Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Харківський національний педагогічний університет

імені Г.С.Сковороди

В.Г. Моторіна, А.Ю. Пуди, А.І. Прокопенко, Н.П. Стогній

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник для студентів природничо-математичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів

Харків – 2012

ББК 22.161.6 я73
УДК 519.635(075)
Д 50

Автори: **В.Г.Моторіна, А.Ю.Пуди, А.І.Прокопенко, Н.П. Стогній**

Рецензенти:

Л.І. Білоусова - кандидат-фізико математичних наук, професор,

завідуюча кафедри інформатики ХНПУ им Г.С.Сковороди;

О.Г.Нерух - доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики ХНУРЕ.

У навчальному посібнику розглянуті методичні рекомендації щодо вивчення змістовних модулів (I – IV) з курсу «Диференціальні рівняння». Подані розробки планів-конспектів лекцій, практичних та індивідуальних завдань та модульних контрольних робіт.

Посібник підготовлено відповідно до діючої навчальної програми з курсу «Диференціальні рівняння».

Видання адресовано викладачам, студентам природничо-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Затверджено редакційно-видавничою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди.

Протокол № 1 від 05.01.11.

Зміст

Вступ

Час змінює ситуацію. Традиційні курси диференціальних рівнянь старішають, потребують зміни. Тому ми й звернули увагу на те, що майбутні вчителі, викладачі природничо-математичних спеціальностей повинні бути підготовлені до професійної діяльності в конкретному середовищі, в якому кожна ситуація вимагає творчого підходу.

У даній роботі розглянуті методичні рекомендації щодо вивчення всіх змістовних ліній курсу «Диференціальні рівняння» студентами природничо-математичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів. Цей посібник належить до тієї невеликої групи видань, які містять розробки планів-конспектів лекцій, практичних та індивідуальних занять, модульних контрольних робіт. Також наявні завдання для самостійної та індивідуальної роботи, розроблені модульні контрольні роботи.

Також досить цікавим виявиться те, що в роботі кожен бажаючий зможе знайти опорний конспект до кожної лекції, короткий довідник модуля, семантичний конспект теми. Це все подано в доступній, розгорнутій формі і стане у нагоді як викладачам, так і студентам.

Матеріал посібника дозволяє виробити практичні навички в розв’язуванні та дослідженні диференціальних рівнянь та їх систем, що описують еволюційні процеси в різних областях.

Зміст посібника повністю охоплює програму з курсу звичайних диференціальних рівнянь для вищих педагогічних навчальних закладів.

Навчальна програма вивчення курсу «Диференціальні рівняння» для студентів фізико-математичного факультету вищих навчальних педагогічних закладів

І. Загальні відомості

Дисципліна «Диференціальні рівняння» є однією з основних дисциплін циклу природничо-наукової (фундаментальної) підготовки студентів.

ІІ. Перелік дисциплін, знання яких необхідне для вивчення курсу

Для оволодіння курсом студент повинен опонувати розділами диференціального і інтегрального числення з курсу математичного аналізу, алгеброю та геометрією.

ІІІ. Мета і завдання дисципліни

Основна мета дисципліни:

— оволодіння студентами основними поняттями, методами теорії звичайних диференціальних рівнянь, варіаційного числення та технікою розв'язання прикладних задач;

— систематично викласти основи теорії диференціальних рівнянь та варіаційного числення під кутом їхнього практичного застосування;

— виробити у студентів логічне й алгоритмічне мислення, необхідне для розв'язання теоретичних та практичних задач за фахом;

— прищепити навички дослідження динамічних математичних моделей практичних задач, їх розв'язання та вміння аналізувати отримані результати.

Головна задача вивчення навчальної дисципліни:

— опанувати сучасними математичними методами диференціальних рівнянь і варіаційного числення, які дозволяють розв’язувати теоретичні та практичні задачі;

— навчити формалізувати прикладну задачу і приводити її до типових сучасних задач теорії диференціальних рівнянь і варіаційного числення.

Після вивчення курсу:

- студент повинен **знати** формулювання основних означень, понять, теорем, та їх доведення в межах програми, основні методи розв’язування диференціальних рівнянь;
- студент повинен **вміти** застосовувати теоретичний матеріал до розв'язання задач і прикладів, які пропонуються як у даному курсі, так і в процесі подальшого навчання.

Набуті знання ***використовуються*** в чисельних методах, чисельних методах системного аналізу, методах оптимізації, теорії керування, основах системного аналізу.

Знання з даного курсу будуть використовуватися при вивченні рівнянь із частинними похідними, варіаційного числення, спеціальних курсів, написання курсових, кваліфікаційних та дипломних робіт.

IV. Методи навчання та інформаційно-методичне забезпечення

Основними методами навчання є лекції та практичні заняття, на яких закріплюються та відпрацьовуються основні теоретичні положення та вміння їх застосовувати до розв’язання практичних та прикладних задач.

V. Форми оцінювання

Іспит, залік, колоквіум, контрольні роботи

VI. Зміст дисципліни

№ п/п	Зміст програмного матеріалу	Літе-ратура	Кількість годин			Кален-дарні строки
			Лекції	Прак-тичні заня-ття	Самос-тійна робота	
ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ І						
1.	Основні означення. Задачі, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь. Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюючими змінними.	[3, 2, 9, 12]	4	2	2	
2.	Однорідні рівняння першого порядку. Рівняння, які зводяться до однорідних.	[3, 4, 5, 12]	2	2	2	
3.	Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод варіації довільної змінної. Рівняння Бернуллі. Метод Бернуллі.	[3, 4, 5, 12]	2	2	2	
4.	Диференціальне рівняння у повних диференціалах. Інтегруючий множник.	[3, 4, 9, 11]	2	2	2	
ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ ІІ						
5.	Диференціальні рівняння, які не розв’язуються відносно	[2, 3, 4, 5, 9,	2	2	2	

	похідної. Рівняння Лагранжа. Рівняння Клеро.	11, 12]				
6.	Диференціальні рівняння вищих порядків. Методи пониження порядків.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ III						
7.	Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Однорідні лінійні рівняння. Основні властивості однорідних лінійних рівнянь.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
8.	Лінійно залежні функції. Вронскіан. Властивості Вронскіана.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
9.	Лінійні однорідні рівняння $n-$ого порядку. Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння: 1) дійсні різні; 2) дійсні кратні; 3) комплексні. Загальні розв'язки рівнянь.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
10.	Лінійні неоднорідні рівняння $n-$ого порядку з постійними коефіцієнтами. Метод варіації довільних постійних.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
11.	Лінійні неоднорідні рівняння $n-$ого порядку із постійними коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	4	2	

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ IV						
12.	Системи звичайних лінійних рівнянь. Зведення лінійних рівнянь до лінійних рівнянь вищого порядку.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
13.	Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь. Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння: 1) дійсні різні; 2) дійсні кратні; 3) комплексні.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	4	2	
14.	Системи звичайних лінійних неоднорідних рівнянь. Метод невизначених коефіцієнтів.	[2, 3, 4, 5, 9, 11, 12]	2	2	2	
ВСЬОГО			30	32	28	

VII. Література до курсу:

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
6. Кисилев А.И., Краснов М.А., Макаренко Т.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
7. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений.
8. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.

9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
12. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.

Розділ I. Методичні особливості вивчення змістовного модуля I «Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремлюючими змінними»

Основна мета вивчення модуля:

— оволодіння студентами основними поняттями теорії диференціальних рівнянь, методами теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, однорідних, лінійних та рівнянь у повних диференціалах;
— вироблення у студентів логічного й алгоритмічного мислення, необхідного для розв’язання задач, які пов’язані з теорією звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, однорідних, лінійних та рівнянь у повних диференціалах;
— прищеплення навичків дослідження динамічних математичних моделей практичних задач, їх розв’язання та вміння аналізувати отримані результати.
— **Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи для змістовного модуля I**

Лекція 1. ***Диференціальні рівняння, основні визначення***.

Звичайне диференціальне рівняння, рівняння в частинних похідних, порядок диференціального рівняння. Задачі, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Перспективи застосування диференціальних рівнянь у механіці і техніці» – 2 год. *Література:* [1–4].

Лекція 2. ***Диференціальні рівняння першого порядку***.

Диференціальні рівняння першого порядку (загальні відомості). Розв’язок диференціального рівняння, загальний інтеграл і частинний розв’язок рівняння. Диференціальні рівняння із відокремлюючими змінними. Диференціальні рівняння із змінними, які відокремлюються.

Практичне заняття 1.

Диференціальні рівняння з відокремлюючими змінними.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Теорема Пікара. Варіанти теореми Пікара»– 2 год.

Література: [1,3].

Лекція 3. ***Однорідні рівняння першого порядку.***

Однорідна функція n-го порядку. Однорідні рівняння першого порядку.

Практичне заняття 2.

Однорідні рівняння та рівняння, що зводяться до них.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу «Геометрична інтерпретація рівнянь, розв’язаних відносно похідної» – 2 год.

Література: [2–4].

Лекція 4. ***Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.***

Лінійні однорідні рівняння. Лінійні неоднорідні рівняння. *Метод* Лагранжа (метод варіації довільної змінної). Рівняння Бернуллі.

Практичне заняття 3.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що зводяться до них (рівняння Бернуллі, метод Міндінг-Дарбу, рівняння Ріккаті).

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу лекції, інтегрування рівнянь, не розв’язаних відносно похідної – 2 год.

Література: [1,3].

Лекція 5. ***Рівняння в повних диференціалах***.

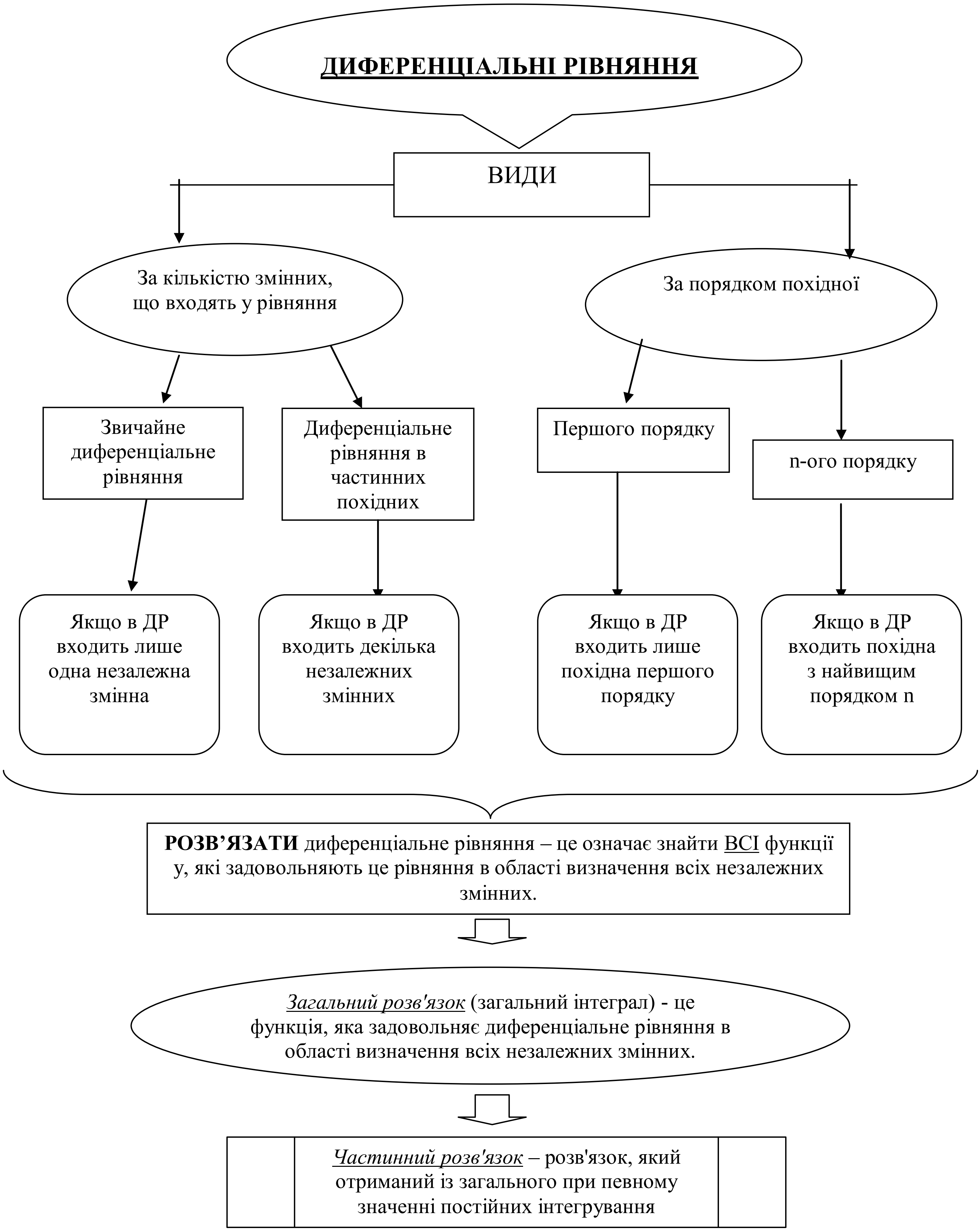
Загальні відомості про рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник.

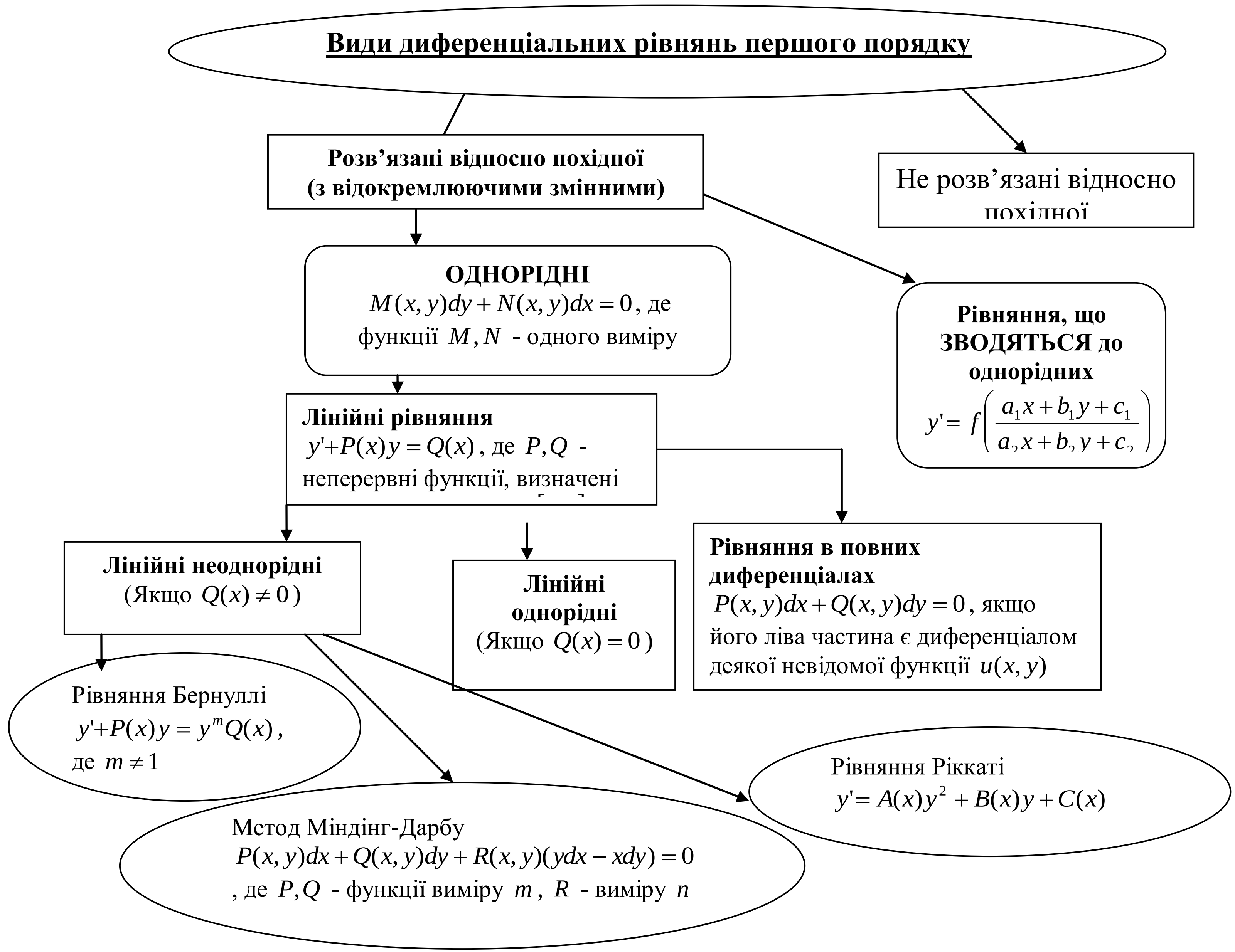
Практичне заняття 4.

Рівняння в повних диференціалах (1) рівняння, які задані в повних диференціалах; 2) рівняння, які неявно задані в повних диференціалах).

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Теорема Коші»– 2 год. *Література:* [1,2,5].

Логічна структура вивчення змістовного модуля І




Види диференціальних рівнянь першого порядку
Розв’язані відносно похідної (з відокремлюючими змінними)
Не розв’язані відносно похідної
ОДНОРІДНІ
$M(x,y)dy+N(x,y)dx=0$, де функції M,N - одного виміру
Рівняння, що ЗВОДЯТЬСЯ до однорідних
$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$
Лінійні рівняння
$y'+P(x)y=Q(x)$, де P,Q - неперервні функції, визначені
Лінійні неоднорідні (Якщо $Q(x)\neq 0$)
Лінійні однорідні (Якщо $Q(x)=0$)
Рівняння в повних диференціалах
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, якщо його ліва частина є диференціалом деякої невідомої функції $u(x,y)$
Рівняння Бернуллі
$y'+P(x)y=y^mQ(x)$, де $m\neq 1$
Метод Міндінг-Дарбу
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy+R(x,y)(ydx-xdy)=0$
, де P,Q - функції виміру m, R - виміру n
Рівняння Ріккаті
$y'=A(x)y^2+B(x)y+C(x)$

Короткий довідник з теми «Диференціальні рівняння І порядку»

Тип рівняння	Стандартна форма запису	Особливості	Метод розв’язування
З відокремлюючими змінними	$\varphi_1(x)\varphi_2(y)dx + {}$ $+\phi_1(x)\phi_2(y)dy = 0$	При диференціалах – похідна функції, яка залежить одна від x, інша – від y	$\int \frac{\varphi_1(x)}{\phi_1(x} dx + \int \frac{\phi_2(y)}{\varphi_2(y)} dy = c$
	$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	Права частина – добуток функцій, які залежать одна від x, інша – від y	$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$
Однорідне	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Права частина – однорідна функція нульового порядку	$\frac{y}{x} = u(x)$
	$P(x,y) \cdot dx + {}$ $+ Q(x,y) \cdot dy = 0$	$P(x,y), Q(x,y)$ - однорідні функції однакового порядку	$y = u \cdot x, \quad y' = u'x + u$
В повних диференціалах	$P(x,y) \cdot dx + {}$ $+ Q(x,y) \cdot dy = 0$	$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$	$\int_X^X P(x, y_0)dx + \int_{Y_0}^Y Q(x,y)dy = C$ $\int_X^X P(x,y)dx + \int_{Y_0}^Y Q(x_0,y)dy = C$
Лінійне	$y' + P(x)y = Q(x)$	Першої степіні відносно y та y_x'	$y = u(x) \cdot v(x),$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
	$x' + P(y)x = Q(y)$	Першої степіні відносно x та x_y'	$x = u(y) \cdot v(y),$ $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Бернуллі	$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$	Відрізняється від лінійного правою частиною	Аналогічно лінійним

Розробка лекцій для змістовного модуля I

Лекція 1

<u>Тема:</u> «Диференціальні рівняння, основні визначення»

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Диференціальні рівняння»;

– ознайомлення із виникненням та застосуванням диференціальних рівнянь;

– поглиблення, розширення знань, отриманих раніше при вивченні розділів диференціального і інтегрального числення з курсу математичного аналізу, алгебри та геометрії.

– розвиток наукового мислення та пам’яті;

– виховання культури математичного запису і мовлення.

При вивченні теми студенти повинні:

<u>знати</u>: означення диференціального рівняння та основні поняття, які його стосуються (види, порядок, степінь, розв'язок);

<u>уміти</u>: визначати диференціальне рівняння з переліку рівнянь, складати рівняння за умовою задачі, що приводить до диференціального рівняння;

<u>здатні:</u> знаходити невизначений інтеграл (з курсу математичного аналізу).

Основні поняття: диференціальне рівняння (ДР), звичайне ДР, ДР у частинних похідних, порядок ДР, степінь, розв'язок.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. Поняття диференціального рівняння і його розв'язку.
2. Приклади задач, які приводять до диференціального рівняння.

Список літератури

1. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений.
3. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.

Текст лекції

1.Поняття диференціального рівняння і його розв'язку.

В диференціальному численні за заданою функцією одного чи більшого числа змінних вивчались властивості цієї функції (монотонність, випуклість і ін.). Однак більшість задач практичного застосування мають характер обернених: треба знайти функцію, яка б мала наперед задані властивості.

При вивченні фізичних явищ часто не вдається безпосередньо знайти закон, який зв’язує розглядувані величини, але в той же час порівняно легко встановлюється залежність між тими ж величинами і їх похідними або диференціалами.

І ті і другі задачі приводять до рівнянь, що містять невідомі функції під знаками похідних і диференціалів.

Означення 1. Рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються диференціальними рівняннями. Наприклад, диференціальними рівняннями є такі:

$$1)\ y' = x^2 + 2xy; \qquad 2)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 2y + x = 0,$$

$$3)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \qquad 4)\ x^2dy + ydx = 0.$$

Означення 2. *Якщо в диференціальному рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної, то таке диференціальне рівняння називається звичайним.*

У загальному випадку його можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

де x - незалежна змінна, y - функція від x, яка підлягає визначенню, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ - її похідні.

Означення 3. Якщо невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією двох і більшого числа незалежних змінних, то таке диференціальне рівняння називається рівнянням у частинних похідних.

Рівняння 1), 2) і 4) є звичайними диференціальними рівняннями, а 3) – рівняння в частинних похідних.

Означення 4. Порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у нього.

Рівняння 1) і 4) є рівняннями першого порядку. Рівняння (1) – звичайне диференціальне рівняння $n-$ого порядку.

Означення 5. Якщо ліва частина рівняння (1) є многочленом відносно похідної максимального порядку від невідомої функції, то степінь цього многочлена називається степенем даного диференціального рівняння. Наприклад, рівняння

$$(y'')^5 + 2x(y')^7 - y^{10} + x = 0$$

- п'ятого степеня другого порядку, а рівняння

$$(y''')^2 + (y')^5 - 2x = 0$$

- другого степеня третього порядку.

У диференціальному рівнянню (1) $n-$ого порядку незалежна змінна x, шукана функція $y(x)$ і її похідні до $n-1-$ ого порядку включно в явному вигляді можуть бути, але можуть окремо або всі разом бути відсутніми. Наявність же в явному вигляді похідної $n-$ого порядку необхідна, щоб це рівняння було диференціальним. Наприклад, $y''' = 0$ є диференціальним рівнянням третього порядку, хоча в ньому в явному вигляді й відсутні x, y, y' і y''.

Означення 6. Розв’язком диференціального рівняння (1) називається n разів диференційована функція $y=\varphi(x)$ в інтервалі $(a;b)$, яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його в інтервалі $(a;b)$ в тотожність

$$F\ (x,\varphi(x),...,\varphi^{(k)}(x))\equiv 0\,.$$

Наприклад, функція $\varphi(x)=xe^{-x}$ є розв’язком рівняння

$$y''+2y'+y=0,$$

оскільки для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ вона перетворює це рівняння в тотожність.

Справді, знайшовши похідні $\varphi'=e^{-x}-xe^{-x}$, $\varphi''=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}$ і підставивши функцію φ її похідні в рівняння, дістанемо тотожність

$$\varphi''+2\varphi'+\varphi=e^{-x}(-1-(1-x)+2(1-x)+x)=e^{-x}\cdot 0\equiv 0,$$

правильну для $-\infty\prec x\prec+\infty$.

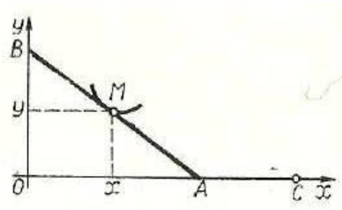
Розв’язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки. Ці розв'язки найчастіше приводять до обчислення невизначених інтегралів. Тому операція знаходження розв’язків диференціального рівняння називається інтегруванням цього рівняння. Задача інтегрування диференціального рівняння вважається розв’язаною, якщо цю задачу звести до більш простої і вже вивченої в курсі інтегрального числення задачі обчислення невизначених інтегралів.

2. ***Приклади задач, які приводять до диференціального рівняння.***

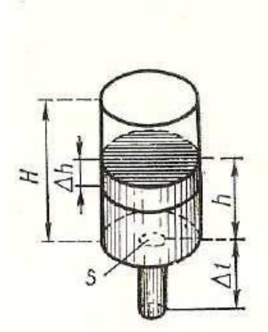
Задача 1. Знайти криві, які мають ту властивість, що відрізок дотичної (проведеної в будь-якій її точці), який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

Розв’язання. Нехай $M(x,y)$ - довільна точка шуканої кривої $y=f(x)$ (мал. 1). Тоді $AM=MB,\ \dfrac{OB}{OA}=tg\,\widehat{BAO}$. Оскільки $y'(x)=tgBAC=-tgBAO$, $OB=2y\,(x),\quad OA=2x,$ то маємо співвідношення

$$\frac{y}{x}=-y', \tag{2}$$



Мал. 1.



Мал. 2.

яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ і її похідну $y'(x)$, тобто дістали звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Переписавши (2) у вигляді

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x},$$

а це останнє – у вигляді

$$(\ln|y|)' = -(\ln|x|)',$$

маємо рівність

$$\ln|y| = -\ln|x| + C.$$

Звідси

$$|xy| = e^C,$$

і, отже,

$$xy = \bar{C}(\bar{C} \neq 0), \qquad (3)$$

де $\bar{C} = \pm e^C$. Шукані криві (3) є сім'єю гіпербол, для яких осі координат виконають роль асимптот.

<u>Задача 2</u>. Відомо, що швидкість розпаду радію пропорційна наявній його кількості.

Знайти закон, який виражає зміну кількості радію протягом часу, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина кількості радію.

Розв'язання. Нехай x - кількість радію в момент часу t (час у роках). Оскільки швидкість зміни є похідною від x за часом t, то, згідно з умовою задачі,

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx. \qquad (4)$$

Тут задача привела до звичайного диференціального рівняння першого порядку.

Переписавши (4) у вигляді

$$\frac{dx}{x} = kdt,$$

А останнє у вигляді

$$d(\ln x) = d(kt),$$

маємо рівність

$$\ln x = kt + C, \qquad (5)$$

де C - стала.

Нехай у початковий момент $t = 0$ кількість радію дорівнює $x(0) = x_0$. Підставляючи замість t і x в (5) відповідно 0 і x_0, дістанемо $\ln x_0 = C$. Таким чином,

$$\ln \frac{x}{x_0} = kt$$

або $x = x_0 \cdot e^{kt}$.

Коефіцієнт k знаходимо з умови, що $\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}$ при $t = 1600$:

$$\ln \frac{1}{2} = k \cdot 1600.$$

Звідси $k = \frac{-\ln 2}{1600} \approx -0,00043$.

Отже, кількість радію в момент часу $t > 0$ визначається за формулою

$$x = x_0 e^{-0,00043t}.$$

Задача 3. З циліндричної посудини висотою H і радіусом R, повністю заповненою водою, через отвір площі S, що міститься в його дні, витікає вода. За яким законом буде знижуватися рівень води в посудині протягом часу, якщо відомо, що швидкість v витікання рідини з отвору залежить від висоти h (Мал.3) стовпа рідини за формулою

$$v = 0{,}6\sqrt{2gh}\,,$$

де g - прискорення вільного падіння.

Розв'язання. За проміжок часу від t до $t + \Delta t\,(t \succ 0)$ висота рівня води в посудині знизиться з висоти $h(t)$ до $h(t) + \Delta h\,(\Delta h \succ 0)$. За цей час Δt з посудини витікає об'єм води, що дорівнює $-\pi R^2 \Delta h$. Такий же об'єм води витікає з отвору. Він дорівнює $S\Delta l$, де Δl - довжина шляху, пройденого частинкою рідини з моменту t до $t + \Delta t$: $\Delta l = v_{сер}\Delta t$, де $v_{сер} = 0{,}6\sqrt{2g(h + \theta\Delta h)}\ (0 \prec \theta \prec 1)$ - середня швидкість руху рідини за час Δt.

Таким чином,

$-\pi R^2 \Delta h = 0{,}6S\sqrt{2g(h + \theta\Delta h)}\Delta t$,

звідси

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -0{,}6\frac{S\sqrt{2g}}{\pi R^2}\sqrt{h + \theta\Delta h} = -k\sqrt{h + \theta\Delta h}\,;$$

де $k = 0{,}6\dfrac{S}{\pi R^2}\sqrt{2g}$.

Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}\,,$$

яке зв'язує t і $h(t)$.

З (6) маємо

$$\frac{dt}{\sqrt{h}} = -kdt \text{ або } d(2\sqrt{h}) = d(-kt)\,.$$

Звідси $2\sqrt{h} = -kt + C$, де C - довільна стала. Оскільки в момент $t = 0$ рівень $h(0) = H$, то $C = 2\sqrt{H}$. Отже, $2\sqrt{h} = -kt + 2\sqrt{H}$ або $t = \dfrac{2}{k}(\sqrt{H} - \sqrt{h})$. Такий закон витікання рідини з отвору в дна посудини. Взявши $h = 0$, дістанемо

$$t(0) = \frac{2}{k}\sqrt{H}$$

- час, протягом якого з посудини витікає вся рідина.

Лекція 2

Тема: «Диференціальні рівняння першого порядку»

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Диференціальні рівняння першого порядку»;

– ознайомлення із видами диференціальних рівнянь першого порядку та методами їх розв'язування;

– розвиток візуального мислення та пам’яті;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення та види диференціальних рівнянь першого порядку;

уміти: визначати диференціальне рівняння першого порядку з переліку рівнянь, знаходити загальний та частинний інтеграл рівняння з відокремлюючими змінними за допомогою теореми Коші;

здатні: використовувати алгоритм розв'язування рівняння з відокремлюючими змінними.

Основні поняття: диференціальне рівняння першого порядку, загальний та частинний інтеграл, особливий розв'язок, рівняння з відокремлюючими змінними.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. Загальні відомості про диференціальні рівняння першого порядку.

2. Диференціальні рівняння із відокремлюючими змінними.

3. Диференціальні рівняння із змінними, які відокремлюються.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Mathematical Analysis. Differential Equations.

2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Текст лекції

1. Загальні відомості про диференціальні рівняння першого порядку.

Означення 1. Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0.$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно y', то його можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y).$$

Для такого рівняння справедлива наступна теорема, яка називається теоремою існування і одиничності розв'язку диференціального рівняння.

Теорема 1. ***Якщо в рівнянні*** $y' = f(x, y)$ ***функція*** $f(x, y)$ ***і її частинна похідна*** $\frac{\partial f}{\partial y}$ ***по*** y ***неперервні в деякій області D на площині 0xy, яка містить деяку точку*** $(x_0; y_0)$***, то існує єдиний розв'язок цього рівняння***

$$y = \varphi(x),$$

який задовольняє умові $y = y_0$ ***при*** $x = x_0$***.***

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що існує і притім єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку $(x_0; y_0)$.

Означення 2. *Умова, що при* $x = x_0$ *функція* y *повинна дорівнюватися заданому числу* y_0, *називається* ***початковою умовою****, або* ***умовою Коші****. Вона записується у вигляді*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad \text{або} \qquad y(x_0) = y_0.$$

Означення 3. *Задача, у якій потрібно знайти частинний розв'язок рівняння* $y' = f(x, y)$, *який задовольняє початковій умові* $y(x_0) = y_0$, *називається **задачею Коші.***

Означення 4. Загальним розв'язком *диференціального рівняння першого порядку називається функція*

$y = \varphi(x, C)$,

яка залежить від однієї довільної сталої C і задовольняє наступним умовам:

а) вона задовольняє диференціальному рівнянню при будь-якому конкретному значенні сталої C;

б) яка б не була початкова умова $y = y_0$ *при* $x = x_0$, *тобто* $y(x_0) = y_0$, *можна знайти таке значення* $C = C_0$, *що функція* $y = \varphi(x, C_0)$ *задовольняє даній початковій умові. При цьому передбачається, що значення* x_0 *і* y_0 *належать до тієї області зміни змінних x і y, у якій виконуються умови теореми існування й одиничності розв'язку.*

У процесі знаходження загального розв'язку диференціального рівняння ми приходимо до співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

не розв'язаному відносно y. Розв'язавши це співвідношення відносно y, одержуємо загальний розв'язок. Однак не завжди удається виразити y в елементарних функціях; у таких випадках загальний розв'язок залишається в неявному вигляді.

