векторний потік векторного поля*

$$\vec{A}(M)=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z^2\vec{k}$$

через поверхню циліндричного тіла, яке обмежене поверхнями $x^2+y^2=1,\quad z=0$ *і* $z=2$ *у напрямку зовнішньої нормалі*

5. *Довести, що векторний потік дорівнює* $3V$ *радіуса-вектора* $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ *через верхню частину поверхні, яка обмежує тіло (V), об'єм якого дорівнюється* V .

6. *Обчислити дивергенцію напруги магнітного поля яка утворюється током* I*, який проходить через нескінченно довгий дріт.*

7. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля*

$$\vec{A}(M)=x^2\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$$

через поверхню сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ *у напрямку зовнішньої нормалі.*

8. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля*

$$\vec{A}(M)=8x\vec{i}+11y\vec{j}+17z\vec{k}$$

через частину площини $x+2y+3z=1$*, яка лежить у першому октанті. Кут між нормаллю і віссю* Oz *гострий.*

9. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля*

$$\vec{A}(M) = x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$$

через поверхню S*, яка обмежена поверхнями* $1 - z = x^2 + y^2, \quad z = 0$.

10. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля* $\vec{A}(M) = x^2\vec{i} + z^2\vec{j}$ *через частину поверхні, яка лежить у першому октанті і частиною координатних площин, які відрізаються поверхнею* $z^2 = 4 - x - y$ *; у напрямку зовнішньої нормалі*

Самостійна робота

I	1. *Знайти дивергенцію поля градієнтів* $grad u$, *якщо* $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$
	2. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля* $\vec{A}(M) = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$ *через верхню частину площини* $x + y + z = 1$, *яка лежить у першому октанті*
II	1. *Знайти дивергенцію векторного поля* $\vec{A}(M) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^3\vec{k}$ *в точці* $M(1,-1,3)$
	2. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля* $\vec{A}(M) = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ *у напрямку зовнішньої нормалі поверхні* $9 - z = x^2 + y^2, x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, *яка обмежує тіло*
III	1. Знайти $div\left(grad\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$
	2. *Знайти векторний потік* Π *векторного поля* $\vec{A}(M) = 2x\vec{i} + z\vec{k}$ *у напрямку зовнішньої нормалі до поверхні тіла, яке обмежене поверхнями* $x = 3x^2 + 2y^2$, $x^2 + y^2 = 4, \ z = 0$.

§10. *Циркуляція векторного поля. Формула Стокса*

Припустимо, що у деякій області G задано неперервне векторне поле

$$\vec{A}(M) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$$

і замкнений орієнтований контур L.

Означення. *Циркуляція вектора* $\vec{A}(M)$ *Вздовж замкненого контура* L *є лінійний інтеграл другого роду векторного поля* $\vec{A}(M)$ *вздовж* L*, тобто*

$$C_L(\vec{A}(M)) = \oint_L \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right) = \oint_L \left(A_1dx + A_2dy + A_3dz\right) \qquad (40)$$

Тут $d\vec{r}$ є вектор, модуль якого дорівнює диференціалу дуги L, і напрямок збігається з напрямком дотичної до дуги L, який залежить від орієнтації контура (Рис. 22). Циркуляція векторного поля $\vec{A}(M)$ може бути записана у такій формі

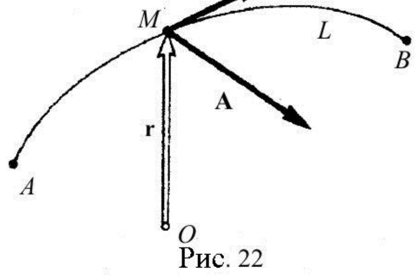

Рис. 22

$$C_L(\vec{A}(M)) = \oint_L \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right) = \oint_L \left(\vec{A}(M)\cdot\vec{\tau}\right)dl \qquad (41)$$

Якщо векторне поле є силове поле, тоді циркуляція представляє роботу, яка виконана цією силою вздовж замкненого контура L.

Приклад 1. *Знайти циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A} = xi - 2z^2\vec{j} + y\vec{k}$$

вздовж лінії L перетину циліндра $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ *площиною* $z = 2x - y + 1$.

► Приведемо контур L до параметричного вигляду. Координати x і y можна визначити з параметричного вигляду еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, тобто $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$, а z визначимо з рівняння площини $z = 2x - y + 1$, тобто $z = 6\cos t - 4\sin t + 1$, $t\in[0,2\pi]$. Користуючись формулою інтегрування криволінійних інтегралів другого роду, дістанемо:

$$C_L(\vec{A}(M)) = \oint_L \left(xdx - 2z^2dy + ydz\right) = \int_0^{2\pi}\left(3\cos t(-3\sin t) -\right.$$

$$\left.-2(6\cos t - 4\sin t + 1)^2 4\cos t + 4\sin t(-5\sin t - 4\cos t)\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(39\cos t\sin t - 288\cos^3 t - 8\cos t - 128\sin^2 t\cos t +\right.$$

$$\left.+384\cos^2 t\sin t - 96\cos^2 t - 24\sin^2 t\right)dt =$$

$$= -24\int_0^{2\pi}\left(4\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = -120\pi. \blacktriangleleft$$

10.1. Ротор векторного поля

Припустимо, що ми маємо векторне поле

$$\vec{A}(M) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$$

Припустимо далі, що координати A_1, A_2, A_3 вектора $\vec{A}(M)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку за всіма аргументами.

Означення 1. *Ротор векторного поля* $\vec{A}(M)$ *є вектор, який позначаємо* $rot\vec{A}$, *і задається формулою*

$$rot\ \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

або, символічно позначається,

$$rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \qquad (42)$$

Цей детермінант розкладається за елементами першого рядка. Множення елементів другого рядка на елементи третього рядка розуміються як диференціювання, тобто,

$$\frac{\partial}{\partial x}A_2 = \frac{\partial A_2}{\partial x}, \qquad \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_3 - \frac{\partial}{\partial z}A_2\right) = \vec{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right).$$

Означення 2. *Якщо* $rot\vec{A}=0$ *у будь-якій області* G, *то кажуть, що поле* $\vec{A}(M)$ *в області* G ***безвихрове.***

Оскільки $rot\vec{A}$ є вектор, ми можемо також розглядати як поле вихрів (роторів), тобто поле вихрів векторного поля $\vec{A}(M)$.

Покладаючи, що координати векторного поля $\vec{A}(M)$ мають неперервні частинні похідні другого порядку, обчислимо дивергенцію $rot\vec{A}$. Дістанемо такий результат:

$$div\, rot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0,$$

тобто $div\, rot\vec{A} = 0$. Отже, поле $rot\vec{A}$ є ***соленоїдне поле***.

Теорема 1. (теорема Стокса). *Нехай L є замкнена кусково-гладка орієнтована крива у просторі і гладка поверхня S натягнута на контур L, і нехай у околі S задане векторна функція*

$$\vec{A}(M) = A_1(x,y,z)\vec{i} + A_2(x,y,z)\vec{j} + A_3(x,y,z)\vec{k}$$

*і її координати A_1, A_2, A_3 є неперервні функції з її першими похідними у цьому околі***.** *Тоді дістаємо формулу Стокса*

$$\oint_L A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] ds$$

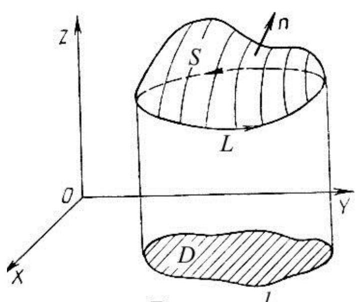

Рис. 23

► Нехай поверхня S задана рівнянням $z = \varphi(x, y)$ (Рис. 23). Нехай D є проекція поверхні S на площину xOy і l є проекція контура L на ту ж саму площину. Покладаємо, що $x = x(t),\ y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ є параметричне рівняння кривої l. Тоді $x = x(t),\ y = y(t)$, $z = \varphi(x(t), y(t)) = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ є параметричне рівняння лінії L, яка обмежує поверхню S. Використовуючи метод інтегрування криволінійних інтегралів другого роду, які задані у параметричній формі, дістанемо визначений інтеграл

$$I = \oint_L A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \int_{t_1}^{t_2} (A_1 x'(t) + A_2 y'(t) + A_3 z'(t))dt.$$

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції $z(t) = \varphi(x(t), y(t))$, дістанемо:

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\left(A_1 x'(t) + A_2 y'(t) + A_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'(t)\right)\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\left(A_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_3\right)x'(t) + \left(A_2 + A_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)y'(t)\right)dt =$$

$$= \oint_l \left(A_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_3\right)dx + \left(A_2 + A_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy, \qquad (44)$$

де у останньому інтегралі $A_1 = A_1(x, y, \varphi(x,y)),\quad A_2 = A_2(x, y, \varphi(x,y)),\quad A_3 = A_3(x, y, \varphi(x,y))$.

Застосовуючи до криволінійного інтеграла (44) формулу Гріна, дістанемо:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(A_2+A_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(A_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_3\right)\right)d\sigma \tag{45}$$

Використовуючи формулу повної похідної, ми маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_2+A_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial A_2}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}A_3+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A_1+A_3\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial A_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}A_3+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Звідси

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_2+A_3\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(A_1+A_3\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=$$

$$=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \tag{46}$$

Тепер за формулами (44) - (46) і формулою (43) дістанемо

$$\oint_L A_1dx+A_2dy+A_3dz=$$

$$=\iint_D\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right)d\sigma=$$

$$=\iint_S\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right)\cos\gamma ds$$

Беручи до уваги, що $-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\gamma=\cos\alpha,\quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\gamma=\cos\beta$, будемо мати:

$$\oint_L A_1dx+A_2dy+A_3dz=$$

$$\iint_S\left(\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)ds$$

Тут $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - направляючі косинуси нормального вектора до поверхні, натягнутій на контур L. Отже ми дістали ***формулу Стокса***. ◄

Зауваження. *Формулу Стокса можна записати у скороченому вигляді, якщо підінтегральну функцію представити у вигляді детермінанта, тобто*

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix} \tag{47}$$

Тоді

$$\oint_L A_1dx+A_2dy+A_3dz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}ds \tag{48}$$

Якщо покласти, що детермінант (47) є змішаний добуток нормального вектора $\overrightarrow{n_0}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$, символічного диференціального оператора Гамільтона

$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ і векторного поля $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$, то детермінант (47) можна записати у скороченій формі як скалярний добуток $rot\vec{A}$ і нормального вектора $\overrightarrow{n_0}$, тобто

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right) \tag{49}$$

Беручи до уваги ці позначення, теорема Стокса може бути сформульована наступним чином:

Теорема 1*. (теорема Стокса) *Циркуляція вектора $\vec{A}$ вздовж орієнтованого кнура L дорівнює потоку вихра через деяку поверхню, натягнуту на контур L*

$$C(\vec{A}(M))=\oint_L\left(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\tau_0}\right)dl=\iint_S\left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds \tag{50}$$

10.2. Інваріантні означення ротора векторного поля

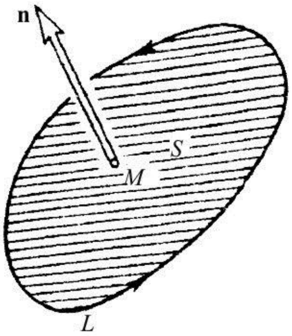
Рис.24

За теоремою Стокса ми можемо дістати означення, яке не залежить від вибору системи координат.

Теорема 2. *Проекція $rot\vec{A}$ на деякий напрямок не залежить від вибору системи координат і дорівнюється поверхневій густині циркуляції векторного поля $\vec{A}$ навколо контура на площу перпендикулярно напрямку $\vec{n}$*

$$\Pr_{\vec{A}} rot\vec{A}\Big|_M=\left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)\Big|_M=\lim_{(S)\to M}\frac{\oint_L\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right)}{S} \tag{51}$$

Тут (S) частина площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n}$, S є площа цієї частини площини, L є контур частини площини, орієнтований так, що якщо дивитись з кінця вектора $\vec{n}$, контур буде обходитись у протилежному напрямку годинникової стрілки; $(S)\to M$ означає, що частина (S) стягується у точку M, де вважаємо $rot\vec{A}$, вектор $\vec{n}$ на частині поверхні завжди залишається незмінними (Рис. 24)

► Перш за все, до циркуляції

$$\oint_L\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right)$$

векторного поля $\vec{A}$ застосуємо терему Стокса, а після чого до подвійного інтеграла застосуємо теорему про середнє значення і дістанемо:

$$\oint_L\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right)=\iint_S\left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)ds=\left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)\Big|_{M_{cp}}\cdot S$$

Звідси

$$\frac{\oint_L\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right)}{S}=\left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)\Big|_{M_{cp}}$$

Скалярний добуток $\left(rot\vec{A}\cdot\overrightarrow{n_0}\right)$ взятий у деякій середній точці M_{cp} частини поверхні (S).

Оскільки частина (S) стягується до точки M точка M_{cp} теж прямує до M. Так як ми поклали, що частинні похідні координат $\vec{A}$ (звідси $rot\vec{A}$) є неперервні функції, дістанемо:

$$\lim_{(S)\to M}\frac{\oint_L\left(\vec{A}\cdot d\vec{r}\right)}{S}=\lim_{(S)\to M}\left(rot\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)\Big|_{M_{cp}}=\left(rot\vec{A}\cdot\vec{n_0}\right)\Big|_{M}.◄$$

Оскільки проекція $rot\vec{A}$ на довільний напрямок не залежить від вибору системи координат, то вектор $rot\vec{A}$ є інваріантний відносно вибору координат. Отже, ми маємо таке інваріантне означення ротора векторного поля.

Означення. *Ротор векторного поля є вектор, величина якого дорівнює найбільшій поверхневій густини циркуляції в даній точці; ротор направлений перпендикулярно до частини поверхні, на якій досягає найбільшої густини циркуляції. Орієнтація* $rot\vec{A}$, *який має правосторонню орієнтацію, погоджується з тим контуром, на якому циркуляція додатна.*

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $I=\oint_\Gamma y^2dx-x^2dy+z^2dz$ *вздовж контура* Γ, *який є лінією перетину параболоїда* $x^2+z^2=1-y$ *з координатними площинами*. (Рис. 25).

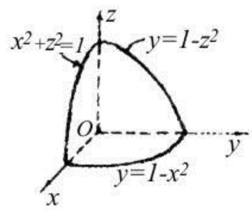

Рис. 25

► Поверхня S є поверхня рівня скалярного поля $u(x,y,z)=x^2+z^2+y-1;$ тоді одиничний вектор нормалі до поверхні S є

$$\vec{n_0}=\frac{gradu}{|gradu|}=\frac{2x\vec{i}+\vec{j}+2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+1+2z^2}}$$

Тут:

$$\cos\alpha=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}};\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}};\ \cos\gamma=\frac{2z}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}.$$

Звідси

$$I=-2\iint_S(x+y)\cos\gamma ds=-4\iint_S\frac{(x+y)zds}{\sqrt{4x^2+1+4z^2}},$$

де S є поверхня параболоїда, тоді

$$ds=\frac{|gradu|}{\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|}dxdy=\frac{\sqrt{4x^2+1+4z^2}}{2z}dxdy.$$

Маємо

$$I=-2\iint_D(x+y)dxdy,$$

де D є проекція поверхні S на площину xOy.

Отже:

$$I=-2\int_0^1dx\int_0^{1-x^2}(x+y)dy=-\frac{41}{30}.◄$$

Приклад 2. *Записати основне рівняння динаміки матеріальної точки:*

$$P=m\frac{dv_x}{dt};\quad Q=m\frac{dv_y}{dt};\quad R=m\frac{dv_z}{dt}.$$

► Тут, m є маса точки. P,Q,R - проекції на координатні вісі сили, яка діє на точку: $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ є проекції швидкості v на вісі. Помноживши ліві і праві частини цих рівнянь на вирази

$$v_x dt = dx, \quad v_y dt = dy, \quad v_z dt = dz,$$

і, додаючи ліві і праві частини отриманих, дістанемо

$$m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz;$$

$$\frac{1}{2} md(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz.$$

оскільки $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ можна записати

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

Інтегруємо вздовж траєкторії яка з'єднує точки M_1 і M_2

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{M_1}^{M_2} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz\,,$$

де v_1 і v_2 швидкості в точках M_1 і M_2. Останнє рівняння виражає теорему збереження сили: *кінетична енергія матеріальної точки збільшується, якщо проходити від однієї точки до іншої, і дорівнює роботі сили, яка діє на неї масою m.* ◄

Приклад 3. *Знайти ротор вектора лінійної швидкості* $\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$ $(\vec{r} = (x, y, z),\ \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z))$ *у деякій точці* $M(x, y, z)$ *простору*

$$► \ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} - (z\omega_x - x\omega_z)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k}\,,$$

тобто

$$\vec{v} = (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} - (z\omega_x - x\omega_z)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k}.$$

Тут

$$P(x, y, z) = (z\omega_y - y\omega_z)\,,$$

$$Q(x, y, z) = -(z\omega_x - x\omega_z)\,,$$

$$R(x, y, z) = (y\omega_x - x\omega_y)$$

За означенням ротора можна знайти

$$rot\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Практичні заняття – 3.6

1. *Знайти ротор векторного поля*

$$\vec{A}(M) = xyz\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$$

в точці $M(1,-1,2)$.

2. *Застосовуючи формулу Стокса, перетворити інтеграл*

$$\oint_L (x^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz.$$

3. *Знайти циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=y\vec{i}-2z\vec{j}+x\vec{k}$$

вздовж еліпса, який утворюється перерізом гіперболоїда однієї порожнини $2x^2-y^2+z^2=R^2$ *і площиною* $y=x,$ *застосовуючи формулу Стокса і безпосередньо за означенням.*

4. *Знайти циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$$

вздовж контура $L:\ x+y=4; z=0$ *у додатному напрямку відносно орта* $\overrightarrow{n_0}=\vec{k}$*, застосовуючи формулу Стокса і безпосередньо.*

5. *Знайти циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$$

вздовж контура, який утворюється перерізом сфери $z^2+x^2+y^2=R^2$ *і площини* $x+y+z=R$*, рухаючись у додатному напрямку відносно вектора* $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$*.*

6. *Знайти циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=y^2\vec{i}+xy\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}$$

вздовж контура, який утворюється перерізом параболоїда $x^2+y^2=Rz$ *площинами* $x=0, y=0,\ z=R$*, рухаючись у додатному напрямку відносно зовнішньої нормалі поверхні параболоїда.*

7. Обчислити *циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=zy^2\vec{i}+xz^2\vec{j}+yx^2\vec{k}$$

вздовж контура перетину параболоїда $z^2+y^2=x$ площиною $x=9$*, рухаючись у додатному напрямку відносно орта* $\vec{n}=\vec{i}.$

8. *Обчислити циркуляцію векторного поля*

$$\vec{A}(M)=y\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

здовж лінії L *перетину конуса* $x^2+y^2=z^2$ *з площиною* $z=1$ *рухаючись у додатному напрямку відносно орта* $\overrightarrow{n_0}=\vec{k}.$

Самостійна робота

I	*Обчислити циркуляцію векторного поля* $\vec{A}(M)=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ *вздовж лінії* L *перетину сфери* $x^2+y^2+z^2=4$ *з конусом* $z=\sqrt{x^2+y^2}$*, рухаючись у додатному напрямку відносно одиничного вектора* $\overrightarrow{n_0}=\vec{k}$.
II	*Обчислити циркуляцію векторного поля* $\vec{A}(M)=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ *вздовж лінії* L *перетину*

	циліндра $x^2+y^2=1$ *з площиною* $z=2$, *якщо* $\overrightarrow{n_0}=\vec{k}.$
III	*Обчислити циркуляцію векторного поля* $\vec{A}(M)=yz\vec{i}+2xz\vec{j}+y^2\vec{k}$ *вздовж лінії* L *перетину півсфери* $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ *з циліндром* $16=x^2+y^2$ $z=\sqrt{x^2+y^2}$, *рухаючись у додатному напрямку відносно одиничного вектора* $\overrightarrow{n_0}=\vec{k}$.

§ 11. *Потенціальне поле*

Означення 1. *Векторне поле* $\vec{A}(M)$ *називається* ***потенціальним полем****, якщо існує така скалярна функція* $u(M)$*, що*

$$grad\ u(M)=\vec{A}(M) \qquad (1)$$

Тут $u(M)$ *називається* ***потенціалом*** *поля, а його поверхня рівня називається* ***еквіпотенціальною*** *поверхньою*

Нехай

$$\vec{A}(M)=A_1(x,y,z)\vec{i}+A_2(x,y,z)\vec{j}+A_3(x,y,z)\vec{k}$$

Оскільки

$$gradu(M)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

співвідношення (1) еквівалентне трьом скалярним рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A_1(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=A_2(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=A_3(x,y,z).$$

Зауважимо потенціал поля визначається тільки з точністю до константи; якщо

$$grad\ u(M)=\vec{A}(M) \text{ і } grad\ v(M)=\vec{A}(M),$$

тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}$$

і звідси $u=v+c$, де c є константа.

Приклади. 1⁰. Поле радіус-вектора $\vec{r}$ є потенціальним, оскільки

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=grad\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)=grad\,\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}$$

Відповідно, потенціальне поле радіуса-вектора є $\vec{r}^{\,2}\big/2+c$ (зазначимо, що $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

2⁰. Поле $\vec{A}=f(r)\vec{r}$ є також потенціальним полем. Покажемо, що це так. Знайдемо функцію $\varphi(r)$ таку, що

$$f(r)\vec{r}=grad\ \varphi(r)$$

Дістанемо $grad\ \varphi(r)=\varphi'(r)\cdot r\cdot\overrightarrow{r_0}$. Тоді

$$\varphi'(r)\cdot\overrightarrow{r_0}=f(r)\cdot r\cdot\overrightarrow{r_0}.$$

Звідси $\varphi'(r)=f(r)\cdot r$. Тому, $\varphi(r)=\int f(r)\cdot rdr$ є потенціальне поле.

Теорема 1. *Для того, щоб векторне поле* $\vec{A}(M)$ *було потенціальним, необхідно і достатньо щоб воно було безвихровим, тобто у всіх точках поля ротор дорівнює нулю:*

$$rot\vec{A} = 0 \qquad (2)$$

Тут покладаємо, що частинні похідні координат $\vec{A}(M)$ є неперервні і область в якій визначене $\vec{A}(M)$, є однозв'язна поверхня.

► *Необхідність.* Необхідність (2) випливає з безпосереднього обчислення: Якщо поле потенціальне, тобто $grad\, u(M) = \vec{A}(M)$, то

$$rot\vec{A} = rot(grad\, u) = rot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

тому що другий і третій рядки детермінанта пропорційні, а за властивістю детермінантів він дорівнює нулю.

Достатність. Нехай векторне поле $\vec{A}(M)$ безвихрове, тобто, $rot\vec{A} = 0$. Доведемо, що поле потенціальне, побудувавши потенціал $u(M)$ векторного поля безпосередньо.

Перш за все за формулою (2) ми дістанемо, що лінійний інтеграл

$$\int_L \left(\vec{A}(M) \cdot d\vec{r}\right) = 0 \qquad (3)$$

не залежить від форми кривої L, а залежить від початкової і кінцевої точок інтегрування. Зафіксуємо початкову точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а будемо змінювати положення кінцевої точки $M(x, y, z)$. Тоді інтеграл (3) буде функцією від $M(x, y, z)$.

Позначимо цю функцію через $u(M)$ і доведемо, що вона є потенціалом поля, тобто, що

$$grad u = \vec{A}(M)$$

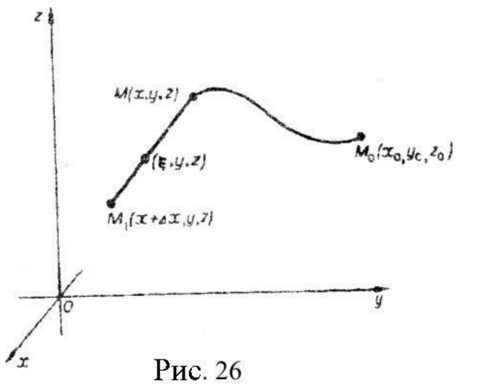

Рис. 26

Запишемо контурний інтеграл (3) вздовж дуги L, використовуючи початкову і кінцеву точки:

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} \left(\vec{A}(M) \cdot d\vec{r}\right) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x,y,z)} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz \qquad (4)$$

Рівність $grad u = \vec{A}(M)$ еквівалентна трьом скалярним співвідношенням

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = A_2(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = A_3(x, y, z)$$

Доведемо що перше з них, тобто, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1(x, y, z).$$

Друге і третє співвідношення доводяться аналогічно.