Означення 5. *Рівність вигляду* $\Phi(x, y, C) = 0$, *яка неявно задає загальний розв'язок, називається **загальним інтегралом** диференціального рівняння.*

Означення 6. Частинним розв'язком *називається будь-яка функція* $y = \varphi(x, C_0)$, *яка утворюється з загального розв'язку* $y = \varphi(x, C)$, *якщо в останньому довільної сталої C придати визначене значення* $C = C_0$.

Співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називається в цьому випадку ***частинним інтегралом*** рівняння.

З геометричної точки зору загальний інтеграл являє собою сімейство кривих на координатній площині, яке залежить від однієї довільної сталої *C*. Ці криві називаються *інтегральними кривими* даного диференціального рівняння. Частинному інтегралу відповідає одна крива цього сімейства, яка проходить через деяку задану точку площини.

Розв'язати *або* ***проінтегрувати*** *диференціальне рівняння - значить:*

а) знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо початкові умови не задані) або

б) знайти той частинний розв'язок рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам (якщо такі є).

Означення 7. Особливим розв'язком *називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова одиничності не виконується, тобто в будь-якому околі кожної точки* $(x; y)$ *особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.*

Особливі розв'язки не утворюються з загального розв'язку диференціального рівняння ні при яких значеннях довільної сталої *C* (у тому числі і при $C = \pm\infty$).

2. Диференціальні рівняння із відокремленими зінними

Означення 8. *Диференціальне рівняння типу*

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

називають ***рівнянням із відокремленими змінними****, тому що в цьому рівнянні змінні відокремлені, тобто при* dx *знаходиться тільки функція від x, а при* dy *- тільки функція від y.*

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, одержимо співвідношення, яке зв'язує розв'язок *y*, незалежну змінну *x* і довільну сталу *C*, тобто одержимо загальний інтеграл рівняння

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

<u>Приклад</u>. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$\cos y\,dy = 2x\,dx.$$

Розв'язок. ► $\int \cos y\,dy = \int 2x\,dx$, $\quad \sin y = x^2 + C$,

$y = \arcsin(x^2 + C)$. ◄

<u>3. Диференціальні рівняння із змінними, які відокремлюються.</u>

Означення 9. *Диференціальні рівняння, у яких змінні можна відокремити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на той самий вираз, називаються* ***диференціальними рівняннями із змінними, які відокремлюються.***

Це рівняння виду

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0.$$

Воно може бути приведене до рівняння із відокремленими змінними шляхом ділення обох його частин на вираз $N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}\,dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}\,dy = 0,$$

або

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy = 0.$$

<u>Приклад</u>. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0.$$

Розв'язок. ►Відокремлюючи змінні, знаходимо:

$$\frac{(1+x)}{x}\,dx + \frac{(1-y)}{y}\,dy = 0,$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C$$

або

$$\ln|xy| + x - y = C.$$

Останнє співвідношення є загальний інтеграл даного рівняння. ◄

<u>Приклад</u>. *Розв'язати задачу Коші*

$$x^2 y\,dx + y^3 x\,dy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Розв'язок. ► Відокремлюючи змінні, знаходимо:

$$x\,dx + y^2\,dy = 0.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\int x\,dx + \int y^2\,dy = \int 0\,dC,$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C.$$

Одержали загальний інтеграл вихідного рівняння.

Розв'язавши останнє рівняння відносно *y*, знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$\frac{y^3}{3} = C - \frac{x^2}{2}, \qquad y^3 = 3\left(C - \frac{x^2}{2}\right), \qquad y = \sqrt[3]{3\left(C - \frac{x^2}{2}\right)}.$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

$$1 = \sqrt[3]{3(C-0)}, \quad 1 = \sqrt[3]{3C}, \quad 1 = 3C, \quad C = \frac{1}{3}.$$

$y = \sqrt[3]{3\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{2}\right)}$ - розв'язок задачі Коші. ◄

Лекція 3

Тема: «Однорідні рівняння першого порядку»

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Однорідні диференціальні рівняння першого порядку»;

– ознайомлення із методами розв'язування однорідних рівнянь першого порядку;

– поглиблення, розширення знань, отриманих раніше при вивченні диференціальних рівнянь, для розв'язування однорідних рівнянь;

– розвиток наукового мислення та пам’яті;
– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення та види однорідних рівнянь першого порядку, означення однорідної функції;

уміти: визначати однорідне рівняння першого порядку з переліку рівнянь, знаходити загальний та частинний розв'язок однорідного рівняння;

здатні: використовувати алгоритм розв'язування однорідних рівнянь першого порядку.

Основні поняття: однорідна функція, однорідне рівняння першого порядку.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. *Однорідна функція.*
2. *Однорідні рівняння першого порядку.*

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
4. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Текст лекції

1. *Однорідна функція.*

Означення 1. *Функція $f(x,y)$ називається* ***однорідною функцією*** *n-го порядку щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність*

$$f(t\,x, t\,y) = t^{n} f(x,y).$$

Приклад. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ - однорідна функція першого порядку, тому що

$$f(t\,x, t\,y) = \sqrt[3]{(t\,x)^3 + (t\,y)^3} = t\sqrt[3]{x^3 + y^3} = t\ f(x,y).$$

Приклад. $f(x,y) = xy - y^2$ - однорідна функція другого порядку, тому що

$$f(t\,x, t\,y) = (t\,x)(t\,y) - (t\,y)^2 = t^2 (xy - y^2) = t^2\ f(x,y).$$

Приклад. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ - однорідна функція нульового порядку, тому що

$$f(t\,x, t\,y) = \frac{t\,x}{t\,y} = t^0 \frac{x}{y} = t^0\ f(x,y).$$

2. *Однорідні рівняння першого порядку.*

Означення 2. *Рівняння виду* $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ *називається* ***однорідним,*** *якщо функції при dx і dy є однорідними однакового порядку.*

Однорідне рівняння зводиться до стандартного виду $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ і за допомогою заміни змінних $\dfrac{y}{x} = z$, де $z = z(x)$, $y' = z'x + z$, або $dy = xdz + zdx$ зводиться до рівняння із змінними, які відокремлюються.

Приклад. *Розв'язати задачу Коші*

$$(x + 2y) - xy' = 0, \qquad (1)$$

$$y(1) = 2. \qquad (2)$$

Розв'язок. ► $(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$

$M(x,y) = x + 2y \qquad M(t\,x, t\,y) = t\,x + 2\,t\,y = t\,(x+2y) = t\,M(x,y)$

$N(x,y) = -x \qquad N(t\,x, t\,y) = -t\,x = t\,(-x) = t\,N(x,y)$

$M(x,y),\ \ N(x,y)$ - однорідні функції першого порядку

Перетворюючи рівняння (1) одержимо рівняння стандартного виду

$$y' = \left(1 + 2\frac{y}{x}\right) \qquad (3)$$

Вводимо нову змінну

$\frac{y}{x} = z$, (4) $y = zx$, $y' = z'x + z$ (5) підставляючи (4) і (5) у (3) одержимо рівняння з змінними які розподіляються

$1 + 2z - z'x - z = 0, \qquad 1 + z - z'x = 0, \qquad 1 + z - x\frac{dz}{dx} = 0,$

$(1+z)\,dx - x\,dz = 0 \,\Big|\, \frac{1}{(1+z)x}$

$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1+z} = 0, \qquad \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dz}{1+z} = C,$

$\ln|x| - \ln|1+z| = \ln|C_1|,$

$\frac{x}{1+z} = C_1, \qquad 1 + z = \frac{x}{C_1}, \qquad z = \frac{x}{C_1} - 1, \qquad \frac{y}{x} = \frac{x}{C_1} - 1,$

$y = \frac{x^2}{C_1} - x$ - загальний розв'язок.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові $y(1) = 2$:

$2 = \frac{1}{C_1} - 1, \qquad C_1 = 3.$

$y = \frac{x^2}{3} - x$ - розв'язок задачі Коші.◄

Лекція 4

Тема: «Лінійні диференціальні рівняння першого порядку»

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Лінійні диференціальні рівняння першого порядку»;

– ознайомлення із видами лінійних рівнянь першого порядку та методами їх розв'язування;

– поглиблення, розширення знань, отриманих раніше при вивченні диференціальних рівнянь, для розв'язування лінійних рівнянь;

– розвиток візуального мислення та пам'яті;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення та види лінійних рівнянь першого порядку, методи їх розв'язування;

уміти: визначати лінійне рівняння першого порядку з переліку рівнянь, знаходити загальний та частинний розв'язок лінійного рівняння як однорідного, так і неоднорідного;

здатні: використовувати алгоритм розв'язування лінійних рівнянь першого порядку.

Основні поняття: лінійне рівняння першого порядку (лінійне однорідне, лінійне неоднорідне), підстановка та рівняння Бернуллі, метод Лагранжа.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп'ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. Загальні відомості про лінійні рівняння першого порядку.

2. Рівняння Бернуллі.

3. Метод Лагранжа (метод варіації довільної змінної) для розв'язку лінійних рівнянь першого порядку.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Текст лекції

1. Загальні відомості про лінійні рівняння першого порядку.

Означення 1. Лінійним рівнянням першого порядку *називається рівняння, що має вигляд*

$$y' + P(x)\,y = Q(x), \qquad (1)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - задані неперервні функції від *x* (або сталі).

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається *лінійним однорідним.*

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називається *лінійним неоднорідним*.

Для розв'язання рівняння (1) застосовуємо метод Бернуллі, який полягає у тому, що розв’язок рівняння (1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій від *x,* покладаючи, що одна з функцій задовольняє однорідному рівнянню даного неоднорідного рівняння:

$$y = u(x)\,v(x), \qquad (2)$$

Знаходимо похідну

$$y' = u'\,v + u\,v'. \qquad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), маємо:

$$u'\,v + u\,v' + P(x)\,u\,v = Q(x),$$

або

$$u\,(v' + P(x)\,v) + u'\,v = Q(x). \qquad (4)$$

Приймаючи до уваги попереднє припущення одержимо:

$$v' + P(x)\,v = 0\,, \tag{5}$$

Як правило однорідне лінійне рівняння є рівняння з розподіляючими змінними, отже:

$$\frac{dv}{dx} + P(x)\,v = 0\,, \qquad \frac{dv}{v} + P(x)\,dx = 0\,, \qquad \ln|v| + \int P(x)\,dx = \ln|C|\,,$$

$$\ln|v| - \ln|C| = -\int P(x)\,dx\,, \qquad \ln\left|\frac{v}{C}\right| = -\int P(x)\,dx\,,$$

$$\frac{v}{C} = e^{-\int P(x)\,dx}\,, \qquad v = C\,e^{-\int P(x)\,dx}\,.$$

Так як нам досить якого-небудь відмінного від нуля розв'язку рівняння (5), то за функцію $v(x)$ візьмемо

$$v = e^{-\int P(x)\,dx}\,. \tag{6}$$

Підставляючи знайдене значення $v(x)$ (6) в (4), одержимо:

$$u'\,v(x) = Q(x)\,, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}\,, \qquad du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx\,,$$

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C\,. \tag{7}$$

Підставляючи $u(x)$ й $v(x)$ у (2), одержуємо розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C\right],$$

Або

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx + C\right]. \tag{8}$$

Розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y' + P(x)\,y = 0\,, \qquad \frac{y'}{y} = -P(x)\,, \qquad \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx\,,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C|\,, \qquad y = Ce^{-\int P(x)\,dx}\,.$$

Приклад. *Розв'язати рівняння*

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^{3}. \qquad (1^*)$$

Розв'язок. ► Скориставшись підстановками

$$y = u\,v \qquad (2^*)$$

і $y' = u'\,v + u\,v'$,

маємо:

$$u'\,v + u\,v' - \frac{2}{x+1} u\,v = (x+1)^{3},$$

$$u\left(v' - \frac{2}{x+1}\ v\right) + u'\,v = (x+1)^{3}. \qquad (3^*)$$

Згідно методу виберемо функцію v такою, щоб $v' - \dfrac{2}{x+1}\ v = 0$, тоді

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0, \qquad \frac{dv}{v} - \frac{2dx}{x+1} = 0,$$

$$v = (x+1)^{2}. \qquad (4^*)$$

Підставляючи (3*) в (2*) одержимо:

$$u'(x+1)^{2} = (x+1)^{3}, \qquad u' = x+1, \qquad \frac{du}{dx} = x+1, \qquad du = (x+1)\,dx,$$

$$u = \frac{(x+1)^{2}}{2} + C. \qquad (5^*)$$

Підставляючи (4*) і (5*) н(2*) одержуємо загальний розв'язок рівняння(1*):

$$y = \frac{(x+1)^{4}}{2} + C(x+1)^{2}. ◄$$

2. Рівняння Бернуллі

Оачення 2. *Рівнянням Бернуллі називається* ***рівняня виду***

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{n} \text{ або } x' + P(y)\cdot x = Q(y)\cdot x^{n}. \qquad (1)$$

Рівняння Бернуллі відрізняється від лінійного правою частиною і зводиться до послідовності рівнянь з відокремлюючими змінними за тією ж схемою, що і лінійне, з підстановкою

$$\begin{aligned} y &= u(x)\cdot v(x), \\ y' &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x); \end{aligned} \qquad (2)$$

або

$$\begin{aligned} x &= u(y)\cdot v(y), \\ x' &= u'(y)\cdot v(y) + u(y)\cdot v'(y). \end{aligned} \qquad (3)$$

<u>Приклад 1.</u> *Найти загальний розв'язок диференціального рівняння*

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0\,. \qquad (1^*)$$

►1^0. Визначаємо тип диференціального рівняння (таблиця 1):

$$y' - \frac{4}{x}\cdot y = x\cdot y^{1/2}$$

Отримали рівняння Бернуллі, де $P(x) = -\frac{4}{x}$, $Q(x) = x$, $n = \frac{1}{2}$.

2^0. Застосуємо підстановки:

$$y = u(x)\cdot v(x), \qquad (2^*)$$

і

$$y' = u'(x)\cdot \mathrm{v}(x) + u(x)\cdot \mathrm{v}'(x)$$

Одержимо

$$u'\cdot v + u\cdot v' - \frac{4}{x}u\cdot v = x\sqrt{uv}.,$$

або

$$\left(u' - \frac{4}{x}\cdot u\right)\cdot v + u\cdot v' = x\sqrt{uv}.$$

Виберемо функцію $u(x)$ так, щоб вона задовольняла однорідному рівнянню даного неоднорідного лінійного рівняння отже маємо:

$$\left[\begin{aligned} & u - \frac{4}{x}\cdot u = 0, \\ & u\cdot v' = x\sqrt{uv}. \end{aligned}\right.$$

3^0. Знайдемо функції $u(x)$ та $v(x)$. Кожне з цих рівнянь є рівнянням з відокремлюючими змінними:

$$u' - \frac{4}{x}\cdot u = 0, \frac{du}{dx} = \frac{4u}{x}, \int\frac{du}{u} = 4\int\frac{dx}{x}, \ln|u| = \ln x^4, u = x^4;$$

$$u\cdot v'=x\sqrt{uv},\quad x^4\cdot v'=x\sqrt{x^4\cdot v},\qquad \int\frac{dv}{\sqrt{v}}=\int\frac{dx}{x},\quad 2\sqrt{v}=\ln|x|+C,\quad v=\left(\ln\sqrt{x}+C\right)^2.$$

4^0. Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\mathrm{y}=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v},\qquad y=x^4\left(\ln\sqrt{x}+c\right)^2. \blacktriangleleft$$

3. Метод Лагранжа (метод варіації довільної змінної) для розв'язку лінійних рівнянь першого порядку

Суть методу полягає в тому, що спочатку знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'+P(x)\,y=0$ відповідного неоднорідного рівняння

$$y'+P(x)\,y=Q(x) \tag{1}$$

Розв'язком якого є функція

$$y=Ce^{-\int P(x)\,dx}. \tag{2}$$

Вважаючи в цьому розв'язку сталу C функцією від x, шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y=C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}. \tag{3}$$

Розв'язок (3) повинен задовольняти рівнянню (1). Диференціюючи і підставляючи (3) в (1), маємо:

$$y'=C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}-C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}P(x),$$

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}-C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}P(x)+C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}P(x)=Q(x),$$

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}=Q(x),\qquad C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)\,dx},$$

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx+C,$$

Отже, загальний розв’язок рівняння (1) має вид:

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx+C\right]. \tag{4}$$

Він співпадає з розв'язком (8).

Приклад. *Розв'язати рівняння методом Лагранжа*

$$y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3. \qquad (1)$$

Розв'язок. ► *Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння*

$$y' - \frac{2}{x+1}y = 0, \quad \frac{dy}{y} - \frac{2dx}{x+1} = 0, \quad \ln|y| - 2\ln|x+1| = \ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{y}{(x+1)^2}\right| = \ln|C|, \quad y = C(x+1)^2.$$

Вважаючи в цьому розв'язку сталу *C* функцією від *x*, шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y = C(x)(x+1)^2, \tag{2}$$

$$y' = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) \tag{3}$$

Підставимо у рівняння (1) (2) і (3) отримаємо диференціальне рівняння відносно функції $C(x)$:

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2 = (x+1)^3,$$

$$C'(x) = x+1, \tag{4}$$

Отже

$$C(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + C. \tag{5}$$

Підставляючи (5) у (2) одержимо

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

Який є зальним розв’язком рівняння (1).

Тому що $n = 3 > 0$, то $y = 0$ - теж є розв'язок рівняння (1). ◄

Лекція 5

Тема: «Диференціальні рівняння в повних диференціалах»

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Диференціальні рівняння в повних диференціалах»;

– ознайомлення із видами рівнянь в повних диференціалах та методами їх розв'язування;

– поглиблення, розширення знань, отриманих раніше при вивченні диференціальних рівнянь, для розв'язування рівнянь в повних диференціалах;

– розвиток наукового мислення та пам’яті;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення інтегруючого множника, означення та види рівнянь в повних диференціалах, методи їх розв'язування;

уміти: визначати рівняння в повних диференціалах з переліку рівнянь, знаходити інтегруючий множник для рівняння, яке зводиться до рівняння в повних диференціалах;

здатні: використовувати алгоритм розв'язування рівнянь в повних диференціалах.

Основні поняття: рівняння в повних диференціалах, інтегруючий множник.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. Загальні відомості про рівняння в повних диференціалах.

2. Інтегруючий множник

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
5. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Текст лекції

<u>1. Загальні відомості про рівняння в повних диференціалах.</u>

Означення 1. *Рівняння* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *називається рівнянням в повних диференціалах , якщо його ліва частина – повний диференціал деякої функції* $u(x,y)$, *тобто*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y).$$

Необхідною і достатньою умовою повного диференціала є рівність частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд $u(x,y)=c$,

Де функція $u(x,y)$ може бути знайдена за однією із формул:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,\eta)d\eta;$$

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}Q(x,\eta)d\eta.$$

<u>Приклад 1.</u> З'ясувати, чи дане рівняння є рівняння в повних диференціалах чи ні *?*

а) $(x+\sin y)dx+(x\cos y+y^2)dy=0.$

1^0. Диференціальне рівняння записано в симетричній формі, де

$$P(x,y)=x+\sin y,$$

$$Q(x,y)=x\cos y+y^2.$$

2^0. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(x+\sin y)}{\partial y}=\cos y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\left(x\cos y+y^2\right)}{\partial x}=\cos y.$$

3^0. Порівняємо частинні похідні. Так як $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$, отже рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

б) $(2xy-5y^2)dx=(x^2-10xy+6y)dy.$

1^0. Диференціальне рівняння записано в симетричній формі, де

$$P(x,y)=2xy-5y^2,$$

$$Q(x,y)=x^2-10xy+6y.$$

2^0. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\left(2xy-5y^2\right)}{\partial y}=2x-10y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^2-10xy+6y\right)}{\partial x}=2x-10y.$$

3^0. Порівняємо частинні похідні. Так як $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$, то рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

<u>Приклад 2.</u> *Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння*

$$y'=\frac{e^y}{2y-xe^y}.$$

1^0. Визначаємо тип рівняння (таблиця 1):

Запишемо рівняння в симетричній формі

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2y - xe^y},$$

$$\left(2y - xe^y\right)dy = e^y dx,$$

$$e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0,$$

тоді

$$P(x, y) = e^y,$$

$$Q(x, y) = xe^y - 2y.$$

1.2. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^y\right)}{\partial y} = e^y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(xe^y - 2y\right)}{\partial x} = e^y.$$

1.3. Порівняємо частинні похідні. Так як $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y$, то рівняння є рівнянням в повних диференціалах.

2^0. Запишемо формулу загального інтеграла:

$$u(x, y) = C.$$

3^0. Виберемо формулу для відшукання функції $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

4^0. Знайдемо функцію $u(x, y)$:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} e^{y_0} dx + \int_{y_0}^{y} \left(xe^y - 2y\right)dy = e^{y_0} x \Big|_{x_0}^{x} + xe^y \Big|_{y_0}^{y} - y^2 \Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= e^{y_0}(x - x_0) + x\left(e^y - e^{y_0}\right) = xe^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2.$$

5^0. Запишемо загальний інтеграл рівняння:

$$xe^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2 = C_1,$$

$$xe^y - y^2 = \underbrace{C_1 + x_0 e^{y_0} - y_0^2}_{C},$$

$$xe^y - y^2 = C.$$

__Приклад 3.__ *Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння*

$$\left(\frac{sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$$

Відповідь: $\frac{sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C.$

__Приклад 4.__ Серяд рівнянь вказати ті, які є одночасно однорідним і в повних диференціалах:

а) $(2x-y)dx+(2y-x)dy=0;$

б) $\left(2x^3-xy^2\right)dx+\left(2y^3-x^2y\right)dy=0;$

в) $\left(y\sin\frac{y}{x}-x\right)dx+x\sin\frac{y}{x}dy=0.$

__2. Інтегруючий множник__

Нехай функції $P, Q, P_Y^{'}, O_X^{'}$ неперервні в області D у прямокутнику $\{(x,y): a<x<b, c<y<d\}$. Якщо для рівняння

$$P(x,y)dx+Qx,y)dy=0 \qquad (1)$$

умова $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ не виконується в області D, то це рівняння не буде рівнянням у повних диференціалах у цій області.

В цьому разі виникає питання, чи не можна підібрати функцію $\mu(x,y)$ так, щоб після множення на неї рівняння (1) дістали рівняння

$$\mu(x,y)\,P(x,y)dx+\mu(x,y)\,Q(x,y)dy=0 \qquad (1^*)$$

в повних диференціалах. Така *функція називається* ***інтегруючим множником диференціального рівняння (1).***

Щоб функція $\mu(x,y)$, неперервна в однозв'язній області D разом зі своїми частинними похідними $\mu_x^{'}$ і $\mu_y^{'}$, була інтегруючим множником рівняння (1), необхідно і достатньо, щоб для всіх точок $(x:y)\in D$ виконувалась рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)P(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)Q(x,y)\right),$$

тобто

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial y}P=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}. \qquad (2^*)$$

Рівність (2*) містить невідому функцію $\mu(x,y)$ під знаком частинних похідних, тобто (2*) є диференціальне рівняння в частинних похідних. Його розв'язання є задачею складнішою, ніж розв'язання рівняння (1). Однак задача по знаходженню інтегруючого множника значно спрощується, коли відомо, що він залежить від однієї незалежної змінної x або y.

Припустимо, що рівняння (1) має інтегруючий множник, залежний тільки від $x: \mu=\mu(x)$. В цьому разі рівняння (2*) набере вигляду

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q(x,y)\frac{d\mu}{dx},$$

або

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q(x,y)\frac{d\mu}{dx},$$

звідки

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}dx. \qquad (3^*)$$

Оскільки μ є функцією однієї незалежної змінної x, то вираз

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)} \qquad (4^*)$$

не повинен залежати від y. Позначивши його через $\varphi(x)$ і припускаючи, що $\varphi(x)$ - неперервна функція в інтервалі (a,b), з (3*) дістанемо

$$\ln|\mu|=\int\varphi(x)dx$$

і, таким чином,

$$\mu=e^{\int\varphi(x)dx}$$

де

$$\varphi(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}. \qquad (5)$$

Покажемо, що коли вираз (4*) справді не залежить від y і є неперервною функцією від x на інтервалі (a,b), то функція μ, задана рівністю (5*), є інтегруючим множником рівняння (1).

Справді, для цього достатньо переконатись у справедливості рівності

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)P(x,y)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)Q(x,y)\right) \qquad (6^*)$$

для всіх точок $(x;y)\in D$. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\int\varphi(x)dx}\cdot P\right)=e^{\int\varphi(x)dx}\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int\varphi(x)dx}\cdot Q\right)=e^{\int\varphi(x)dx}\cdot\varphi(x)Q+e^{\int\varphi(x)dx}\frac{\partial Q}{\partial x}=$$

$$=e^{\int\varphi(x)dx}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+e^{\int\varphi(x)dx}\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{\int\varphi(x)dx}\frac{\partial P}{\partial y},$$

тобто рівність (6*) дійсно виконується в області D.

В аналогічній спосіб можна показати, що коли вираз

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}}{P(x,y)}$$

не залежить від x і є неперервною в інтервалі $(c;d)$, то рівняння (1*) має інтегруючий множник, незалежний від x, який знаходиться за формулою

$$\mu(y)=e^{\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{dy}{P(x,y)}}.$$

Розглянемо питання про еквівалентність рівнянь (1) і (1*). Якщо $\mu(x,y)$ є інтегруючий множник рівняння (1*), то рівняння

$$\mu(y)=\left(P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right)=0 \qquad (7^*)$$

є рівнянням в повних диференціалах, тобто існує функція $F(x,y)$, повний диференціал якої дорівнює лівій частині цього рівняння:

$$dF=\mu(x,y)(P(x,y)dx+Q(x,y)dy). \qquad (8^*)$$

Загальний інтеграл рівняння (8*) має вигляд

$$F(x,y)=C.$$

З (8) дістанемо

$$Pdx + Qdy = \frac{1}{\mu} dF \qquad (9^*)$$

і, отже, ліва частина (9) може перетворитись у нуль не тільки при $dF \equiv 0$, але й при

$$\frac{1}{\mu} = 0. \qquad (10^*)$$

Якщо рівняння (10*) задає y як деяку функцію від x або x як деяку функцію від y, то вона є розв'язком рівняння

$$Pdx + Qdy = 0 \qquad (11^*)$$

що не міститься в загальному інтегралі $F(x, y) = C$ рівняння (7).

Крім того, якщо рівняння

$$\mu(x, y) = 0 \qquad (12^*)$$

задає деяку функцію $y = f(x)$ або $x = \varphi(y)$, то з (7*), випливає, що ця функція ввійде в загальний інтеграл рівняння (5*), однак може виявитись побічним розв'язком рівняння (11*).

Таким чином, щоб дістати загальний інтеграл рівняння (11*), треба взяти загальний інтеграл рівняння (7*) і з нього вилучити ті розв'язки рівняння (12*), які не є розв'язками рівняння (11*), і додати ті розв'язки рівняння (10*), які не є розв'язками рівняння (7*).

Приклад 1. *Розв'язати рівняння*

$$\left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2ydy = 0 \qquad (13^*)$$

Розв'язання. ►Тут $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x, \quad Q(x, y) = 2y, \quad P_y' = 2y, \quad Q_x' = 0.$ Функції $P(x, y), \; Q(x, y), \; P_y'$ і Q_x' неперервні в усій площині xOy, однак умова $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ не виконана і, отже, рівняння (13) не є рівнянням у повних диференціалах. Вираз (4) $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x, y)} = \dfrac{2y - 0}{2y} = 1$ не залежить від y і являє собою неперервну функцію від $x \in (-\infty; +\infty)$. Тому інтегруючий множник визначається за формулою (5)

$$\mu = e^{\int \varphi(x)dx} = e^{\int dx} = e^x .$$

Помноживши на цей множник праву і ліву частини рівняння (13), дістанемо рівняння в повних диференціалах

$e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x 2ydy = 0$

Функцію $F(x, y)$, повний диференціал якої дорівнює лівій частині останнього рівняння, знаходимо з рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^x 2y.$$

З першого рівняння маємо

$F(x, y) = \int e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + C(y) = x^2 e^x + y^2 e^x + C(y).$

Звідси і з другого рівняння знаходимо

$$2ye^x + C'(y) = 2e^x y, \;\; C'(y) = 0, \quad C = const.$$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (13) має вигляд

$$(x^2 + y^2)e^x = C. \; \blacktriangleleft$$

Опорні конспекти лекцій змістовного модуля I

Лекція 1. Диференціальні рівняння, основні визначення.

Диференціальні рівняння

Означення

Рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються диференціальними рівняннями

Види

Звичайне - якщо в рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної.

У частинних похідних - якщо невідома функція, яка входить у рівняння, є функцією двох і більшого числа незалежних змінних.

Порядок

Максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у рівняння

Розв'язок

n разів диференційована функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі $(a;b)$, яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його в тотожність $F\,(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(k)}(x)) \equiv 0$.

Розв’язати ДР

Означає знайти всі його розв'язки

Задачі, що приводять до ДР

1. Знайти криві, що мають ту властивість, що відрізок дотичної (проведеної в будь-якій точці), який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.
2. Відомо, що швидкість розпаду радію пропорційна наявній кількості його. Знайти закон, який виражає зміну кількості радію протягом часу, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина кількості радію.
3. З хмари впала капля. Через 10 с за першою краплею впала друга. Як змінюватиметься з часом відстань між краплями.

Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальні рівняння першого порядку

Означення

Це диференціальне рівняння першого порядку, яке має вигляд $F(x, y, y') = 0$.

Т. Існування і єдинність розвязку

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y неперервні в деякій області D на площині $0xy$, яка містить деяку точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

Розв'язок

Загальний розв'язок – функція $y = \varphi(x, C)$, яка задовольняє диференціальне рівняння в області визначення всіх незалежних змінних

Частинний розв'язок – розв'язок, який отриманий із загального при певному значенні постійних

Особливий розв'язок - розв'язок, у всіх точках якого умова одиничності не виконується, тобто в будь-якому околі кожної точки $(x; y)$ особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

Види

Рівняння із відокремлюючими змінними - це рівняння типу

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

Називають так, тому що в цьому рівнянні змінні відокремлені, тобто при dx знаходиться тільки функція від x, а при dy - тільки функція від y.

Диференціальні рівняння із змінними, які відокремлюються - це рівняння, у яких змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на той самий вираз, тобто це рівняння виду:

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0.$$

Лекція 3. Однорідні рівняння першого порядку.

ОДНОРІДНІ

ФУНКЦІЇ

Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією n-го порядку* щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність

$$f(t\,x,t\,y)=t^{\,n} f(x,y)$$

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3};$$

$$f(x,y)=xy-y^2;$$

$$f(x,y)=\frac{x}{y}.$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Рівняння виду $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ називається *однорідним*, якщо функції при dx і dy є однорідними однакового порядку

$$(x+2y)-xy'=0;$$

$$(x-2y)dy+(y-x)dx=0;$$

$$(2x+y+1)dx=(4x+2y-3)dy$$

Лекція 4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Це рівняння, що має вигляд $y' + P(x)\,y = Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ - задані неперервні функції від x (або сталі).

ОДНОРІДНІ

Це лінійне рівняння, у якого $Q(x) \equiv 0$

НЕОДНОРІДНІ

Це лінійне рівняння, у якого $Q(x) \neq 0$

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

$$x = u(y) \cdot v(y),$$
$$x' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

1. Підстановка Бернуллі:

$$y = u(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

2. Метод Лагранжа:

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

Лекція 5. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

Рівняння виду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

Є

Рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина – повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$

Рівнянням, яке можна звести до рівняння в повних диференціалах за допомогою інтегруючого множника μ

Загальний розв'язок
$u(x,y)=c$

Алгоритм розв'язування

1. Привести дане рівняння до виду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y)$.
2. Перевіряємо чи є дане рівняння рівнянням в повних диференціалах за допомогою рівняння
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$
3. Прирівнюємо частинні похідні до функції P і Q.
4. Інтегруємо одержане рівняння.
5. Диференціюємо u по y і прирівнюємо до Q.
6. Інтегруємо отримане рівняння.
7. Записуємо загальний розв'язок.