За означенням частинної похідної

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x}$$

Розглянемо точку $M_1(x + \Delta x, y, z)$яка розташована у околі точки $M(x, y, z)$. Так як $u(M)$ згідно (4) є лінійний інтеграл і не залежить від шляху інтегрування, виберемо шлях інтегрування який визначений на Рис. 26

Тоді

$$u(M_1) = \int\limits_{M_0}^{M} \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right) = \int\limits_{M_0}^{M} \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right) + \int\limits_{M_0}^{M_1} \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right) = u(M) + \int\limits_{M}^{M_1} \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right).$$

Так

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z) = u(M_1) - u(M) = \int\limits_{M}^{M_1} \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right)$$

Останній інтеграл береться вздовж відрізка MM_1, який паралельній вісі Ox. Виберемо на цьому відрізку координату x як параметр.

$$\Delta_x u = u(M_1) - u(M) = \int\limits_{M(x,y,z)}^{M_1(x+\Delta x, y, z)} \left(\vec{A}(M)\cdot d\vec{r}\right) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} A\ (\xi, y, z)d\xi$$

Застосувавши до інтеграла у правій частині останнього рівняння теорему про середнє значення, дістанемо:

$$\Delta_x u = A_1(x+\theta\Delta x, y, z)\Delta x \qquad (5)$$

Далі, за формулою (3.80) знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} A_1(x+\theta\Delta x, y, z)$$

оскільки $\Delta x \to 0$, і оскільки $A_1(x, y, z)$ неперервна, дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1(x, y, z),$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A_2(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = A_3(x, y, z)$$

Наслідок. *Векторне поле потенціальне тоді і тільки тоді, якщо лінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, тобто, якщо циркуляція векторного поля вздовж замкненого контура у полі дорівнюється нулю.*

11.1. Обчислення потенціалу в прямокутних координатах

Нехай

$$\vec{A}(M) = A_1(x, y, z)\vec{i} + A_2(x, y, z)\vec{j} + A_3(x, y, z)\vec{k}$$

Покажемо, що потенціальну функцію $u(M)$ можна знайти за формулою:

$$u(M) = \int\limits_{M_0}^{M} A_1(x, y, z)dx + A_2(x, y, z)dy + A(x, y, z)dz \qquad (6)$$

Інтеграл (6) більш зручно знаходити таким чином. Зафіксуємо початкову точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і з'єднаємо її з достатньо близькою змінною точкою $M(x, y, z)$ ламаною лінією $M_0M_1M_2M$, сторони якої паралельні координатним вісям, тобто $M_0M_1 \parallel Ox$, $M_1M_2 \parallel Oy$, $M_2M \parallel Oz$ (Рис. 27)

На кожній стороні тільки одна координата змінюється, що призводить до спрощення обчислень. Отже, на відрізку M_0M_1 маємо:

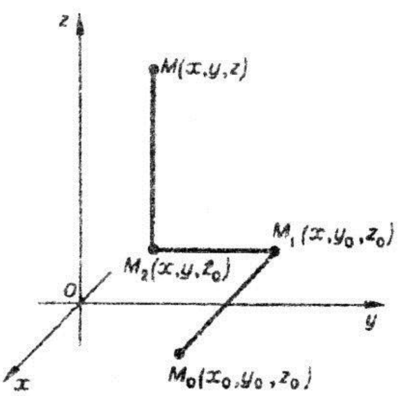

Рис. 27

$$\begin{cases} x = x_0, & dx = dx, \\ y = y_0, & dy = 0, \\ z = z_0, & dz = 0. \end{cases}$$

На відрізку M_1M_2:

$$\begin{cases} x = const, & dx = 0, \\ y = y, & dy = dy, \\ z = z_0, & dz = 0. \end{cases}$$

На відрізку M_2M:

$$\begin{cases} x = const, & dx = 0, \\ y = const, & dy = 0, \\ z = z, & dz = dz. \end{cases}$$

І тоді потенціал $u(M)$ буде:

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} \left(\vec{A}(M) \cdot d\vec{r}\right) = \int_{M_0}^{M_1} \left(\vec{A}(M) \cdot d\vec{r}\right) + \int_{M1}^{M_2} \left(\vec{A}(M) \cdot d\vec{r}\right) + \int_{M_2}^{M} \left(\vec{A}(M) \cdot d\vec{r}\right) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} A_1(\xi, y, z)d\xi + \int_{y_0}^{y} A_2(x, \eta, z_0)d\eta + \int_{z_0}^{z} A_3(x, y, \varsigma)d\varsigma \qquad (6)$$

Де $x,\quad y,\quad z$ є координати змінної точки на сторонах ламаної лінії , вздовж якої ми інтегруємо.

Приклад. *Довести, що векторне поле*

$$\vec{A} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

Потенціальне поле і знайти її потенціал.

► Перевіримо, чи дане поле $\vec{A}(M)$ потенціальне чи ні .Для цього обчислимо

$rot\vec{A}(M)$

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = 0$$

Дане поле потенціальне.

Знайдемо потенціал за формулою (5). Виберемо початковою точкою M_0 початок координат, тобто, $x_0 = 0,\quad y_0 = 0,\quad z_0 = 0$. Це цілком природно, оскільки векторне поле $\vec{A}(M)$ визначено у початку координат. Тоді ми дістанемо:

$$u(x, y, z) = \int_0^x 0d\xi + \int_0^y (x+0)d\eta + \int_0^z (x+y)dz = xy + (x+y)z.$$

Отже:

$$u(x, y, z) = xy + xz + yz + C,$$

де C є довільна константа.

§ 12. *Оператор Гамільтона та деякі його застосування*

Нехай задана функція $u = u(x, y, z)$. В кожній точці області, в якій функція $u(x, y, z)$ визначена і диференційована, визначений і її градієнт:

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \quad (7)$$

Градієнт функції $u(x, y, z)$ інколи позначають так:

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \quad (8)$$

символ $\vec{\nabla}$ читають "набла".

Зручно записати рівність (8) символічно, як

$$\vec{\nabla} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) u. \quad (9)$$

І розглянемо символ

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right). \quad (10)$$

як "символічний вектор". Цей символічний вектор називається оператором Гамільтона ($\vec{\nabla} -$ оператор). З формули (9) випливає, що "помноживши" цей символічний вектор $\vec{\nabla}$ на скалярну функцію u дістаємо градієнт цієї функції:

$$\vec{\nabla} u = gradu. \quad (11)$$

2) Ми можемо утворити скалярний добуток символічного вектора $\vec{\nabla}$ і вектора $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \frac{\partial}{\partial x}A_1 + \frac{\partial}{\partial y}A_2 + \frac{\partial}{\partial z}A_3 = div\vec{A}.$$

Отже

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = div\vec{A}. \quad (12)$$

3) Векторний добуток символічного вектора $\vec{\nabla}$ і вектор $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) - \vec{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = rot\vec{A}.$$

Отже:

$$rot\vec{A} = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] \quad (13)$$

Якщо $u = C$ матимемо $\vec{\nabla} C = 0$, а також для постійного вектора $\vec{C}$ дістанемо

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}\right) = 0 \quad \text{і} \quad \left[\vec{\nabla}, \vec{C}\right] = 0.$$

За дистрибутивною властивістю скалярного і векторного добутку маємо:

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right)\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right),$$

$$div\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = div\vec{A} + div\vec{B} \quad (14)$$

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{A} + \vec{B}\right] = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] + \left[\vec{\nabla}, \vec{B}\right]$$

$$rot\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = rot\vec{A} + rot\vec{B} \quad (15)$$

Зауваження. *Формули (14) і (15) можна також трактувати як многовид диференціальних властивостей оператора* $\vec{\nabla}$*, який є лінійний диференціальний оператор.*

Діючи оператором $\vec{\nabla}$ *на добуток деяких величин, повинні пам'ятати правило диференціювання добутку. Це означає, що застосовуючи оператор* $\vec{\nabla}$ *до кожного множника послідовно, залишаючи інший множник незмінним. Тоді, повинні взяти суму отриманих виразів. Нарешті, перш за все необхідно взяти до уваги диференціальну природу оператора* $\vec{\nabla}$*, а після цього його векторні властивості.*

Приклади . 1⁰. *Довести, що*

$$grad(u\cdot v)=v\cdot grad u+u\cdot grad v$$

► Беручи до уваги попереднє зауваження, дістанемо (11)

$$\vec{\nabla}\,(u\cdot v)=v\vec{\nabla}u+u\vec{\nabla}v$$

або

$$grad(u\cdot v)=v\cdot grad u+u\cdot grad v \;◄ \qquad (16)$$

2⁰. *Нехай* $u(x,y,z)$ *скалярна диференційована функція і* $\vec{A}(x,y,z)$ *векторна диференційована. Довести, що*

$$div\left(u\cdot\vec{A}\right)=u\cdot div\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot grad\,u\right) \qquad (17)$$

► Запишемо ліву частину (17) як

$$div\left(u\cdot\vec{A}\right)=\left(\vec{\nabla}\cdot\left(u\cdot\vec{A}\right)\right)$$

Перш за все візьмемо до уваги диференціальну властивість оператора $\vec{\nabla}$, ми дістанемо:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\left(u\cdot\vec{A}\right)\right)=u\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}u\right)$$

отже

$$div\left(u\cdot\vec{A}\right)=u\cdot div\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot grad\,u\right).\;◄$$

§ 13. *Диференціальні оператори другого порядку. Оператор Лапласа*

Диференціальні оператори другого порядку є результатом подвійного застосування оператора $\vec{\nabla}$ до полів.

1⁰) Розглянемо скалярне поле $u=u(x,y,z)$. У цьому полі оператор $\vec{\nabla}$ дістає векторне поле

$$\vec{\nabla}u=grad\,u$$

Діючи на векторне поле $grad\,u$, ми можемо визначити два оператора:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u\right)=div\,grad u\,, \qquad (18)$$

який приводить до скалярного поля, і

$$\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}u\right]=rot\,grad u\,, \qquad (19)$$

цей приводить до векторного поля.

2⁰) Припустимо ми маємо векторне поле $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$. Оператор $\vec{\nabla}$ приводить його до скалярного поля

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=div\,\vec{A}\,.$$

У скалярному полі $div\,\vec{A}$ оператор $\vec{\nabla}$ дістає векторне поле

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=grad\,div\,\vec{A} \qquad (20)$$

3⁰) У векторному полі $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$ оператор $\vec{\nabla}$ дістає також векторна поле:

$$\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]=rot\,\vec{A}.$$

Якщо знову подіяти на отримане векторне поле оператором, $\vec{\nabla}$ ми дістанемо:

a) скалярне поле

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)=div\,rot\,\vec{A} \qquad (21)$$

b) векторне поле

$$\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]=rotrot\,\vec{A} \qquad (22)$$

Формули (18) - (22) визначають так званні ***диференціальні оператори другого порядку***

Тепер виберемо в просторі прямокутну систему координат $Oxyz$ і розглянемо більш детальніше кожну з формул (18) - (22).

1^0) Припустимо, що функція $u(x,y,z)$ має другі частинні похідні відносно x,y і z, тоді дістанемо

$$div\,grad\,u=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u\right)=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Цей символ

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

відомий як ***оператор Лапласа, або Лапласіан.*** Він може бути представлений як скалярний добуток оператора Гамільтона $\vec{\nabla}$ самого на себе, тобто

$$\Delta=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)=\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (23)$$

Оператор Δ відіграє важливу роль у математичній фізиці. Рівняння $\Delta u=0$ або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

називається рівнянням Лапласа. Скалярне поле $u(x,y,z)$, яке задовольняє рівнянню $\Delta u=0$ називають полем *Лапласа* або *гармонічним полем*.

2^0) Нехай $u(x,y,z)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді

$$rot\,grad\,u=0 \qquad (24)$$

Формально ми дістанемо:

$$rot\,grad\,u=\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}u\right]=\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]u=0$$

Тут $\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]=0$ як векторний добуток двох ідентичних „векторів”

Той же самий результат можна дістати, використовуючи вирази градієнта і ротора у прямокутній системі координат і беручи до уваги сформульовані умови:

$$rot\,grad\,u=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}$$

Маємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

Оскільки частинні похідні другого порядку неперервні

3^0) Нехай $\vec{A}=A_1(x,y,z)\vec{i}+A_2(x,y,z)\vec{j}+A_3(x,y,z)\vec{k}$

є векторне поле, координати якого $A_1,\ A_2,\ A_3$, мають неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді дістанемо:

$$grad\,div\,\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\vec{i}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)\vec{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial^2 z}\right)\vec{k}\,. \qquad (25)$$

4^0) За тих же умов що і в (3), ми маємо

$$div\,rot\,\vec{A}=0 \qquad (26)$$

Тут при доведені ми будемо формально використовувати взаємозв'язок з добре відомою формулою векторної алгебри

$$\left(\vec{A}\cdot\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right)=\left(\vec{C}\cdot\left[\vec{A},\vec{B}\right]\right)=\left(\vec{B}\cdot\left[\vec{C},\vec{A}\right]\right)$$

Дістанемо:

$$div\,rot\,\vec{A}=\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)=\left(\vec{A}\cdot\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=0\,.$$

Тут $\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]=0$ як векторний добуток двох ідентичних „векторів".

5^0) Легко показати, що за тих же умов що і раніше, ми дістанемо

$$rot\,rot\,\vec{A}=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]$$

Тоді за формулою подвійного векторного добутку

$$\left[\vec{A}\cdot\left[\vec{B},\vec{C}\right]\right]=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

покладаючи $\vec{A}=\vec{\nabla},\ \vec{B}=\vec{\nabla},\ \vec{C}=\vec{A},$ ми дістанемо:

$$\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

Але $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=div\,\vec{A}$, і $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)=\Delta$. Тому, ми дістанемо:

$$rot\,rot\,\vec{A} = grad\,div\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

де $grad\,div\vec{A}$ заданий формулою (25), а $\Delta\vec{A}$ для $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ повинні розуміти як

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_1\vec{i} + \Delta A_2\vec{j} + \Delta A_3\vec{k}$$

Таблиця диференціальних операцій другого порядку

	Скалярне поле $u = u(x, y, z)$	***Векторне поле*** $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$	
	$grad$	div	rot
$grad$		$grad\ div\ \vec{A}$	
div	$div\ grad\ u$		$div\ rot\vec{A} = 0$
rot	$rot\ grad\ u$ $= 0$		$rot\ rot\ \vec{A} =$ $= grad\ div\ \vec{A}$ $-\Delta\ \vec{A}$

Вільні прямокутники вказують на те, що операція не має смислу

Практичні заняття – 3.7

1. *Довести, що*

$$\oint_{\Gamma} yzdx + xzdy + xydz = 0,$$

використовуючи формулу Стокса. Перевірити цей результат інтегруючи вздовж контура трикутника ABC *з вершинами* $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$

2. *Знайти* $grad\,div\vec{A}(M)$, *якщо* $\vec{A}(M) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$

3. *Знайти ротор поля лінійної швидкості* $\vec{V} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$, *де* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}.$

4. *Знайти циркуляцію поля швидкостей* $\vec{V} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$ *при руханні вздовж кола* $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ *у додатному напрямку обходу відносно нормального вектора* $\vec{n_0} = \vec{k}.$ *Тут* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.

5. *Довести, що* $divrot\vec{A}(M) = 0$ *для будь-якого поля* $\vec{A}(M)$.

6. *Довести,що векторне поле* $\vec{A}(M)$ *потенціальне і знайти потенціал, якщо*

1) $\vec{A}(M) = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k},$
2) $\vec{A}(M) = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}$,
3) $\vec{A}(M) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{l} + (y+x)\vec{k}$,
4) $\vec{A}(M) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$,
5) $\vec{A}(M) = (yz+1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$,

6) $\vec{A}(M)=\dfrac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{x+y+z}$.

7) $\vec{A}(M)=e^{y/z}\left(\dfrac{e^{y/z}(x+1)}{z}+ze^{yz}\right)\vec{j}++\left(-\dfrac{e^{y/z}(x+1)y}{z^2}+ye^{yz}+e^{-z}\right)\vec{k},$

8) $\overline{A}(M)=yz\cos(xy)\vec{i}+xz\cos(xy)\vec{j}+\sin(xy)\vec{k}.$

7. *Перевірити, що дана функція* $u=\ln r$ *гармонічна, якщо* $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

8. *Довести, що векторне поле* $\vec{A}(M)=-\dfrac{\gamma m}{\left|\vec{r}\right|^3}\vec{r}$ *потенціальне, де* $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$ *Знайти потенціал* $u(x,y,z)$.

9. *Довести, що* $rot\, grad u(M)=0.$

10. *Знайти потенціал поля* $\overline{A}(M)=(yz+1)\vec{i}+xz\vec{j}+\ xy\vec{k}$ *і обчислити* $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,2)}(yz+1)dx+xzdy+xydz.$

Самостійна робота

Перевірити потенціальність поля d $A(M)$ *і знайти потенціал і обчислити величину відповідного криволінійного інтеграла другого роду вздовж дуги лінії, яка з'єднує точки* A *і* B.

I	$\vec{A}(M)=2xyz\vec{i}+x^2z\vec{j}+x^2y\vec{k},$	$A(1,-1,2),\ B(-2,4,2)$
II	$\vec{A}(M)=\left(x^2-2yz\right)\vec{i}+\left(y^2-2xz\right)\vec{j}+$ $+\left(x^2-2yz\right)\vec{k},$	$A(1,-1,1), B(-2,2,3).$
III	$\vec{A}(M)=\left(2xy+z^2\right)\vec{i}+\left(2xy+x^2\right)\vec{j}+$ $+\left(xz+y^2\right)\vec{k},$	$A(1,-1,1),\ B(2,3,1).$

Індивідуальні домашні завдання – 3.1

Обчислити дані криволінійні інтеграли

1

1.1. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-2xy\right)dx+(y^2-2xy)dy$, де L_{AB} є дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

1.2. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} є дуга астроїди $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$.

1.3. $\int\limits_{L_{OB}} \left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$, де L_{OB} є дуга параболи $y=x^3$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

1.4. $\oint\limits_{L}\left(x+2y\right)dx+(x-y)dy$, де L є коло $x=2\cos t,\quad y=2\sin t$ у додатному напрямку рухання.

1.5. $\oint\limits_{L}\left(x^2y-x\right)dx+(y^2x-2y)dy$, де L дуга еліпса $x=3\cos t,\quad y=2\sin t$ у додатному напрямку рухання.

1.6. $\int\limits_{L_{AB}} \left(xy-1\right)dx+x^2ydy$, де L_{AB} дуга еліпса $x=\cos t,\quad y=2\sin t$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

1.7. $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx-x^2dy$, де L_{OBA} є ламана лінія OBA; $O(0;0)$; $B(2;0)$; $A(2;1)$.

1.8. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії AB: $A(1;1)$; $B(3;4)$.

1.9. $\int\limits_{L_{AB}} \cos ydx-\sin xdy$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії AB, $A(2\pi;-2\pi)$; $B(-2\pi;2\pi)$.

1.10. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії AB; $A(1;2)$; $B(3;6)$.

1.11. $\int\limits_{L_{AB}} xdx+(y-x)dy$, where L_{AB} є дуга параболи $y=x^3$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

1.12. $\int\limits_{L_{ABC}} (x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, де L_{ABC} є ламана лінія ABC; $A(1;2)$; $B(3;2)$; $C(3;5)$.

1.13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+xz^2dy-x^2zdz$, де L_{OB} є відрізок прямої лінії OB; $O(0;0;0)$; $B(-2;4;5)$.

1.14. $\int\limits_{L_{OB}} ydx+xdy$, де L_{OB} є дуга кола $x=R\cos t,\quad y=R\sin t$; $O(R;0)$; $B(0;R)$.

1.15. $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, де L_{AB} є дуга параболи $x=y^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

1.16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x-y+1)zdz$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії AB; $A(1;1;1)$; $B(2;3;4)$.

1.17. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} є дуга параболи $y^2 = 4-4x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

1.18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx + (y-x)dy$, де L_{OB} є дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

1.19. $\int\limits_{L_{OB}} (xy-y^2)dx + xdy$, де L_{OB} є дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

1.20. $\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, де L_{AB} є дуга астроїди $x = 2\cos^3 t,\quad y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$.

1.21. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$, де L_{AB} є дуга параболи $4x = y^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

1.22. $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2ydy$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії AB; $A(1;0)$; $B(0;2)$.

1.23. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, де L_{AB} є дуга одного оберту гвинтової лінії $x = \cos t,$ $y = \sin t,\quad z = 2t$; $A(1;0;0)$; $B(1;0;4\pi)$.

1.24. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$, де L_{AB} є дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

1.25. $\oint\limits_{L} ydx - xdy$, де L є дуга еліпса $x = 3\cos t,\quad y = 2\sin t$ у додатному напрямку рухання.

1.26. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, де L_{OA} є дуга параболи $y = x^2/4$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$.

1.27. $\oint\limits_{L} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, де L_{AB} є ламана лінія $y = |x|$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(2;2)$.

1.28. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy + zdz$, де L_{OA} відрізок прямої лінії яка з'єднує точки $O(0;0;0)$ і $B(2;1;-1)$.

1.29. $\oint\limits_{L} xdy - ydx$, де L є контур трикутника з вершинами: $A(-1;0),\quad B(1;0),\quad C(0;1)$ у додатному напрямку рухання.

1.30. $\int\limits_{L_{ACB}} (x^2+y)dx + (x+y^2)dy$, де L_{ACB} є ламана лінія ACB; $A(2;0),\quad C(5;0),\quad B(5;3)$.

2

2.1. $\int\limits_{L}\sqrt{2-z^2}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L є дуга кривої is $x=t\cos t,\quad y=t\sin t,$ $z=t,\quad 0\le t\le 2\pi$.

2.2. $\oint\limits_{L}\left(x^2+y^2\right)dl$, де L є коло $x^2+y^2=4$.

2.3. $\int\limits_{L_{OB}}\frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L_{OA} є відрізок прямої лінії який з'єднує точки $O(0;0)$ і $B(2;2)$.

2.4. $\int\limits_{L_{AB}}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де L_{AB} is the segment of the straight line AB; $A(-1;0)$; $B(0;1)$

2.5. $\int\limits_{L_{AB}}\frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, where L_{AB} є відрізок прямої лінії AB; $A(0;4)$; $B(4;0)$

2.6. $\int\limits_{L}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, де L є дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\pi/2$.

2.7. $\int\limits_{L_{AB}}ydl$, де L_{AB} є дуга астроїди $x=\cos^3 t,\ \ x=\sin^3 t$, яка з'єднує точки $A(1;0)$ і $B(0;1)$.

2.8. $\int\limits_{L_{OB}}ydl$, де L_{OB} є дуга параболи $y^2=\frac{2}{3}x$, яка заключна між точками $O(0;0)$ і $B\left(\sqrt{35}/6;\sqrt{35}/3\right)$.

2.9. $\int\limits_{L}(x^2+y^2+z^2)dl$, де L є дуга кривої $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=\sqrt{3}\cdot t$, $0\le t\le 2\pi$.

2.10. $\int\limits_{L}\tan^{-1}\frac{y}{x}dl$, де L є дуга кардіоїди $\rho=(1+\cos\varphi),\quad 0\le\varphi\le\pi/2$.

2.11. $\int\limits_{L}\sqrt{2y}dl$, де L є перша арка циклоїди $x=2(t-\sin t)\quad y=2(1-\cos t)$.

2.12. $\int\limits_{L_{OA}}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L_{OA} є відрізок прямої лінії який з'єднує точки $O(0;0)$ і $A(1;2)$.

2.13. $\int\limits_{L}\frac{(y^2-x^2)xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dl$, де L є дуга кривої $\rho=9\sin 2\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi/4$.

2.14. $\int\limits_{L_{OABC}}xydl$, де L_{OABC} є контур паралелограма з вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$.

2.15. $\int\limits_{L_{ABO}}(x+y)dl$, де L_{ABO} є контур трикутника з вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$.

2.16. $\int\limits_{L}\frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де L є перший виток гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$.

2.17. $\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)dl$, де L_{OAB} є контур трикутника з вершинами $O(0;0)$ $A(-1;0)$, $B(0;1)$.

2.18. $\int\limits_{L}(x+y)dl$, де L_{OAB} є дуга лемніскати Бернуллі $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$.

2.19. $\oint\limits_{l}\sqrt{x^2+y^2}dl$, де L є коло $x^2+y^2=2y$.

2.20. $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} є контур паралелограма з вершинами $O(0;0)$, $A(5;0)$, $B(5;3)$, $C(0;3)$.

2.21. $\oint\limits_{L}\left(x^2+y^2\right)dl$, де L є коло $x^2+y^2=4x$.

2.22. $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}\right)dl$, де L_{AB} є дуга астроїди $x=\cos^3 t,\ \ x=\sin^3 t$, яка заключна між точками $A(1;0)$ і $B(0;1)$.

2.23. $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} є контур квадрата з прямими лініями $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

2.24. $\int\limits_{L} y^2 dl$, де L є перша арка циклоїди $x = t - sint$, $y=1-\cos t$.

2.25. $\int\limits_{L_{ABCD}} xydl$, де L_{ABCD} є контур паралелограма з вершинами $A(2;0)$, $B(4;0)$, $C(4;3)$ $D(2;3)$.

2.26. $\int\limits_{L} ydl$, де L є дуга параболи $y^2=2x$ яка відсікається параболою $x^2=2y$.

2.27. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} відрізок прямої лінії між точками $A(4;0)$ і $B(6;1)$.

2.28. $\int\limits_{L}\left(x^2+y^2\right)^2 dl$, де L є перша четверта частина кола $\rho = 2$.

2.29. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії який з'єднує точки $A(1;1;1)$ і $B(2;2;2)$.

2.30. $\oint\limits_{L}\left(x-y\right)dl$, де L є коло $x^2+y^2=2x$.

3

3.1. $\oint\limits_{L}\sqrt{2y^2+x^2}dl$, де L є коло $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

3.2. $\int\limits_{L} xyzdl$, де L є коло $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=R^2/4$, яке лежить у першому октанті.

$\int\limits_{L} \tan\frac{y}{x}dl$, де L є частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, яка міститься в середині кола радіуса R з центром у полюсі.

3.4. $\int\limits_{L}\left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L є дуга кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

3.5. $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L є перший оберт конічної гвинтової лінії $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$.

3.6. $\int\limits_L (x+z)\,dl$, де L є дуга кривої $x=t$, $y=\left(3/\sqrt{2}\right)t^2$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$.

3.7. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, де L є крива $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$, $x\ge 0$.

3.8. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L є перший оберт лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

3.9. $\int\limits_L xydl$, де L є перша четверта частина еліпса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

3.10. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L є четверта частина кола $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x=y$ яка лежить у першому октанті.

3.11. $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{x-z}$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії $z=x-2$, $y=0$ який з'єднує точки $A(0;0;-2)$, $B(4;0;0)$.

3.12. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, де L є перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $x=a(1-\cos t)$.

3.13. $\int\limits_L (x-y)\,dl$, де L є коло $x^2+y^2=ax$.

3.14. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L є перший оберт гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

3.15. $\int\limits_L \dfrac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де L є перший оберт гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$.

3.16. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L є крива $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

3.17. $\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії який з'єднує точки $A(0;-2)$ and $B(4;0)$.

3.18. $\int\limits_L \dfrac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де L є перший оберт гвинтової лінії $x=5\cos t$, $y=5\sin t$, $z=t$.

3.19. $\int\limits_{L_{OABC}} yzdl$, де L_{OABC} є контур паралелограма з вершинами в точках $O(0;0;0)$, $A(0;4;0)$, $B(0;4;2)$, $C(0;0;2)$.

3.20. $\int\limits_L x^2dl$, де L є верхнє півколо $x^2+y^2=a^2$.

3.21. $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, де L є перший оберт гвинтової лінії $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$.

3.22. $\int\limits_L ydl$, де L є дуга параболи $y^2=6x$ яка відсікається параболою $x^2=6y$.

3.23. $\int\limits_{L_{AB}} xdl$, де L є дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(2;4)$ до точки $B(1,1)$.

3.24. $\int\limits_{L}(x+y)dl$ де L_{AB} є перший оберт лемніскати $\rho^2 = 7\cos 2\varphi$.

3.25. $\oint\limits_{L}\left(z^2+y^2\right)dl$, де L є коло $z^2+y^2=4$.