Алгоритм розв'язування

1. Припустимо, що рівняння має інтегруючий множник, залежний тільки від $x: \mu=\mu(x)$.
2. Перевіряємо чи виконується для отриманої функції умова
$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}.$$
3. Якщо виконується, то застосовуємо алгоритм зліва пункти 3 – 7.
4. Якщо не виконується, то припускаємо, що рівняння має інтегруючий множник, залежний тільки від $y: \mu=\mu(y)$.
5. Застосовуємо алгоритм зліва пункти 2 – 7.

Розробка практичних занять для змістовного модуля І

Практичне заняття 1

Тема: «Диференціальні рівняння з відокремлюючими змінними»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати загальні диференціальні рівняння з відокремлюючими змінними;

– вироблення вмінь зводити диференціальне рівняння до рівняння з відокремлюючими змінними;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення диференціального рівняння з відокремлюючими змінними, методи їх розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування рівняння з відокремлюючими змінними, зводити рівняння до рівняння з відокремлюючими змінними;

здатні: розв'язувати загальні рівняння з відокремлюючими змінними.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), картки із самостійною роботою, мультимедійний проектор, комп'ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань (термінологічний диктант).

III. Вироблення вмінь та навичок.

IV. Контроль.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
4. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття:

I. *Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.*

II. ***Мета етапу***: *визначення рівня засвоєння теоретичного матеріалу студентами та рівня підготовки до практичного заняття.*

Термінологічний диктант. *Викладач називає терміни, які студенти вивчали на першій та другій лекції, вони записують відповіді. Після закінчення – взаємоперевірка (сусід перевіряє у сусіда), правильні відповіді на проекторі.*

Перший варіант	Другий варіант
1. Яке рівняння називається диференціальним?	1. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням першого порядку?
2. Записати загальний вид диференціального рівняння першого порядку.	2. Записати загальний вид диференціального рівняння.
3. Що називається інтегральною кривою диференціальне рівняння y' =F (x; y)?	3. Що називається розв'язком диференціального рівняння y' =F (x; y)?
4. Що називається загальним розв'язком диференціального рівняння y' =F (x; y)?	4. Як із загального розв'язку одержати частинний розв'язок?

5. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з відокремлюючими змінними?

III. <u>Мета</u> <u>етапу</u>: вироблення вмінь та удосконалення навичок розв’язувати загальні диференціальні рівняння з відокремлюючими змінними.

Розв'язування задач та вправ.

1. *Знайти загальний розв'язок рівняння:* $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язування. ► $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1+x^2}$, або $dy = \dfrac{2xdx}{1+x^2}$. Інтегруючи ліву і праву частини одержимо: $\int dy = \int \dfrac{2xdx}{1+x^2} + C$; $y = \ln\left(1+x^2\right) + C$ - загальний розв'язок рівняння. ◄

2. *Знайти сім’ю розв’язків рівняння* $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$.

Розв'язування. ► Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \qquad (1)$$

Його права частина $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ неперервна при $y \geq 0$, тобто у верхній півплощині, включаючи вісь, Ox (область D'_1). Функція $F = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ неперервна при $y>0$, тобто у верхній півплощині, виключаючи вісь Ox (область D_1). Рівняння (1) має сім'ю розв'язків:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \qquad \frac{dó}{2\sqrt{ó}} = dx, \qquad \sqrt{ó} = x + C, \qquad (2)$$

де C – довільна стала. Формула (2) називається загальним розв'язком рівняння (1). Тоді $y = (x+C)^2$, при чому $x + C > 0$. В півплощині $y > 0$ функція $y = (x+C)^2$ - є розв'язком початкового рівняння. ◄

3. *Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння* (відповідь представити у вигляді $\psi(x,y) = C$)

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$$

Розв'язування. ► $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$

$$y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1, \qquad \frac{dy}{dx}y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=-1, \qquad \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Після інтегрування останнього рівняння одержимо розв'язок даного рівняння. $-\sqrt{1-y^2}=-\arcsin x+C,$ або $C=\arcsin x-\sqrt{1-y^2}$. ◄

4.*Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.* $y'=\dfrac{x+2y}{2x-y}.$

Розв'язування. ► Дане рівняння є однорідне рівняння, так як права частина рівняння є однорідна функція нульового порядку

$$y'=\frac{x+2y}{2x-y}.$$

або приведемо до стандартного виду

$$y'=\frac{1+2\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}},$$

Вводимо заміну $\dfrac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=u+u'x.$

Одержимо наступне рівняння

$u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+2u}{2-u},$ або $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1+u^2}{2-u},$ розподіливши змінні одержимо:

$\dfrac{2-u}{1+u^2}du=\dfrac{dx}{x},$ інтегруючи це рівняння $\displaystyle\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x},$ розв'язок

запишемо у вигляді $2arctgu-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|=\ln|x|+\ln C,$ або виконуючи обернену

підстановку розв'язок прийме вид: $2arctg\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\ln\left|1+\dfrac{y^2}{x^2}\right|=\ln|x|+\ln C.$ ◄

5.*Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння* $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}.$

Розв'язування. ► Дане рівняння $y'=\dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$ можна звести до

однорідного, вводячи нові змінні $\begin{cases} x=x_1+k \\ y=y_1+n \end{cases}$, які приведуть до рівняння виду

$$y_1' = \frac{x_1 + 2y_1 + k + 2n - 3}{4x_1 - y_1 + 4k - n - 3}$$

Накладаючи умови $\begin{cases} k + 2h - 3 = 0 \\ 4k - h - 3 = 0 \end{cases}$, знаходимо $\begin{cases} k = 1 \\ h = 1 \end{cases}$. отже цих значеннях k і h

одержимо однорідне рівняння $y_1' = \frac{x_1 + 2y_1}{4x_1 - y_1}$, яке перетворюємо до

стандартного виду $y_1' = \dfrac{1 + 2\frac{y_1}{x_1}}{4 - \frac{y_1}{x_1}}$. (1)

Вводимо заміну $\frac{y_1}{x_1} = u \Rightarrow y_1 = ux_1 \Rightarrow y_1' = u + u'x_1$. (2)

Підставляючи (2) в (2) одержимо

$$u + u'x_1 = \frac{1 + 2u}{4 - u}, \qquad u'x_1 = \frac{1 - 2u + u^2}{4 - u}, \qquad \frac{du}{dx_1}x_1 = \frac{(1-u)^2}{4 - u},$$

Розподіляючи змінні $\frac{4 - u}{(u-1)^2}du = \frac{dx_1}{x_1}$, і інтегруючи

$$\int\left(\frac{1 - u}{u^2 - 2u + 1} + \frac{3}{(u-1)^2}\right)du = \int\frac{dx_1}{x_1},$$

одержимо $-\frac{1}{2}\ln\left|u^2 - 2u + 1\right| - \frac{3}{u - 1} = \ln|x_1| + C,$ Виконуючи відповідні тотожні

перетворення $-\frac{1}{2}\ln\left|(u-1)^2\right| - \frac{3}{u - 1} = \ln|x_1| + C,$ і переходячи до початкових

змінних одержимо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y_1}{x_1} - 1\right)^2\right| - \frac{x_1}{y_1 - x_1} = \ln|x_1| + C, \; -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(y-x)^2}{(x-1)^2}\right| - \frac{x-1}{y-x} = \ln|x-1| + C. \blacktriangleleft$$

IV. <u>***Мета етапу***</u>: *перевірка базових вмінь та навичок студентів знаходити загальний інтеграл функції (з курсу математичного аналізу*).

Самостійна робота (за варіантами). Перевіряється викладачем, результати оголошуються на наступному занятті.

1. Обчислити невизначені інтеграли: А) $\int e^{-3x}(2 - 9x)dx.$	1. Обчислити невизначені інтеграли: А) $\int(5x + 6)\cos 2xdx.$

Б) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}dx.$	Б) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx.$
2. Знайти площу фігури, яка обмежена графіками функцій. $y = x\sqrt{36-x^2}, \quad y=0,$ $(0 \le x \le 6).$	2. Знайти площу фігури, яка обмежена графіками функцій. $x=\sqrt{e^y-1}, \quad x=0,$ $y=\ln 2.$

Домашнє завдання: за підручником [1] розв'язати на ст. 11 (P.L. 1.1.) № 1 (10-15), № 2 (9-12).

Практичне заняття 2

Тема: «Однорідні рівняння та рівняння, що зводяться до них»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати загальні однорідні диференціальні рівняння та рівняння, що зводяться до них;

– вироблення вмінь зводити диференціальне рівняння до однорідного рівняння;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення диференціального однорідного рівняння, методи його розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування однорідного рівняння та рівняння, що зводиться до нього;

здатні: розв'язувати загальні однорідні рівняння.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), картки із самостійною роботою, мультимедійний проектор, комп'ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань (тестові завдання).

III. Вироблення вмінь та навичок.

IV. Контроль.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A.Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
4. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх, оголошення й аналіз результатів самостійної роботи.

II. Мета етапу: визначення рівня засвоєння теоретичного матеріалу студентами та рівня підготовки до практичного заняття.

Студенти разом з викладачем обговорюють наступну задачу.

Задача 1. Серед даних рівнянь вказати однорідні диференціальні рівняння:

а) $xy' = y(\ln y - \ln x)$; в) $(x^2 + y^2 + xy)dx = x^2dy$;

б) $xy' - y - xctg\,\dfrac{y}{x} = 0$; г) $(x + y)dx + (x + y + 2)dy = 0$.

Розв’язуємо перше рівняння:

а) $xy' = y(ln\,y - ln\,x)$.

1^0. Перетворюємо диференціальне рівняння. Розділимо обидві частини рівняння на x; для виразу в дужках застосовуємо властивість, отримаємо:

$$y' = \frac{y}{x} \cdot ln\frac{y}{x}.$$

2^0. Права частина перетвореного диференціального рівняння

$$f(x,y)=\frac{y}{x}\cdot ln\frac{y}{x}$$

є функцією нульового порядку однорідності так, як

$$f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}\cdot ln\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}\cdot ln\frac{y}{x}=f(x,y),$$

то диференціальне рівняння є однорідним.

б) $xy'-y-xctg\frac{y}{x}=0$.

1^0. Перетворюємо диференціальне рівняння. Розділимо обидві частини рівняння на x; виразимо y', отримаємо:

$$y'=\frac{y}{x}+ctg\frac{y}{x}.$$

2^0. Права частина перетвореного диференціального рівняння

$$f(x,y)=\frac{y}{x}+ctg\frac{y}{x}$$

є функцією нульового порядку однорідності так, як

$$f(tx,ty)=\frac{ty}{tx}+ctg\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}+ctg\frac{y}{x}=f(x,y),$$

то диференціальне рівняння є однорідним.

в) $(x^2+y^2+xy)dx=x^2dy$.

1^0. Перетворюємо диференціальне рівняння. Розділимо обидві частини рівняння на x; виразимо y', отримаємо:

$$y'=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}.$$

2^0. Права частина перетвореного диференціального рівняння

$$f(x,y)=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}$$

є функцією нульового порядку однорідності так, як

$$f(tx,ty)=1+\left(\frac{ty}{tx}\right)^2+\frac{ty}{tx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}=f(x,y),$$

то диференціальне рівняння є однорідним.

г) $(x+y)dx+(x+y+2)dy=0$.

1^0. Перетворюємо диференціальне рівняння. Розділимо обидві частини рівняння на $(x+y+2)dx$; виразимо y', отримаємо:

$$y'=\frac{x+y}{x+y+2},\quad y'=\frac{(x+y):x}{(x+y+2):x},\quad y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}+\frac{2}{x}}$$

2^0. Права частина перетвореного диференціального рівняння

$$f(x,y)=\frac{1+\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}+\frac{2}{x}}$$

не є функцією нульового порядку однорідності так, як

$$f(tx,ty)=\frac{1+\frac{ty}{tx}}{1+\frac{ty}{tx}+\frac{2}{tx}}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}+\frac{2}{tx}}\neq f(x,y),$$

то диференціальне рівняння не є однорідним.

Так отримали відповідь: а), б), в).

Цим самим студенти не лише актуалізують знання, але й вироблять алгоритм зведення рівняння до однорідного.

III. Мета етапу: вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати загальні однорідні диференціальні рівняння та рівняння, що зводяться до них.

Розв'язування задач та вправ.

Задача 1 (розв'язують всі разом): розв'язати рівняння $(x-2y)dy+(y-x)dx=0$

Розв'язування. Перевіряємо чи є дане рівняння однорідним:

$(tx-2ty)dy+(ty-tx)dx=0\Rightarrow(x-2y)dy+(y-x)dx=0;$

Як бачимо, дане рівняння – однорідне.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1-2\frac{y}{x}};\quad \frac{y}{x}=z;\ \text{тоді}\ y=zx;\ y'=z'x+z.\ \ z'x+z=\frac{1-z}{1-2z};$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1-z}{1-2z} - z = \frac{1-z-z+2z^2}{1-2z} = \frac{2z^2-2z+1}{1-2z};$$

$$\frac{2}{2}\frac{\cdot dz(2z-1)}{\cdot(2z^2-2z+1)} = -\frac{dx}{x};$$

$$2z^2-2z+1=t;$$

$$dz(4z-2) = 2(2z-1)dz = dt;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|2z^2-2z+1\right| = \ln\frac{C_1}{x}; \qquad x^2(2z^2-2z+1)=C;$$

$$\ln\left|2z^2-2z+1\right| = \ln\frac{C_1^2}{x^2}; \qquad x^2\left(2\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}+1\right)=C;$$

$2y^2-2xy+x^2=C$ - загальний розв'язок.

Особливих розв’язків не має.

Далі викладач розділяє студентів на дві групи, кожна з яких розв’язує одне рівняння, але розв’язує досить детально, розписуючи кожен крок. Після чого викладач навмання викликає одного студента з підгрупи, який доповідає по розв’язуванню. Оцінюється робота за виступом доповідача та зробленою роботою кожного учасника.

Завдання і розв’язання першої групи	Завдання і розв’язання другої групи
$(2x+y+1)dx=(4x+2y-3)dy;$	$ydx+x(2y+1)dy=0;$
$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3};$	$\frac{dx}{dy}=-\frac{2x^2y+x}{y};$
$2x+y+1=z; \quad z'=2+y';$	$\frac{-2x^2\cdot t^{2\alpha}\cdot y\cdot t^{\beta}+x\cdot t^{\alpha}}{y\cdot t^{\beta}}=t^{\alpha-\beta}\left(\frac{-2x^2y+x}{y}\right);$
$4x+2y-3=2z-5; \quad y'=z'-2;$	$\begin{cases}2\alpha+\beta-\beta=\alpha-\beta, & \alpha=-\beta;\\ \alpha-\beta=\alpha-\beta; & \alpha=1; \quad \beta=-1;\end{cases}$
$z'-2=\frac{z}{2z-5};$	Робимо заміну:
$\frac{dz}{dx}=\frac{z+4z-10}{2z-5}=\frac{5(z-2)}{2z-5};$	$z=xy; \quad z'=x'y+x;$
$\frac{dz(2z-5)}{5(z-2)}=dx;$	$x'=z'-\frac{z}{y}=-2\frac{z^2}{y}+\frac{z}{y}$
$\frac{dz(2z-5)}{z-2}=5dx;$	$\frac{z'y-z}{y}=-\frac{(2z^2+z)}{y};$
$dz(2-\frac{1}{z-2})=5dx;$	$z'y=-2z^2;$
$5x=\int\left(2-\frac{1}{z-2}\right)dz=2z-\ln C\|z-2\|;$	$\frac{dz}{dy}y=-2z^2;$
$-x+2y+2-\ln C\|2x+y-1\|=5x;$	$\frac{dz}{z^2}=-2\frac{dy}{y};$
$e^{2y-x}\cdot e^2=C(2x+y-1).$	$-z^{-2+1}=\ln\frac{C}{y^2};$

$$-\frac{1}{xy}=\ln\frac{C}{y^2};$$

$$\frac{C}{y^2}=e^{-\frac{1}{xy}}.$$

IV. ***<u>Мета етапу:</u>*** *перевірка вмінь та навичок студентів розв’язувати рівняння з відокремлюючими змінними.*

Самостійна робота (за варіантами). Перевіряється викладачем, результати оголошуються на наступному занятті.

<u>Перший варіант</u>	<u>Другий варіант</u>
1.Розв’язати диференціальне рівняння: $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0$ 2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $tgydx=x\ln xdy$ при $x(\frac{\pi}{2})=l$.	1.Розв’язати диференціальне рівняння: $y'=\frac{1}{x+y-1}$ 2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $2xy'=\frac{y^2}{x}$

Домашнє завдання: за підручником [1] розв’язати на ст. 27 (Р.L.1.3) №1(13-20).

Практичне заняття 3

Тема: «Рівняння, що зводяться до лінійних»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок на основі лінійних рівнянь розв’язувати загальні диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних (рівняння Бернуллі, Ріккаті, Міндінг-Дарбу);

– вироблення вмінь зводити диференціальне рівняння до лінійного рівняння;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

<u>знати</u>: означення диференціального лінійного рівняння та рівняння, що зводиться до нього, методи їх розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування лінійних рівнянь та рівнянь, що до них зводяться;

здатні: розв'язувати загальні рівняння, що зводяться до лінійних.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Вироблення вмінь та навичок (виступи із заздалегідь підготовлені доповідями).

III. *Контроль.*

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
4. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх, оголошення й аналіз результатів самостійної роботи.

II. ***Мета етапу***: *вироблення вмінь та удосконалення навичок розв’язувати загальні диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних.*

Заздалегідь студенти були розділені на три групи, кожна з яких готувала доповіді про види рівнянь, які зводяться до лінійних. Виступ повинен містити: загальний вид рівняння та приклади розв'язування. Оцінювання включає в себе: зміст виступу (оцінка – «4») та відповіді на додаткові запитання групи та викладача (оцінка – «5»).

Виступ групи №1. «Рівняння Бернуллі»

Рівняння Бернуллі має вид: $y'+P(x)y = y^m Q(x) \quad (m = 0, m \neq 1)$

Розв'язування задач.

Задача 1. $$3y'+y\sin x + 3y^4 \sin x = 0;$$
$$y'+\frac{\sin x}{3} y = -y^4 \sin x.$$

При розв’язуванні рівняння Бернуллі краще зразу використати підстановку Бернуллі:

$$y = u(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Отож, $-\int P(x)dx = \int \frac{\sin x dx}{3} = -\frac{\cos x}{3} + C.$

$$y = u \cdot e^{-\frac{\cos x}{3}}.$$

$$y' = u' \cdot e^{-\frac{\cos x}{3}} + u \cdot e^{-\frac{\cos x}{3}} \cdot \frac{\sin x}{3};$$

$$u' \cdot e^{-\frac{\cos x}{3}} + u \cdot e^{-\frac{\cos x}{3}} \cdot \frac{\sin x}{3} + \frac{\sin x}{3} \cdot u \cdot e^{-\frac{\cos x}{3}} = -u^4 \cdot e^{-\frac{4}{3}\cos x} \sin x;$$

$$\frac{du}{u^4} = e^{-\frac{4}{3}\cos x} dx \cdot e^{\frac{\cos x}{3}} \sin x = e^{-\cos x} \sin x dx$$

$$\frac{-3}{-3u^3} = e^{-\cos x} + C_1; \qquad \frac{1}{u^3} = \frac{1}{y^3 \cdot e^{\frac{\cos x}{3} \cdot 3}} \qquad \frac{1}{y^3 \cdot e^{\cos x}} = C - 3e^{-\cos x};$$
$$y^{-3} = C \cdot e^{\cos x} - 3.$$

Задача 2. $y'+xy = y^2 (\sin x + x\cos x);$

Застосовуємо підстановку Бернуллі:

$$y = u \cdot e^{-\int x dx} = u \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \qquad y' = u' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + u \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$u' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - u \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot u \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = y^2 (\sin x + x\cos x); \qquad u' \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = u^2 \cdot e^{-x^2} (\sin x + x\cos x);$$

$$\frac{du}{u^2}=e^{-x^2}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}(\sin x+x\cos x)dx; \quad \frac{du}{u^2}=e^{-\frac{x^2}{2}}(\sin x+x\cos x)dx;$$

$$-\frac{1}{u}=\int e^{-\frac{x^2}{2}}\sin xdx+\int e^{-\frac{x^2}{2}}x\cos xdx+C=\left\|\begin{matrix} dt=e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)dx \\ v=-\cos x\end{matrix}\right\|=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos x-\int e^{-\frac{x^2}{2}}x\cos xdx+\int e^{-\frac{x^2}{2}}x\cos xdx+C;$$

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{y\cdot e^{\frac{x^2}{2}}}; \qquad y^{-1}=C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+\cos x.$$

Виступ групи №2. «Рівняння Міндінг-Дарбу»

Рівняння Міндінг-Дарбу має вид $P(x,y)dx+Q(x,y)dy+R(x,y)(ydx-xdy)=0;$ де $P,Q-$ виміру m, $R-$ виміру n. При розв’язуванні роблять заміну $\frac{y}{x}=z$ і розв’язують як однорідне диференціальне рівняння.

Розв'язування задач.

Задача 1. $(y^3+2xy^2)dy-2y^3dx+(x+y)(xdy-ydx)=0$

Робимо заміну: $\frac{y}{x}=z$. Звідки $y=zx$, $y'=z'x+z.$

$$y^3dy+2xy^2dy-2y^3dx+x^2dy-xydx+xydy-y^2dx=0;$$

$$(y^3+2xy^2+x^2+xy)dy=(2y^3+xy+y^2dx);$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y^3+xy+y^2}{y^3+2xy^2+x^2+xy}=\frac{2(\frac{y}{x})^3+(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}+(\frac{y}{x})^2\frac{1}{x}}{(\frac{y}{x})^3+2(\frac{y}{x})^2+\frac{1}{x}+\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}}.$$

$$z'x+z=\frac{2z^2+\frac{z}{x}+\frac{z^2}{x}}{z^3+2z^2+\frac{1}{x}+\frac{z}{x}}=\frac{2z^3x+z+z^2}{z^3x+2z^2x+1+z}.$$

$$z'x=\frac{2z^3x+z+z^2-z^4x-2z^3x-z-z^2}{z^3x+2z^2x+1+z}=\frac{-z^4x}{z^3x+2z^2x+1+z};$$

$$-\frac{dz}{z^4}\left(z^3x+2z^2x+z+1\right)=dx;$$

$$\frac{z^3x+2z^2+z+1}{z^4}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z^3}+\frac{D}{z^4}=\frac{Az^3+Bz^2+Cz+D}{z^4};$$

Методом невизначених коефіцієнтів знайшли невідомі:

$A = x; \quad B = 2x; \quad C = 1; \quad D = 1.$

Задача 2. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0;$

$$\frac{(x^2 + y^2 + y)}{x} = \frac{dy}{dx};$$

Робимо заміну: $\frac{y}{x} = z$. Звідки $y = zx$, $y' = z'x + z.$

$$z + xz' = x + z^2 x + z; \quad \frac{dz}{z^2+1} = dx;$$
$$z' = z^2 + 1;$$

$$\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = x + C; \text{ або } x + C = arctg\,\frac{y}{x}.$$

1. Виступ групи №2. «Рівняння Ріккаті»

Рівняння Ріккаті має загальний вид $y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$.

Звернути увагу!!!! $\underline{y^2}$ <u>- обов’язковий елемент рівняння.</u>

Для кожного виду рівняння Ріккаті існує своя підстановка:

або $y = y_1 + z$, або $y = y_1 + \frac{1}{z}$.

Щоб визначити, яку підстановку вибирати – треба перевіряти.

Розв'язування задач.

Задача 1. $y' + y^2 = -\frac{1}{4}x^2.$

Вибираємо підстановку: $y = y_1 + \frac{1}{z}$.

$$\text{Тоді } y = \frac{a}{x}; \; y' = -\frac{a}{x^2}. \quad -\frac{4a}{4x^2} + \frac{4a^2}{4x^2} = -\frac{1}{4x^2}.$$

$$4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2};$$

Тому $y_1 = \frac{1}{2x}$; звідки: $y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{z}; \quad y' = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{z^2} \cdot z';$

$$-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{4x^2}; \quad \frac{1}{z^2}z' = \frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + 1;$$

$$z'-\frac{1}{x}z=1; \quad \begin{array}{l} z=u\cdot e^{\int\frac{dx}{x}}=u\cdot x; \\ z'=u'x+u; \\ u'x+u-\frac{1}{x}u\cdot x=1; \end{array} \quad \begin{array}{l} u'x=1; \\ du=\frac{dx}{x}\Rightarrow u=\ln|x|+C=\ln|Cx|. \end{array} \quad z=x\ln|Cx|.$$

Підставляємо: $y=\frac{1}{zx}+\frac{1}{x\ln|Cx|}$

III. <u>Мета етапу</u>: перевірка вмінь та навичок студентів розв'язувати однорідні диференціальні рівняння та рівняння з відокремлюючими змінними.

Самостійна робота (за варіантами). Перевіряється викладачем, результати оголошуються на наступному занятті.

<u>Перший варіант</u>	<u>Другий варіант</u>
1.Розв'язати диференціальне рівняння: $(x^2+2xy)dx+xydy=0$	1.Розв'язати диференціальне рівняння: $(\sin^2 y+xctgy)y'=1$
2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $y'=e^{\frac{y}{x}}-1$	2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $y'-\frac{1}{x}y=x$

Домашнє завдання: за підручником [1] розв'язати на ст. 35 (Р.L.1.4.) №1(15-21)

Практичне заняття 4

Тема: «Рівняння в повних диференціалах»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводяться до них;

– вироблення вмінь зводити диференціальне рівняння до рівняння в повних диференціалах за допомогою інтегруючого множника;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

<u>знати</u>: означення інтегруючого множника, означення рівняння в повних диференціалах, методи його розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводиться до нього за допомогою інтегруючого множника;

здатні: розв'язувати рівняння в повних диференціалах.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), картки із самостійною роботою, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Вироблення вмінь та навичок.

III. Контроль.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
4. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх, оголошення й аналіз результатів самостійної роботи.

II. ***Мета етапу***: *вироблення вмінь та удосконалення навичок розв’язувати рівняння в повних диференціалах та рівняння, що зводяться до них.*

Розв’язування вправ.

Задача 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння першого порядку:

$$\left(\frac{\sin 2\cdot x}{y}+x\right)\cdot dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)\cdot dy=0$$

а) Перевіримо чи є це рівняння рівнянням в повних диференціалах вигляду $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$.

Якщо $P(x;y)=\dfrac{\sin 2x}{y}+x$, а $Q(x;y)=y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}$, то

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\sin 2x}{y^2}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\dfrac{\sin 2x}{y^2}$, отже $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Таким чином, рівняння є рівнянням в повних диференціалах, де ліва частина представляє собою повний диференціал деякої функції *F(x;y)*:

$dF(x;\, y)=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy$. Тобто $dF(x;y)=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy$, тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}.$$

Із першого рівняння знайдемо: $F(x;y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx=-\dfrac{\cos 2x}{2y}+\dfrac{x^2}{2}+\varphi(y)$.

Диференціюємо по y та підставляємо в друге рівняння:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2},\quad \frac{1-2\sin^2 x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2},$$

$$\varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2},\quad \varphi(y)=\int\left(y-\tfrac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+C_1.$$

Тоді остаточно отримаємо:

$$F(x;y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2y}+C_1=C_2,$$

$$\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C.$$

Задача 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

$$(y^2+y\sec^2 x)dx+(2xy+tgx)dy=0.$$

$$P(x,y)=y^2+y\sec^2 x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y+\frac{1}{\cos^2 x},$$
$$Q(x,y)=2xy+tgx,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y+\sec^2 x=2y+\frac{1}{\cos^2 x,} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$u(x,y)=\int(2xy+tgx)dy=xy^2+ytgx+\varphi(x),$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}=y^2+y\sec^2 x=y^2+y\sec^2 x+\varphi'(x).$$

$$\varphi'(x)=0,$$
$$\varphi(x)=C.$$
$$u(x,y)=xy^2+ytgx=C.$$

Задача 3. Розв’язати методом інтегрувального множника.

$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$, коли функція залежить від y, то навпаки.

$$\underbrace{\left(1+\frac{3y^2}{x^2}\right)}_{P}dx-\underbrace{\frac{2y}{x}}_{Q}dy=0; \qquad (*)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{6y}{x^2}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y}{x^2};$$

Умова не виконується. Робимо припущення, що існує множник $\mu(x)$.

$$d(\ln(\mu))=\frac{\frac{6}{x^2}-\frac{2y}{x^2}}{\frac{2y}{x}}; \qquad d(\ln(\mu))=-\frac{2}{x}; \quad \ln\mu=\ln x^{-2}; \quad \mu=\frac{1}{x^2};$$

Множимо на $\mu(x)$ ліву та праву частини рівняння (*) і одержимо рівняння виду:

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{x^3}; \quad u=-\frac{2}{x^3}\cdot\frac{y^2}{2}+C(x); \quad \frac{\partial u}{\partial x}=3y^2\cdot\frac{1}{x^4}+C'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4};$$
$$C(x)=\int x^{-2}dx+C_1=-x^{-2+1}=-x^{-1}=-\frac{1}{x}+C_1; \qquad -C_1=C; \quad u=\frac{y^2}{x^3}-\frac{1}{x}=C.$$

III. <u>Мета етапу:</u> *перевірка вмінь та навичок студентів розв’язувати диференціальні однорідні та лінійні рівняння, рівняння з відокремлюючими змінними .*

Самостійна робота (за варіантами). Перевіряється викладачем, результати оголошуються на здачі модуля (практичної частини).

Перший варіант	Другий варіант
1.Розв’язати диференціальні рівняння: А) $\frac{y'+1}{y'-1} = 2(y-x)$; Б) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$. 2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $x(y'-y) = e^x$	1.Розв’язати диференціальні рівняння: А) $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$; Б) $xy'-y = xtg\frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$. 2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $xy'-y = x^2\cos x$

Домашнє завдання: за підручником [1] розв’язати на ст. 43 (P.L.1.5.) №1 (16-26)

Семантичний конспект для змістовного модуля I

Диференціальні рівняння, основні визначення

- ✓ рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називаються диференціальними рівняннями;
- ✓ якщо в диференціальному рівнянні невідома функція є функцією однієї незалежної змінної, то таке диференціальне рівняння називається звичайним: $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$;
- ✓ якщо невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією двох і більшого числа незалежних змінних, то таке диференціальне рівняння називається рівнянням у частинних похідних;
- ✓ порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить у нього;
- ✓ розв'язком диференціального рівняння називається n разів диференційована функція $y = \varphi(x)$ в інтервалі $(a;b)$, яка, будучи підставленою в це рівняння, перетворює його в інтервалі $(a;b)$ в тотожність $F\,(x, \varphi(x), ..., \varphi^{(k)}(x)) \equiv 0$;
- ✓ розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки;
- ✓ операція знаходження розв'язків диференціального рівняння називається інтегруванням цього рівняння;
- ✓ задача інтегрування диференціального рівняння вважається розв'язаною, якщо цю задачу звести до більш простої і вже вивченої в курсі інтегрального числення задачі обчислення невизначених інтегралів.

Диференціальні рівняння першого порядку

- ✓ диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F\,(x, y, y') = 0$;
- ✓ якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y неперервні в деякій області D на площині $0xy$, яка містить деяку точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умові $y = y_0$ при $x = x_0$;
- ✓ умова, що при $x = x_0$ функція y повинна дорівнюватися заданому числу y_0, називається початковою умовою, або умовою Коші: $y\big|_{x = x_0} = y_0$ або $y(x_0) = y_0$;
- ✓ задача, у якій потрібно знайти частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, називається задачею Коші;
- ✓ загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x, C)$;

- ✓ рівність вигляду $\Phi(x, y, C) = 0$, яка неявно задає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння;
- ✓ частинним розв'язком називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється з загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, якщо в останньому довільної сталої C придати визначене значення $C = C_0$;
- ✓ співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називається в цьому випадку частинним інтегралом рівняння;
- ✓ вирішити або проінтегрувати диференціальне рівняння - значить:

а) знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл (якщо початкові умови не задані) або

б) знайти той частинний розв'язок рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам (якщо такі є);

- ✓ особливим розв'язком називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова одиничності не виконується, тобто в будь-якому околі кожної точки $(x; y)$ особливого розв'язку існують принаймні дві інтегральні криві, які проходять через цю точку.

Диференціальні рівняння із відокремлюючими змінними

- ✓ диференціальне рівняння типу $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$ називають рівнянням із відокремлюючими змінними, в цьому рівнянні змінні відокремлені, тобто при dx знаходиться тільки функція від x, а при dy - тільки функція від y;
- ✓ диференціальні рівняння, у яких змінні можна розділити за допомогою множення або ділення обох частин рівняння на той самий вираз, називаються диференціальними рівняннями із змінними, які відокремлюються: $M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0$.