3.26. $\int\limits_{L} y^2 dl$, де L є перша арка циклоїди $x = 3(t-\sin t)$, $x = 3(1-\cos t)$.

3.27. $\int\limits_{L}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L є криві $x = 6(\cos t + t\sin t)$, $y = 6(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

3.28. $\int\limits_{L}\dfrac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, де L перший оберт гвинтової лінії $x = 9\cos t,\quad y = 9\sin t,\quad z = 9t$.

3.29. $\oint\limits_{L}\left(x^2+y^2\right)^2 dl$, де L є коло $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$.

3.30. $\int\limits_{L} ydl$, де L є дуга параболи $y^2 = 12x$ яка відсікається параболою $x^2 = 12y$.

4

4.1. $\int\limits_{L_{OA}}(xy-y^2)dx + xdy$, де L_{AB} є дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$,

4.2. $\int\limits_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, де L_{OBA} є ламана лінія OBA; $O(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $A(0;2;1)$.

4.3. $\int\limits_{L}\dfrac{x}{y}dx + \dfrac{1}{y-a}dy$, де L є перша арка циклоїди $x = a(t-\sin t)$, $x = a(1-\cos t)$, $\pi/6 \le t \le \pi/3$.

4.4. $\int\limits_{L_{OBA}} yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}\,dy + xydz$, де L є арка гвинтової лінії $x = R\cos t,$ $y = R\sin t$, $z = at/(2\pi)$ яка проходить від точки перетину з площиною $z=0$ д точки перетину з площиною $z = a$.

4.5. $\int\limits_{L_{OA}} 2xzdy - y^2dz$, де L_{OA} є дуга параболи $z = x^2/4$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(2;0;1)$.

4.6. $\int\limits_{L_{AB}}(x-1/y)dy$, де L_{AB} є дуга параболи $y = x^2$ from від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.

4.7. $\int\limits_{L_{AB}}\cos zdx + \sin xdz$, де L_{AB} є відрізок прямої лінії яка з’єднує точки $A(2;0;-2)$ і $B(-2;0;2)$.

4.8. $\int\limits_{L} ydx - xdy$, де L є четверта частина дуги кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ яка лежить у першому квадранті і рухатись у додатному напрямку.

4.9. $\int\limits_{L_{OA}}(xy-x)dx + \dfrac{x^2}{y}dy$, де L_{OA} є дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.

4.10. $\oint\limits_L ydx-xdy$, де L є дуга еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура .

4.11. $\oint\limits_L xdy$, де L є контур трикутника який утворюється прямими лініями $y=x$, $x=2$, $y=0$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.12. $\int\limits_L xdy$, де L є дуга кривої синуса $y=\sin x$ від точки $(\pi;0)$ до точки $(0;0)$.

4.13. $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, де L є верхня частина півеліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ і якщо рухатись у додатному напрямку обходу.

4.14. $\int\limits_{L_{OB}} (xy-y^2)dx+xdy$, де L_{OB} є дуга параболи $y=2\sqrt{x}$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

4.15. $\int\limits_L xdx+xydy$, де L є верхня частина півкола $x^2+y^2=2x$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.16. $\int\limits_L (x-y)dx+dy$, де L є верхня частина півкола $x^2+y^2=R$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.17. $\oint\limits_L (x^2-y)dx$, де L є контур паралелограма який утворюється прямими лініями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.18. $\int\limits_{L_{OB}} 4x\cos^2 ydx+y\cos 2xdy$**,** де L_{OB} є відрізок прямої лінії яка з’єднує точки $O(0;0)$ і $B(3;6)$.

4.19. $\oint\limits_L ydx-xdy$, де L є дуга еліпса $x=6\cos t$, $y=4\sin t$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.20. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx-x^2dy$, де L_{OA} є дуга параболи $x=2y^2$ від точки до точки $A(2;1)$.

4.21. $\int\limits_{L_{AB}} xye^xdx+(x-1)e^xdy$, де L_{AB} є будь-яка лінія яка з’єднує точки $A(0;2)$ і $B(1,2)$.

4.22. $\oint\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, де L є контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(1,0)$, $C(0;1)$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.23. $\int\limits_{L_{ABO}} (xy-x)dx+\frac{x^2}{2}dy$, де L_{ABO} є ламана лінія ABO $(O(0;0); A(1;2); B(1/2,3))$ якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

4.24. $\int\limits_{L_{OA}} (xy-y^2)dx+xdy$ де L_{OA} є відрізок прямої лінії від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.

4.25. $\int\limits_{L_{OA}} xdy-ydx$, де L_{OA} є кубічна парабола $y=x^3$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;8)$.

4.26. $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2x dx - \cos 2x dy$, де L_{AB} є будь-яка лінія від точки $A(\pi/4;2)$ до точки $B(\pi/6;1)$.

4.27. $\int\limits_{L_{OB}} (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$ де L_{OB} є парабола $y = 4x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;4)$.

4.28. $\int\limits_{L_{AB}} (x + y)dx + (x - y)dy$ де L_{AB} є парабола $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

4.29. $\int\limits_{L_{AB}} xdy$, де L_{AB} є дуга правостороннього півкола $x^2 + y^2 = a^2$ від точки $A(0;-a)$ до точки $B(0;a)$.

4.30. $\int\limits_{L} y^2dx + x^2dy$, де L є дуга верхнього півеліпса $x = 5\cos t$, $y = 2\sin t$, якщо рухатись у додатному напрямку обходу контура.

Розв'язок типового варіанту.

Обчислити дані криволінійні інтеграли

1. $\oint\limits_{L} (x^2 + y^2)^n dl$, *де* L *є коло* $x^2 + y^2 = a^2$.

► Запишемо рівняння кола $x^2 + y^2 = a^2$ у параметричній формі: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Тоді

$$x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = a\cos t,$$

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt,\ dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt = adt$$

Відповідно

$$\oint\limits_{L} (x^2 + y^2)^n dl = a^{2n+1}\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi a^{2n+1}.$$ ◄

2. $\int\limits_{L_{OB}} xdl$, *де* L_{OB} *є відрізок прямої лінії* OB *від точки* $O(0;0)$ *до точки* $B(1;2)$.

► Знайдемо рівняння прямої лінії яка проходить через дві дані точки: $y = 2x$, $(0 \le x \le 1)$. Дедалі

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx = \sqrt{5}dx,\ \int\limits_{L_{OB}} xdl\ \sqrt{5}\int\limits_0^1 xdx = \sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$ ◄

3. $I = \oint\limits_{L} 2x(y-1)dx + x^2dy$, *де* L *є контур фігури яка граничить параболою* $y = x^2$ *і прямою лінією* $y = 9$ *в додатному напрямку обходу контура.*

► За властивостями інтегралів другого роду , ми маємо:

$$I = \int\limits_{L_1} 2x(y-1)dx + x^2dy + \int\limits_{L_2} 2x(y-1)dx + x^2dy$$

Де L_1 є парабола $y = x^2$; L_2 є відрізок прямої $y = 9$. Так як парабола і пряма лінія перетинаються в точках $(-3;9)$ і $(3;9)$, отже

$$I = \int\limits_{-3}^{3} (4x^3 - 2x)dx + 16\int\limits_{3}^{-3} xdx = 0.$$ ◄

4. $I=\int\limits_L\left(\sqrt[3]{x}+y\right)dx-\left(\sqrt[3]{y}+x\right)dy$, *де* L *верхня арка астроїди* $x=8\cos^3 t$, $y=8\sin^3 t$, *від точки* $(8;0)$ *до точки* $(-8;0)$.

► Знайдемо наступні вирази:

$$dx=24\cos^2 t(-\sin t)dt\,;\ dy=24\sin^2 t(\cos t)dt\,.$$

тоді

$$I=\int\limits_0^{\pi}\Big[\left(2\cos t+8\sin^3 t\right)\left(-24\sin t\cos^2 t\right)-$$

$$=\left(2\sin t+8\cos^3 t\right)\left(24\sin^2 t\cos t\right)\Big]dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(-48\sin t\cos t-192\sin^2 t\cos^2 t\right)dt=$$

$$=-\int\limits_0^{\pi}\left(24\sin 2t+48\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=-12\cos 2t\Big|_0^{\pi}-24\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 4t)dt=$$

$$=-24\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi}=-24\pi\,.$$ ◄

Індивідуальні домашні завдання - 3.2

1. *Показати, що дані вирази є повні диференціали функції* $u(x,y)$. *Знайти функцію* $u(x,y)$

1.1	$\left(2x-3y^2+1\right)dx+\left(2-6xy\right)dy$
1.2	$\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3\right)dx+\left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}-5\right)dy$
1.3	$-\left(\frac{1}{2}\cos 2y+y\sin 2x\right)dx+\left(x\sin 2y+\cos^2 x+1\right)dy$
1.4	$\left(y^2e^{xy^2}+3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-1\right)dy$
1.5	$\left(\frac{1}{x+y}+\cos x\cos y-3x^2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}-\sin x\sin y+4y\right)dy$
1.6	$\left(y/x+\ln y+2x\right)dx+\left(\ln x+x/y+1\right)dy$
1.7	$\left(e^{x+y}-\cos x\right)dx+\left(e^{x+y}+\sin y\right)dy$
1.8	$\left(y\big/\sqrt{1-x^2y^2}+2x\right)dx+\left(x\big/\sqrt{1-x^2y^2}+6y\right)dy$
1.9	$\left(e^{xy}+xye^{xy}+2\right)dx+\left(x^2e^{xy}+1\right)dy$
1.10	$\left(ye^{xy}+y^2\right)dx+\left(xe^{xy}+1\right)dy$
1.11	$\left(y\cos(xy)+2x-3y\right)dx+\left(x\cos(xy)-3x+4y\right)dy$
1.12	$\left(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y)-9xy^2\right)dx+$ $+\left(x\sin(x+y)+xy\cos(x+y)+2y\right)dy$
1.13	$\left(5y+\cos x+6xy^2\right)dx+\left(5x+6x^2y\right)dy$

1.14	$\left(y^2e^{xy}-3\right)dx+e^{xy}\left(1+xy\right)dy$
1.15	$\left(1+\cos(xy)\right)ydx+\left(1+\cos(xy)\right)xdy$
1.16	$\left(y-\sin x\right)dx+\left(x-2y\cos y^2\right)dy$
1.17	$\left(\sin 2x-\dfrac{1}{x^2y}\right)dx-\dfrac{1}{xy^2}dy$
1.18	$\dfrac{x+y}{xy}dx+\dfrac{y-x}{y^2}dy$
1.19	$\left(20x^3-21x^2y+2y\right)dx+\left(3+2x-7x^3\right)dy$
1.20	$\left(ye^{xy}-2\sin x\right)dx+\left(xe^{xy}+\cos y\right)dy$
1.21	$y\left(e^{xy}+5\right)dx+x\left(e^{xy}+y\right)dy$
1.22	$\left(x-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy$
1.23	$\dfrac{x\ln y+y}{x}dx+\dfrac{y\ln x+x}{y}dy$
1.24	$e^{x-y}\left(1+x+y\right)dx+e^{x-y}\left(1-x-y\right)dy$
1.25	$\left(3x^2-2xy+y\right)dx+\left(x-x^2-3y^2-4y\right)dy$
1.26	$\left(2xe^{x^2-y^2}-\sin x\right)dx+\left(\sin y-2ye^{x^2-y^2}\right)dy$
1.27	$\left(y\big/\sqrt{1-x^2y^2}+x^2\right)dx+\left(x\big/\sqrt{1-x^2y^2}+y\right)dy$
1.28	$\dfrac{1-y}{x^2y}dx+\dfrac{1-2x}{xy^2}dy$
1.29	$\left(\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{y}{(x-1)^2}-2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy$
1.30	$\left(3x^2-2xy+y^2\right)dx+\left(2xy-x^2-3y^2\right)dy$

2. *Розв'язати наступні задачі*

2.1. *Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії* $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in[0;1]$.

2.2. *Обчислити момент інерції відносно координатних осей відрізка однорідної прямої лінії* $2x+y=1$, *який лежить між цими осями.*

2.3. *Знайти центр гравітації четвертої частини кола* $x^2+y^2=a^2$, *яка лежить у першому квадранті.*

2.4. *Обчислити масу дуги кривої* $y=\ln x$ *яка міститься між точками з абсцисами* $x=\sqrt{3}$ *і* $x=\sqrt{8}$, *якщо густина в кожній точці дорівнюється квадрату абсциси у цій точці.*

2.5. *Обчислити момент інерції відносно осі* Oy *дуги півкубічної параболи (Нейла)* $y^2=x^3$ *яка міститься між точками з абсцисами* $x=0$ *і* $x=4/3$.

2.6. *Обчислити момент інерції відносно початку координат контура квадрата з сторонами* $x=\pm a$, $y=\pm a$. *Покладаючи, що густина постійна.*

2.7. *Обчислити довжину дуги кривої* $x = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^6}{6}$, *яка обмежена точками перетину з координатними осями.*

2.8. *Обчислити центр гравітації однорідного півкола* $x^2 + y^2 = 4$ *симетричного відносно* Ox.

2.9. *Обчислити центр гравітації однорідної дуги однієї арки циклоїди* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

2.10. *Обчислити момент інерції відносно початку координат відрізка прямої лінії яка міститься між точками* $A(2;0)$ *і* $B(0,1)$, $\mu = 1$.