Однорідні рівняння першого порядку

- ✓ функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n-го порядку щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність $f(t\,x, t\,y) = t^n f(x, y)$;
- ✓ рівняння виду $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ називається однорідним, якщо функції при dx і dy є однорідними однакового порядку.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

- ✓ лінійним рівнянням першого порядку називається рівняння, що має вигляд $y' + P(x)\,y = Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ - задані неперервні функції від x (або сталі);
- ✓ якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним;

- ✓ якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називається лінійним неоднорідним;
- ✓ рівнянням Бернуллі називається рівняня виду $y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n$ або $x' + P(y)\cdot x = Q(y)\cdot x^n$;
- ✓ суть методу Лагранжа полягає в тому, що спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння $y' + P(x)\,y = 0$ $y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$. Потім, вважаючи в цьому розв'язку сталу C функцією від x, шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді $y = C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$.

Диференціальні рівняння в повних диференціалах

- ✓ рівняння $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина – повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$;
- ✓ необхідною і достатньою умовою повного диференціала є рівність частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$;
- ✓ загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд $u(x,y) = c$;
- ✓ щоб функція $\mu(x,y)$, неперервна в однов'язній області D разом зі своїми частинними похідними μ_x' і μ_y', була інтегруючим множником диференціального рівняння, необхідно і достатньо, щоб для всіх точок $(x:y) \in D$ виконувалась рівність $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$.

Індивідуальні творчі завдання до змістовного модуля I

1. Скласти бібліографію з питань вивчення диференціальних рівнянь першого порядку. До кожного джерела скласти анотацію.
2. Розробити особистісну траєкторію вивчення матеріалу з теми (за варіантами).

Номер варіанта	Тема	Номер варіанта	Тема
1.	Теорема Коші - Пеано	6.	Єдиність розв’язку задачі Коші.
2.	Початкова умова. Задача Коші.	7.	Теорема Пеано.
3.	Поле напрямів. Узагальнені інтегральні криві.	8.	Звичайні і особливі точки диференціального рівняння.
4.	Ізокліни. Ламані Ейлера.	9.	Теорема Коші.
5.	Відшукання особливих інтегральних кривих диференціального рівняння за його загальним інтегралом.	10.	Неперервна залежність розв'язку диференціального рівняння від початкових умов і параметра.

3. Скласти семантичний конспект з диференціальних рівнянь на відповідну тему (за варіантами).

Номер варіанта	Тема	Номер варіанта	Тема
1.	Диференціальне рівняння першого порядку, його загальний розв'язок.	6.	Рівняння Ріккаті.
2.	Рівняння з відокремлюючими змінними.	7.	Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних.
3.	Однорідні диференціальні рівняння.	8.	Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь.
4.	Поняття лінійного рівняння, існування і єдиність розв'язку задачі Коші.	9.	Рівняння Бернуллі.
5.	Рівняння в повних диференціалах.	10.	Рівняння Міндінг – Дарбу.

4. Розробити алгоритм розв’язування задачі, в якій пропонується знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

Номер варіанта	Умова задачі
1.	$y'+y=\ln x+1$
2.	$y'+2y=y^2e^x$
3.	$xydy=(y^2+x)dx$
4.	$y'x^3\sin y=xy'-2y$
5.	$2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy}{x^2-1}$
6.	$xy^2y'=x^2+y^2$
7.	$y'x+y=-xy^2$
8.	$xy'-2\sqrt{x^2y}=y$
9.	$y'=\frac{x}{y}e^{2x}+y$
10.	$x(x-1)y'+y^3=xy$

5. Розв’язати задачі. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

Номер варіанта	Умова задач	
1.	$(x+4)dy-xydx=0$	$y-xy'=x\sec\frac{x}{y}$
2.	$y^2\ln xdx-(y-1)xdy=0$	$(x+2y)dx-xdy=0$
3.	$y'+2y-y^2=0$	$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$
4.	$(y^2+1)dx-(y+yx^2)dy=0$	$ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$
5.	$2xyy'=1-x^2$	$e^{x+3y}dy=xdx$
6.	$(y^2x+y^2)dy+xdx=0$	$y'=\frac{e^{2x}}{\ln y}$
7.	$xy'-y=y^2$	$y'\sin x=y\ln y$
8.	$y'-xy^2=2xy$	$y'=(2y+1)tgx$
9.	$y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$	$(1+e^x)yy'=e^x$
10.	$y'+y+y^2=0$	$\sin x\cdot y'=y\cos x+2\cos x$

6. Розв’язати задачу.

Номер варіанта	Умова задачі
1.	Знайти рівняння кривої, що проходить через точку М (1;2), якщо

	кутовий коефіцієнт проведеної до нього дотичної дорівнює $4x^3$.
2.	Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ходу її мотор був вимкнутий; через 4 с її швидкість стала рівної 1 м/с. Вважаючи, що сила опору води пропорційна швидкості руху човна, визначити, через скільки секунд після вимкнення мотора швидкість зменшиться до 4 см/с?
3.	Є M_0 радіоактивної речовини. Якщо за 30 років розпадається 50% його, те через скільки часу залишиться 25% первісної кількості?
4.	Десятиметровий шар води поглинає 40% світла ,що падає на її поверхню. На якій глибині денне світло буде по яскравості таким же, як місячне світло на поверхні води, якщо яскравість місячного світла складає $\frac{1}{3}\cdot 10^{-5}$ яскравості денного світла?
5.	Є судина ємністю **a** л, наповнений водним розчином солі. В судину вливається вода зі швидкістю **b** л в хвилину, перемішується, і розчин ,що одержується однорідної концентрації виходить з судини з тією ж швидкістю. Скільки солі буде міститися в розчині в момент часу t, якщо в початковий момент (t=0) її було в розчині A_0 кг? Обчислити відповідь, якщо a=100 л, A_0=10 кг, b=3 л в хвилину, t=1 година.
6.	Металева деталь, нагріта до 500°С, охолоджується в, повітрі при температурі 20 °С. Через 10 хвилин після початку охолодження температура на поверхні деталі понизилася до 100°С. Який буде температура на поверхні деталі через 20 хвилин?
7.	Послідовно ввімкнені джерело струму з ЕРС Е, В, котушка з індуктивністю L, Гн ($L \neq 0$) і активний опір R, Ом. Знайти закон зміни сили струму I(t) в ланцюгу, вважаючи, що в початковий момент часу (t=0) вона дорівнює нулю. Розглянути випадок коли ЕРС постійна – E(t)=E.
8.	Знайти швидкість v (t) руху тіла, що падає в повітрі на землю, вважаючи силу опору повітря прямо пропорційною швидкості руху і початкову швидкість рівної v_0 м/с.
9.	Знайти швидкість v (t) руху тіла, що падає в порожнечі на землю, вважаючи початкову швидкість руху рівної v_0.
10.	Через 12 годин після початку досліду кількість бактерій зросла втроє. Вимога задачі: у скільки разів збільшиться кількість бактерій через 3 доби?

Модульна контрольна робота змістовного модуля I

1. Серед даних рівнянь вказати звичайне диференціальне рівняння першого порядку:

а) $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y,u)$; б) $\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=x^3+1$;

в) $a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+b\frac{\partial y}{\partial x}+cy=f(x)$; г) $5\frac{d^2y}{\partial x^2}+6\frac{dy}{dx}+3y=\sin x$;

д) $(x+y)dx+(x^2+y^2)dy=0$; е) $y'=\frac{x}{y}\ln\frac{x}{y}$.

Відповідь: б); в); д); е).

2. Серед даних рівнянь вказати рівняння з відокремлюючими змінними:

а) $(\sin x\cdot\ln y+\sin x)dx+(xy+y)dy=0;$ б) $dN=kNdt;$

в) $y'+ay=b;$ г) $ay'+bxy=C,\ C\neq 0;$

д) $m\frac{dV}{dt}=mg-kV^2$.

Відповідь: а); б); в); д).

3. Серед рівнянь вказати лінійне:

а) $y'\cos x-y\sin x-2x=0$; б) $2xy'-y^2+x=0$;

в) $m\frac{dV}{dt}=P-kV$; г) $y'=\frac{y}{3x-y^2}$.

Відповідь: а), в), г).

4. Серед рівнянь вказати те, яке одночасно є однорідним, в повних диференціалах та лінійним:

а) $x^2y+2xy+x^2=0$; б) $xy'=-y+x$.

Відповідь: а); б).

5. Серед рівнянь вказати те, яке одночасно є рівнянням з відокремлюючими змінними, в повних диференціалах та лінійним:

а) $xy'+y=0;$; б) $xy'-y=0$.

Відповідь: а).

6. Серед інтегральних кривих, що задовольняють рівняння $y'\sin x=y\ln y$, знайти ту, яка проходить через точку $M_0\left(\frac{\pi}{2},l\right)$

Відповідь: $y = e^{tg\frac{\pi}{2}}$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + ay = bx.$$

Відповідь: $y = uv = ce^{-ax} + \frac{b}{a}x - \frac{b}{a^2}$.

8. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$\left(\frac{sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0.$$

Відповідь: $\frac{sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C.$

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0.$$

Вказівка: застосувати формулу

$$\arcsin\alpha + \arcsin\beta = \arcsin\left(\alpha\sqrt{1+\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}\right).$$

Відповідь: $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c$.

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = 1.$$

Відповідь: $y = \sqrt{1-x^2}\left(c + arcsin\, x\right)$.

Література до змістовного модуля I

a. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

b. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

c. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.

d. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

e. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.

f. Кисилев А.И., Краснов М.А., Макаренко Т.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

g. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений.
h. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
i. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
j. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
k. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
l. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
m. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1991. – 366 с.
n. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. – 304.
o. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. Учебн. Пособие для студентов физ-мат. Фак. Пед. Ин-том. М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
p. Бацевич О.Ф. Диференціальні рівняння. Курс лекцій для студентів базового напряму «Електромеханіка». Львів: Львівська політехніка, 2007. – 40 с.

Розділ ІІ. Методичні особливості вивчення змістовного модуля ІІ «Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної. Диференціальні рівняння вищих порядків»

Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи для змістовного модуля ІІ

Лекція 1. Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної.

Рівняння виду $F(y', y, x) = 0$. Застосування методу введення параметра для розв'язання неявних рівнянь. Поняття особливого розв'язку. Рівняння Клеро. Рівняння Лагранжа.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Особливий розв'язок диференціальних рівнянь, що не розв'язуються відносно похідної» – 2 год.

Література: [1–3, 8, 13].

Практичне заняття 1.

Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Алгоритм знаходження особливих розв'язків» – 2 год.

Література: [4-6, 8, 10-13].

Лекція 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.

Рівняння вищих порядків, що не містять шуканої функції. Пониження порядку рівнянь, в які явно входить шукана функція, а незалежна змінна відсутня. Інтегрування однорідних рівнянь вищих порядків. Інтегрування лінійних рівнянь вищих методом пониження.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Теорема Коші» – 2 год.

Література: [1–3, 8, 12(11-17), 13].

Практичне заняття 2.

Диференціальні рівняння вищих порядків.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу «Задачі про траєкторії» – 2 год.

Література: [4-6, 8, 10-13, Додаток 1, 2].

Розробка лекцій для змістовного модуля II

Лекція 1

Тема: «Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної**»**

Мета:

– навести означення «диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної»;

– розгляд окремих типів рівнянь, що не розв'язані відносно похідної;

– поглиблення, розширення знань, отриманих раніше при вивченні розділів диференціального і інтегрального числення з курсу математичного аналізу, алгебри та геометрії.

– розвиток наукового мислення та пам'яті;

– виховання культури математичного запису і мовлення.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь;

уміти: визначати тип диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної;

здатні: знаходити невизначений інтеграл (з курсу математичного аналізу), розв'язувати звичайні диференціальні рівняння.

Основні поняття: диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, рівняння Лагранжа, рівняння Клеро.

Обладнання: підручники, креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп'ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1.Типи рівнянь, для яких існує алгоритм.

2.Рівняння Лагранжа і Клеро.

Список літератури

5. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений.

7. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.

8. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.

Текст лекції

На початку лекції студентам дається незаповнена Схема 1, на якій Модуль I вони заповнюють самі, а Модуль II заповнює викладач. Отримуємо Схему 2. Далі приступаємо до читання лекції.

1. Типи рівнянь, для яких існує алгоритм.

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв’язане відносно похідної, має вигляд

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad (1)$$

Для якісного дослідження таке рівняння бажано розв’язати відносно похідної $y' = \frac{dy}{dx}$, тобто дістати одне або кілька рівнянь типу

$$y' = f_i(x, y), i = 1,2, \dots, k. \quad (2)$$

Проте рівняння (1) не завжди можна в явному вигляді розв’язати відносно y'. Таким чином для розв’язання рівняння такого типу можна виділити два підходи.

1) Якщо (1) можна розв’язати відносно похідної, тобто дістати одне або кілька рівнянь вигляду $y' = f(x, y)$, то, проінтегрувавши кожне з одержаних рівнянь, матимемо множину розв’язків вихідного рівня. При цьому особливими розв’язками рівняння для (1) будуть лише такі, які є особливими хоча б для одного з отриманих рівнянь.

Приклад 1.

$$(y')^2 + xy' - x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x^2}}{2}$$

2) Рівняння виду (1) розв'язують методом введення параметра (МВП). Припустимо, що рівняння (1) можна розв'язати відносно x або y. Наприклад, його можна записати у вигляді $y = f(x, y')$. Ввівши параметр $y' = p$, дістанемо $y = f(x, p)$.

Взявши повний диференціал від обох частин останньої рівності і замінивши dy на pdx дістанемо рівняння

$$pdx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial p} dp,$$

тобто

$$M(x,p)dx + N(x,p)dp = 0.$$

Якщо розв'язки останнього рівняння задані формулою $x = \Phi(p, c)$, то розв'язки рівняння (1) можна записати в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \Phi(p,c) \\ y = f(x,p). \end{cases}$$

Приклад 2.

$$x - y'e^{y'} = 0 \qquad x = y'e^{y'},\ y' = p$$

$$\begin{cases} x = pe^p \\ y = f(p,x,c) \end{cases}$$

$$dy = pdx \qquad dx = (e^p + pe^p)dp$$

$$dx = e^p(p+1)dp$$

$$dy = pe^p(p+1)dp = e^p(p^2+p)dp = p^2e^pdp + e^ppdp$$

$$y = \int p^2e^pdp + \int pe^pdp + C = p^2e^p - 2\int pe^pdp + \int pe^pdpC =$$

$$p^2e^p - \int pe^pdp = p^2e^p - pe^p + e^p + C = e^p(p^2 - p + 1) + C$$

Отримуємо загальний розв'язок рівняння

$$\begin{cases} y = e^p(p^2 - p + 1) + C \\ x = pe^p \end{cases}$$

3) Рівняння виду $F(y', y) = 0$ *(1) рівняння не містить аргумент x і його можна розв'язати відносно y.*

$$y = f(y') \qquad y' = p$$

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \varphi(y, p, c)\ ? \end{cases} \tag{2}$$

$$dy = pdx \tag{3}$$

Диференціюємо (2) по $p \Longrightarrow dy = f'(p)dp$ підставляємо в (3)

$$f'(p)dp = pdx \qquad \frac{f'(p)}{p}dp = dx$$

$$\begin{cases} x = \int f'(p)\frac{dp}{p} + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Приклад 3.

$$y - (y')^2 e^{y'} = 0$$

$$y' = p$$

$$dy = pdx \tag{2}$$

$$\begin{cases} y = p^2 e^p, \\ f(p, y, c) \end{cases}$$

$dy = (2p + p^2)e^p dp$ підставляємо в (2)

$$(2pe^p + p^2)dp = pdx$$

$$dx = 2e^p dp + pe^p dp$$

$$x = \int pe^p dp + 2\int e^p dp + C = pe^p - e^p + 2e^p + C$$

$$\begin{cases} x = pe^p + e^p + C \\ y = p^2 e^p \end{cases}$$

Нехай $p = 0,$ тоді $y' = 0, y = k$

Підставляємо в дане рівняння $y - (y')^2 e^{y'} = 0$

$$k - 0 \cdot e^0 = 0 \quad k = 0$$

Маємо розв'язок $y = 0$, перевіримо при якому C ми можемо його $y = 0$ отримати із загального рівняння, а такого нема. Оді такий розв'язок – особливий розв'язок.

2. Рівняння Лагранжа і Клеро.

Прикладами рівнянь, які можна розв'язати викладеним методом, є рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \delta(y')$ і рівняння Клеро $y = xy' + \delta(y')$.

Як і рівняння, розв'язані відносно похідної, рівняння виду (1) можуть мати особливі розв'язки, тобто такі розв'язки, відповідна інтегральна крива яких складається з точок неєдиності.

Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна по x і неперервно диференційована по y і y', то особливий розв'язок (якщо він існує) задовольняє системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Тому, щоб знайти особливі розв'язки рівняння (1), з системи рівнянь (3) виключають y', внаслідок чого дістають рівняння $\delta(x, y) = 0$ так званої дискримінантної кривої. Для кожної вітки дискримінантної кривої необхідно перевірити, чи є ця вітка графіком деякого розв'язку рівняння (1) і, якщо це так, то чи є цей розв'язок особливим. Якщо сім'я інтегральних кривих $\Phi(x, y, c) = 0$ рівняння (1) має обвідну $y = \varphi(x)$, то ця обвідна є особливою інтегральною кривою цього ж рівняння. Якщо функція $\Phi(x, y, c)$ неперервно диференційована, то обвідна входить до складу дискримінантної кривої

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

Деяка вітка $y = \varphi(x)$ дискримінантної кривої є обвідною, якщо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \varphi(x), C) \neq 0, \text{ або } \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, \varphi(x), C) \neq 0.$$

У загальному випадку, щоб дізнатися, чи є вітка $y = \varphi(x)$ дискримінантної кривої обвідною (особливою інтегральною кривою), слід з'ясувати, чи дотикаються до неї в кожній точці криві сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$. Якщо ці криві є інтегральними кривими рівняння $F(x, y, y') = 0$, то інтегральні криві рівняння

$$F\left(x, y, \frac{y' \mp k}{1 \pm k y'}\right) = 0$$

перетинають криві даної сім'ї під однаковим кутом α, для якого $\tan \alpha = k$. Зокрема, інтегральні криві рівняння $F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ ортогональні кривим

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Приклад 4.

$$y = \frac{1}{2} \underbrace{x\left(y' + \frac{4}{y'}\right)}_{\phi(y')} + \underbrace{\varphi(y')}_{=0}$$

Маємо рівняння Лагранжа

$$dy = pdx$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2}\left(p + \frac{4}{p}\right) \\ x = f(y, p, c) \quad ? \end{cases}$$

Знаходимо похідну y, тоді $p = \left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p}\right) + \frac{x}{2}\left(p' - \frac{4p'}{p^2}\right)$

$$\frac{p}{2} - \frac{2}{p} = \frac{p' x}{2}\left[1 - \frac{4}{p^2}\right]$$

$$p^2 - 4 \neq 0 \qquad\qquad p \neq 0$$

$$\frac{p^2-4}{2p} = \frac{p' x}{2}\left[\frac{p^2-4}{p^2}\right] \qquad\qquad \frac{dp}{dxp} x = 1 \to \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \qquad p = cx$$

$y = \frac{x}{2}\left(p + \frac{4}{p}\right) = \frac{x}{2}\left(C_x + \frac{4}{C_x}\right)$ є загальний розв'язок.

Нехай

$p = 0 \to y' = 0 \to y = k$ особливий розв'язок,

Нехай

$p^2 - 4 = 0$

$p = \pm 2$ – особливий розв'язок

Лекція 2
Тема: «Диференціальні рівняння вищих порядків»

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Диференціальні рівняння вищих порядків»;

– ознайомлення із типами диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку;

– поглиблення, розширення знань, отриманих раніше при вивченні диференціальних рівнянь, для розв'язування диференціальні рівняння вищих порядків;

– розвиток візуального мислення та пам'яті;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення диференціального рівняння вищого порядку, розв'язок рівняння, інтегральна крива, геометричне тлумачення задачі Коші;

уміти: визначати диференціальне рівняння вищого порядку з переліку рівнянь, знаходити загальний та частинний розв'язок диференціального рівняння вищого порядку, розв'язувати задачу Коші;

здатні: розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку різними методами.

Основні поняття: диференціальне рівняння вищого порядку, розв'язок рівняння, інтегральна крива.

Обладнання: підручники, креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп'ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. Загальні відомості про диференціальні рівняння вищих порядків.

2. Геометричне тлумачення задачі Коші.

3. Типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

Список літератури

5. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
8. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Текст лекції

1. Диференціальне рівняння вищого порядку.

Диференційні рівняння вищого порядку стосовно функції $y(x)$ має вигляд:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

яке називають *диференційованим рівнянням* $n-$*го порядку*, якщо рівняння (1) подано у вигляді:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

та його називають *диференційованим рівнянням* $n-$*го порядку, яке є розв'язком відносно найстаршої похідної, або явним диференціальним рівнянням, або нормальним диференційованим рівнянням* $n-$*го порядку.*

Оскільки теоретичні поняття і методи інтегрування диференціальних рівнянь вищого порядку є споріднені для рівнянь різних порядків, то надалі ми обмежемось розглядом диференціальних рівнянь другого порядку:

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \tag{3}$$

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \tag{4.}$$

Функція $ó = \varphi(õ)$ *називається розв'язком диференціального рівняння (3)чи (4) проміжну (a,b), якщо вона двічі неперервно диференційована на* *цьому проміжку і будучи підставлена у рівняння, перетворює його у тотожність, тобто*

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)\right) \equiv 0,\ x \in (a,b)$$

або

$$y''(x) \equiv f\left(x, \varphi(x), y'(x)\right)$$

Графік функції $y = \varphi(x)$ називається при цьому ***інтегральною кривою*** диференціального рівняння (3) чи (4).

Зрозуміло, що інтегральна крива повинна міститися в області визначення функції F.

Наприклад, розв’язком диференційованого рівняння $y'' = 6x$ є функція $y = x^3$ на проміжку $(-\infty, +\infty)$, бо ця функція є двічі диференційована на цьому проміжутку і $(x^3)'' = 6x$ Крім того, функція $y = x^3 + C_1 x + C_2$, де C_1, C_2- довільні сталі, є також розв’язком цього рівняння.

Аналогічно переконаємось, що функція $y = e^x$ **і** $y = e^{-x}$ є розвязками диференціального рівняння $y'' - y = 0$ на проміжку $(-\infty, +\infty)$, бо вони двічі диференційовані на цьому проміжку

$$\left(e^{x}\right)'' - e^{x} \equiv 0, (e^{-x})'' - e^{-x} \equiv 0.$$

Розвязком цього рівняння є також функції $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2}$, де $C_1 C_2$- довільні сталі.

Далі будемо розглядпти основні поняття та означення для диференціального рівняння (4).

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, де C_1 і C_2 довільні сталі називається загальним розв’язком диференційованого рівняння другого порядку, якщо вона є розв’язком цього рівняння для розв’язком функції C_1 і C_2 і з якої за рахунок вибору значень цих сталих можна отримати будь-який розв’язок цього рівняння (за винятком може окремих).

Розвязок який отримуємо із загального диференціального рівняння 2-го порядку, надаючи $\tilde{N}_1$ **і** $\tilde{N}_2$ певних числових значень, називається числовим розвязком цього рівняння.

Задача Коші. *Практичних задач, які зводяться до диференціального рівняння другого порядку, потрібно відшукати розвязок цього рівняння, що задовольняє певні додаткові умови.*

Найчастіше ними є умови Коші:

$$y(x_0) = y_0 \quad y^{'}(x_0) = y_{1.} \tag{5}$$

Задача знаходження розвязку диференціального рівняння (4), який задовольняє умови (5), називається задачею Коші для цього рівняння. Цю задачу Коші записуватимемо коротко:

Геометрично, задача Коші для диференціального рівняння (4) полягає у знаходженні інтегральної кривої $\acute{o} = \varphi(\tilde{o})$ цього рівняння. Яке проходить через точку $(\tilde{o}_0, \acute{o}_0)$ і яка дотикається у цій точці до вектора, що утворює кут $L = arctgy$, з додатним напрямком осі Ox

<u>2. Геометричне тлумачення задачі Коші.</u>

Зрозуміло, що точки $(\tilde{o}_0, \acute{o}_0, \acute{o}_1)$ повинні лежати області визначення функції $f(\tilde{o}, \acute{o}, \acute{o}^{'})$, тобто області визначення диференціального рівняння (4).

Можна показати, що правильне таке твердження: *якщо функція $f(\tilde{o}, \acute{o}, \acute{o}^{'})$ та її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}$ і $\frac{\partial f}{\partial y^{'}}$ є неперервні в деякому околі точки $(\tilde{o}_0, \acute{o}_0, \acute{o}_1)$, то існує єдиний розв'язок $\acute{o} = \varphi(\tilde{o})$ задачі Коші (4) – (5), який визначений у певному околі точки $\tilde{o}_0$.*

Геометрично це означає, що при виконанні умов сформульованої теореми, через точну $(\tilde{o}_0, \acute{o}_0)$ проходить єдина інтегральна крива $\acute{o} = \varphi(\tilde{o})$ диференціального рівняння (4), яка замикається у цій точці до вектора, який утворює з додатним напрямом осі Ox кут $L = arctg\ \acute{o}_1$.

З теореми існування та розв'язку задачі Коші для рівняння (4) випливає, що при виконанні умов теореми в деякому околі точки x_0 існує загальний розв’язок $\acute{o}=\varphi(\tilde{o},C_1,C_2)$ цього рівняння, з розв’язком якого отримати розв’язок задачі Коші, визначивши значення сталих $\tilde{N}_1$ і $\tilde{N}_2$ із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(\tilde{o}_0,\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)=\acute{o}_0, \\ \varphi'_{\tilde{o}}\left(x_0,C_1,C_2\right)=y_1 \end{cases} \qquad (6)$$

Відзначемо, що система рівняння (6) завжди є розв’язком, бо існує розв’язок задачі Коші (4) – (5)

На практиці для диференціального рівняння другого порятку можуть бути задані інші умови замість умов Коші. Ними можуть бути крайові умови: $\acute{o}(\tilde{o}_0)=\acute{o}_0,\ \ \acute{o}(\tilde{o}_1)=\acute{o}_1,$ і геометрична задача полягає у знаходженні інтигральної кривої диференціального рівняння (4), яка проходить через дві точки $(\tilde{o}_0;\acute{o}_0)\,,(\tilde{o}_1;\acute{o}_1)$.

Примітка. Якщо диференціального рівняння (3) має один розвязок відносно $\acute{o}''$, то воно рівносильне диференційномурівняню $\acute{o}''=f(x,y,y')$, де $F(x,y,y'),\,f(x,y,y')\equiv 0.$

Якщо ж диференціальне рівняння (3) має декілька розв’язком відносно $\acute{o}''$, то воно рівносильне сукупності диференціальних рівнянь.

$$\left[\begin{array}{l} y''=f_1(x,y,y'), \\ y''=f_2(x,y,y'), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y''=f_m(x,y,y'), \end{array}\right. \quad \text{де } F(x,y,y',f_i(x,y,y'))\equiv 0,\ \ i=\overline{1,m}$$

<u>3. Типи рівнянь, що допускають зниження порядку.</u>

На відміну від рівняння першого порядку не кожне рівняння вищого порядку ічнує алгоритм розвязування, тому розглядають лише ті типи рівнянь, які інтегруються квадратурой, основним методом інтегрування (знаходження загального розвязку або загального інтеграла) диференціальних рівнянь вищого порядку є зниження їх порядку і зведення до інтегрування диференціальних рівнянь першого порятку. Розглянемо деякі можливі видатки зниження порядку диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Диференціальне рівняння не містить невідомої функції y, тобто має вигляд:

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{7}$$

У цьому випадку робимо заміну $y' = Z(x)$ $\acute{o}'' = Z'(\tilde{o})$ і отримуємо диференціальне рівняння першого порядку стосовно невідомої функції Z:

$$F(x, z, z') = 0$$

Якщо знайдемо загальний розв'язок $z = \varphi(\tilde{o}, c_1)$, рівнянь (8) то далі інтегруємо рівняння $y' = \varphi(x, c_1)$; якщо ж знайдемо загальний інтеграл $\varphi(\tilde{o}, z, c_1) = 0,$ то для знаходження розв'язків диференціального рівняння (7) отримуємо наявне диференціальних рівнянь першого порятку $\varphi(\tilde{o}, \acute{o}', c_1) = 0.$

2. Диференціальне рівняння не містить явно аргументах x, тобто має вигляд

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{9}$$

У розв'язаному випадку приймаємо за невідому функцію $\acute{o}' = Z(y)$, а й аргументи вважаємо *y*. Тоді маємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = z(y) \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

Підставимо вирази для *y',y''* у рівняння (9), отримаємо відносно функцію $z(\acute{o})$ диференціальних рівнянь першого порядку:

$$F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0 \tag{10}$$

Якщо знайдемо загальний розв'язок $z = \varphi(\acute{o}, c_1),$ рівняння (10), то дані інтнгруєм явне диференціальне рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$ яке є з розв'язком функції змінними; якщо ж знайдено загальний інтеграл $\varphi(\tilde{o}, z, C_1) = 0$ рівняння (10), то дані інтегруємо наявне диференційне рівняння $\varphi(\tilde{o}, \acute{o}', C_1) = 0$ першого порядку.

Диференціальне рівняння (3) є однорідним відносно функції у та її похідних y' і y'', тобто

$$F(x,ty,ty',ty'')=t^m F(x,y,y',y'').$$

У цьому випадку виконуємо заміну $y'=y\cdot z,$ де z = $z(x)$. Знаходимо $y''=y'z+yz'=yz^2+yz'=y(z^2+z')$ Підготовимо вирази для y' та y'' у рівняння (3) і використовуємо його однорідність:

$$F(x,y,yz,y(z^2+z^1))=y^m F(x,1,z,z^2+z').$$

У результаті приходимо до диференціальних рівнянь першого порятку стосовно функції

$$F(x,1,z,z^2+z^1)=0, \tag{11}$$

яке з точністюдо розвязку $y\equiv 0$ рівносильне рівняню (3)

Якщо знайдемо загальний розвязок $Z=\varphi(x,C_1)$ рівняння (11), то речі інтегруємо розв'язане дифененційне рівняння першого порядку $y'=y\varphi(\tilde{o},\tilde{N}_1)$, яке є з відокремлюваними змінними; якщо ж знайдемо загальний інтеграл $\varphi(\tilde{o},z,C_1)=0,$ то приходимо до інтегрування наявного диференціального рівняння першого порядку:

$$\varphi(\tilde{o},\frac{y'}{y},C_1)=0.$$

При зниженні порядку вихідного рівняння міг бути втрачений його розв'язок $y=0$. Але він не втрачений, отримуємо із загального розв'язку при $\tilde{N}_2=0$.

Розробка практичних занять для змістовного модуля II

Практичне заняття 1

Тема: «Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати диференціальні рівняння, що не розв'язані відносно похідної;

– вироблення вмінь розрізняти та відповідно правильно застосовувати методи розв'язування диференціальних рівняння, що не розв'язані відносно похідної;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь;

уміти: застосовувати знання для розв'язування диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, розрізняти рівняння за типами поділу;

здатні: розв'язувати диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної.

Обладнання: підручники, , картки із самостійною роботою, мультимедійний проектор, комп'ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань (термінологічний диктант).

III. Вироблення вмінь та навичок.

IV. Контроль.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.

II. Актуалізація знань. Студенти відтворюють, необхідну для даної теми, частину Схеми 1.

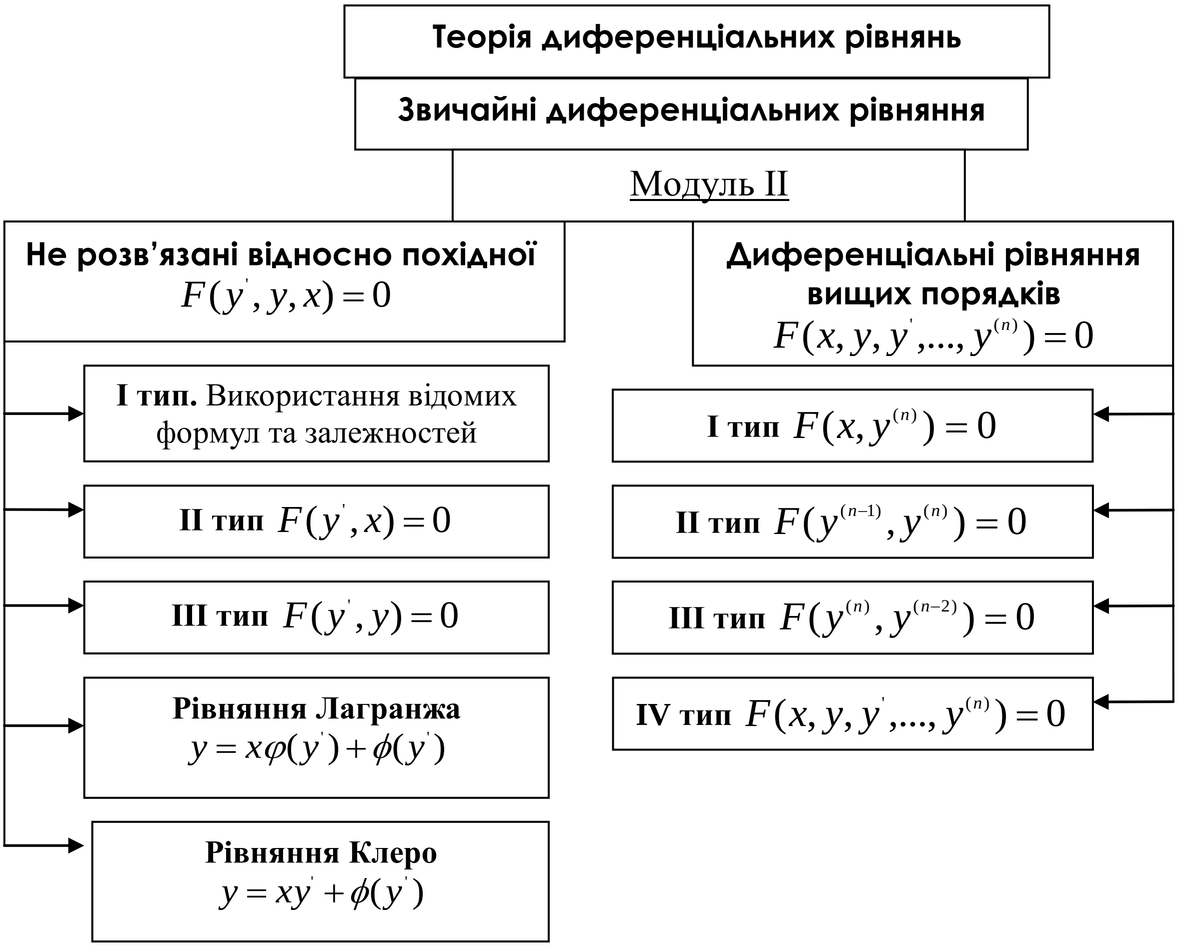


Схема 3. МОДУЛЬ II

III. Розв'язання прав.

Задача 1. *Розв'язати рівняння* $(y')^2 + \ y(y-x)y' - xy^3 = 0.$

Розв'язання: ► Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(y' + y^2)(y' - xy) = 0$$

Отже, вихідне рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$y' + y^2 = 0 \text{ і } y' - xy = 0.$$

Розв'язки першого з них $y = 0$ і $y = \frac{1}{x+C}$, а другого $y = Ce^{x^2/2}$.

Остаточно

$$\left(y - Ce^{x^2/2}\right)\left(y - \frac{1}{x+C}\right) = 0. ◄$$

Задача 2. *Розв'язати рівняння* $(y')^2 + \ (x-a)y' - y = 0$

Розв'язання: ► Введемо параметр $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 + (x+a)p.$$

З рівностей

$$dy = pdx \text{ і } dy = 2pdp + (x+a)dp + pdx$$

маємо

$$pdx = 2pdp + (x+a)dp + pdx, \ (2p + x + a)dp = 0.$$

Звідси $p = C$ або $2p + x + a = 0.$

Тому розв'язки заданого рівняння мають вигляд

$$y = (x+a)C + C^2 \text{ і } \begin{cases} y = p^2 + (x+a)p; \\ \ 2p + x + a = 0. \end{cases}$$

Виключаючи з останніх двох рівностей параметр *p*, дістанемо

$$y = C(x+a) + C^2 \text{ і } y = -\frac{(x+a)^2}{4} ◄$$

Задача 3. *Розв'язати рівняння* $\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0.$

Розв'язання: ►Це рівняння Клеро. Покладемо $y' = y$, тоді

$$y = xp + \sqrt{1 + p^2}.$$

Диференціюючи остаточно рівність по *x*, дістаємо

$$\frac{dx}{dy} = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p\frac{dp}{dx}}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Звідси $\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0, \ x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$

або $p = C$. Отже,

$$y = Cx + \sqrt{1 + Cp^2} \text{ і } \begin{cases} x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = xp + \sqrt{1+p^2}. \end{cases}$$

Виключивши з останніх двох рівностей параметр p, дістанемо

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Задача 4. Розв'язати рівняння $y' + y = x(y')^2$.

Розв'язання: Дане рівняння розв'язується відносно y:

$$y = x(y')^2 - y'.$$

Це рівняння Лагранжа. Введемо параметр $y' = p$. Тоді $y = xp^2 - p$. Маємо:

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}, \text{ або } p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}.$$

Дістаємо лінійне рівняння

$$x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)};$$

його розв'язок

$$x = \frac{p - lnp + C}{(p-1)^2}. \blacktriangleleft$$

IV. ***Самостійна робота*** *(за варіантами)*. Перевіряється викладачем, результати оголошуються на здачі модуля (практичної частини).

Перший варіант	Другий варіант
1.Розв'язати рівняння: А) $\ln y' + \sin y' - x = 0$; Б) $x^4(y')^2 - xy' - y = 0$	1.Розв'язати рівняння: А) $y' \sin y' + \cos y' - y = 0$; Б) $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$

V. Домашнє завдання: за підручником [1] розв'язати на ст. 52 (Р.L.1.6.) №1 (7-12), №2 (5-10).

Практичне заняття 2

Тема: «Диференціальні рівняння вищих порядків»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв’язувати диференціальні рівняння, що не розв’язані відносно похідної;

– вироблення вмінь розрізняти та відповідно правильно застосовувати методи розв’язування диференціальних рівняння, що не розв’язані відносно похідної;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення диференціального рівняння, не розв’язаного відносно похідної, методи розв’язування звичайних диференціальних рівнянь;

уміти: застосовувати знання для розв'язування диференціального рівняння, не розв’язаного відносно похідної, розрізняти рівняння за типами поділу;

здатні: розв'язувати диференціальні рівняння, не розв’язані відносно похідної.

Обладнання: підручники, , картки із самостійною роботою, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань (термінологічний диктант).

III. Вироблення вмінь та навичок.

IV. Контроль.

Список літератури

4. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
6. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
7. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.

II. Усне опитування. Викладач задає запитання з вивченої напередодні лекції

1.Що називається диференціальним рівняння вищих порядків?

2.Що називається розв'язком рівняння $y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0$?

3.Що називається інтегральною кривою рівняння $y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0$?

4.В чому полягає процес заходження функції $y = f(x)$.

III. *Розв'язання вправ.*

***Приклад 1**. Знайти розв'язок задачі Коші*: $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання: ► Знайдемо загальний розв'язок послідовним інтегруванням даного рівняння

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int [-xe^{-x} - e^{-x} + C_1]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

$$y = (x+2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Скористаємося початковими умовами: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$$y' = e^{-x} - (x+2)e^{-x} + C_1$$

$$y'(0) = 0: \qquad 0 = e^{0} - 2e^{0} + C_1, \qquad C_1 = 1.$$

$$y(0) = 1: \qquad 1 = 2e^{0} + C_2, \qquad C_2 = -1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y = (x+2)e^{-x} + x - 1. \blacktriangleleft$$

<u>Приклад 2</u>. *Розв'язати рівняння* $y'' + y'\,tgx = \sin 2x$.

Розв'язання: ► Це рівняння не містить y. Вважаючи $y' = z$, перетворимо рівняння до виду $z' + z\,tgx = \sin 2x$.

Інтегруємо його. Вважаючи в рівнянні $z = u\,v$, $z' = u'\,v + u\,v'$, одержимо:

$$u'\,v + u\,v' + u\,v\,tgx = \sin 2x, \qquad u'\,v + u\,(v' + v\,tgx) = \sin 2x.$$

Визначаємо v, поклавши $v' + v\,tgx = 0$, $\dfrac{dv}{dx} + v\,tgx = 0$, $\int \dfrac{dv}{v} = \int -\dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx$, відкіля $\ln|v| = \ln|\cos x|$, або $v = \cos x$.

Визначимо $u(x)$:

$\cos x \dfrac{du}{dx} = 2\sin x \cos x$, $du = 2\sin x\,dx$, відкіля $u(x) = -2\cos x + C_1$; отже,

$$z = \cos x(-2\cos x + C_1).$$

Повертаючись до змінної y, маємо

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos^2 x + C_1 \cos x \qquad \Rightarrow$$

$$\int dy = -2\int \cos^2 x\,dx + \int C_1 \cos x\,dx + C_2,$$

$$y = -2\int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx + C_1 \sin x + C_2,$$

$$y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + C_1 \sin x + C_2. \blacktriangleleft$$

<u>Приклад 3</u>. *Розв'язати рівняння* $2yy'' = 1 + y'^2$.

Розв'язок. ► Вважаючи $y' = z$, $y'' = z\,z'$, отримаємо рівняння І порядку відносно невідомих y і z.

$2y\,z\,z' = 1 + z^2$.

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\frac{2z}{1+z^2}dz - \frac{dy}{y} = 0, \qquad \ln|1+z^2| - \ln|y| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{1+z^2}{y} = C_1, \quad 1+z^2 = yC_1, \quad z = \pm\sqrt{yC_1 - 1}.$$

Повертаючись до змінної x, отримаємо

$$y' = \pm\sqrt{yC_1 - 1}, \qquad \pm\frac{dy}{\sqrt{yC_1 - 1}} = dx, \qquad \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{yC_1 - 1} = x + C_2,$$

$$\pm 2\sqrt{yC_1 - 1} = C_1(x + C_2), \qquad 4(yC_1 - 1) = C_1^2(x + C_2)^2,$$

$$4yC_1 = C_1^2(x + C_2)^2 + 4, \qquad y = \frac{C_1^2(x + C_2)^2 + 4}{4C_1}. ◄$$

IV. Самостійна робота (за варіантами). Перевіряється викладачем, результати оголошуються на здачі модуля (практичної частини).

<u>Перший варіант</u>	<u>Другий варіант</u>
1.Знайти загальний розв'язок рівняння: А) $y''' = \sqrt{1 - x^2}$;	1. Знайти загальний розв'язок рівняння: А) $y''' y'' - \sqrt{1 + y''^2} = 0$;

V. Домашнє завдання: за підручником [1] розв'язати на ст. 60 (Р.L.1.7.) №1 (8-12), (19-22).

Семантичний конспект для змістовного модуля II

Диференціальні рівняння, не розв’язані відносно похідної

- Рівняння виду $F(y^{'}, y, x) = 0$, в якому шукана функція , її похідна і аргумент є в свою чергу аргумент функції F називається рівнянням, не розв’язним відносно похідної;
- Ці рівняння мають алгоритм розв’язку лише в окремих випадках;
- Рівняння виду $F(y^{'}, x) = 0$ не містить шуканої функції і його можна розв’язати відносно x;
- Рівняння виду $F(y^{'}, y) = 0$ не містить аргумент x і його можна розв’язати відносно y;
- Існують особливі типи рівнянь, що не розв’язуються відносно похідної, в які y та x входять лінійно, а коефіцієнт є функцією від похідної:
  - рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y^{'}) + \phi(y^{'})$
  - рівняння Клеро $y = xy^{'} + \phi(y^{'})$;

Диференціальні рівняння вищих порядків

- Диференціальне рівняння вищого порядку називається рівняння виду $F\,(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$,

x – незалежна змінна,

y – шукана функція,

$y', ..., y^{(n)}$ - похідні, причому $y^{(n)}$ входить в рівняння обов’язково;

- Якщо рівняння $F\,(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ можна представити у вигляді $y^{n} = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}) = 0$, то його називають розв’язком відносно n-похідної;
- Функцію $y = f(x)$ називають розв’язком рівняння $y^{n} = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}) = 0$ при умові, коли вона є непарною та

диференційованою на проміжку [a,b] так, що при її підстановці та підстановці її похідних рівняння $y^{n} = f(x, y, y^{'},..., y^{(n-1)}) = 0$ перетворюється в тотожність $\varphi^{n}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x),..., \varphi^{(n-1)}) = 0$;

- ✓ Графік функції $y = f(x)$ називається інтегральною кривою рівняння $y^{n} = f(x, y, y^{'},..., y^{(n-1)}) = 0$;
- ✓ Процес знаходження функції $y = f(x)$ називається інтегруванням рівняння $y^{n} = f(x, y, y^{'},..., y^{(n-1)}) = 0$;

Індивідуальні творчі завдання до змістовного модуля II

1. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння і обчисліть значення функції, якщо $x = x_0$ до 10^{-2}.

Номер варіанта	Умова задачі
1.	$y''' = sinx, x_0 = \frac{\pi}{2}, y(0) = 1, y''(0) = 0$
2.	$y''' = \frac{1}{x}, x_0 = 2, y(1) = \frac{1}{4}, y'(1) = 0, y''(1) = 0$
3.	$y'' = \frac{1}{cos^2x}, x_0 = \frac{\pi}{3}, y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{5}$
4.	$y''' = \frac{6}{x^3}, x_0 = 2, y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1$
5.	$y'' = 4cos2x, x_0 = \frac{\pi}{4}, y(0) = 1, y'(0) = 3$
6.	$y'' = \frac{1}{x^2+1}, x_0 = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0$
7.	$xy''' = 2, x_0 = 2, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 0, y''(1) = 0$
8.	$y''' = e^{2x}, x_0 = \frac{1}{2}, y(0) = \frac{9}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}$
9.	$y''' = cos^2x, x_0 = \pi, y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{8}, y''(0) = 0$
10.	$y'' = \frac{1}{sin^2 2x}, x_0 = \frac{5}{4}\pi, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, яке можна зменшити до рівняння нижчого порядку.

1. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$	2. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$
3. $x^3y'' + x^2y' = 1$	4. $y'' + y' = sin2x$
5. $y''xlnx = y'$	6. $xy'' - y' = x^2e^x$
7. $y''xlnx = 2y'$	8.$x^2y'' + xy' = 1$
9. $y'' = \frac{y}{x}$	10. $xy'' = y'$

3. Проінтегруйте наступні рівняння.

1. $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx=0$	2. $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$
3. $(2x-y+1)dx+$ $+(2y-x-1)dy=0$	4. $xdx+ydy+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$
5. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dx-\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0$	6. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy=0$
7. $\frac{2x}{y^2}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$	8. $\left(1-e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$
9. $x(2x^2+y^2)+y(x^2+2y^2)y'=0$	10. $\left(2x+\frac{x^2+y^2}{x^2y}\right)dx-\frac{x^2+y^2}{y^2x}dy=0$

4. Задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідних

Задача 1. Знайти криву, в якої відрізок будь-якої її дотичної між координатами дорівнює a.

Задача 2. Знайти криву, в якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис дорівнює абсцисі точки дотику.

Задача 3. Знайти криву, в якої відрізок будь-якої її нормалі, який міститься між координатними осями, дорівнює a.

Задача 4. Знайти криву, кожна дотична до якої утворює з осями координат трикутник з площею $2a^2$.

Задача 5. Знайти криву, кожна дотична до якої відтинає на осях координат такі відрізки, що сума величин, обернено квадратам довжин цих відрізків дорівнює 1.

Задача 6. Знайти криву, яка проходить через початок координат і таку, що відрізок нормалі до неї, який відтинається сторонами першого координатного кута, має постійну довжину, рівну 2.

Задача 8. Знайти криві, для яких відрізок, що відтинається дотичною на осі Ох, дорівнює радіус-вектору точки дотику.

Задача 9. Знайти криві, для яких довжина відрізка нормалі рівна радіус-вектору точки дотику.

Задача 10. Знайти криву, дотичні до якої відтинають на осях координат відрізки, сума яких 2а.

5. Задачі про траєкторії

Задача 1. Знайти ортогональні траєкторії кіл з центром в початку координат $x^2+y^2=R^2$.

Задача 2. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї $r=2a\sin\varphi$.

Задача 3. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину α) сім'ї кіл $\rho=a\cos\theta$.

Задача 4. Знайти ізогональні траєкторії (кут перетину $\alpha = \pi/4$) сім'ї прямих $y = ax$.

Задача 5. Знайти криві, які перетинають криві сім'ї $x^2 + y^2 = a^2$ під кутом α.

Задача 6. Знайти криві, які перетинають криві сім'ї $xy = a$ під кутом $\pi/4$.

Задача 7. Знайти криві, які перетинають усі криві сім'ї логарифмічних спіралей $r = ae^{\theta}$ під кутом $\pi/4$.

Задача 8. Знайти ізогональні траєкторії сімей кривих, заданих полярними координатами $\rho = c(1 - \cos\theta)$.

Задача 9. Знайти ортогональні траєкторії сімей ліній кардіоїд $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Задача 10. Знайти ортогональні траєкторії сімей ліній спів фокусних парабол $y^2 = 2p(x + p/2)$

Модульна контрольна робота до змістовного модуля ІІ

1. Диференційні рівняння вищого порядку стосовно функції у(х) має вигляд:

а) $F\left(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x), \varphi^{''}(x)\right) \equiv 0,$

б) $F\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}\right) = 0,$

в) $F(x, y^{'}, y^{''}) = 0.$

2. Функція *(вписати відповідь)* де C_1 і C_2 довільні сталі називається загальним розв’язком диференційованого рівняння другого порядку, якщо вона є розв’язком цього рівняння для розв’язком функції C_1 і C_2 і з якої за рахунок вибору значень цих сталих можна отримати будь-який розв’язок цього рівняння (за винятком може окремих).

3. Співвідношення $\varphi(\tilde{o}, \acute{o}, C_1, C_2) = 0,$ яким певно додається загальний розв’язок диференціального рівняння 2-го порядку, називається *(вписати відповідь)* цього рівняння.

4. Диференціальне рівняння не містить невідомої функції *у*, тобто має вигляд:

а) $F(x, y^{'}, y^{''}) = 0.$

б) $F\left(x, \varphi(\tilde{o}), \varphi^{'}(\tilde{o}), \varphi^{''}(x)\right) \equiv 0,$

в) $F\left(x, y, y^{'}, ..., y^{(n)}\right) = 0,$

5. Розв’язок який отримуємо із загального диференціального рівняння 2-го порядку, падаючи C_1 **і** C_2 певних числових значень, називається числовим *(вписати відповідь)* цього рівняння.

6. Графік функції $\acute{o} = \varphi(\tilde{o})$ називається при цьому *(вписати відповідь)* диференціального рівняння (3) чи (4).

7. Співвідношення **…** яким певно додається загальний розв’язок диференціального рівняння 2-го порядку, називається загальним інтегралом цього рівняння:

а) $F\left(x, \varphi(\tilde{o}), \varphi^{'}(\tilde{o}), \varphi^{''}(x)\right) \equiv 0,$

б) $\varphi(\tilde{o}, \acute{o}, C_1, C_2) = 0,$

в) $y_1 = \tilde{o}^2 \cdot Z$

8. З теореми існування та розв'язку задачі Коші для рівняння (4) випливає, що при виконанні умов теореми в деякому околі точки $\tilde{o}_0$ існує загальний розв'язок $\acute{o} = \varphi(\tilde{o}, C_1, C_2)$ цього рівняння, з розв'язком якого отримати розв'язок задачі Коші, визначивши значення сталих $\tilde{N}_1$ і $\tilde{N}_2$ із системи рівнянь:

а) $F(y, z, z\dfrac{dz}{dy}) = 0.$

б) $\left[\begin{array}{l} z = 0, \\ z = \dfrac{y}{y-a}. \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} \varphi(\tilde{o}_{0,} \tilde{N}_1 \tilde{N}_2) = \acute{o}_0, \\ \varphi'_{\tilde{o}}(x_0, C_1 C_2) = y_1 \end{cases}$

9. Поставте у відповідність:

1) $F(x, y, y') = 0$	а) рівняння Лагранжа
2) $y = xy' + \psi(y')$	б) загальний вид диференціального рівняння першого прядку, що не розвязується відносно похідної
3) $y = x\varphi(y') + \psi(y')$	в) рівняння Клеро

10. Знайти розв'язок диференційованого рівняння $\acute{o}'' = 6x,$ що задовольняє умови $\acute{o}(o) = 1,\ \acute{o}'(o) = 0.$

Підсказка 1. Загальний розв'язок цього рівняння легко знайти шляхом інтегрування заданої рівності, бо тоді розв'язком функції $y = y(x)$, друга похідна яких дорівнює 6х.

11. Проінтегрувати рівняння $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 5x,$ знаючи, що $y_1 = \tilde{o}^2$ є розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Підсказка 1. Прийдіть до $y_1 = \tilde{o}^2 \cdot z$ і обчислемо похідні $y' = 2xz + x^2 z',\ y'' = 2z + 4xz' + x^2 z''.,$ підставте вирази для y, y', y'' у дане вам рівняння.

Підсказка 2. Виконайте заміну z’=u і отримаєте лінійне диференціальне рівняння першого порядку, проінтегруйте відповідне однорідне рівняння:

12. Знайти обливий розв’язок рівняння $y = x + 2y' - (y')^2$.

Підсказка 1. Використайте систему і знайдіть дискримінантну криву

$$\begin{cases} y - x - 2y' + (y')^2 = 0 \\ 2 - 2y' = 0 \end{cases}.$$

Підсказка 2. Перевірте чи дотикаються до знайденої вами прямої в кожній її точці інші інтегральні криві даного рівняння.

Підсказка 3. Для знаходження функції використовуємо метод введення параметру.

Література до змістовного модуля II

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
6. Кисилев А.И., Краснов М.А., Макаренко Т.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
7. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений.
8. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
12. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
13. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1991. – 366 с.
14. Бацевич О.Ф. Диференціальні рівняння. Курс лекцій для студентів базового напряму «Електромеханіка». Львів: Львівська політехніка, 2007. – 40 с.

Розділ III. Методичні особливості вивчення змістовного модуля III «Лінійні диференціальні рівняння»

Мета вивчення даного модуля: формування у студентів теоретичних та практичних знань з теорії лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

В результаті вивчення даного змістовного модуля студенти повинні
знати:

- формулювання основних означень, понять, теорем, та їх доведення в межах програми;
- методи розв'язання лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

уміти:

- застосовувати теоретичний матеріал до розв'язання рівнянь, які пропонуються як у даному модулі, так і в процесі подальшого навчання;
- складати характеристичне рівняння;
- розв'язувати лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.

здатні:

- знаходити загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами;
- знаходити частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами методом варіації довільних сталих;
- знаходити частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.

База для вивчення змістовного модуля.

Знання зі шкільного курсу математики:
вміння розв'язувати квадратне рівняння;
вміння розв'язувати систему рівнянь.

Знання з математичного аналізу:
диференціальне числення (знання означення похідної, її властивостей, вміння знаходити похідну різних функцій);
інтегральне числення (знання означення інтегралу, його властивостей, вміння інтегрувати різні функції).

Знання з лінійної алгебри:
означення комплексного числа.

Логічна структура вивчення матеріалу змістовного модуля I

Розробка лекцій для змістовного модуля III

Лекція 1

Тема: «Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Однорідні лінійні рівняння. Основні властивості однорідних лінійних рівнянь. Лінійно залежні функції. Вронскіан та його властивості.»

Цілі заняття:

- *дидактичні* – вивчення основних теоретичних знань з теми;
- *розвивальні* – розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні однорідні рівняння, частинний розв’язок, загальний розв’язок, Вронскіан, лінійна комбінація.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

Література:

- *Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., переоб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..*
- *Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.*

1. **Організаційний момент**.
2. **Мотивація навчальної діяльності**.
3. **Виклад теоретичного матеріалу**.

Означення 1. Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) . \qquad (1)$$

Воно лінійне відносно шуканої функції y і її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Функції $a_i(x)\ (i=1,2,...,n)$, які називаються коефіцієнтами цього рівняння, а також функцію $f(x)$ вважатимемо відомими та неперервними на інтервалі $(a;b)$.

Означення 2. Якщо $f(x)\neq 0$, то рівняння (1) називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку. Якщо ж $f(x)=0$, то рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Основні властивості лінійних однорідних рівнянь.

Надалі розглядатимемо лінійні однорідні рівняння другого порядку.

Теорема 1. Якщо y_1 та y_2 - два частинних розвязки лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (3)$$

тоді y_1+y_2 є також розв'язком цього рівняння.

► Так як y_1 та y_2 - розв'язки рівняння (3), маємо

$$\left.\begin{array}{l} y_1''+a_1y_1'+a_2y_1=0 \\ y_2''+a_1y_2'+a_2y_2=0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Підставляючи в рівняння (3) суму y_1+y_2 і враховуючи систему (4), ми одержимо

$$\begin{aligned}&(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=\\&=(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)=\\&=0+0=0\end{aligned}$$

Отже, y_1+y_2 є розв'язком рівняння (3).◄

Теорема 2. Якщо y_1 є розв'язком рівняння (3) і С є константа, тоді cy_1 також є розв'язком рівняння (3).

► Підставляючи в (3) вираз cy_1, ми отримаємо

$$(cy_1)''+a_1(cy_1)'+a_2cy_1=c(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)=c\cdot 0=0.$$

Отже теорему доведено. ◄

Означення 3. Лінійною комбінацією функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ називається вираз виду

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

де $c_1, c_2, ..., c_n$ будь-які константи.

Теорема 3. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є частинним розв’язком рівняння (3), тоді їх лінійна комбінація $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ є також розв’язком даного рівняння.

► Доведення теореми виконати самостійно, використовуючи теореми 1 та 2. ◄

Означення 4. Два розв’язки рівняння (3) y_1 та y_2 називаються лінійно незалежними на інтервалі $[a,b]$, якщо їх частка на цьому відрізку не є константою, тобто $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const.$ Інші розв’язки називаються лінійно залежними. Іншими словами, два розв’язки y_1 та y_2 є лінійно залежними на інтервалі $[a,b]$, якщо існує константа λ, така, що $\dfrac{y_1}{y_2} = \lambda$, коли $x \in [a,b]$. Тоді $y_1 = \lambda y_2$.

Означення 5. Система рівнянь є лінійно залежною на інтервалі $[a,b]$, якщо існує таке n число $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які не дорівнюються нулю, і лінійна комбінація розв’язків системи дорівнює нулю.

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0. \tag{5}$$

Якщо ми припустимо, що $\lambda_n \neq 0$, тоді рівність (5) матиме вигляд

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + ... + \beta_{n-1} y_{n-1} \tag{6}$$

Де $\beta_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}$, $(i = \overline{1, n-1})$. Звідси матимемо наступне означення

Означення 6. Система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ є лінійно залежною, якщо принаймні одна з цих функцій є лінійною комбінацією інших.

Означення 7. Якщо ми не можемо вибрати такі коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, щоб задовольнити тотожність (5), тоді система функцій називається лінійно незалежною.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Нехай $y_1 = \cos^2 x$, $y_3 = a$. Ця система функцій лінійно залежна на будь-якому інтервалі. Дійсно, коли $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -\dfrac{1}{a}$, маємо

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

Означення 8. Якщо система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ диференційована $(n-1)$ раз, тоді визначник виду

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

називається Вронскіаном даних функцій.

Наприклад, коли $n = 3$, Вронскіан системи функцій y_1, y_2, y_3 має вигляд

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_3 \\ y_1' & y_2' & \dots & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_3'' \end{vmatrix}$$

Теорема 4. Якщо функції y_1, y_2, y_3 лінійно залежні, тоді Вронскіан цієї системи дорівнює нулю.

► Нехай функції y_1, y_2, y_3 є лінійно залежними, тоді існують такі коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, для яких

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

або $y_3 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2$, де $\lambda_3 \neq 0$ і $\beta_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_3}$, $(i = 1, 2)$. Тоді Вронскіан може бути записаний у вигляді

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_3 \\ y_1' & y_2' & \dots & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \beta_1 y_1+\beta_2 y_2 \\ y_1' & y_2' & \beta_1 y_1'+\beta_2 y_2' \\ y_1'' & y_2'' & \beta_1 y_1''+\beta_2 y_2'' \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \beta_1 y_1 \\ y_1' & y_2' & \beta_1 y_1' \\ y_1'' & y_2'' & \beta_1 y_1'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \beta_2 y_2 \\ y_1' & y_2' & \beta_2 y_2' \\ y_1'' & y_2'' & \beta_2 y_2'' \end{vmatrix}$$

Беручи до уваги властивість визначника, що якщо два стовпчики визначника пропорційні, то цей визначник дорівнює нулеві, маємо $W(y_1,y_2,y_3)=0$.◄

Теорема 5. Якщо Вронскіан $W(y_1,y_2)$, який складається з розв'язків лінійного однорідного рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$, не дорівнює нулю для деякого $x=x_0$ на проміжку $[a,b]$ і всі коефіцієнти є неперервними в цьому проміжку, то він не перетворюється в нуль в жодній з точок x на цьому проміжку.

Теорема 6. Якщо розв'язки y_1,y_2 лінійного однорідного рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$ лінійно незалежні на проміжку $[a,b]$, тоді Вронскіан $W(x)$, який складений з цих розв'язків, не перетворюється в нуль в жодній точці даного проміжку.

Означення 9. Система частинних розв'язків $y_1,y_2,...,y_n$ лінійного однорідного рівняння n-го порядку називається фундаментальною, якщо вона складається з n лінійно незалежних функцій.

Теорема 7. Якщо $y_1,y_2,...,y_n$ є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

тоді їх лінійна комбінація

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$$

є загальним розв'язком рівняння (2), де $c_1,c_2,...,c_n$ - довільні константи.

► Розглянемо доведення цієї теореми для однорідного лінійного рівняння другого порядку. З теорем 4 і 5 випливає, що функція $c_1y_1 + c_2y_2$ є розв'язком рівняння (3) для будь-яких значень c_1, c_2. Доведемо, що для будь-яких частинних умов $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ можна вибрати такі довільні константи c_1 та c_2, що частинний розв'язок $c_1y_1 + c_2y_2$ буде задовольняти даним частинним умовам.

Підставимо частинні умови у лінійну комбінацію розв'язків і отримаємо

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= c_1y_{10} + c_2y_{20} \\ y_0' &= c_1y_{10}' + c_2y_{20}' \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

З системи (7) ми можемо знайти c_1 та c_2, звідси визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = y_{10}y_{20}' - y_{20}y_{10}'$$

є Вронскіаном для $x = x_0$ і не отже, не дорівнює нулю. Частинний розв'язок $c_1y_1 + c_2y_2$ для будь-яких c_1 та c_2 задовольняє заданим умовам. Отже, теорему доведено. ◄

Доведемо теорему, яка дозволить нам не знаходити загальний розв'язок однорідного рівняння другого порядку, якщо відомий частинний розв'язок.

Теорема 8. *Якщо ми знаємо частинний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку, знаходження загального розв'язку зводиться до інтегрування функцій.*

► Нехай y_1 - частинний розв'язок рівняння $y'' + a_1y' + a_2y = 0$. Ми знайшли ще один розв'язок даного рівняння, і y_1 та y_2 є лінійно незалежними. Тоді загальний розв'язок буде виражатися формулою $y = c_1y_1 + c_2y_2$, де c_1 та c_2 - довільні константи.

$$y_2{}'y_1 - y_1{}'y_2 = ce^{-\int a_1dx}$$

Отримали лінійне рівняння першого порядку. Розв'яжемо його

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2};$$

звідси

$$y_2 = cy_1 \int \frac{1}{y_y^2} e^{-\int a_1 dx} dx + c_1 y_1 .$$

Прийнявши $c_1 = 0, c = 1$, знаходимо частинний розв'язок.

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_y^2} e^{-\int a_1 dx} dx$$

Так як y_1 та y_2 лінійно незалежні і $\frac{y_2}{y_1} \neq const$, то загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_y^2} e^{-\int a_1 dx} dx . \blacktriangleleft$$

4. Підведення підсумків заняття.

Сьогодні на занятті ми розглянули Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Однорідні лінійні рівняння. Основні властивості однорідних лінійних рівнянь. Лінійно залежні функції. Вронскіан та його властивості.

Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням? Яке рівняння називається однорідним лінійним рівнянням? Що таке лінійна комбінація? Які функції є лінійно незалежні? Які функції є лінійно незалежні? Що таке Вронскіан?

Що залишилось незрозумілим?

<u>**Лекція 2**</u>

Тема: «*Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальні розв'язки рівнянь.*»

Цілі заняття:

- *дидактичні* – вивчення основних теоретичних знань з теми;
- *розвивальні* – розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні однорідні рівняння, частинний розв'язок, загальний розв'язок, Вронскіан, лінійна комбінація, характеристичне рівняння.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

Література:

- *Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..*
- *Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.*

4. **Організаційний момент**.
5. **Мотивація навчальної діяльності**.

На попередній лекції ми розглянули лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Однорідні лінійні рівняння. Основні властивості однорідних лінійних рівнянь. Лінійно залежні функції. Вронскіан та його властивості. Сьогодні ми розглянемо, як записувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння в залежності від коренів характеристичного рівняння.