2.11. *Обчислити центр гравітації однорідного контура сферичного трикутника* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

2.12. *Обчислити статичний момент відносно координатних осей дуги астроїди* $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, *яка розташована у першому квадранті.*

2.13. *Обчислити масу відрізка прямої лінії* $y = 2 - x$, *який розташований між координатними осями і лінійна густина в кожній точці дорівнюється квадрату абсциси цієї точки, а в точці* $(2;0)$ *вона дорівнюється 4.*

2.14. *Обчислити статичний момент відносно осі* Oy *однорідної дуги першої арки лемніскати Бернулі* $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2.15. *Знайти роботу сили* $\vec{F} = x\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ *точкової маси „m" яка рухається вздовж дуги еліпса* $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

2.16. *Обчислити момент інерції однорідної дуги першого оберту гвинтової лінії* $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$ *відносно осі* Oz.

2.17. *Обчислити масу кривої* $\rho = 3\sin\varphi$, $\varphi \in [0;\pi/4]$, *якщо густина в кожній її точці пропорційна відстані до полюса я коли* $\varphi = \pi/4$ *вона дорівнюється 3.*

2.18. *Обчислити центр гравітації однорідної дуги першого повороту гвинтової лінії* $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$.

2.19. *Обчислити момент інерції відносно координатних осей четвертої частини кола* $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ *розташованої у першому квадранті.*

2.20. *Обчислити центр гравітації першої арки гвинтової лінії* $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, *якщо лінійна густина в кожній точці пропорційна аплікаті точки а в точці* $t = \pi$ *дорівнюється 1.*

2.21. *Обчислити масу першої частини дуги еліпса* $x^2/4 + y^2 = 1$ *яка лежить у першому квадранті і лінійна густина в кожній її точці дорівнюється добутку координати цієї точки*

2.22. *Знайти роботу сили* $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ *якщо матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії* $y = x$ *від точки* $O(0;0)$ *до точки* $(1;1)$.

2.23. *Обчислити статичний момент відносно осі* Ox *однорідної дуги ланцюгової лінії* $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0,1/2]$.

2.24. *Обчислити роботу сили* $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$, *якщо матеріальна точка рухається вздовж контура квадрата, який утворюється прямими лініями* $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

2.25. *Обчислити статичний момент відносно вісі* Ox *однорідної дуги кардіоїди* $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2.26. *Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди* $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$.

2.27. *Обчислити роботу сили* $\vec{F}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}$, *коли матеріальна точка рухається вздовж контура* $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ *у додатному напрямку.*

2.28. *Обчислити роботу сили* $\vec{F}=y\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ *коли матеріальна точка рухається від початку координат до точки* $(1;1)$ *вздовж параболи* $y=x^2$.

2.29. *Обчислити роботу сили* $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+2y\vec{j}$ *коли матеріальна точка рухається від початку координат до точки* $(1;-3)$ *вздовж параболи* $y=-3x^2$.

2.30. *Обчислити момент інерції відносно координатних осей відрізка прямої лінії* $y=2x$ *який міститься між точками* $(1,2)$ *і* $(2,4)$.

Розв'язок типового варіанту

1. *Показати що вираз*

$$\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy$$

є повний диференціал функції $u(x,y)$. *Знайти функцію* $u(x,y)$.

► Перевіримо, що умови повного диференціала для функції $u(x,y)$ виконуються, тобто $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Маємо

$$P(x,y)=\frac{y}{1+x^2y^2}-1,\ Q(x,y)=\frac{x}{1+x^2y^2}-10$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)=\frac{1+x^2y^2-y\cdot 2x^2y}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)=\frac{1+x^2y^2-x\cdot 2xy^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=\frac{1-x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2}$$

Даний вираз є повний диференціал деякої функції n $u(x,y)$. Покладемо $x_0=0$ і $y_0=0$ і застосовуючи відповідну формулу, знайдемо $u(x,y)$

$$u(x,y)=\int_0^x(-1)d\xi+\int_0^y\left(\frac{x}{1+x^2\eta^2}-10\right)d\eta+\mathrm{C}$$

$$=-x+\tan^{-1}xy-10y+\mathrm{C}$$

Функція , яку ми дістали буде розв'язком даного рівняння, якщо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\ \text{an}\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

Перевіримо

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-x+\tan^{-1}xy-10y+C\right)=\left(-1+\frac{y}{1+x^2y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-x+\tan^{-1}xy-10y+C\right)=\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right).$$

Отже, $u(x,y)=\tan^{-1}xy-x-10y+C$. ◄

2. *Обчислити момент інерції відносно координатних осей однорідного відрізка прямої лінії* $4x+2y=3$ *який лежить між точками* $(0,3/2)$ *і* $(2,-5/2)$.

► Користуючись загальними формулами обчислення моменту інерції, відповідно ми можемо знайти

$$I_x=\int_L y^2dl\,,\qquad I_y=\int_L x^2dl\,,$$

Де L: $4x+2y=3$ або $y=-2x+3/2$, $dl=\sqrt{5}dx$

$$I_x=\sqrt{5}\int_0^2\left(-2x+3/2\right)^2dx=\frac{\sqrt{5}}{6}\left(-2x+3/2\right)^3\Big|_0^2=\frac{49\sqrt{5}}{24}.$$

$$I_x=\sqrt{5}\int_0^2 x^2dx=\sqrt{5}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8\sqrt{5}}{3}.\ ◄$$

Індивідуальні домашні завдання - 3.3

1. *Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні* S *, де* S *є частина площини* (p) *, яка відсікається координатними площинами*

1.1	$\boxed{\iint_S (2x+3y+2z)ds,}$	(p): $x+3y+z=3$
1.2	$\iint_S (2-7x+y+9z)ds,$	(p): $2x-y-2z=-2$
1.3	$\iint_S (6x+y+4z)ds,$	(p): $3x+3y+z=3$
1.4	$\iint_S (x+2y+3z)ds,$	(p): $x+y+z=2$
1.5	$\iint_S (3x-2y+6z)ds,$	(p): $2x+y+2z=2$
1.6	$\iint_S (2x+5y-z)ds,$	(p): $x+2y+z=2$
1.7	$\iint_S (5x-8y-z)ds,$	(p): $2x-3y+z=6$
1.8	$\iint_S (3x-y-z)ds,$	(p): $x-y+z=2$
1.9	$\iint_S (3y-2x-2z)ds,$	(p): $2x-y-2z=-2$
1.10	$\iint_S (2x-3y+z)ds,$	(p): $x+2y+z=2$
1.11	$\iint_S (5x+y-z)ds,$	(p): $x+2y+2z=2$
1.12	$\iint_S (3x+2y+2z)ds,$	(p): $3x+2y+2z=6$
1.13	$\iint_S (2x+3y-z)ds,$	(p): $2x+y+z=2$
1.14	$\iint_S (9x+2y+z)ds,$	(p): $2x+y+z=4$
1.15	$\iint_S (5x+8y+8z)ds,$	(p): $x+4y+2z=8$
1.16	$\iint_S (4y-x+4z)ds,$	(p): $x+3y+2z=2$
1.17	$\iint_S (7x+y+2z)ds,$	(p): $3x-2y+2z=6$

1.18	$\iint\limits_S (2x+3y+z)ds,$	(p): $2x+3y+z=6$
1.19	$\iint\limits_S (4x-y+z)ds,$	(p): $x-y+z=2$
1.20	$\iint\limits_S (6x-y+z)ds,$	(p): $x+y+2z=4$
1.21	$\iint\limits_S (4x-4y-z)ds,$	(p): $x+2y+2z=4$
1.22	$\iint\limits_S (2x+5y+z)ds,$	(p): $x+y+2z=2$
1.23	$\iint\limits_S (4x-y+4z)ds,$	(p): $2x+2y+z=4$
1.24	$\iint\limits_S (5x+2y+2z)ds,$	(p): $x+2y+z=2$
1.25	$\iint\limits_S (2x+5y+10z)ds,$	(p): $2x+y+3z=6$
1.26	$\iint\limits_S (2x+15y+z)ds,$	(p): $x+2y+2z=2$
1.27	$\iint\limits_S (3x+10y-z)ds,$	(p): $x+3y+2z=6$
1.28	$\iint\limits_S (2x+3y+z)ds,$	(p): $2x+2y+z=2$
1.29	$\iint\limits_S (5x-y+5z)ds,$	(p): $3x+2y+z=6$
1.30	$\iint\limits_S (x+3y+2z)ds,$	(p): $2x+y+2z=2$

2. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду*

2.1. $\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdz$, *де* S *є частина параболоїда* $x=9-y^2-z^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з ортом* $\vec{i}$ *) яка відсікається площиною* $x=0$.

2.2. $\iint\limits_S z^2dxdy$, *де* S *є зовнішня сторона поверхні еліпсоїда* $x^2+y^2+2z^2=2$.

2.3. $\iint\limits_S zdxdy+ydxdz+xdydz$, *де* S *є зовнішня сторона куба яка обмежена площинами* $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

2.4. $\iint\limits_S z^2dxdy+y^2dxdz+x^2dydz$, *де* S *є зовнішня сторона поверхні сфери* $x^2+y^2+z^2=16$, *яка розташована у першому октанті.*

2.5. $\iint\limits_S xydxdy+xzdxdz+yzdydz$, *де* S *є верхня частина поверхні площини* $x+y+z=4$, *яка відсікається координатними площинами.*

2.6. $\iint\limits_S (z+1)dxdy$ $\iint\limits_S z^2dxdy+y^2dxdz+x^2dydz$ *де* S *є зовнішня поверхня сфери* $x^2+y^2+z^2=16$.

2.7. $\iint\limits_S zdxdy+ydxdz+xdydz$, *де* S *є зовнішня поверхня сфери* $x^2+y^2+z^2=1$.

2.8. $\iint\limits_S xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, *де* S *є верхня частина поверхні площини* $x+y+z=1$, *яка відсікається координатними площинами.*

2.9. $\iint\limits_S yzdxdy+xzdydz+xydxdz$ *де* S *є бокова поверхня циліндра* $x^2+y^2=1$, *яка відсікається площинами* $z=0$, $z=5$.

2.10. $\iint\limits_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$, *де* S *і частина поверхні параболоїда* $z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається циліндром* $x^2+y^2=1$.

2.11. $\iint\limits_S (x^2+y^2)zdxdy$, *де* S *є зовнішня нижня частина поверхні сфери* $x^2+y^2+z^2=9$.

2.12. $\iint\limits_S z^2dxdy+x^2dydz$, *де* S *є частина поверхні конуса* $z^2=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка лежить між площинами* $z=0$ *і* $z=1$.

2.13. $\iint\limits_S (2y^2-z)dxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площиною* $z=2$.

2.14. $\iint\limits_S \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, $\iint\limits_S (2y^2-z)dxdy$, *де* S *є частина поверхні гіперболоїда* $x^2+y^2=z^2+1$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площинами* $z=0$ *і* $z=\sqrt{3}$.

2.15. $\iint\limits_S xydydz+yzdxdz+xzdxdy$, *де* S *є зовнішня частина сфери* $x^2+y^2+z^2=4$, *яка лежить у першому октанті*

2.16. $\iint\limits_S x^2dydz+zdxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площиною* $z=4$.

2.17. $\iint\limits_S z^2dxdy+x^2dydz$, *де* S *є частина поверхні конуса* $z^2=x^2+y^2$ *нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), який відсікається площинами* $z=0$ *і* $z=3$.

2.18. $\iint\limits_S x^2dydz-z^2dxdz+zdxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $z=3-x^2-y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площиною* $z=0$.

2.19. $\iint\limits_S yzdydz-x^2dxdz-y^2dxdy$, *де* S *є частина поверхні конуса* $y^2=x^2+z^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{j}$*), яка відсікається площинами* $y=0$ *і* $z=1$.

2.20. $\iint\limits_S x^2dydz+2y^2dxdz-zdxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площиною* $z=1$.

2.21. $\iint\limits_S 2xdydz+(1-z)dxdy$ *,де* S *є внутрішня частина циліндра* $x^2+y^2=4$*, яка відсікається площинами* $z=0$ *і* $z=1$.

2.22. $\iint\limits_S 2xdydz-ydxdz+zdxdy$, *де* S *є зовнішня сторона замкненої поверхні яка утворюється параболоїдом* $3z=x^2+y^2$ *і півсферою* $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

2.23. $\iint\limits_S 4xdydz+2ydxdz-zdxdy$, *де* S *є зовнішня сторона сфери* $x^2+y^2+z^2=4$.

2.24. $\iint\limits_S (x+z)dydz+(z+y)dxdy$, *де* S *є зовнішня сторона циліндра* $x^2+y^2=1$ *яка відсікається площинами* $z=0$ *і* $z=2$.

2.25. $\iint\limits_S 3xdydz-ydxdz-zdxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $9-z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з ортом* $\vec{k}$*), який відсікається площиною* $z=0$.

2.26. $\iint\limits_S (y-x)dydz+(x-y)dxdz+(x-z)dxdy$, *де* S *є зовнішня сторона замкненої поверхні яка утворюється конусом* $x^2=y^2+z^2$ *і площиною* $x=1$.

2.27. $\iint\limits_S 3x^2dydz-y^2dxdz-zdxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $1-z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площиною* $z=0$.

2.28. $\iint\limits_S (1+2x^2)dydz+y^2dxdz+zdxdy$, *де* S *є частина поверхні конуса* $z^2=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площинами* $z=0$ *і* $z=4$.