6. **Виклад теоретичного матеріалу**.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння n-го порядку

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ - дійсні константи. Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння, необхідно знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків. Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $y = e^{kx}$. Звідси

$$y' = ke^{kx},\; y'' = k^2 e^{kx},\; y''' = k^3 e^{kx}, \ldots,\; y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Підставляємо у наше рівняння і маємо

$$L[e^{kx}] = k^n e^{kx} + k^{n-1} p_1 e^{kx} + k^{n-2} p_2 e^{kx} + \ldots + p_n e^{kx} = 0$$

або

$$e^{kx}(k^n + k^{n-1} p_1 + k^{n-2} p_2 + \ldots + p_n) = 0$$

Так як $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^n + k^{n-1} p_1 + k^{n-2} p_2 + \ldots + p_n = 0 \qquad (2)$$

Звідси, якщо k задовольняє рівняння (2), то e^{kx} буде розв'язком (1). Рівняння (2) називається характеристичним рівнянням для рівняння (1).

Нехай, $k_1, k_2, ..., k_n$ - корені характеристичного рівняння (2). Розглянемо наступні випадки:

1. Корені характеристичного рівняння дійсні та різні.

Тоді частинними розв'язками будуть функції

$$y_1 = e^{k_1 x},\; y_2 = e^{k_2 x},\; y_3 = e^{k_3 x},\; \ldots,\; y_n = e^{k_n x} \qquad (3)$$

Покажемо, що ця система буде фундаментальною, тобто що функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні. Для цього складемо Вронскіан цієї системи функцій. Для $n = 3$ Вронскіан має вигляд

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k^2{}_1 e^{k_1 x} & k^2{}_2 e^{k_2 x} & k^2{}_3 e^{k_3 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + k_2 + k_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k^2{}_1 & k^2{}_2 & k^2{}_3 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

В загальному випадку, Вронскіан системи (3) є визначником n-го порядку, тобто

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = e^{(k_1+k_2+...+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ k_1 & k_2 & ... & k_n \\ ... & ... & ... & ... \\ k^2{}_1 & k^2{}_2 & ... & k^2{}_n \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Застосуємо метод обчислення визначника (4), який ми можемо примінити для загального випадку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k^2{}_1 & k^2{}_2 & k^2{}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1 - k_3 & k_2 - k_3 & k_3 \\ k^2{}_1 - k^2{}_3 & k^2{}_2 - k^2{}_3 & k^2{}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (k_1 - k_3)(k_3 - k_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 + k_3 & k_2 + k_3 \end{vmatrix} = (k_1 - k_3)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1)$$

Звідси, для системи трьох функцій

$$W[y_1, y_2, y_3] = e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_1 - k_3)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1) =$$
$$(-1)^3(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)$$

Можемо показати, що для загального випадку справедлива аналогічна формула

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = e^{(k_1+k_2+...+k_n)x}(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)...(k_{n-1} - k_n) =$$
$$= (-1)^n(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)...(k_{n-1} - k_n)$$

Так як усі корені $k_1, k_2, ..., k_n$ характеристичного рівняння різні за припущенням і функція e^{kx} не дорівнює нулю для будь-якого x, то

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0.$$

Таким чином, ми довели, що усі корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тоді система частинних розв'язків (3) буде фундаментальною. Отже, запишемо лінійну комбінацію функцій цієї системи

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{k_n x} \qquad (6)$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

► Характеристичне рівняння даного лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

Його корені $k_1 = 1,\ \ k_2 = 2.$

Частинні розв'язки $y_1 = e^x$ та $y_2 = e^{2x}$.

Отже, загальний розв'язок $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.◄

2. Корені характеристичного рівняння комплексні.

Оскільки коефіцієнти рівняння (1) дійсні, то маємо два спряжені комплексні кореня

$$k_1 = \alpha + i\beta \text{ та } k_2 = \alpha - i\beta .$$

Ми знаємо, що y_1 та y_2 є частинними розв'язками лінійного однорідного рівняння, тоді функція $y_1 + y_2$ є загальним розв'язком даного рівняння. Покажемо, що функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ є частинними розв'язками рівняння лінійного однорідного рівняння другого порядку

$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ (7).

Знайшовши похідні y_1', y_1'' та підставивши їх до рівняння (7), маємо

$e^{\alpha x}((\alpha^2 - \beta^2 + p_1\alpha + p_2)\cos\beta x + (-2\alpha\beta - p_1\beta)\sin\beta x) = 0$ (8)

Оскільки $\alpha = -\dfrac{p_1}{2}$, $\beta = \sqrt{p_2 - \dfrac{p_1^2}{4}}$, то

$\alpha^2 - \beta^2 + p_1\alpha + p_2 = 0$, $-2\alpha\beta - p_1\beta = 0$.

Тому права частина виразу (8) тотожно дорівнює нулю в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ і, отже, функція $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ є розв'язком рівняння (7). Аналогічно можна показати, що функція $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ також є розв'язком цього рівняння. Ці два розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (7), оскільки визначник Веронського цієї системи функцій, як неважко побачити, відмінний від нуля в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Отже, у випадку уявних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad (9)$$

Приклад 2. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y''' - 8y = 0$.

► Характеристичне рівняння має вигляд $k^3 - 8 = 0$.

Корені рівняння $k_1 = 2$, $k_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $k_3 = -1 - i\sqrt{3}$.

Частинні розв'язки даного рівняння $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$, $y_3 = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$.

Загальний розв'язок рівняння $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$.◄

3. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні.

Нехай $k_1 = k_2$. Один з частинних розв'язків $y_1 = e^{k_1 x}$ випливає з викладеного вище. Мусимо знайти другий частинний розв'язок, який лінійно незалежний від першого.

Будемо шукати другий частинний розв'язок у вигляді $y_2 = z(x)e^{k_1 x}$, де $z(x)$ - невідома функція, яку необхідно визначити. Диференціюємо y_2 та підставляємо y_2' та y_2'' у лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Маємо

$$e^{k_1 x}(z'' + (2k_1 + p_1)z' + (k_1^2 + p_1 k_1 + p_2)) = 0$$

Так як k_1 - кратний корінь характеристичного рівняння, маємо

$$k_1^2 + p_1 k_1 + p_2 = 0$$

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2} \text{ або } 2k_1 + p_1 = 0.$$

Звідси, щоб знайти $z(x)$, ми маємо розв'язати рівняння $e^{k_1 x} z'' = 0$ або $z'' = 0$.

Інтегруючи, одержимо $z = Ax + B$. Припустимо, що $A = 1, B = 0$, тоді $z = x$.

Звідси, другий частинний розв'язок має вигляд $y_2 = xe^{k_1 x}$.

Загальний розв'язок в даному випадку має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}.$$

Приклад 3. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y^V + 8y''' + 16y' = 0$.

►Характеристичне рівняння має вигляд $k^5+8k^3+16k=0$.
Корені характеристичного рівняння $k_1=0,\ k_2=2i,\ k_3=-2i,\ k_4=2i,\ k_5=-2i.$
Тоді загальний розв’язок матиме вигляд

$$y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x+c_4x\cos 2x+c_5x\sin 2x. \blacktriangleleft$$

4. Підведення підсумків заняття.

Сьогодні на занятті ми розглянули лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальні розв’язки рівнянь лінійних однорідних рівнянь.

Яке рівняння називається однорідним лінійним рівнянням? Яке рівняння називається характеристичним рівнянням? Як шукати загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння в залежності від коренів характеристичного рівняння?

Що залишилось незрозумілим?

Лекція 3

Тема: «Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільних сталих.»

Цілі заняття:

- *дидактичні* – вивчення основних теоретичних знань з теми;
- *розвивальні* – розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні неоднорідні рівняння, частинний розв’язок, загальний розв’язок, характеристичне рівняння, метод варіації довільних сталих.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

Література:

- *Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..*
- *Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.*

1. **Організаційний момент**.

- **Мотивація навчальної діяльності**.

На попередній лекції ми розглянули лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальні розв’язки лінійних однорідних рівнянь. Сьогодні ми розглянемо, як розв’язувати лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою методу варіації довільних сталих.

- **Виклад теоретичного матеріалу**.

Нехай, маємо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

Теорема 1. Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння (1) представлений у вигляді суми деякого частинного розв’язку y^* та загального розв’язку лінійного однорідного рівняння даного неоднорідного

$$\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0, \qquad (2)$$

тобто

$$y = \bar{y} + y^*. \qquad (3)$$

Так як ми знаємо, як шукати загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння (2), то найбільша складність виникає при знаходженні частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння (1). Знайдемо його за допомогою ***метода варіації довільних сталих***.

Запишемо загальний розв'язок однорідного рівняння (2) у вигляді

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 \qquad (4)$$

Будемо шукати частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) у вигляді (4), приймаючи $c_1(x), c_2(x)$ як деякі невизначені функції від x.

Диференціюємо (4):

$$y' = c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'.$$

Тепер виберемо шукані функції $c_1(x), c_2(x)$ так, щоб задовольнити наступне рівняння:

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \quad (5)$$

Якщо ми приймемо до уваги (5), то тоді $y' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$.

Диференціюємо цей вираз і знаходимо y''.

$$y'' = c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''.$$

Підставимо y, y', y'' у (1) та одержимо

$$c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$$

Так як y_1, y_2 - розв'язки однорідних рівнянь, то перші два доданки перетворюються в нуль. Отже, маємо

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \quad (6)$$

Звідси, функція (4) буде розв'язком неоднорідного рівняння (1), $c_1(x), c_2(x)$ задовольняють системі рівнянь (5) і (6), тобто

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Так як визначник цієї системи є Вронскіаном для лінійно незалежних функцій y_1, y_2, який не дорівнює нулю. Звідси, розв'язавши систему, ми знайдемо $c_1'(x), c_2'(x)$:

$$c_1'(x) = \varphi_1(x), \quad c_2'(x) = \varphi_2(x).$$

Інтегруючи, ми отримаємо

$$c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + A_1, \; c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + A_2,$$

де A_1, A_2 - константи інтегрування.

Підставляючи у (4) одержані $c_1(x), c_2(x)$, ми знайдемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + A_1 y_1 + A_2 y_2 .$$

Якщо ми покладемо $A_1 = A_2 = 0$, то ми знайдемо частинний розв'язок рівняння (1).

Приклад 1. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' + 4y = \tan 2x$.

► Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$.

$$k_1 = 2i, k_2 = -2i .$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x .$$

Покладаємо, що $c_1(x), c_2(x)$ - деякі функції, що залежать від *x*.

$$y = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$$

Для того, щоб записати загальний розв'язок заданого рівняння, необхідно знайти $c_1(x), c_2(x)$ з системи:

$$\begin{cases} c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0 \\ -2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = \tan 2x \end{cases}$$

Маємо $c_1'(x) = -\dfrac{1}{2}\tan 2x \sin 2x$, $c_2'(x) = \dfrac{1}{2}\tan 2x \cos 2x$.

Після інтегрування ми отримаємо $c_1(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \tan 2x \sin 2x dx + A_1$,

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\int \tan 2x \cos 2x dx + A_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + A_2 .$$

Підставляючи отримані функції в формулу $y = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$, ми отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x \int \tan 2x \sin 2x dx - \frac{1}{8}\sin 4x + A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x .$$ ◄

Приклад 2. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

► Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

Так як $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{1}{x}$, ми маємо

$$\ln y' = \ln x + \ln c$$

$$y' = cx \qquad\qquad y = c_1 x^2 + c_2$$

Для того, щоб записати загальний розв'язок заданого рівняння, необхідно знайти $c_1(x), c_2(x)$ з системи:

$$\begin{cases} c_1' x^2 + c_2' = 0 \\ 2c_1' x + c_2' 0 = x \end{cases}$$

Розв’язавши систему, ми знайдемо $c_1' = \dfrac{1}{2}, c_2' = -\dfrac{1}{2}x^2$

Після інтегрування ми отримаємо $c_1 = \dfrac{1}{2}x + A_1$, $c_2 = -\dfrac{1}{6}x^3 + A_2$.

Підставляючи отримані функції в формулу $y = c_1 x^2 + c_2$, ми отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = A_1 x^2 + A_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = A_1 x^2 + A_2 + \frac{x^3}{3}. \blacktriangleleft$$

4. Підведення підсумків заняття.

Сьогодні на занятті ми розглянули лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільних сталих Яке рівняння називається неоднорідним лінійним рівнянням? Яке рівняння називається характеристичним рівнянням? Як шукати загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння?

Що залишилось незрозумілим?

Лекція 4

Тема: «Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів»

Цілі заняття:

- *дидактичні* – вивчення основних теоретичних знань з теми;
- *розвивальні* – розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні неоднорідні рівняння, характеристичне рівняння, метод невизначених коефіцієнтів.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

План лекції.

Література:

- *Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..*
- *Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.*

7. **Організаційний момент**.
8. **Мотивація навчальної діяльності**.

На попередній лекції ви розглянули метод варіації довільних постійних. Але деякі рівняння розв’язувати цим методом нераціонально. В деяких випадках більш доцільно використовувати метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо використання цього методу на прикладі рівняння другого порядку.

9. **Виклад теоретичного матеріалу**.

Нехай, маємо рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

- неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння (1), а y^* - частинний розв'язок рівняння (1), який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

I. Припустимо, що функція $f(x)$, яка стоїть у правій частині рівняння (1), має вигляд:

$$f(x) = P_m(x) \cdot e^{\alpha x},$$

де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m$ - алгебраїчний многочлен степеня $m \geq 0$, α - дійсне число, що може дорівнювати й нулю.

Розглянемо наступні випадки:

1) α не є коренем характеристичного рівняння даного неоднорідного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{2}$$

В цьому випадку частинний розв'язок рівняння може бути представлений у вигляді

$$y^* = Q_m(x) e^{\alpha x} \tag{3}$$

Знайдемо першу і другу похідну (3) і підставимо у (1) замість y:

$$y' = Q_m{}'(x) \cdot e^{\alpha x} + \alpha Q_m(x) \cdot e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\left(Q_m{}'(x) + \alpha Q_m(x)\right)$$
$$y'' = \alpha e^{\alpha x}\left(Q_m{}'(x) + \alpha Q_m(x)\right) + e^{\alpha x}\left(Q_m{}''(x) + \alpha Q_m{}'(x)\right) =$$
$$= e^{\alpha x}\left(Q_m{}''(x) + 2\alpha Q_m{}'(x) + \alpha^2 Q_m(x)\right)$$

Маємо:

$$e^{\alpha x}\left(Q_m{}''(x) + 2\alpha Q_m{}'(x) + \alpha^2 Q_m(x)\right) + pe^{\alpha x}\left(Q_m{}'(x) + \alpha Q_m(x)\right) + qe^{\alpha x} Q_m(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$$

Скорочуємо на $e^{\alpha x}$ та групуємо члени:

$$Q_m''(x)+(2\alpha+p)Q_m'(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_m(x)=P_m(x) \quad (4)$$

У правій і лівій частинах рівності (4) стоять алгебраїчні многочлени. Два алгебраїчні многочлени рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти, які стоять перед відповідними степенями x. Зрівнявши коефіцієнти, які стоять при однакових степенях x і в лівій, і в правій частинах рівності (4), дістанемо систему з $m+1$ невідомими коефіцієнтами многочлена $Q_m(x)$, звідки і знайдемо ці коефіцієнти. У цьому разі функція (3) буде частинним розв'язком рівняння (1).

Приклад 1. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y''+y'-6y=3x$.

► Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y=\bar{y}+y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння, який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розв'яжемо однорідне рівняння $y''+y'-6y=0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2+k-6=0$$

$$k_1=-3,\ k_2=2.$$

$$y_1=C_1e^{-3x},\ y_2=C_2e^{2x}$$

Отже, $\bar{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$.

Знайдемо y^*. В нашому випадку $f(x)=3x=P_1(x),\ \alpha=0$ і не є коренем характеристичного рівняння. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді $y^*=Q_m(x)e^{\alpha x}$.

$y^*=Q_1(x)e^{0x}=Q_1(x)=q_0x+q_1$

Знаходимо першу та другу похідну:

$y'=q_0,\quad y''=0$

Підставляємо у початкове рівняння:

$$0 + q_0 - 6(q_0 x + q_1) = 3x$$
$$-6q_0 + q_0 - 6q_1 = 3x$$

Зрівнюємо коефіцієнти, які стоять при однакових степенях x і в лівій, і в правій частинах отриманого рівняння:

$$\begin{cases} -6q_0 = 3, \\ q_0 - 6q_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = -\dfrac{1}{2}, \\ q_1 = -\dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Отже, $y^* = q_0 x + q_1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$.

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}. ◄$$

2) α - простий корінь характеристичного рівняння (2). У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r Q_m(x) e^{\alpha x} \qquad (5)$$

де $Q_m(x)$ - многочлен того ж степеня, що й $P_m(x)$,

r - кратність, з якою входить α в число коренів характеристичного рівняння (2).

Приклад 2. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

► Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння, який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2 - 2k + 1 = 0$

$$k_1 = k_2 = 1.$$

$$y_1 = C_1 e^x, \; y_2 = C_2 x e^x$$

Отже, $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Знайдемо y^*. В нашому випадку $f(x) = 3e^x = P_0(x)e^x$, $\alpha = 1$ і є коренем характеристичного рівняння кратності 2. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді $y^* = x^r Q_m(x) e^{\alpha x}$.

$$y^* = x^2 Q_0(x) e^x = x^2 q_1 e^x.$$

Знаходимо першу та другу похідну:

$$y' = x^2 e^x q_1 + 2q_1 x e^x = e^x (q_1 x^2 + 2q_1 x)$$
$$y'' = e^x (q_1 x^2 + 2q_1 x) + e^x (2q_1 x + 2q_1) = e^x (q_1 x^2 + 4q_1 x + 2q_1)$$

Підставляємо у початкове рівняння:

$$e^x (q_1 x^2 + 4q_1 x + 2q_1) - 2e^x (q_1 x^2 + 2q_1 x) + q_1 x^2 e^x = 3e^x$$

$$q_1 x^2 + 4q_1 x + 2q_1 - 2q_1 x^2 - 4q_1 x + q_1 x^2 = 3$$

$$2q_1 = 3 \qquad q_1 = \frac{3}{2}$$

Отже, $y^* = x^2 q_1 e^x = \frac{3}{2} x^2 e^x$.

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x. \blacktriangleleft$$

II. Припустимо, що функція $f(x)$, що стоїть у правій частині рівняння (1), має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x + e^{\alpha x} P_m(x) \sin \beta x \qquad (6)$$

де $P_n(x)$ і $P_m(x)$ - алгебраїчні многочлени, α і β - дійсні числа, причому α може дорівнювати 0, а $\beta \neq 0$.

Розглянемо наступні випадки:

1) якщо число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння (2), тоді частинний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y^* = u_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (7)$$

де $u_k(x)$ та $v_k(x)$ - поліноми степеня k, що дорівнює вищому із степенів многочленів $P_n(x)$ і $P_m(x)$:

$$k = \max(n, m)$$

Приклад 3. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' - 2y' + y = 4x\sin x$.

► Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння, який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$k_1 = k_2 = 1.$$

$$y_1 = C_1e^x, \qquad y_2 = C_2xe^x$$

Отже, $\bar{y} = C_1e^x + C_2xe^x$.

Знайдемо y^*. В нашому випадку $f(x) = 4x\sin x = P_1(x)\sin\beta x$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\alpha + i\beta = i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді $y^* = u_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

$$y^* = (u_0x + u_1)\cos x + (v_0x + v_1)\sin x.$$

Знаходимо першу та другу похідну:

$$y' = u_0\cos x - (u_0x + u_1)\sin x + v_0\sin x + (v_0x + v_1)\cos x = (u_0 + v_1 + v_0x)\cos x +$$
$$+ (v_0 - u_1 - u_0x)\sin x$$
$$y'' = v_0\cos x - (u_0 + v_1 + v_0x)\sin x - u_0\sin x + (v_0 - u_1 - u_0x)\cos x =$$
$$= (2v_0 - u_1 - u_0x)\cos x - (2u_0 + v_1 + v_0x)\sin x$$

Підставляємо у початкове рівняння:

$$(2v_0 - u_1 - u_0 x)\cos x - (2u_0 + v_1 + v_0 x)\sin x - 2(u_0 + v_1 + v_0 x)\cos x -$$
$$- 2(v_0 + u_1 + u_0 x)\sin x + (u_0 x + u_1)\cos x + (v_0 x + v_1)\sin x = 4x\sin x$$

або

$$((-2u_0 + 2v_0 - 2v_1) - 2v_0 x)\cos x + ((-2u_0 - 2v_0 + 2u_1) + 2u_0 x)\sin x = 4x\sin x.$$

Зрівняємо многочлени, які стоять у значенні множників перед $\cos x$ і $\sin x$. Маємо

$$-2u_0 + 2v_0 - 2v_1 - 2v_0 x = 0$$
$$-2u_0 - 2v_0 + 2u_1 + 2u_0 x = 4x$$

Зрівнявши коефіцієнти, які стоять перед однаковими степенями x, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2u_0 + 2v_0 - 2v_1 = 0 \\ -2v_0 = 0 \\ -2u_0 - 2v_0 + 2u_1 = 0 \\ 2u_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \\ v_0 = 0 \\ v_1 = -2 \end{cases}$$

Отже, $y^* = (2x + 2)\cos x - 2\sin x.$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 x e^x + (2x + 2)\cos x - 2\sin x\,. ◄$$

2) якщо число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння (2) кратності r, то частинний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r \left(u_k(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + v_k(x) e^{\alpha x} \sin\beta x\right) \qquad (8)$$

Приклад 4. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' + y = 4x\sin x$.

► Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння, який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + y = 0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2+1=0$$

$$k_1=i,\ k_2=-i.$$

$$y_1=C_1\cos x,\ y_2=C_2\sin x$$

Отже, $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Знайдемо y^*. В нашому випадку $f(x)=4x\sin x=P_1(x)\sin\beta x,$

$\alpha=0,\quad \beta=1,\ \alpha+i\beta=i$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1.

Тому розв'язок шукатимемо у вигляді $y^*=x^r\left(u_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+v_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right)$.

$$y^*=x((u_0x+u_1)\cos x+(v_0x+v_1)\sin x).$$

Знаходимо першу та другу похідну:

$$y'=((u_0x+u_1)\cos x+(v_0x+v_1)\sin x)+x((u_0+v_1+v_0x)\cos x+(v_0-u_1-u_0x)\sin x)=$$
$$=(2u_0x+u_1+v_1x+v_0x^2)\cos x+(2v_0x+v_1-u_1x-u_0x^2)\sin x$$
$$y''=(2u_0+v_1+2v_0x)\cos x-(2u_0x+u_1+v_1x+v_0x^2)\sin x+(2v_0-u_1-2u_0x)\sin x+$$
$$+(2v_0x+v_1-u_1x-u_0x^2)\cos x=(2u_0+2v_1+4v_0x-u_1x-u_0x^2)\cos x+$$
$$+(-4u_0x-2u_1+2v_0-v_1x-v_0x^2)\sin x$$

Підставляємо у початкове рівняння:

$$(2u_0+2v_1+4v_0x-u_1x-u_0x^2)\cos x+(-4u_0x-2u_1+2v_0-v_1x-v_0x^2)\sin x+$$
$$+(u_0x^2+u_1x)\cos x+(v_0x^2+v_1x)\sin x=4x\sin x$$

або

$$(2u_0+2v_1+4v_0x)\cos x+(-4u_0x-2u_1+2v_0)\sin x=4x\sin x.$$

Зрівняємо многочлени, які стоять у значенні множників перед $\cos x$ і $\sin x$. Маємо

$$2u_0+2v_1+4v_0x=0$$
$$-4u_0x-2u_1+2v_0=4x$$

Зрівнявши коефіцієнти, які стоять перед однаковими степенями x, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2u_0 + 2v_1 = 0 \\ 4v_0 = 0 \\ -2u_1 + 2v_0 = 0 \\ -4u_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \\ v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \end{cases}$$

Отже, $y^* = x(-x\cos x + \sin x)$.

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 x e^x + x(-x\cos x + \sin x)\,.$$ ◄

III. Розглянемо важливий особливий випадок. Нехай права частина рівняння (1) має вигляд:

$$f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x \qquad (9)$$

де M та N - константи.

Розглянемо наступні випадки:

1) якщо $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння (2), частинний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x \qquad (10)$$

Приклад 5. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

► Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння, який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$k^2 + 2k + 5 = 0$

$k_{1,2} = -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\dfrac{b^2}{4} - c} = -1 \pm 2i\,.$

$y_1 = C_1 e^{-x}\cos 2x\,,\ y_2 = C_2 e^{-x}\sin 2x$

Отже, $\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)\,.$

Знайдемо y^*. В нашому випадку $f(x) = 2\cos x = M\cos\beta x,\ i\beta = i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x.$$

Знаходимо першу та другу похідну:

$$y' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y'' = -A\cos x - B\sin x$$

Підставляємо у початкове рівняння:

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 2\cos x$$

Зрівняємо многочлени, які стоять у значенні множників перед $\cos x$ і $\sin x$. Маємо

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 2 \\ -B - 2A + 5B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 2 \\ -2A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{5} \\ B = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Отже, $y^* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння:

$$y = \bar{y} + y^* = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x. ◄$$

2) якщо $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння (2) кратності r, частинний розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$y^* = x^r\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \qquad (11)$$

Приклад 6. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $y'' + y = 4\sin x$.

► Загальний розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння, який можна знайти за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розв'яжемо однорідне рівняння $y'' + y = 0$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2+1=0$$

$$k_1=-i,\ k_2=i.$$

$$y_1=C_1\cos x,\ y_2=C_2\sin x$$

Отже, $\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Знайдемо y^*. В нашому випадку $f(x)=4\sin x=M\sin\beta x,\ i\beta=i$ є коренем характеристичного рівняння кратності 1. Тому розв’язок шукатимемо у вигляді $y^*=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$.

Знаходимо першу та другу похідну:

$$y'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$$
$$y''=-A\sin x+B\cos x-A\sin x+B\cos x+x(-A\cos x-B\sin x)=$$
$$=x(-A\cos x-B\sin x)-2A\sin x+2B\cos x$$

Підставляємо у початкове рівняння:

$$x(-A\cos x-B\sin x)-2A\sin x+2B\cos x+x(A\cos x+B\sin x)=4\sin x$$
$$-2A\sin x+2B\cos x=4\sin x$$

Зрівняємо многочлени, які стоять у значенні множників перед $\cos x$ і $\sin x$. Маємо

$$\begin{cases}-2A=4\\2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=0\end{cases}$$

Отже, $y^*=x(-2\cos x+0\sin x)=-2x\cos x$

Загальний розв’язок заданого диференціального рівняння:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x.◄$$

Різні випадки знаходження частинного розв’язку рівняння (1) подані у наступній таблиці:

№		Вигляд правої частини	Корені характеристичного рівняння	Вигляд частинного розв'язку
1	a	$P_m(x)$	Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$u_m(x)$
	b		Число 0 є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r \cdot u_m(x)$
2	a	$P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$	Число α не є коренем характеристичного рівняння	$u_m(x)\cdot e^{\alpha x}$
	b		Число α є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r \cdot u_m(x)\cdot e^{\alpha x}$
3	a	$P_m(x)\cdot\cos\beta x+$ $+Q_n(x)\cdot\sin\beta x$	Число $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$u_k(x)\cos\beta x+$ $+v_k(x)\sin\beta x$
	b		Число $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r\cdot(u_k(x)\cos\beta x+$ $+v_k(x)\sin\beta x)$
4	a	$P_m(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x+$ $+Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$	Число $\alpha+i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$e^{\alpha x}\cdot(u_k(x)\cos\beta x+$ $+v_k(x)\sin\beta x)$
	b		Число $\alpha+i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r e^{\alpha x}\cdot(u_k(x)\cos\beta x+$ $+v_k(x)\sin\beta x)$

4. Підведення підсумків заняття.

Сьогодні на занятті ми розглянули ще один метод розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами – метод невизначених коефіцієнтів. Що залишилось незрозумілим? Який з методів ви вважаєте доцільніше використовувати і у яких випадках?

Розробка практичних занять для змістовного модуля ІІІ

Практичне заняття 1

Тема заняття: «Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Однорідні лінійні рівняння. Основні властивості однорідних лінійних рівнянь. Лінійно залежні функції. Вронскіан та його властивості».

Цілі заняття:

- *дидактичні* – перевірити знання студентів з даної теми, формування уміння досліджувати систему функцій на лінійну залежність на продуктивному рівні;
- *розвивальні* – розвивати продуктивне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні однорідні рівняння, частинний розв’язок, загальний розв’язок, Вронскіан, лінійна комбінація.

Література:

Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..
Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analyssis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

План заняття.

1. *Організаційний момент.*
2. *Актуалізація опорних знань.*
3. *Практична робота.*
4. *Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми.*

5. *Підведення підсумків заняття.*
6. *Оцінювання.*

Хід заняття.

1. **Організаційний момент**.
2. **Актуалізація опорних знань**.

Мета*: пригадати базові знання з курсу математичного аналізу.*

Математичний диктант

Записати похідну функції.

$$y = const; \quad y = x^{\alpha}; \quad y = a^{x}; \quad y = e^{x}; \quad y = \log_a x; \quad y = \ln x;$$
$$y = \sin x; \qquad y = \cos x; \qquad y = tgx; \qquad y = ctgx;$$
$$y = \arcsin x; \qquad y = \arccos x; \qquad y = arctgx; \qquad y = arcctgx$$

3.**Практична робота**.

Мета: перевірити знання студентів з даної теми, формування уміння досліджувати систему функцій на лінійну залежність на продуктивному рівні.

Використовується групова робота. Студенти діляться на дві групи, кожна отримує своє завдання на картках (парні номери розв’язує перша група, непарні - друга).

1. Дослідіть дані функції на лінійну залежність.

1) $x+2; \; x-2.$
2) $6x+8; \; 8x+12.$
3) $1; \; x; \; x^2.$
4) $x^2+2x; \; 3x^2-1; \; x+1.$
5) $\sin x; \; \cos x; \; \sin 2x.$
6) $\sin x; \; \sin(x+2); \; \cos(x-2).$
7) $x; \; e^x; \; xe^x.$
8) $1; \; \sin^2 x; \; \cos 2x.$
9) $shx; \; chx; \; 2+e^x.$

10) $x^2 - x + 3;\quad 2x^2 + x;\quad 2x - 4.$

2. Знайдіть загальний розв’язок даних рівнянь, якщо частинний розв’язок $y_1(x)$ вже задано.

1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,\quad y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$

2) $xy'' + 2y' - xy = 0,\quad y_1(x) = \frac{e^x}{x}$

3) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0,\quad y_1(x) = e^x$

4) $y'' - 2(1 + \tan^2 x)y = 0,\quad y_1(x) = \tan x$

5) $x^2(x+1)y'' - 2y = 0,\quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x}$

6) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0,\quad y_1(x) = e^x - 1$

3. Знайдіть загальний розв’язок рівняння, якщо один із частинних розв’язків може бути записаний у вигляді $y_1(x) = e^{ax}$ або $y_1(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$

1) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

2) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$

3.Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми.

Завдання на картках для 2-х варіантів.

1-й варіант	2-й варіант
1. Дослідіть дані функції на лінійну залежність. $2x^2 + 4;\quad x^2 - 2x;\quad 2x + 3.$ *2. Знайдіть загальний розв’язок даних рівнянь, якщо частинний розв’язок $y_1(x)$ вже задано.* $(x^2+1)y'' + 5xy' + 4y = 0,\quad y_1(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$	*1. Дослідіть дані функції на лінійну залежність.* $\sin 2x;\quad \cos 3x;\quad 2.$ *2. Знайдіть загальний розв’язок даних рівнянь, якщо частинний розв’язок $y_1(x)$ вже задано.* $y'' - y'\tan x + 2y = 0,\quad y_1(x) = \sin x$

4.Підведення підсумків заняття.

Сьогодні на занятті ми досліджували функції на лінійну залежність та знаходили загальний розв'язок рівнянь, коли було відомо один із частинних розв'язків. Що залишилось незрозумілим?

5.**Оцінювання.**

Оцінюється робота кожного студента в групі та виставляються бали за заняття.

Практичне заняття 2

Тема заняття: «Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальні розв'язки рівнянь».

Цілі заняття:

- *дидактичні* – перевірити знання студентів з даної теми, формування уміння розв'язувати лінійні однорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами на продуктивному рівні;
- *розвивальні* – розвивати продуктивне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні однорідні рівняння, частинний розв'язок, загальний розв'язок, Вронскіан, лінійна комбінація, характеристичне рівняння.

Література:

Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..
Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

План заняття.

7. *Організаційний момент.*
8. *Актуалізація опорних знань.*
9. *Практична робота.*
10. *Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми.*
11. *Підведення підсумків заняття.*
12. *Оцінювання.*

Хід заняття.

3. **Організаційний момент**.

4. **Актуалізація опорних знань**.

Мета: актуалізація опорних знань для роботи під час практичного заняття.

Математичний диктант.

1. Запишіть характеристичне рівняння для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку $y'' + py' + qy = 0$.

2. Запишіть вигляд частинного розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні.

3. Запишіть вигляд частинного розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння комплексні.

4. Запишіть вигляд частинного розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні.

Відповіді:

1. $k^2 + pk + q = 0$ 2. $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ 3. $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

4. $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$

5. **Практична робота**.

Мета: перевірити знання студентів з даної теми, формування уміння розв'язувати лінійні однорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами на продуктивному рівні.

Використовується групова робота. Студенти діляться на дві групи, кожна отримує своє завдання на картках (парні номери розв'язує перша група, непарні - друга).

1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

2) $y'' - 9y = 0$

3) $y'' - y' = 0$

4) $y'' - 4y' + 2y = 0$

5) $y'' + 6y' + 13y = 0$

6) $4y'' - 20y' + 25y = 0$

7) $y^{IV} + 4y = 0$

8) $y'' - 2y' + y = 0$

9) $y^{IV} - y = 0$

10) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

11) $y'' - y'' - y' + y = 0$

12) $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$

2. Знайдіть частинний розв'язок рівняння, який задовольняє даним умовам.

1) $y'' - 5y' + 4y = 0;\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 8.$

2) $y'' + 3y' + 2y = 0;\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1.$

3) $y''' - y' = 0;\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 1.$

4) $y'' - 2y' + y = 0;\ \ y(2) = 1,\ \ y'(2) = -2.$

5) $y'' + 4y = 0;\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2.$

6) $y'' - 5y' + 4y = 0;\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 8.$

6. **Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми**.

Завдання на картках для 2-х варіантів.

1-й варіант	2-й варіант
1. .Знайдіть загальний розв'язок рівняння. $y''-3y'+6y=0$ $2y''-4y'+8y=0$ $y'''-5y''+6y'=0$ *2. Знайдіть частинний розв'язок рівняння, який задовольняє даним умовам.* $y''+2y'+y=0,\ \ y(0)=2,\ \ y'(0)=1$	*1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння.* $y''-10y'+12y=0$ $y^{V}-8y'''+16y'=0$ $y''+4y'+29y=0$ *2. Знайдіть частинний розв'язок рівняння, який задовольняє даним умовам.* $y''-3y'+2y=0,\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=2$

7. **Підведення підсумків заняття**.

Сьогодні на занятті ми розв'язували лінійні однорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Що залишилось незрозумілим?

6. **Оцінювання.**

Оцінюється робота кожного студента в групі та виставляються бали за заняття.

Практичне заняття 3

Тема заняття: «Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільних сталих».

Цілі заняття:

- *дидактичні* – перевірити знання студентів з даної теми, уміння розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами за допомогою методу варіації довільних сталих на продуктивному рівні;
- *розвивальні* – розвивати продуктивне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні неоднорідні рівняння, частинний розв'язок, загальний розв'язок, характеристичне рівняння, метод варіації довільних сталих.

Література:

Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..
Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

План заняття.

13. *Організаційний момент.*
14. *Актуалізація опорних знань.*
15. *Практична робота.*
16. *Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми.*
17. *Підведення підсумків заняття.*
18. *Оцінювання.*

Хід заняття.

8. **Організаційний момент**.
9. **Актуалізація опорних знань**.

Мета: актуалізація опорних знань для роботи під час практичного заняття.

Математичний диктант.

Проінтегруйте наступні функції.

$$y = const;\quad y = x^{\alpha};\quad y = \frac{1}{x};\quad y = \frac{1}{a^2 + x^2};\quad y = \frac{1}{a^2 - x^2};$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}};\quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}};\quad y = \sin x;\quad y = \cos x;$$

$$y = tgx;\quad y = stgx;\quad y = \frac{1}{\sin^2 x};\quad y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

10.Практична робота.

Мета: перевірити знання студентів з даної теми, формування уміння розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами за допомогою методу варіації довільних сталих на продуктивному рівні.

Всі студенти отримують картку із завданням, яке необхідно розв'язати. Далі, один із студентів викликається до дошки і розв'язує одне із запропонованих завдань, усі інші працюють на місцях. Якщо хтось правильно розв'яже рівняння раніше, ніж біля дошки, то він отримує 1 бал.

Картка із завданням

1. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами.

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

3) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

4) $y'' + y = \tan^2 x$

5) $y'' - y' = e^{2x}\cos x$

6) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

7) $y'' + 2y' = \sin 2x$

8) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{e^x}$

2. Знайдіть розв'язок рівняння, який задовольняє даним умовам.

1) $y'' - y' = \frac{1}{e^x - 1}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

3)

10. **Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми**.

Завдання на картках для 2-х варіантів.

1-й варіант	2-й варіант
Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. $y'' - 2y' + y = \frac{2}{\cos 2x}$	Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. $y'' - y' + 3y = e^{2x} s\text{in} 3x$

11. **Підведення підсумків заняття**.

Сьогодні на занятті ми розв'язували лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами за допомогою методу варіації довільних сталих. Що залишилось незрозумілим?

6. **Оцінювання.**

Сумуються одержані студентами бали за заняття.

<u>Практичне заняття 4</u>

Тема заняття: «Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів».

Цілі заняття:

- *дидактичні* – перевірити знання студентів з даної теми, уміння розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами за допомогою методу невизначених коефіцієнтів на продуктивному рівні;
- *розвивальні* – розвивати продуктивне мислення, пам'ять, увагу;
- *виховні* – виховання математичної культури.

Поняття: лінійні неоднорідні рівняння, характеристичне рівняння, метод невизначених коефіцієнтів.

Література:

Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..
Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Обладнання – дидактичний матеріал, посібник Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Час. 80 хв.

План заняття.

19. Організаційний момент.
20. Актуалізація опорних знань.
21. Практична робота.
22. Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми.
23. Підведення підсумків заняття.
24. Оцінювання.

Хід заняття.

12. **Організаційний момент**.

13. **Актуалізація опорних знань**.

Мета: актуалізація опорних знань для роботи під час практичного заняття.

Математичний диктант.

1. Запишіть вигляд частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо його права частина має вигляд $P_m(x)$ і:

1-й варіант: Число 0 не є корнем характеристичного рівняння.

2-й варіант: Число 0 є коренем характеристичного рівняння кратності r.

2. Запишіть вигляд частинного розвязку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо його права частина має вигляд $P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ і:

1-й варіант: Число α є коренем характеристичного рівняння кратності r.

2-й варіант: Число α не є коренем характеристичного рівняння.

3. Запишіть вигляд частинного розвязку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо його права частина має вигляд $P_m(x) \cdot \cos \beta x + Q_n(x) \cdot \sin \beta x$ і:

1-й варіант: Число $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.

2-й варіант: Число $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r.

4. Запишіть вигляд частинного розвязку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами, якщо його права частина має вигляд $P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$ і:

1-й варіант: Число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.

2-й варіант: Число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r.

Студенти обмінюються своїми варіантами і всією групою перевіряємо диктант та виявляємо помилки. За кожну вірну відповідь студент отримує 0,5 бала.

***Правильні відповіді*:**

1. 1) $u_m(x)$; 2) $x^r \cdot u_m(x)$.

2. 1) $x^r \cdot u_m(x) \cdot e^{\alpha x}$; 2) $u_m(x) \cdot e^{\alpha x}$

3. 1) $u_k(x)\cos \beta x + v_k(x)\sin \beta x$; 2) $x^r \cdot (u_k(x)\cos \beta x + v_k(x)\sin \beta x)$

4. 1) $e^{\alpha x} \cdot (u_k(x)\cos \beta x + v_k(x)\sin \beta x)$; 2) $x^r e^{\alpha x} \cdot (u_k(x)\cos \beta x + v_k(x)\sin \beta x)$

14. **Практична робота**.

Мета: перевірити знання студентів з даної теми, формування уміння розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними *коефіцієнтами за допомогою методу невизначених коефіцієнтів на продуктивному рівні.*

Всі студенти отримують картку із завданням, яке необхідно розв'язати. Далі, один із студентів викликається до дошки і розв'язує одне із запропонованих завдань, усі інші працюють на місцях. Якщо хтось правильно розв'яже рівняння раніше, ніж біля дошки, то він отримує 0,5 бала.

Картка із завданням

2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами.

$y'' + y' - 6y = 4x^2 + 3x$

$y'' + 2y' - y = 8xe^x$

$y'' - 3y' + 4y = 2\cos 2x$

$y'' - y = 2e^x - x^2$

$y'' - 4y = 2\cos x + 3\sin 2x$

$y'' - 5y' + y = 2e^{3x}\cos x - x^2$

3. Знайдіть розв'язок рівняння, який задовольняє даним умовам.

$y'' - y' = 0;\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$

$y'' - 2y' = 2e^x;\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$

$y'' - y = 2x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

$y'' + y = 1;\ y(0) = 1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

4. Для кожного із заданих рівнянь запишіть схему знаходження частинного розв'язку без знаходження числового значення коефіцієнтів.

$y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$

$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{-2x}\cos 5x$

$y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$

$y'' - y = 2e^x - \sin 4x$

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x + 6\cos x + 5xe^{x}$$

$$y'' - 2y' + y = 2x^2e^{x} + e^{x}\sin 3x$$

15. **Контроль навчальних досягнень студентів з даної теми**.

Завдання на картках для 2-х варіантів. За кожне правильне завдання – 0,5 бала.

1-й варіант	2-й варіант
Для кожного із заданих рівнянь запишіть схему знаходження частинного розв'язку без знаходження числового значення коефіцієнтів. $y'' - 2y' + y = 3xe^{x} + x\cos 2x$ $y'' - y = 2xe^{x} + \cos x$	Для кожного із заданих рівнянь запишіть схему знаходження частинного розв'язку без знаходження числового значення коефіцієнтів. $y'' - y' + 3y = 2x^2e^{2x} - \sin 3x$ $y'' - y = 4x + 5\sin 4x + \cos 4x$

16. **Підведення підсумків заняття**.

Сьогодні на занятті ми розв'язували лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Що залишилось незрозумілим? Який з методів ви вважаєте доцільніше використовувати і у яких випадках?

6. **Оцінювання.**

Сумуються одержані студентами бали за заняття.

Семантичний конспект для змістовного модуля III

Лінійним диференціальним рівнянням n***-го порядку*** називається рівняння виду $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$. Воно лінійне відносно шуканої функції y і її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (1) називається ***лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням*** n***-го порядку***. Якщо ж $f(x) = 0$, то рівняння $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням*** n***-го порядку***.

Основні властивості лінійних однорідних рівнянь:

Теорема 1. Якщо y_1 та y_2 - два частинних розвязки лінійного однорідного рівняння другого порядку $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ тоді $y_1 + y_2$ є також розв'язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо y_1 є розв'язком рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ і С є константа, тоді cy_1 також є розв'язком рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

Теорема 3. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є частинним розв'язком рівняння (3), тоді їх лінійна комбінація $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ є також розв'язком даного рівняння.

Два розв'язки рівняння (3) y_1 та y_2 називаються ***лінійно незалежними*** на інтервалі $[a,b]$, якщо їх частка на цьому відрізку не є константою, тобто $\frac{y_1}{y_2} \neq const$. Інші розв'язки називаються ***лінійно залежними***.

Система рівнянь є лінійно залежною на інтервалі $[a,b]$, якщо існує таке n число $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які не дорівнють нулю, і лінійна комбінація розв'язків системи дорівнює нулю $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0$.

Система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ є ***лінійно залежною***, якщо принаймні одна з цих функцій є лінійною комбінацією інших.

Якщо ми не можемо вибрати такі коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, щоб задовольнити тотожність (5), тоді ***система функцій*** називається ***лінійно незалежною***.

Якщо система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ диференційована $(n-1)$ раз, тоді визначник виду

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

називається ***Вронскіаном*** даних функцій.

Властивості Вронскіана:

1. Якщо функції y_1, y_2, y_3 лінійно залежні, тоді Вронскіан цієї системи дорівнює нулю.
2. Якщо Вронскіан $W(y_1, y_2)$, який складається з розв'язків лінійного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, не дорівнює нулю для деякого $x = x_0$ на проміжку $[a, b]$ і всі коефіцієнти є неперервними в цьому проміжку, то він не перетворюється в нуль в жодній з точок x на цьому проміжку.
3. Якщо розв'язки y_1, y_2 лінійного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ лінійно незалежні на проміжку $[a, b]$, тоді Вронскіан $W(x)$, який складений з цих розв'язків, не перетворюється в нуль в жодній точці даного проміжку.

Система частинних розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійного однорідного рівняння n-го порядку називається ***фундаментальною***, якщо вона складається з n лінійно незалежних функцій.

Теорема. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ тоді їх ***лінійна комбінація*** $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ ***є загальним розв'язком*** рівняння (2), де $c_1, c_2, ..., c_n$ - довільні константи.

Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$k^n + k^{n-1}p_1 + k^{n-2}p_2 + ... + p_n = 0$ - характеристичне рівняння.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні та різні.

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + ... + c_ne^{k_nx}$$

2. Корені характеристичного рівняння комплексні.

$$y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

3. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні.

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2xe^{k_1x}$$

Знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння представлений у вигляді суми деякого частинного розв'язку y^* та загального розв'язку лінійного однорідного рівняння даного неоднорідного $\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0$, тобто $y = \bar{y} + y^*$.

Метод варіації довільних сталих

1. Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння. Покладаємо, що $c_1(x), c_2(x)$ - деякі функції, що залежать від x і записуємо розв'язок однорідного рівняння у вигляді $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

2. Приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

3. Розв’язавши систему, ми знайдемо $c_1'(x), c_2'(x)$: $c_1'(x) = \varphi_1(x)$, $c_2'(x) = \varphi_2(x)$.

4. Інтегруючи, ми отримаємо $c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + A_1$, $c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + A_2$, де A_1, A_2 - константи інтегрування.

5. Записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння: $y = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + A_1 y_1 + A_2 y_2$.

Метод невизначених коефіцієнтів

№		Вигляд правої частини	Корені характеристичного рівняння	Вигляд частинного розв’язку
1	a	$P_m(x)$	Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$u_m(x)$
	b		Число 0 є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r \cdot u_m(x)$
2	a	$P_m(x) \cdot e^{\alpha x}$	Число α не є коренем характеристичного рівняння	$u_m(x) \cdot e^{\alpha x}$
	b		Число α є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r \cdot u_m(x) \cdot e^{\alpha x}$
3	a	$P_m(x) \cdot \cos\beta x + Q_n(x) \cdot \sin\beta x$	Число $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$u_k(x)\cos\beta x + v_k(x)\sin\beta x$
	b		Число $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r \cdot (u_k(x)\cos\beta x + v_k(x)\sin\beta x)$
4	a	$P_m(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$	Число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$e^{\alpha x} \cdot (u_k(x)\cos\beta x + v_k(x)\sin\beta x)$
	b		Число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r	$x^r e^{\alpha x} \cdot (u_k(x)\cos\beta x + v_k(x)\sin\beta x)$

Опорний конспект для змістовного модуля III

Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

Лінійне **однорідне** диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+ +\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

Лінійне **неоднорідне** диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+ +\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

Властивості лінійного однорідного рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

y_1 та y_2 - два частинних розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку → y_1+y_2 – також розв'язок цього рівняння

y_1 є розв'язком рівняння і c є константа → cy_1 також є розв'язком рівняння

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ є частинним розв'язком рівняння → лінійна комбінація $y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$ є також розв'язком даного рівняння

Вронскіан

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Властивості Вронскіана

функції y_1, y_2, y_3 лінійно залежні

Вронскіан цієї системи дорівнює нулю

Вронскіан $W(y_1, y_2) \neq 0$ для деякого $x = x_0$ на проміжку $[a,b]$

Вронскіан не дорівнює нулю в жодній точці на цьому проміжку

розв'язки y_1, y_2 лінійного однорідного рівняння $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ лінійно незалежні на проміжку $[a,b]$

Вронскіан не дорівнює нулю в жодній точці на цьому проміжку

$y_1, y_2, ..., y_n$ є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння

лінійна комбінація $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ є загальним розв'язком рівняння, де $c_1, c_2, ..., c_n$ - довільні константи

Опорний конспект з теми: «Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальні розв’язки рівнянь.»

Лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+$$
$$+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

Характеристичне рівняння

$$k^n+k^{n-1}p_1+k^{n-2}p_2+\ldots+p_n=0$$

$k_1,\ k_2$ - корені характеристичного рівняння

$k_1\neq k_2;\ k_1,k_2\in R$

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

$k_1,k_2\in C$

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+$$
$$+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$k_1=k_2;\ k_1,k_2\in R$

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2xe^{k_1x}$$

Опорний конспект з теми: «Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільних сталих.»

Схема розв'язання лінійного неоднорідного рівняння методом варіації довільних сталих

Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння. Покладаємо, що $c_1(x), c_2(x)$ - деякі функції, що залежать від x і записуємо розв'язок однорідного рівняння у вигляді $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

↓

Приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

↓

Розв'язавши систему, ми знайдемо $c_1'(x), c_2'(x)$:

$c_1'(x) = \varphi_1(x)$, $c_2'(x) = \varphi_2(x)$.

↓

Інтегруючи, ми отримаємо $c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + A_1$,

$c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + A_2$, де A_1, A_2 - константи інтегрування.

↓

Записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx + A_1y_1 + A_2y_2.$$

Опорний конспект з теми: «Лінійні неоднорідні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів»

Схема розв’язання лінійного неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів

Загальний розв’язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - загальний розв’язок однорідного рівняння даного неоднорідного рівняння, а y^* - частинний розв’язок даного неоднорідного рівняння. Розв’язуємо однорідне рівняння даного неоднорідного та знаходимо частинний розв’язок.

В залежності від вигляду правої частини заданого рівняння, визначаємо, в якому вигляді будемо шукати розв'язок рівняння. Знаходимо першу та другу похідну y^* і підставляємо в задане рівняння.

Зрівнюємо коефіцієнти, які стоять при однакових степенях x і в лівій, і в правій частинах отриманого рівняння, отримуємо систему, з якої знаходимо невідомі коефіцієнти.

Записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Індивідуальні завдання для змістовного модуля ІІІ

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. a) $y''-2y'-2y=0$; b) $y''+9y=0$; c) $y''+4y'+4y=0.$
2. a) $y''+4y=0$; b) $y''-10y'+25y=0$; c) $y''+3y'+2y=0.$
3. a) $y''-4y'=0$; b) $y''-4y'+13y=0$; c) $y''-3y'+2y=0.$
4. a) $y''-5y'+6y=0$; b) $y''+3y'=0$; c) $y''+2y'+5y=0.$
5. a) $y''-2y'+10y=0$; b) $y''+y'-2y=0$; c) $y''-2y=0.$
6. a) $y''-4y=0$; b) $y''+2y'+17y=0$; c) $y''-2y'-12y=0.$
7. a) $y''+y'-6y=0$; b) $y''+9y'=0$; c) $y''-4y'+20y=0.$
8. a) $y''+7y'=0$; b) $y''-5y'+4y=0$; c) $y''+2y'-3y=0.$
9. a) $y''-49y=0$; b) $y''-4y'+5y=0$; c) $y''+16y=0.$
10. a) $y''-6y'+8y=0$; b) $y''+4y'+5y=0$; c) $y''+5y'=0.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y''-2y'+5y=10e^{-x}\cos 2x$
2. $y''-12y'+36y=14e^{6x}$
3. $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$
4. $y''+y'=2x-1$
5. $y''-3y'+2y=(36-12x)e^{-x}$
6. $y''-6y'+10y=51e^{-x}$
7. $y''+y=2\cos x-(4x+4)\sin x$
8. $y''+6y'+10y=74e^{3x}$
9. $y''-3y'+2y=3\cos x+19\sin x$
10. $y''+6y'+9y=(48x+8)e^{x}$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y''-8y'+17y=10e^{2x}$

2. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$

3. $y'' + y' - 6y = (6x+1)e^{3x}$

4. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$

5. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x}\sin 2x$

6. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$

7. $y'' + 3y' = 10 - 6x$

8. $y'' + 16y = 80e^{2x}$

9. $y'' + 4y' + 5y = 9\cos x - 7\sin x$

10. $y'' + 2y' + y = (18x+8)e^{-x}$

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє даним умовам.

1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 0.$

2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1.$

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 4.$

4. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 7.$

5. $y'' + 6y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x),\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5.$

6. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

7. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 4.$

8. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3.$

9. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 0.$

10. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 6.$

5. Для кожного із заданих рівнянь запишіть схему знаходження частинного розв'язку без знаходження числового значення коефіцієнтів.

1. $2y'' - 7y' + 3y = f(x),\ \ a)\ f(x) = (2x+1)e^{3x};\ \ b)\ f(x) = \cos 3x.$

2. $2y'' - 7y' + 2y = f(x),\ \ a)\, f(x) = 3xe^{2x};\ \ b)\, f(x) = \sin 2x - 3\cos 2x.$

3. $2y'' + y' - y = f(x),\ \ a)\, f(x) = (x^2 - 5)e^{-x};\ \ b)\, f(x) = x\sin x.$

4. $2y'' - 9y' + 4y = f(x),\ \ a)\, f(x) = -2e^{4x};\ \ b)\, f(x) = e^{x}\cos 4x.$

5. $y'' + 49y = f(x),\ \ a)\, f(x) = x^2 + 4x;\ \ b)\, f(x) = 3\sin 7x.$

6. $3y'' + 10y' + 3y = f(x),\ \ a)\, f(x) = e^{-3x};\ \ b)\, f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

7. $y'' - y' + y = f(x),\ \ a)\, f(x) = e^{x}\cos x;\ \ b)\, f(x) = 7x + 2.$

8. $y'' - 3y' = f(x),\ \ a)\, f(x) = 2x^2 - 5x;\ \ b)\, f(x) = e^{-x}\sin 2x.$

9. $y'' + 36y = f(x),\ \ a)\, f(x) = 4xe^{-x};\ \ b)\, f(x) = 2\sin 6x.$

10. $y'' - 4y' + 5y = f(x),\ \ a)\, f(x) = (2x^2 + 1)e^{-x};\ \ b)\, f(x) = 4\cos x.$

6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння застосовуючи метод варіації довільної сталої.

1. $y'' - y = \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1}$

2. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

3. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

4. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$

5. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$

6. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{\sin x}$

7. $y'' + y = \tan x$

8. $y'' + y = \cot x$

9. $y'' + 2y = \dfrac{1}{\cos x}$

10. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

7. Знайти частинний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння, який задовольняє даним умовам.

1. $y''' - 7y'' + 6y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 30.$
2. $y^{V} - 9y''' = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 0,\ \ y^{IV}(0) = 0.$
3. $y''' - y'' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = -1.$
4. $y''' - 4y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = 4.$
5. $y''' + y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = 1.$
6. $y^{IV} + 2y''' - 26y' - y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 0,\ \ y'''(0) = 8.$
7. $y''' + y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = -1.$
8. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 0.$
9. $y''' + 3y'' + 2y' = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 2.$
10. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 0.$

Модульна контрольна робота до змістовного модуля III

Виберіть одну правильну відповідь із запропонованих:

1. *Лінійне диференціальне рівняння* n*-го порядку виду*

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ *називається:*

a) лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку;
b) лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку;
c) Вронскіаном;
d) лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку кількох змінних.

2. *Якщо функції* y_1, y_2, y_3 *лінійно залежні, тоді Вронскіан цієї системи:*

a) не дорівнює 0;
b) дорівнює 1;
c) дорівнює 0;
d) дорівнює -1.

3. *Система рівнянь є лінійно залежною на інтервалі* $[a,b]$, *якщо:*

a) існує таке n число $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які не дорівнють нулю, і $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n \neq 0$;
b) існує таке n число $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які дорівнють нулю, і $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n \neq 0$;
c) існує таке n число $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які дорівнють нулю, і $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0$;
d) існує таке n число $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, які не дорівнють нулю, і $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0$.

4. *Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тоді загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння 2-го порядку матиме вигляд:*

a) $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$;

b) $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$;

c) $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$;

d) $y = c_1 x e^{k_1 x} + c_2 x^2 e^{k_1 x}$.

5. *Якщо корені характеристичного рівняння комплексні, тоді загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння 2-го порядку матиме вигляд:*

a) $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$;

b) $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$;

c) $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$;

d) $y = c_1 x e^{k_1 x} + c_2 x^2 e^{k_1 x}$.

6. *Загальним розв'язком рівняння* $y'' - 2y' + y = 0$ *є:*

a) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{-x}$;

b) $y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \sin x$;

c) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$;

d) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$.

7. *Частинним розв'язком рівняння* $y''' + y' = \tan x$ *є:*

a) $y = C_1 - C_2 \cos x + C_3 \sin x$;

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 \cos x - C_3 \sin x$;

c) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$;

d) $y = C_1 x e^{x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

8. *Загальним розв'язком рівняння* $y''' + y' = \tan x$ *є:*

a) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln \cos x - \sin x \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}))$;

b) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x - \ln\cos x - \sin x \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}))$;

c) $y = 1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \ln\cos x - \sin x \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}))$;

d) $y = C_1 + C_2 e^x \cos x - C_3 e^x \sin x - \ln\cos x - \sin x \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}))$.

9. *Загальним розв'язком рівняння* $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$ *є:*

a) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$;

b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$;

c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x$;

d) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$.

10. *Загальним розв'язком рівняння* $y'' - 2y' + y = 3e^x$ *є:*

a) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2}x^2 e^x$;

b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 e^x$;

c) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2}x^2$;

d) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{3}{2}e^x$.

Література до змістовного модуля III

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., "Наука". - 1971. - с.240
2. Бибиков Ю.Н . Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.М.: Высшая школа, 1991.-304 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы. ФКП.-М.: Наука, 1981, 1985.
4. Давидов М. О. Курс математичного анализу: Подручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1991. – 366 с.: іл..
5. Жихар М.А. Диференціальні рівняння. – Х., 1996.
6. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. К., 1981, 504 с.
7. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. –К.: ТВіМС, 2004.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. -М.: Наука, 1985.-Т.2.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
11. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. – К.: Либідь, 2003.
12. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа (Под. Ред. Ефимова А.Б., Демидовича Б.П.) М.: Наука, 1981.
13. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.– М.: ГИТТЛ, 1952.
14. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.– М.: УРСС, 2004.

15. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям– М.: Наука, 1985.
16. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969, 424 с.
17. Pudy A. E., Rakov S. A., Evdokimov A. V., Prokopenko A. I. Mathematical Analysis. Differential Equations. Guidebook for students and teachers. – Part V. – Kharkov: OVS, 2002. – 164 pages.

Розділ IV. Методичні особливості вивчення змістовного модуля IV «Системи диференціальних рівнянь»

Теми лекцій, практичних занять та завдання для самостійної роботи для змістовного модуля IV «Системи диференціальних рівнянь»

Лекція 1. Системи звичайних лінійних рівнянь.

Системи звичайних лінійних рівнянь. Зведення лінійних рівнянь до лінійних рівнянь вищого порядку.

Практичне заняття 1.

Системи звичайних лінійних рівнянь.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Загальні питання теорії систем у нормальній і симетричній формах.» – 2 год.

Література: [2,8].

Лекція 2. Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.

Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь. Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння.

Практичне заняття 2.

Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.

Практичне заняття 3.

Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу з теми «Визначник Вронського. Формула Ліувілля-Остроградського.»– 2 год.

Література: [2,3,5,8].

Лекція 3. Лінійні неоднорідні системи. Методи розв'язування лінійних неоднорідних систем.

Лінійні неоднорідні системи. Метод варіації довільних сталих. Метод виключення та інтегровних комбінацій. Метод невизначених коефіцієнтів

Практичне заняття 4.

Метод варіації довільних сталих. Лінійні неоднорідні системи. Метод невизначених коефіцієнтів.

Завдання для самостійної роботи: самостійне вивчення матеріалу «Періодичні розв'язки неоднорідної системи.» – 2 год.

Література: [2–4].

Розробка лекцій для змістовного модуля IV

Лекція №1

<u>Тема:</u> Системи звичайних лінійних рівнянь. Зведення лінійних рівнянь до лінійних рівнянь вищого порядку.

<u>Мета</u>:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Системи диференціальних рівнянь»;

– ознайомлення із системами диференціальних рівнянь першого порядку;

– розвиток візуального мислення та пам’яті;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

<u>знати</u>: означення та види систем диференціальних рівнянь першого порядку;

<u>уміти</u>: зводити системи n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку до одного рівняння вищого порядку

<u>здатні:</u> розв’язувати системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь.

Основні поняття: *системи диференціальних рівнянь першого порядку; лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР), ЛОДР зі сталими коефіцієнтами; розв'язок ЛОРД; загальний розв'язок ЛОРД; частинний розв'язок ЛОРД, задача Коші.*

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1. Системи звичайних лінійних диференціальних.
2. Зведення лінійних рівнянь до лінійних рівнянь вищого порядку.

Список літератури:

1. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
7. Pudy A.E., Rakov S.A., Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.

Текст лекції

Система рівнянь виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

називається ***системою диференціальних рівнянь першого порядку.***

Форма системи диференціальних рівнянь, при якій функції в правій частині не містять похідних, називається ***нормальною.***

Система (1) називається ***автономною,*** якщо функції $f_1, f_2, ..., f_3$ в правій частині не залежать від змінної *x* ***явно.***

Якщо $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ функції є лінійними відносно невідомих $y_1, y_2, \cdots, y_n$, то система рівнянь називається *лінійною.* В загальному випадку вона має вигляд

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ .... \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + \varphi_n(x) \end{cases} \qquad (2)$$

При $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = ... = \varphi_n(x) \equiv 0$ маємо систему ***лінійних однорідних диференціальних рівнянь*** **(ЛОДР**).

Якщо ж всі коефіцієнти $a_{ij}(x)$ є сталими величинами, маємо систему ***лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.***

Розв'язком системи n диференціальних рівнянь є сукупність n функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, підстановка яких в систему рівнянь перетворює кожне з них в тотожність.

Загальним розв'язком називається сукупність n функцій $y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), ..., y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що залежать від аргументу *x,* і містять n сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, яка при ***довільному*** наборі значень цих сталих є розв'язком системи.

Частинним розв'язком системи рівнянь називають сукупність n функцій, які одержуються з загального розв'язку, якщо сталим $C_1, C_2, ..., C_n$ надати деякі конкретні значення $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$

Задачею Коші для системи диференціальних рівнянь називається задача про знаходження *частинного* розв'язку системи, який задовольняє заданій при деякому значенні аргументу $x = x_0$ початковій умові. Для системи (1) початкові умови виражаються рівностями $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0$, $y_3(x_0) = y_3^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0$ де $y_1^0, y_2^0, y_3^0, ..., y_n^0$ - задані числа.

Зведення системи n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку до одного рівняння вищого порядку

(метод виключення змінних)

Систему n лінійних рівнянь першого порядку (2) можна звести до одного рівняння вищого порядку.

Для цього виберемо одне з рівнянь системи, наприклад перше, і продиференціюємо його ліву і праву частини:

$$y_1'' = a_{11}'y_1 + a_{12}'y_2 + \cdots + a_{1n}'y_n + a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \cdots + a_{1n}y_n' + \varphi_1'(x).$$

Підставимо в праву частину цього виразу значення похідних функцій y_k, $k = 1...n,$ використовуючи інші рівняння системи (2). Одержимо вираз

$$y_1'' = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n + \varphi_1'(x) = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n + \psi_1(x).$$

Диференціюємо тепер одержаний вираз і знову підставляємо значення похідних. Повторивши цю процедуру всього *n—1* разів і об'єднавши перше рівняння системи (27) і одержані вирази, одержимо:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ y_1'' = b_{21}(x)y_1 + b_{22}(x)y_2 + \ldots + b_{2n}(x)y_n + \psi_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)} = b_{n1}(x)y_1 + b_{n2}(x)y_2 + \ldots + b_{nn}(x)y_n + \psi_n(x), \end{cases} \qquad (3)$$

Візьмемо перші $n-1$ з цих рівнянь, і розглядаючи їх, як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $y_2, y_3, \ldots, y_n$, розв'яжемо цю систему (за умови, що її визначник відмінний від нуля). Одержані розв'язки лінійно виражатимуть функції $y_2, y_3, \ldots, y_n$, через функцію y_1, її похідні $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$, та функції $\varphi_1(x), \psi_2(x), \ldots \psi_{(n-1)}(x)$

Підставивши ці вирази в останнє рівняння системи (3), одержимо лінійне диференціальне рівняння порядку *n* для функції y_1:

$$y_1^{(n)} + c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n(x)y_1 + \Psi(x) = 0,$$

розв'язавши яке, матимемо одну з компонент розв'язку системи рівнянь (3) – функцію $y_1 = \eta_1(x, C_1, C_2, .., C_n)$, де $C_1, C_2, .., C_n$- довільні сталі.