2.29. $\iint\limits_S x^2dydz+z^2dxdz+ydxdy$, *де* S *є частина поверхні параболоїда* $4-z=x^2+y^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з ортом* $\vec{k}$*), яка відсікається площиною* $z=0$.

2.30. $\iint\limits_S (y^2+z^2)dydz-y^2dxdz+2yz^2dxdy$, *де* S *є частина поверхні конуса* $y^2=x^2+z^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює тупий кут з ортом* $\vec{j}$*), яка відсікається площинами* $y=0$ *і* $y=1$.

3. *Обчислити векторний потік векторного поля* $\overrightarrow{A(M)}$ *через зовнішню поверхню піраміди, яка утворюється площиною* (p) *і координатними площинами; двома методами: 1) за означенням векторного потоку, 2) за формулою Гаусса-Остроградського*

3.1	$\vec{A}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$	$(p): x+3y+z=3$
3.2	$\vec{A}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$	$(p): 2x-y-2z=2$

3.3	$\vec{A}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$	$(p):3x+3y+z=3$
3.4	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$	$(p):x+y+z=2$
3.5	$\vec{A}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$	$(p):2x+y+2z=2$
3.6	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$	$(p):x+2y+z=2$
3.7	$\vec{A}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$	$(p):2x-3y+z=6$
3.8	$\vec{A}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$	$(p):x-y+z=2$
3.9	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$	$(p):2x-y-2z=-2$
3.10	$\vec{A}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$	$(p):x+2y+z=2$
3.11	$\vec{A}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$	$(p):2x+y+z=2$
3.12	$\vec{A}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$	$(p):x+2y+2z=2$
3.13	$\vec{A}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$	$(p):3x+2y+2z=6$
3.14	$\vec{A}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$	$(p):2x+y+z=4$
3.15	$\vec{A}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$	$(p):x+4y+2z=8$
3.16	$\vec{A}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$	$(p):x-2y+2z=2$
3.17	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$	$(p):3x-2y+2z=6$
3.18	$\vec{A}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$	$(p):2x+3y+z=6$
3.19	$\overrightarrow{A(M)}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$	$(p):x-y+z=2$
3.20	$\vec{A}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$	$(p):x+2y+2z=2$
3.21	$\vec{A}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$	$(p):x+y+2z=2$
3.22	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$	$(p):x+y+2z=2$
3.23	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$	$(p):2x+2y+z=4$
3.24	$\vec{A}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$	$(p):x+2y+z=2$
3.25	$\vec{A}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$	$(p):2x+y+3z=6$
3.26	$\vec{A}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$	$(p):x+2y+2z=2$
3.27	$\vec{A}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$	$(p):x+3y+2z=6$
3.28	$\vec{A}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$	$(p):2x+2y+z=2$
3.29	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$	$(p):3x+2y+z=6$
3.30	$\vec{A}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$	$(p):2x+y+2z=2$

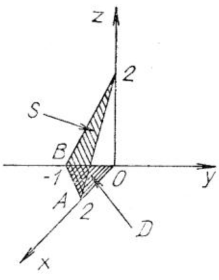

Рис. 1*

Розв'язок типового варіанту

1. *Обчислити поверхневий інтеграл першого роду* $\iint\limits_S (3x-y+z)ds$ *по поверхні* S, *де* S *є частина площини яка відсікається координатними площинами.*

► За рівнянням площини можемо знайти:

$$z=2-x+2y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2,$$

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{6}dxdy$$

Тепер ми зводимо обчислення поверхневого інтеграла до обчислення подвійного інтеграла по області D, де D є трикутник AOB який є проекцією поверхні S на площину Oxy (Рис. 1*). Отже

$$\iint_S (3x-y+z)ds = \iint_D (3x-y+2-x+2y)\sqrt{6}dxdy =$$

$$= \iint_D (2x+y+2)\sqrt{6}dxdy = \sqrt{6}\int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{2+2y} (2x+y+2)dx =$$

$$= \sqrt{6}\int_{-1}^{0} (x^2+(y+2)x)\Big|_0^{2+2y} dy = \sqrt{6}\int_{-1}^{0} (6y^2+14y+8)dy =$$

$$(2y^3+7y^2+8y)\Big|_{-1}^{0} = 3\sqrt{6}. \blacktriangleleft$$

2. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду* $\iint_S (x^2+z^2)dxdz + x^2dydz - 2z^2dxdy$, *де* S *є поверхня параболоїда із* $4-y=x^2+z^2$ *(нормальний вектор* $\overrightarrow{n_0}$ *утворює гострий кут з орт-вектором* $\vec{j}$*) яка відсікається площиною* $y=0$.

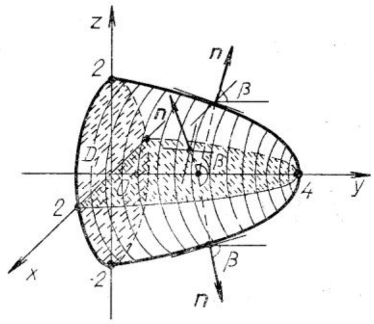

Рис. 2*

► Представимо даний поверхневий інтеграл відносно координат до суми трьох інтегралів і використовуючи рівняння параболоїда перетворимо кожний з них до подвійних інтегралів по області D_m (m=1,2,3) (Рис. 2*):

$$\iint_S (x^2+z^2)dxdz + x^2dydz - 2z^2dxdy = I_1+I_2+I_3$$

$$I_1 = \iint_S (x^2+z^2)dxdz,\ I_2 = \iint_S x^2dydz,\ I_3 = -\iint_S 2z^2dxdy$$

Обчислимо послідовно ці інтеграли:

$$I_1 = \iint_S (x^2+z^2)dxdz = \left\| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi,\ z=\rho\sin\varphi, \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{matrix} \right\| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 = 8\pi .$$

де область D_1 є круг $x^2+z^2=4$, $y=0$ у який проектується поверхня параболоїда на площину Oxz. інтеграл I_1 беремо із знаком ”+”, так як нормаль $\overrightarrow{n_0}$ до поверхні утворює гострий кут β з віссю Oy.

Далі

$$I_2 = \iint_S x^2dydz = \iint_{D_2} \left(\sqrt{4-y-z^2}\right)^2 dydz -$$

$$-\iint_{D_2} \left(-\sqrt{4-y-z^2}\right)^2 dydz =$$

$$= \iint_{D_2} \left(\sqrt{4-y-z^2}\right)^2 dydz - \iint_{D_2} \left(\sqrt{4-y-z^2}\right)^2 dydz = 0.$$

Координатна площина Oyz ділить поверхню параболоїда на дві частини $x=\sqrt{4-y-z^2}$ і $x=-\sqrt{4-y-z^2}$ проекція кожної з них на площину Oyz є область D_2. Тому інтеграл I_2 може бути представлений як сума двох інтегралів: перший з них із знаком ”+” так як нормаль $\overrightarrow{n_0}$ цієї частини поверхні утворює гострий кут з додатнім напрямком осі Ox, а другий із знаком ”-” так як нормаль $\overrightarrow{n_0}$ цієї частини поверхні утворює тупий кут з віссю Ox.

Аналогічно $I_3 = -\iint\limits_S 2z^2 dxdy = -2\iint\limits_{D_3} \sqrt{4-y-x^2}^{\,2} dxdy + 2\iint\limits_{D_3} \sqrt{4-y-x^2}^{\,2} dxdy = 0.$

Отже, $I = 8\pi$. ◄

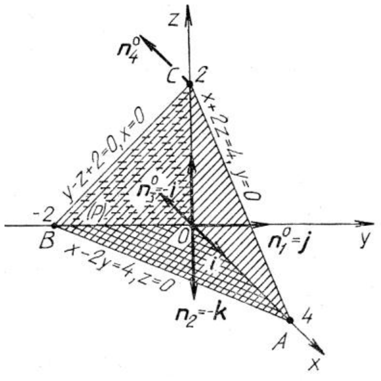

Рис. 3*

3. *Обчислити векторний потік векторного поля* $\vec{A}(M) = (x+y)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ *через зовнішню поверхню піраміди яка утворюється площиною* $(p): x-2y+2z=4$ *і координатними площинами двома методами:*

1) застосовуючи означення векторного потоку;

2) використовуючи формулу Гаусса-Остроградського.

► 1) Для обчислення векторного потоку використаємо поверхневий інтеграл $\Pi_S\left(\vec{A}\right) = \iint\limits_S \left(\vec{A}\overrightarrow{n_0}\right) ds$, де S є зовнішня частина поверхні піраміди $ABCO$ (Рис. 3*)

Перш за все ми повинні обчислити векторний потік через кожну з чотирьох сторін піраміди. Сторона AOC лежить на площині $y=0$, нормаль до цієї поверхні $\overrightarrow{n_{01}} = \vec{j}$, $ds = dxdz$ тоді потік векторного поля $\vec{A}(M)$ через сторону AOC є

$$-\iint\limits_{\Delta AOC} xds == -\iint\limits_{\Delta AOC} xdxdz - \int\limits_0^4 xdx \int\limits_0^{2-2/x} dz = -\int\limits_0^4 x\left(2-2/x\right)dx = -\left(x^2 - \frac{x^3}{x}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{16}{3}.$$

Сторона AOB лежить на площині $z=0$. Нормаль до цієї площини є $\overrightarrow{n_{02}} = -\vec{k}$, $ds = dxdy$

$$\Pi_2(\vec{A}) = \iint\limits_{\Delta AOB} 0dxdy = 0.$$

Сторона BOC лежить на площині $x=0$. Нормаль до цієї площини є $\overrightarrow{n_{03}} = -\vec{i}$, $ds = dydz$

$$\Pi_3(\vec{A}) = -\iint\limits_{\Delta BOC} zdydz - \int\limits_0^2 zdz \int\limits_{z-2}^0 dy = -\int\limits_0^2 z(2-z)dz = -\left(z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

Нарешті сторона ABC лежить на площині $x-2y+2z-4=0$ нормаль до цієї площини є

$$\overrightarrow{n_{04}} = \frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{3}, \quad ds = \sqrt{1+\left(z_x^{'}\right)^2+\left(z_y^{'}\right)^2}dxdy, \quad z = \frac{x}{2}+y+4, \quad z_x^{'} = \frac{1}{2}, \quad z_y^{'} = 1$$

$$ds = \sqrt{1+1/4+1}dxdy = \frac{3}{2}dxdy$$

$$\Pi_4(\vec{A}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left((x+3-2(2y-x)+2z\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left(3x+3z-4y\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_0^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0\left(\frac{3}{4}x^2-xy+6x\right)\Bigg|_0^{2y-4} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0\left(y^2+20y+36\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}+10y^2+36y\right)\Bigg|_{-2}^0 = \frac{52}{3}.$$

Нарешті ми можемо зайти :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

2) Обчислимо векторний потік через поверхню піраміди $ABCO$ застосовуючи формулу Гаусса-Остоградського:

$$\Pi = \iiint\limits_V div\vec{A}dv = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dv$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial (x+z)}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial A_2}{\partial y} = \frac{\partial (2y-x)}{\partial y} = 2; \ \frac{\partial A_3}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

Так як $\iiint\limits_V dv$ є об'єм піраміди $ABCO$, то

$$\Pi = \iiint\limits_V (1+2+1)dv = 4\iiint\limits_V dv = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

Індивідуальні домашні завдання – 3.4

1. *Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{A}(M)$ вздовж сторін трикутника, який дістається перетином площини $(p): ax+by+cz=d$ з координатними площинами у додатному напрямку рухання відносно нормального вектора $\vec{n}(a,b,c)$ двома методами: 1) використовуючи означення циркуляції; 2) використовуючи формулу Стокса.*

1.1	$\vec{A}(M) = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$	$p: 2x+y+2z=2$
1.2	$\vec{A}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}$	$p: 3x+2y+z=6$
1.3	$\vec{A}(M) = (y+z)\vec{i} + x\vec{j} + (y-2z)\vec{k}$	$p: 2x+2y+z=2$
1.4	$\vec{A}(M) = (2y-z)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + y\vec{k}$	$p: x+3y+2z=6$
1.5	$\vec{A}(M) = (y+z)\vec{i} + (x+6y)\vec{j} + y\vec{k}$	$p: x+2y+2z=2$
1.6	$\vec{A}(M) = (y+z)\vec{i} + (2x-z)\vec{j} + (y+3z)\vec{k}$	$p: 2x+y+3z=6$
1.7	$\vec{A}(M) = (3x+y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + y\vec{k}$	$p: x+2y+z=2$
1.8	$\vec{A}(M) = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}$	$p: 2x+2y+z=4$
1.9	$\vec{A}(M) = (x+z)\vec{i} + (x+3y)\vec{j} + y\vec{k}$	$p: x+y+2z=2$
1.10	$\vec{A}(M) = (2y-z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + x\vec{k}$	$p: x+2y+2z=4$
1.11	$\vec{A}(M) = (2z-x)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (3x+z)\vec{k}$	$p: x+y+2z=2$
1.12	$\vec{A}(M) = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$	$p: x-y+z=2$
1.13	$\vec{A}(M) = (x+y+z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y-7z)\vec{k}$	$p: 2x+3y+z=6$
1.14	$\vec{A}(M) = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}$	$p: 3x-2y+2z=6$
1.15	$\vec{A}(M) = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}$	$p: x-2y+2z=2$
1.16	$\vec{A}(M) = (2z-x)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + 3z\vec{k}$	$p: x+4y+2z=8$
1.17	$\vec{A}(M) = 4x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (2y+2z)\vec{k}$	$p: 2x+y+z=4$
1.18	$\vec{A}(M) = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}$	$p: 3x+2y+2z=6$
1.19	$\vec{A}(M) = x\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (2x-y+2z)\vec{k}$	$p: x+2y+2z=2$
1.20	$\vec{A}(M) = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k}$	$p: 2x+y+z=2$