Для знаходження інших компонент розв'язку системи функцій $y_2, y_3, ..., y_n$ слід використати вирази для цих функцій, знайдені при побудові рівняння порядку *n* для функції, підставивши в них значення функції y_1 та її похідних.

Якщо визначник системи (3) дорівнюється нулю, то вона зводиться до диференціального рівняння нижчого порядку, ніж *n,* для функції y_1. При цьому, виконавши аналогічну описаній вище процедуру для іншого рівняння системи (2) (другого, третього і т. д.), її, можливо, вдасться звести до рівняння порядку *n* для одної з функцій $y_2, y_3, ..., y_n$

Очевидно, що цей метод можна використати і для розв'язування систем. Практично він є зручним у випадку невеликих систем рівнянь.

Приклад 1. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Зведемо задану систему рівнянь до одного рівняння 2-го порядку для функції $x(t)$:

- диференціюємо перше рівняння за змінною t похідну y' підставляємо з другого рівняння : $x'' = 2x' + y' = 2x' + 3x + 4y;$

- з першого рівняння знаходимо $y = x' - 2x$ і підставляємо в останнє рівняння.

Одержуємо рівняння 2-го порядку для функції $x(t): x'' - 6x' + 5x = 0$.

Його характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 5 = 0$ має корені $k_1 = 1,\ \ k_2 = 5$ тому загальним розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$, C_1, C_2 - довільні сталі. Для знаходження функції $y(t)$ використаємо знайдений вище вираз $y = x' - 2x$. Підставивши сюди $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t},\ \ x' = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t},$ одержимо $y(t) = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t}) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$

Отже, розв'язком заданої системи є пара функцій

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Приклад 2. *Знайти загальний розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 6x - y, \\ z' = 6x + 4y. \end{cases}$$

Зведемо цю систему до одного рівняння вищого порядку для функції *x(i)*.
Для цього знаходимо похідну $x'' = y'$.
З другого рівняння заданої системи сюди підставляємо

$$y' = 6x - y \quad \Rightarrow \quad x'' = 6x - y = 6x - x'.$$

Отже, одержано рівняння другого порядку для функції x: $x'' + x' - 6x = 0$. Коренями його характеристичного рівняння $k^2 + k - 6$ є $k_1 = -3, \quad k_2 = 2,$ а загальним розв'язком - функція $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}, \quad C_1, C_2$ - довільні сталі.

Обчислимо $x'(t) = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}$. Використовуючи ці вирази, а також, перше і третє рівняння заданої системи, знаходимо

$$y(t) = x'(t) = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}, \quad z' = 6x + 4y = 6x + 4x' = -6C_1e^{-3t} + 12C_2e^{2t}.$$

Звідси $z(t) = \int z'(t)dt = 2C_1e^{-3t} + 6C_2e^{2t} + C_3, \quad C_3$ - довільна стала.

Одержуємо загальний розв'язок заданої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}, \\ y(t) = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}, \\ z(t) = 2C_1e^{-3t} + 6C_2e^{2t} + C_3. \end{cases}$$

Лекція №2

Тема: Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь. Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння.

Мета:

– вивчення основних положень та визначень з теми «Системи диференціальних рівнянь»;

– розвиток візуального мислення та пам’яті;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: формулу характеристичного рівняння та його коренів.

уміти: записувати характеристичне рівняння, знаходити його корені.

здатні: розв’язувати системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь за допомогою знаходження коренів характеристичного рівняння.

Основні поняття: характеристичне рівняння; власні значеннями і відповідні їм власні вектори; частинні розв'язки .

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План лекції

1.Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.

2. Характеристичне рівняння. Корені характеристичного рівняння

Список літератури:

1. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
7. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.

Текст лекції

Запишемо систему n лінійних однорідних рівнянь першого порядку з сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (1)$$

у матричній формі:

$$Y' = AY, \quad (2)$$

де $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$a_{ij},\ i,j = 1..n,$ сталі.

Частинні розв'язки цієї системи будемо шукати у вигляді

$$y_1 = b_1 e^{kx}, \quad y_2 = b_1 e^{kx}, \cdots, y_n = b_n e^{kx}, \quad \text{або} \quad Y = e^{kx} B, \quad \text{де} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для знаходження розв'язку потрібно визначити числа $k, b_1, b_2, ..., b_n$. Підставивши $Y = e^{kx} B$ у рівняння (2), одержуємо $Y' = k e^{kx} B = e^{kx} A B$, звідки $AB = kB = kIB$, або $(A - kI)B = 0$, де I - одинична матриця $n \times n$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}; \quad A - kI = \begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - k \end{pmatrix}$$

Матрично-векторна рівність $(A - kI)B = 0$ еквівалентна однорідній системі n лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими $b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - k)b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + (a_{nn} - k)b_n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Нетривіальні (ненульові) розв'язки однорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими існують, якщо її детермінант дорівнюється нулю:

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Вираз (4) являє собою рівняння степеня n відносно невідомої k і називається ***характеристичним рівнянням*** матриці системи рівнянь (1), (2).

Числа k (корені характеристичного рівняння) і відповідні матриці стовбці B (або вектори B), для яких виконується рівність $AB = kB$, називаються ***власними значеннями і відповідними їм власними векторами*** матриці A. Отже, для розв'язання системи рівнянь (1) потрібно знайти власні значення і власні вектори матриці A.

Власні значення k знаходимо з характеристичного рівняння, розкривши детермінант і прирівнявши його до нуля. Одержимо n коренів характеристичного рівняння, серед яких можуть бути прості і кратні.

Для знаходження власних векторів, що відповідають знайденим власним значенням, кожен з коренів k_j, підставляємо в (3). Одержимо систему рівнянь, з якої знаходимо значення невідомих $b_1, b_2, ..., b_n$. Оскільки ці рівняння лінійно
залежні, ранг r_j її матриці $A - k_i I$ менший за n $(r_i < n)$, тому матимемо
$(n - r_j)$ вільних невідомих, яким можемо надати довільні значення, а решту
r_j невідомих виразити через них.

Знайшовши корені характеристичного рівняння, тобто власні значення, і відповідні їм власні вектори матриці A знаходимо частинні розв'язки і будуємо загальний розв'язок системи (1).

Розглянемо деякі випадки знаходження частинних розв'язків *в залежності від властивостей коренів характеристичного рівняння*.

1) Якщо k_i - простий корінь характеристичного рівняння (4), а B_i - відповідний йому власний вектор матриці A, то цьому кореню відповідає
частинний розв'язок

$$Y_i = e^{k_i x} B_i \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = e^{k_i x} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{1i} = e^{k_i x} b_{1i}, \\ y_{2i} = e^{k_i x} b_{bi}, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ y_{ni} = e^{k_i x} b_{ni}. \end{cases}$$

2) Якщо для кореня k кратності m маємо m лінійно незалежних власних векторів $B_1, ..., B_m$, то йому відповідають частинних m розв'язків

$$Y_1 = e^{kx} B_1, \quad Y_2 = e^{kx} B_2, \cdots, \quad Y_m = e^{kx} B_m.$$

3) Якщо для кореня k кратності m маємо $h < m$ лінійно незалежних власних векторів $B_1, ..., B_h$, то відповідний йому частинний розв'язок можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів, шукаючи кожну з функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ у вигляді добутку многочлена порядку $m - h$ на e^{kx}:

$$
\begin{gathered}
y_1 = (a + bx + \cdots + dx^{m-h})e^k x \\
y_2 = (p + qx + \cdots + rx^{m-h})e^k x \\
\cdots \\
y_n = (u + vx + \cdots + wx^{m-h})e^k x
\end{gathered}
$$

Для визначення коефіцієнтів $a, b, \ldots, w$ функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ слід підставити в систему рівнянь (1), і в кожному з них прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x в лівій і правій частинах. В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими $a, b, \ldots, w.$ Деякі з цих рівнянь лінійно незалежні, тому її розв'язок буде містити *m* довільних сталих.

За цією схемою для кожного з коренів характеристичного рівняння знаходимо відповідний йому частинний розв’язок системи рівнянь (1).
Загальним її розв'язком є лінійна комбінація частинних розв'язків:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n.$$

Приклад 1. *Розв'язати систему рівнянь:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$$

►В матричній формі запишемо

$$Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 4 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = 3.$$

Записуємо систему рівнянь (3) для знаходження компонент b_1, b_2 власних векторів

$$\begin{cases} (1-k)b_1 + b_2 = 0, \\ -4b_1 + (1-k)b_2 = 0. \end{cases}$$

Для $k = k_1,\ k = k_2$ ці рівняння рівносильні, оскільки вони – лінійно залежні (ранг матриці системи дорівнює одиниці), тому можна використати довільне з них. Для $k = k_1 = -1$ з першого рівняння маємо $2b_1 + b_2 = 0.$

Покладаємо $b_1 = 1$, тоді $b_2 = -2$. Отже, кореню відповідає власний $k_1 = -1$вектор

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

і частинний розв'язок

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{k_1 t} B_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-t}, \\ y_1(t) = -2e^{-t}, \end{cases}$$

C_1 - довільна стала.

Аналогічно для $k = k_2 = 3$ знаходимо

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

і відповідно частинний розв'язок

$$Y_2(t) = e^{k_2 t} B_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = e^{3t}, \\ y_2(t) = -2e^{3t}. \end{cases}$$

Загальними розв'язок є лінійною комбінацією цих частинних розв'язків:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = -2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t}, \end{cases}$$

C_1, C_2 — довільні сталі. ◄

Лекція №3

<u>Тема:</u> Системи звичайних лінійних неоднорідних рівнянь. Методи розв’язування лінійних неоднорідних систем

Мета:

– вивчити лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь; поглибити, розширити, деталізувати знання, отримані раніше;

– розвивати наукове мислення та пам’ять, сприяти виробленню навичок професійної діяльності;

– виховувати культуру математичного запису і мовлення.

Поняття: Лінійна неоднорідна система, метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа), метод виключення та інтегровних комбінацій, метод невизначених коефіцієнтів

При вивченні теми студенти повинні:

знати:форми запису лінійних неоднорідних систем, методи їх розв’язування;

уміти: розв’язувати лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь;

здатні: використовувати методи розв’язування лінійних неоднорідних систем на практиці.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), креслярські матеріали.

Час: 2 год.

План лекції:

1. *Лінійні неоднорідні системи.*
2. *Методи розв’язування лінійних неоднорідних систем*

2.1. Метод варіації довільних сталих.

2.2. Метод виключення та інтегрованих комбінацій

2.3. Метод невизначених коефіцієнтів

3. Приклади

Список літератури:

8. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
9. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.
10. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
12. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.

13. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
14. Pudy A.E., Rakov S.A. Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.

Текст лекції

Лінійною неоднорідною системою називається система виду

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \ldots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

або в векторно-матричній формі

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{1}$$

Де x — вектор з компонентами $x_1, \ldots, x_n$; $A(t)$ — матриця, елементами якої є функції $a_{i,j} = 1, 2, \ldots, n$; $f(t)$— вектор-функція з компонентами $f_i(t)$.

Якщо відома фундаментальна матриця $x(t)$ лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2}$$

то систему (1) завжди можна розв'язати за допомогою *методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа).*

Згідно з цим методом, загальний розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді $x = X(t)c(t)$. Компоненти $c_i(t), i = 1, 2, \ldots, n,$ вектора $c(t)$ визначаються із системи рівнянь

$$X(t)\frac{dc}{dt} = f(t),$$

яка має єдиний розв'язок відносно $\dfrac{dc}{dt}$ $\left(\det X(t) \neq 0\right)$.

Систему (1) можна розв'язувати також за допомогою *методів виключення та інтегрованих комбінацій.*

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (1) складається із загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи (2) і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.

Якщо в системі (1) матриця $A(t) = A$— стала, а функції $f_i(t)$ мають вигляд

$$f_i(t) = e^{at}(P_{m_i}(t)\cos\beta t + R_{k_i}(t)\sin\beta t), i = 1,2,...,n,$$

де $P_{m_i}(t)$ і $R_{k_i}(t)$— многочлени степенів m_i і k_i відповідно, то частинний розв'язок неоднорідної системи (1) може бути знайдений за *методом невизначених коефіцієнтів.* Згідно з цим методом, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_i = e^{at}(Q^i_{m+s}(t)\cos\beta t + T^i_{m+s}(t)\sin\beta t),\ i = 1,2,...,n, \tag{3}$$

де $Q^i_{m+s}(t)$, $T^i_{m+s}(t)$— многочлени степеня $m+s$ з невизначеними коефіцієнтами, $m = \max\{m_i, k_i\}$, $s = 0$, якщо контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ не є власним значенням матриці *A;* якщо ж σ є власним значенням матриці *A,* то s можна вибрати таким, що дорівнює кратності цього числа (точніше s дорівнює порядку найбільшої клітини Жордана матриці *A,* яка відповідає власному значенню σ).

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q^i_{m+s}(t)$, $T^i_{m+s}(t)$— знаходять за допомогою підстановки (3) в дану систему і прирівнювання коефіцієнтів подібних членів.

Метод невизначених коефіцієнтів побудови частинного розв'язку застосовний і тоді, коли компоненти $f_i(t)$ вектора $f(t)$ є лінійними комбінаціями функцій виду (3). Для цього слід скористатися принципом суперпозиції розв'язків, який полягає в тому, що коли x^i є розв'язком лінійної системи $\frac{dx}{dt} = a(t)x + f^i(t), i = 1,2,...,m$, то $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i$ є розв'язком лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=1}^{m} a_i f^i(t)$, де $a_i = const$.

Розглянемо приклад.

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

►Одним з методів, які були розглянуті в попередніх задачах, неважко знайти загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \end{cases}$$

Оскільки контрольне число $\sigma = \pm i(\beta = 1, \alpha = 0)$ не є власним значенням матриці однорідної системи, то частинний розв'язок неоднорідної системи знайдемо, поклавши

$$\begin{cases} x = A_1 \sin t + B_1 \cos t \\ y = A_2 \sin t + B_2 \cos t \end{cases}$$

Підставивши ці вирази в дану систему, дістанемо:

$$A_1 - B_2 = -5, \quad B_1 + A_2 = 0, \quad A_2 - 2B_1 - B_2 = 0,$$

$$2A_1 + B_2 + A_2 = 0$$

звідки

$$A_1 = -2, \quad B_1 = -1, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = 3.$$

Загальний розв'язок даної системи має вигляд

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t \end{cases}. ◄$$

Розробка практичних занять для змістовного модуля IV

Практичне заняття 1

Тема: «Системи звичайних лінійних рівнянь.»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв’язувати системи звичайних лінійних рівнянь;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення систем звичайних лінійних рівнянь, методи їх розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування систем звичайних лінійних рівнянь.

здатні: розв'язувати системи звичайних лінійних рівнянь.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці).

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Повторення теоретичного матеріалу.

III. Вироблення вмінь та навичок.

Список літератури

9. Pudy A.E., Rakov S.A.,Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
11. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. *Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.*

II. Повторення означень і формул з лекції №1.

III. Розв'язування вправ.

1. *Розв'язати систему:* $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} ax + y \\ \dfrac{dy}{dx} = -x + ay \end{cases}$

►Диференціюючи обидві частини першого рівняння, маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.(1*)$$

З другого рівняння знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = -x + ay = -x + a\left(\frac{dx}{dt} - ax\right) = a\frac{dx}{dt} - (1+a^2)x.$$

Підставивши цей вираз у (1*), дістанемо рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (1+a^2)x = 0.$$

Корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = a \pm i.$ Тому $x = e^{at}(C_1\cos t + C_2\sin t).$ З першого рівняння даної системи знаходимо $y(t)$:

$$y = \frac{dx}{dt} - ax = ae^{at}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{at}(-C_1\sin t + C_2\cos t) -$$

$$-ae^{at}(C_1\cos t + C_2\sin t) = = e^{at}(-C_1\sin t + C_2\cos t).$$ ◄

2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z \end{cases}$$

►З першого рівняння маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt},$$

або з урахуванням другого рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0.$$

Звідси

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

$$y = \frac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t}$$

Підставивши $x(t)$ і $y(t)$ в третє рівняння системи, дістанемо лінійне рівняння першого порядку $\frac{dz}{dt} - z = 2C_1e^t$, звідки $z = C_3e^t + 2C_1te^t$.◄

3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = z - x \end{cases}$$

► Диференціюючи обидві частини першого рівняння, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt}.$$

Звідси, з урахуванням другого й третього рівнянь, дістаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

Це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд: $z = C_3e^t$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$z = a\cos t + b\sin t.$$

Для невизначених коефіцієнтів a і b маємо систему

$$b - a = -C_1, \quad -b - a = -C_2$$

Звідки

$$a = \frac{C_1 + C_2}{2}, \quad b = \frac{C_1 = -C_2}{2}.$$

Отже,

$$z = C_3 e^t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\cos t + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\sin t.$$

Тоді з першого рівняння системи знаходимо:

$$y = z - \frac{dx}{dt} = C_3 + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\cos t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\sin t. \blacktriangleleft$$

Для перевірки засвоєння нового матеріалу, студенти самостійно розв'язують наступні приклади, після чого один із студентів коментує їх розв'язок.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = xe^{\cos t} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x - t} \end{cases}$

Домашнє завдання. З підручника [1] ст..126 № 1-8.

Практичне заняття 2

Тема: «Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати системи звичайних лінійних однорідних рівнянь;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення системи звичайних лінійних однорідних рівнянь, методи їх розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування системи звичайних лінійних однорідних рівнянь;

здатні: розв'язувати системи звичайних лінійних однорідних рівнянь;.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), картки із самостійною роботою.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Перевірка домашнього завдання.

III. Вироблення вмінь та навичок.

IV. Самостійна робота.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A., Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.

II. Перевірка домашнього завдання

Викладач проходить по аудиторії і перевіряє наявність виконаного.

III. Розв'язування задач та вправ.

Проходить таким чином. За бажанням студенти виходять до дошки і розв’язують вправи.

1. Відомо, що $x_1 = \cos t - \frac{\sin t}{t}$, $y_1 = \frac{\sin t}{t}$ - розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t} - ty \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t} \end{cases}.$$

Знайти всі розв'язки цієї системи.

2. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2}x \end{cases}$$, який задовольняє умову $x(-1)=1,\ y(-1)=-2$.

3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = 1 \\ \frac{dy}{dt} - \left(1 + \frac{2}{t}x\right) - y = -1 \end{cases}$$

IV. Самостійна робота (за варіантами).

Перевіряється викладачем, результати оголошуються на наступному занятті.

Перший варіант

Знайти розв'язок системи

1. $$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x' = y5\cos t, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Другий варіант

Знайти розв'язок системи

1. $$\begin{cases} x' = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ y' = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

Домашнє завдання. З підручника [3] ст.136 № 5-10.

<u>Практичне заняття 3</u>

Тема: «Системи звичайних лінійних однорідних рівнянь»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв'язувати системи звичайних лінійних однорідних рівнянь;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

<u>знати</u>: означення системи звичайних лінійних однорідних рівнянь, методи їх розв'язування;

<u>уміти</u>: застосовувати знання для розв'язування системи звичайних лінійних однорідних рівнянь;

<u>здатні</u>: розв'язувати системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), картки із самостійною роботою.

Час: 2 год.

План заняття

I. *Організаційний момент.*

II. Самостійна робота

III. Вироблення вмінь та навичок.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A., Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.

II. Самостійна робота.

Студентам даються завдання, аналогічні з завданнями, які були задані додому. Оцінки оголошуватимуться на наступному занятті.

I варіант

1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 & x(0) = 1 \\ y' = x - y + 1 & y(0) = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 & x(0) = 1 \\ y' = x + y, & y(0) = 2 \end{cases}$

II варіант

1. $\begin{cases} x' = x + 4y & x(0) = 1 \\ y' = 2x - y + 9 & y(0) = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 & x(0) = 0 \\ y' = 4x - y & y(0) = 1 \end{cases}$

III. Розв'язування задач та вправ.

За бажанням студенти виходять до дошки і продовжують розв’язувати вправи з теми.

1. $\begin{cases} x' = x - z & x(0) = -1 \\ y' = z & y(0) = 2 \\ z' = x & z(0) = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = x - z & x(0) = -1 \\ y' = z & y(0) = 2 \\ z' = x & z(0) = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = z + y & x(0) = -1 \\ y' = x + z & y(0) = 1 \\ z' = x + y & z(0) = 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x' = x - z & x(0) = -3 \\ y' = x + y + z & y(0) = 0 \\ z' = x + 2y & z(0) = -1 \end{cases}$

Домашнє завдання. З підручника [12] ст.137 № 1-4.

Практичне заняття 4

Тема: «Метод варіації довільних сталих. Лінійні неоднорідні системи. Метод невизначених коефіцієнтів»

Мета:

– вироблення вмінь та удосконалення навичок розв’язувати системи звичайних лінійних неоднорідних рівнянь;

– вироблення вмінь застосовувати різні методи розв’язування систем звичайних лінійних неоднорідних рівнянь;

– розвиток продуктивного мислення;

– виховання математичної культури.

При вивченні теми студенти повинні:

знати: означення систем звичайних лінійних неоднорідних рівнянь, методи їх розв'язування;

уміти: застосовувати знання для розв'язування систем звичайних лінійних неоднорідних рівнянь;

здатні: розв'язувати системи звичайних лінійних неоднорідних рівнянь.

Обладнання: підручники, дидактичний матеріал (таблиці), картки із самостійною роботою, мультимедійний проектор, комп’ютер.

Час: 2 год.

План заняття

I. Організаційний момент.

II. Перевірка домашнього завдання.

III. Вироблення вмінь та навичок.

Список літератури

1. Pudy A.E., Rakov S.A., Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч. 2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища школа, 1991 – 336 с.

Хід заняття

I. Привітання із студентами, повідомлення мети й завдань заняття, перевірка присутніх.

II. Перевірка домашнього завдання.

Студенти з місця коментують хід розв'язування вправ, задають питання викладачу, якщо щось було незрозуміло.

III. Розв'язування вправ.

Викладач викликає студентів, які написали самостійну роботу на попередньому занятті на середньому рівні.

1. Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{1}{t^2} + \ln t \end{cases}$$

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \sin wt \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

3. Тіло кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Вважаючи, що опір повітря пропорційний до швидкості руху, знайти закон руху залежно від часу і траєкторію руху тіла.
4. Знайти траєкторію руху електронів однорідному електричному полі напруженості Е, якщо в початковий момент відомі напрямок і швидкість електрона.

Домашнє завдання. З підручника [12] ст.141 № 1-8.

Семантичний конспект для змістовного модуля IV

Системи диференціальні рівняння, основні визначення

- Система рівнянь виду $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$

називається ***системою диференціальних рівнянь першого порядку.***

- Форма системи диференціальних рівнянь, при якій функції в правій частині не містять похідних, називається ***нормальною.***
- Система (1) називається ***автономною,*** якщо функції $f_1, f_2, ..., f_n$ в правій частині не залежать від змінної *x* ***явно.***
- Якщо функції $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ є лінійними відносно невідомих $y_1, y_2, ..., y_n$, то система рівнянь називається *лінійною.*
- При $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = ... = \varphi_n(x) \equiv 0$ маємо систему ***лінійних однорідних диференціальних рівнянь*** **(ЛОДР**).
- Якщо ж всі коефіцієнти $a_{ij}(x)$ є сталими величинами, маємо систему ***лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.***
- ***Розв'язком*** системи *n* диференціальних рівнянь є сукупність *n* функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, підстановка яких в систему рівнянь перетворює кожне з них в тотожність.
- ***Загальним розв'язком*** називається сукупність *n* функцій $y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)), ..., y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що залежать від аргументу *x,* і містять n сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, яка при ***довільному*** наборі значень цих сталих є розв'язком системи.
- ***Частинним розв'язком*** системи рівнянь називають сукупність n функцій, які одержуються з загального розв'язку, якщо сталим $C_1, C_2, ..., C_n$ надати деякі конкретні значення $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$.

Системи звичайних диференціальних лінійних однорідних рівнянь

- Запишемо систему n лінійних однорідних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

- в матричній формі: $Y' = AY$.

де $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$a_{ij},\ i,j = 1..n,$ сталі.

- *Частинні розв'язки* цієї системи представлений у вигляді

$$y_1 = b_1 e^{kx}, \quad y_2 = b_1 e^{kx}, \cdots, y_n = b_n e^{kx}, \quad \text{або} \quad Y = e^{kx}B, \quad \text{де} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

- Нетривіальні (ненульові) розв'язки однорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими існують, якщо її визначник рівний нулю:

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

- Цей визначник являє собою рівняння степеня *n* відносно невідомої k, і називається ***характеристичним рівнянням*** матриці системи звичайних лінійних однорідних рівнянь.
- Числа k(корені характеристичного рівняння) і відповідні матриці – стовбці B (або вектори B), для яких виконується рівність $AB = kB$, називаються ***власними значеннями і відповідними їм власними векторами*** матриці A. Отже, для розв'язання системи рівнянь потрібно знайти власні значення і власні вектори матриці A.

Системи звичайних диференціальних лінійних неоднорідних рівнянь

- *Лінійною неоднорідною системою* називається система виду $\dfrac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + ... + a_{in}(t)x_n + f_i(t), i = 1, 2, ..., n$ або в векторно-матричній формі $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$
- Де x — вектор з компонентами $x_1, ..., x_n$; $A(t)$ — матриця, елементами якої є функції $a_{i,j} = 1, 2, ..., n$; $f(t)$— вектор-функція з компонентами $f_i(t)$.
- Якщо відома фундаментальна матриця $x(t)$ лінійної однорідної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$, то систему завжди можна розв'язати за допомогою *методу варіації довільних сталих (методу Лагранжа).*
- Згідно з цим методом, загальний розв'язок системи шукаємо у вигляді $x = X(t)c(t)$. Компоненти $c_i(t), i = 1, 2, ..., n,$ вектора $c(t)$ визначаються із системи рівнянь $X(t)\dfrac{dc}{dt} = f(t)$,яка має єдиний розв'язок відносно $\dfrac{dc}{dt}$ $(\det X(t) \neq 0)$.

- Систему можна розв'язувати також за допомогою *методів виключення та інтегровних комбінацій*.
- Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи складається із загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.
- Якщо в системі матриця $A(t)=A$ — стала, а функції $f_i(t)$ мають вигляд $f_i(t)=e^{at}(P_{m_i}(t)\cos\beta t+R_{k_i}(t)\sin\beta t), i=1,2,...,n,$ де $P_{m_i}(t)$ і $R_{k_i}(t)$ — многочлени степенів m_i і k_i відповідно, то частинний розв'язок неоднорідної системи може бути знайдений за *методом невизначених коефіцієнтів.* Згідно з цим методом, частинний розв'язок шукаємо у вигляді $x_i=e^{at}(Q^i_{m+s}(t)\cos\beta t+T^i_{m+s}(t)\sin\beta t),\ i=1,2,...,n,$ де $Q^i_{m+s}(t)$, $T^i_{m+s}(t)$ — многочлени степеня $m+s$ з невизначеними коефіцієнтами, $m=\max\{m_i,k_i\},\ s=0$, якщо контрольне число $\sigma=\alpha+i\beta$ не є власним значенням матриці *A;* якщо ж σ є власним значенням матриці *A,* то s можна вибрати таким, що дорівнює кратності цього числа (точніше s дорівнює порядку найбільшої клітини Жордана матриці *A,* яка відповідає власному значенню σ).Невідомі коефіцієнти многочленів $Q^i_{m+s}(t)$, $T^i_{m+s}(t)$ — знаходять за допомогою підстановки в дану систему і прирівнювання коефіцієнтів подібних членів.

Індивідуальні завдання до змістовного модуля IV

Розв'язати систему диференціальних рівнянь двома методами:

а) Зведенням до найвищого порядку;

б) Використовуючи характеристичне рівняння.

1 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	2 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$
3 $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$	4 $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$
5 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$	6 $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$
7 $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$	8 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$
9 $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$	10 $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$
11 $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$	12 $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$
13 $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	14 $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$
15 $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$	16 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$
17 $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$	18 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$
19 $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$	20 $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$

Модульна контрольна робота до змістовного модуля IV

I рівень

1. Чи є дана система рівнянь лінійною системою диференціальних рівнянь?

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2}{6+t^2}x \end{cases}$$

а)Так; б)Ні;

2. В якому випадку систему звичайних лінійних неоднорідних рівнянь слід розв’язувати методом невизначених коефіцієнтів?

а) Якщо відома фундаментальна матриця $x(t)$ лінійної однорідної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$

б) Якщо в системі матриця $A(t) = A$— стала, а функції $f_i(t)$ мають вигляд $f_i(t) = e^{at}(P_{m_i}(t)\cos\beta t + R_{k_i}(t)\sin\beta t), i = 1,2,...,n,$ де $P_{m_i}(t)$ і $R_{k_i}(t)$— многочлени степенів m_i і k_i відповідно.

3. Яка з наведених формул являє собою рівняння степеня n відносно невідомої k, і називається характеристичним рівнянням матриці системи звичайних лінійних однорідних рівнянь?

а)

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0.$$

б)

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$

II рівень

4. Серед заданих систем рівнянь вказати лінійні неоднорідні:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \cos wt \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{1+t^3}x \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{1}{t^2} + \ln t \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = y + \cos wt \\ \dfrac{dt}{dy} = -4x \end{cases}$.

5. З чого складається загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи?

а) із загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.

б) із загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи і характеристичного рівняння

в) із власних значень і відповідних їм власних векторів.

6. Яка форма системи диференціальних рівнянь називається нормальною?

а)при якій функції в правій частині містять похідні.
б) при якій функції в правій частині не містять похідних,
в) при якій і права, і ліва частини містять похідні.

III рівень

7. Розв’язком системи $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ буде:

а) $\begin{cases} x(z) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y(z) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - 2\sin t - \cos t \\ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} + \sin t + 3\cos t \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t} \end{cases}$

Вказівка. Необхідно перше рівняння системи звести до рівняння 2-го порядку і знайти його характеристичне рівняння.

8. Знайти загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

а) $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} + te^{t} - e^{4t} \\ y = -C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} - (t+1)e^{t} - 2e^{4t} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t \end{cases}$.

в) $\begin{cases} x(z) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ y(z) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \end{cases}$

Вказівка. Дана система – лінійна неоднорідна. Спочатку шукається загальний розв'язок відповідної однорідної системи, а потім використати метод невизначених коефіцієнтів.

9. Методом варіації довільних сталих знайти загальний

розв’язок системи: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{1}{t^2} + \ln t \end{cases}$

а) $\begin{cases} x(z) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t} \\ y(z) = -C_1 e^{-7t} + 2C_2 e^{2t} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - \ln t \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + te^t - e^{4t} \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \dfrac{5}{\cos t} e^t \end{cases}$

Вказівка. Дана система – лінійна неоднорідна. Спочатку шукається загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

Література до змістовного модуля IV

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Еругин Р.П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Ляшко И.И. и др. Дифференциальные уравнения.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.
6. Кисилев А.И., Краснов М.А., Макаренко Т.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
7. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений.
8. Самойленко Ф.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.
10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
11. Филиппов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
12. Pudy A.E., Rakov S.A., Prokopenko A.I. Mathematical Analysis. Differential Equations.
13. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1991. – 366 с.

14. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. – 304.
15. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. Учебн. Пособие для студентов физ-мат. Фак. Пед. Ин-том. М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
16. Бацевич О.Ф. Диференціальні рівняння. Курс лекцій для студентів базового напряму «Електромеханіка». Львів: Львівська політехніка, 2007. – 40 с.

Навчальне видання

Валентина Григорівна МОТОРІНА

Андрій Іванович ПРОКОПЕНКО

Анатолій Юхимович ПУДИ

Надія Петрівна СТОГНІЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник для студентів
природничо-математичних спеціальностей педагогічних вищих навчальних закладів

Відповідальний за випуск: Моторіна В.Г.

Комп'ютерна верстка: Тараров Д.С.

Підписано до друку . Формат 60х84 1/16

Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк офсетний. Ум. друк. арк. 13,18. Обл.-вид.арк. 12,41.

Зам. №219. Тираж 300 прим. Ціна договірна.

Харківський національний педагогічний університет

імені Г.С. Сковороди.

Україна, 61002, м. Харків, вул. Артема, 29.

Видавець СПДФО Прокопенко Г.Є.

Свідоцтво про державну реєстрацію:

Серія ДК № 1635 від 25.12.03 р.

Ліцезія № 1413900866.