1.21	$\vec{A}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$	$p: x+2y+z=2$
1.22	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$	$p: 2x-y-2z=-2$
1.23	$\vec{A}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$	$p: 2x+y+2z=2$
1.24	$\vec{A}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$	$p: 2x-3y+z=6$
1.25	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$	$p: x+2y+z=2$
1.26	$\vec{A}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$	$p: 2x+y+2z=2$
1.27	$\vec{A}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$	$p: x+y+z=2$
1.28	$\vec{A}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$	$p: 3x+3y+z=3$
1.29	$\vec{A}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$	$p: 2x-y-2z=-2$
1.30	$\vec{A}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$	$p: x+3y+z=3$

2. *Знайти най більшу густину циркуляції векторного поля* $\vec{A}(M)=\vec{A}(x,y,z)$ *в точці* $M_0(x_0,y_0,z_0)$

2.1	$\vec{A}(M)=x^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	$M_0(0,\ 1,\ -2)$
2.2	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$	$M_0(2,\ 0,\ 3)$
2.3	$\vec{A}(M)=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k}$	$M_0(1,\ -2,\ 0)$
2.4	$\vec{A}(M)=xz\vec{i}+z\vec{j}+yz\vec{k}$	$M_0(3,\ 0,\ 1)$
2.5	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$	$M_0(-1,\ 0,\ 3)$
2.6	$\vec{A}(M)=yz\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$	$M_0(2,\ 1,\ -1)$
2.7	$\vec{A}(M)=y^2\vec{i}-xy\vec{j}+z^2\vec{k}$	$M_0(-2,\ 1,\ 1)$
2.8	$\vec{A}(M)=xz\vec{i}-xyz\vec{j}+x^2\vec{k}$	$M_0(0,\ 1,\ 1)$
2.9	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}-zy^2\vec{j}-xz\vec{k}$	$M_0(0,\ -2,\ 1)$
2.10	$\vec{A}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}-zy\vec{k}$	$M_0(0,\ 1,\ 2)$
2.11	$\vec{A}(M)=y^2\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	$M_0(-1,\ 2,\ 1)$
2.12	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$	$M_0(0,\ -1,\ 1)$
2.13	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$	$M_0(0,\ 1,\ -2)$
2.14	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}-(x+z)\vec{j}+xz\vec{k}$	$M_0(4,\ 0,\ 1)$
2.15	$\vec{A}(M)=x\vec{i}-yz\vec{j}+x^2z\vec{k}$	$M_0(-3,\ 0,\ 2)$
2.16	$\vec{A}(M)=(x+y^2)\vec{i}+yz\vec{j}-x^2\vec{k}$	$M_0(1,\ 0,\ 4)$
2.17	$\vec{A}(M)=xz\vec{i}-y\vec{j}+yz\vec{k}$	$M_0(0,\ 1,\ -2)$
2.18	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}-x\vec{j}+yz\vec{k}$	$M_0(2,\ 2,\ 2)$
2.19	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}+xyz\vec{j}-x\vec{k}$	$M_0(4,\ 1,\ -3)$
2.20	$\vec{A}(M)=(x-y)\vec{i}+yz\vec{j}-y\vec{k}$	$M_0(-4,\ 1,\ 0)$
2.21	$\vec{A}(M)=(y-z)\vec{i}-z^2\vec{j}+xyz\vec{k}$	$M_0(3,\ 0,\ 1)$
2.22	$\vec{A}(M)=yz\vec{i}-z^2\vec{j}+(x+y)z\vec{k}$	$M_0(1,\ 3,\ 0)$
2.23	$\vec{A}(M)=z^2\vec{i}-xz\vec{j}+z^2\vec{k}$	$M_0(1,\ -2,\ 1)$
2.24	$\vec{A}(M)=xy\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$	$M_0(0,\ 0,\ 1)$

2.25	$\vec{A}(M)=xz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+x^2z\vec{k}$	$M_0(1,\ \ 1,\ \ -2)$
2.26	$\vec{A}(M)=(x-z)\vec{i}+xy\vec{j}+y^2z\vec{k}$	$M_0(2,\ \ 2,\ \ 1)$
2.27	$\vec{A}(M)=(x-z)\vec{i}+xyz\vec{j}+x\vec{k}$	$M_0(-2,\ \ 2,\ \ 1)$
2.28	$\vec{A}(M)=(y-z)\vec{i}+y\vec{j}-z^2\vec{k}$	$M_0(-1,\ \ 2,\ \ 1)$
2.29	$\vec{A}(M)=(x-y)\vec{i}-x\vec{j}+xz\vec{k}$	$M_0(0,\ \ 2,\ \ -2)$
2.30	$\vec{A}(M)=(x-z)\vec{i}-y\vec{j}+xy\vec{k}$	$M_0(1,\ \ -1,\ \ 0)$

3.1 *Перевірити, що векторне поле* $\vec{A}(M)$ *соленоїдне чи ні?*

3.1	$\vec{A}(M)=(\alpha-\beta)x\vec{i}+(\gamma-\alpha)y\vec{j}+(\beta-\gamma)z\vec{k}$
3.2	$\vec{A}(M)=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$
3.3	$\vec{A}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+xy\vec{k}$
3.4	$\vec{A}(M)=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$
3.5	$\vec{A}(M)=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$
3.6	$\vec{A}(M)=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$
3.7	$\vec{A}(M)=(x^2-y^2)\vec{i}(y^2-z^2)\vec{j}+(z^2-x^2)\vec{k}$
3.8	$\vec{A}(M)=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}$
3.9	$\vec{A}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$
3.10	$\vec{A}(M)=3x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}-2xyz\vec{k}$
3.11	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}-2(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$

3.2. *Перевірити, що векторне поле* $\vec{A}(M)$ *потенціальне чи ні?*

3.12	$\vec{A}(M)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+zy)\vec{j}+xy\vec{k}$
3.13	$\vec{A}(M)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$
3.14	$\vec{A}(M)=6xy\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}+z\vec{k}$
3.15	$\vec{A}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}$
3.16	$\vec{A}(M)=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}$
3.17	$\vec{A}(M)=(y-z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}$
3.18	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}-2xz\vec{j}-3(y+z)\vec{k}$
3.19	$\vec{A}(M)=z^2\vec{i}+(xz+y)\vec{j}+x^2y\vec{k}$
3.20	$\vec{A}(M)=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$
3.21	$\vec{A}(M)=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}$
3.22	$\vec{A}(M)=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$
3.23	$\vec{A}(M)=3(x-z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+3z\vec{k}$
3.24	$\vec{A}(M)=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2xy\vec{k}$
3.25	$\vec{A}(M)=3x^2\vec{i}+4(x-y)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$

3.3. *Перевірити, що дане векторне поле* $\vec{A}(M)$ *гармонічне чи ні?*

3.26	$\vec{A}(M) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$
3.27	$\vec{A}(M) = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$
3.28	$\vec{A}(M) = \frac{x}{y}\vec{i} - \frac{y}{x}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$
3.29	$\vec{A}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$
3.30	$\vec{A}(M) = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$

Розв'язок типового варіанту

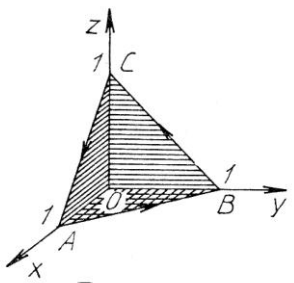

Рис. 1*

1. *Обчислити циркуляцію векторного поля* $\vec{A}(M) = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$ *вздовж контура трикутника, який дістається перетином площини* $(p): x+y+z=1$ *із координатними площинами у додатному напрямку відносно нормального вектора* $\vec{n} = (1,1,1)$ *цієї площини використовуючи два методи: 1) за означенням циркуляції; 2) за формулою Стокса*

► Після перетину площини (p) з координатними площинами ми дістали трикутник ABC (Рис. 1*) і визначимо напрямок рухання вздовж контура $ABCA$ у відповідності з умовою задачі.

1) Обчислимо контурний інтеграл

$$Ц\left(\vec{A}\right) = \oint_{ABCA} \vec{A}d\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}d\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}d\vec{l} + \int_{CA} \vec{A}d\vec{l}$$

На відрізку AB ми маємо: $z=0$; $x+y=1$; $y=1-x$; $dy=-dx$; $\vec{A}(M) = x\vec{i} + (x+3y)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$; $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$;

$$\vec{A}d\vec{l} = xdx + (x+3y)dy.$$

$$\int_{AB} \vec{A}d\vec{l} = \int_{AB} xdx + (x+3y)dy = \int_1^0 (x - x - 3(1-x))dx = \int_1^0 (3x-3)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_1^0 = \frac{3}{2}.$$

На відрізку BC ми маємо: $x=0$; $y+z=1$; $z=1-y$; $dz=-dy$; $\vec{A}(M) = -2z\vec{i} + (3y+z)\vec{j} + y\vec{k}$; $d\vec{l} = dy\vec{j} + dz\vec{k}$; $\vec{A}d\vec{l} = (3y+z)dy + ydz$.

$$\int_{BC} \vec{A}d\vec{l} = \int_{BC} (3y+z)dy + ydz = \int_1^0 (3y+1-y-y)dy = \int_1^0 (y+1)dy = \frac{(y+1)^2}{2}\Bigg|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

На відрізку CA дістаємо: $y=0$; $x+z=1$; $z=1-x$; $dz=-dx$; $\vec{A}d\vec{l} = (x-2z)dx + 5xdz$.

$$\int_{CA} \vec{A}d\vec{l} = \int_{CA} (x-2z)dx + 5xdz = \int_0^1 (x-2+2x-5x)dx = \int_0^1 (-2x-2)dx = -(x^2-2x)\Big|_0^1 = -3$$

Отже,

$$Ц\left(\vec{A}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.$$

2) Обчислимо циркуляцію даного векторного поля застосовуючи формулу Стокса.

$$Ц\left(\vec{A}\right) = \iint_S \left(rot\,\vec{A}, \vec{n_0}\right) ds$$

Для чого знайдемо $rot\,\vec{A}$

$$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix}=-7\vec{j}+\vec{k}$$

За поверхню S у формулі Стокса візьмемо поверхню піраміди ABC. $z=1-x-y$, $u=x+y+z-1$, $grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=$; $\vec{n_0}=\frac{gradu}{|gradu|}=\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$,

$\left(rot\vec{A},\vec{n_0}\right)=\frac{-7+1}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$,

Отже

$$Ц\left(\vec{A}\right)=\iint_S\left(rot\,\vec{A},\vec{n_0}\right)ds=-\sqrt{3}\iint_S ds=-\sqrt{3}\iint_\sigma\left|grad\,u\right|d\sigma==-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=-3.$$ ◄

2. *Знайти найбільшу густину циркуляції векторного поля* $\vec{A}(M)=xy^2z^2\vec{i}+x^2yz^2\vec{j}+xyz\vec{k}$ *в точці* $M_0(2,\ \ -1,\ \ 1)$.

► Циркуляція векторного поля $\vec{A}(M)$ в точці M_0 буде мати найбільшу густину у напрямку $rot\vec{A}$ і чисельно буде дорівнюватись $\left|rot\,\vec{A}\right|$. знайдемо

$$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(xz-2x^2yz)-\vec{j}(yz-2xy^2z)+\vec{k}(2xyz^2-2xyz^2).$$

$$rot\,\vec{A}(M_0)=10\vec{i}+5\vec{j};\ \left|rot\,\vec{A}(M_0)\right|=\left|10\vec{i}+5\vec{j}\right|=5\sqrt{5}.$$ ◄

3. *Перевірити, що* $\vec{A}(M)=(y+z)\vec{i}+xy\vec{j}-xz\vec{k}$ *є соленоїдний чи ні?*

► Векторне поле $\vec{A}(M)$ соленоїдне в кожній точці де $div\vec{A}(M)=0$. Знайдемо

$$div\vec{A}(M)=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}=\frac{\partial(z+y)}{\partial x}+\frac{\partial(xy)}{\partial y}+\frac{\partial(-xz)}{\partial z}=$$

$=0+x-x=0$. Отже дане векторне поле соленоїдне.◄

Навчальне видання

Анатолій Юхимович Пуди
Андрій Іванович Прокопенко
Станіслав Борисович Стасевський

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчально-методичний посібник для студентів і викладачів вищих навчальних закладів

Відповідальний випусковий: В.Г. Моторіна

Комп'ютерна верстка: Тараров. Д.С.

Підписано до друку 29.03.2016 Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк – цифровий. Ум. друк. арк. 15,63.
Обл.-вид.арк. 6,55 Зам. № 366. Наклад 300 прим. Ціна договірна.

Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С.Сковороди.
Україна, 61002, м. Харків, вул. Алчевських,29.

Видавництво «Мітра»
Свідоцтво про державну реєстрацію: Серія ДК №1635
від 25.12.03. Ліцензія №1413900866
т.: +380675765437, e-mail: mitra_izdat@meta.ua
