Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С. Сковороди

І.Т. СІРА

Вивчення модуля «Лінійна алгебра» курсу «Лінійна алгебра та геометрія»

Опорні конспекти лекцій для студентів
математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ
(Навчально-методичний посібник)

Харків 2017

Укладачі: І.Т. Сіра

Рецензенти:
Олефіренко Н.В. – доктор педагогічних наук, доцент кафедри інформатики ХНПУ імені Г.С.Сковороди
Водолаженко О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ХНПУ імені Г.С.Сковороди

Вивчення модуля «Лінійна алгебра» курсу «Лінійна алгебра та геометрія» (опорні конспекти лекцій для студентів спеціальності «Інформатика» педагогічних ВНЗ(Навчально-методичний посібник) - Харків: ХНПУ імені Г.С.Сковороди, – 2017.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до навчальної програми курсу «*Лінійна алгебра та геометрія»* для спеціальностей „Математика“, „Фізика“, „Інформатика“ педагогічних ВНЗ.

Навчальний курс «*Лінійна алгебра та геометрія*» покликаний розвинути у майбутнього вчителя математики просторову уяву у зв'язку з аналітичними методами, з груповою і структурною точками зору на геометрію; дати ґрунтовні загальні уявлення про сучасний аксіоматичний метод, елементи багатовимірної геометрії афінного і евклідового просторів, тобто сформувати достатньо широкий погляд на геометрію, алгебру та їх методи і на елементарну математику з точки зору вищої. Сформувати у студентів загальну та предметну компетентність.

Посібник придатний для самостійної підготовки студентів (особливо студентів заочної форми навчання), а включені до нього завдання для самоконтролю допоможуть випускнику оцінити свої знання і вміння.

Затверджено кафедрою математики
Харківського національного педагогічного університету
імені Г. С. Сковороди
Протокол № 2 від 12.09.2017 р.
Видано за друк укладачів

Зміст модуля « Лінійна алгебра»

Тема 1. Матриці.
1.1. Початкові відомості про матриці
1.2. Операції над матрицями та їхні властивості
1.2.1. Додавання, віднімання матриць і множення матриць на число
1.2.2. Множення матриць
1.2.3.Транспонування матриць
1.2.4. Обернена матриця
– Обчислення оберненої матриці за допомогою алгебраїчних доповнень
– Знаходження оберненої матриці елементарними перетвореннями
1.3. Матричні рівняння

Тема 2. Визначники.
2.1. Означення визначника *n*-го порядку
2.2. Основні властивості визначників
2.3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця
2.4. Методи обчислення визначників
2.4.1. Метод Гаусса
2.4.2. Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Тема 2. Системи лінійних рівнянь.
3.1. Загальні відомості про системи лінійних рівнянь
3.2. Матриця системи лінійних рівнянь, її ранг та способи його обчислення, ознака сумісності та визначеності
3.2.1. Матриця системи лінійних рівнянь
3.2.2. Ранг матриці системи лінійних рівнянь
3.2.3. Нмови сумісності та визначеності систем лінійних рівнянь
3.2.4. Формули Крамера

ТЕМА 1. МАТРИЦІ

1.1. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО МАТРИЦІ

Матрицею називається ***таблиця чисел*** a_{ij} $i = 1,2,\dots,n$ та $j = 1,2,\dots,m$, складена з n рядків та m стовпців, яку позначають великими латинськими літерами A, B, C і т. д. і записують у такому вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{Vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Поняття індексів елементів матриці, її стовпців і рядків визначаються як і у визначника. *Матрицею-рядком* називається матриця, яка складається з одного рядка, а матрицею-стовпцем – з одного стовпця.

Якщо у матриці кількість стовпців n не дорівнює кількості рядків m, тобто $n \neq m$, то така матриця називається *прямокутною*. *Розміром* прямокутної матриці називають добуток числа рядків n на число стовпців m і позначають $n \times m$. Якщо хочуть вказати розмір матриці $n \times m$, то пишуть $A_{n\times m}$. Дві матриці вважаються *рівними*, якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи.

Якщо ж у матриці кількість стовпців дорівнює кількості рядків, тобто $n = m$, то матриця називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається, як і у визначника, *порядком*. Як і у визначника, в квадратних матрицях виділяють головну і побічну діагональ.

Будь-якій квадратній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність число – визначник цієї матриці, який позначається символом $\det A$ і записується таким чином:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ Прямокутна матриця відповідного визначника не має.

Нульовою називається матриця, яка складається лише з нулів. позначається така матриця буквою O.

Над рядками і стовпцями матриці часто доводиться виконувати такі операції:

- перестановка (транспозиція) двох рядків (стовпців);
- множення рядка (стовпця) на деяке число;
- додавання до одного рядка (стовпця) іншого її рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

Їх називають *елементарними перетвореннями матриці*.

У класі матриць виділяється спеціальний підклас так званих ступінчастих матриць. *Ступінчастими* називаються матриці, які задовольняють такі умови:

- якщо в i-му рядку перший відмінний від нуля елемент стоїть на k-му місці, то в наступному $i+1$-му рядку на перших k місцях стоять нулі;
- якщо кожен елемент i-го рядка дорівнює нулю, то й кожен елемент наступного $i+1$-го рядка також дорівнює нулю.

Ступінчастими є, наприклад, матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Кожну матрицю скінченим числом елементарних перетворень рядків (стовпців) можна перетворити на ступінчасту.*

Приклад 1. За допомогою елементарних перетворень звести матрицю до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -11 & 17 & 8 \end{pmatrix}.$$

◄ Віднімемо від другого рядка матриці перший рядок, помножений на 2, а від четвертого – перший рядок; дістанемо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 13 & 5 \end{pmatrix}$.

Віднімемо тепер від третього рядка матриці другий її рядок, а до четвертого додамо другий, помножений на 2; дістанемо матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -9 \end{pmatrix}$.

Нарешті, додавши третій рядок матриці до четвертого її рядка, дістанемо ступінчасту матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Квадратна ступінчаста матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад, матриця $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ є діагональною і позначається символом $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Діагональна матриця такого виду $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одному і тому ж числу, називається *скалярною* і позначається $\mathrm{diag}_n(\lambda)$. Скалярна матриця, у якої $\lambda = 1$, називається *одиничною* і позначається буквою *E*. Наприклад, одинична матриця четвертого порядку має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Основними операціями над матрицями є додавання матриць та множення матриць на число, а також відшукання оберненої матриці до даної, причому кожна з цих операцій виконується за певних умов.

1.2.1. ДОДАВАННЯ, ВІДНІМАННЯ МАТРИЦЬ І МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ НА ЧИСЛО

Сумою двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називають ***матрицю*** $C_{m\times n} = (c_{ij})$, у якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ де } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

і позначають

$$C = A + B. \tag{1.3}$$

Зауваження. Операція додавання вводиться лише для матриць однакового розміру.

Операція, яка матрицям *A* і *B* ставить у відповідність матрицю *C* і зводиться до додавання всіх пар їхніх відповідних елементів, називається *додаванням матриць*.

Приклад 2. Додати матриці $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

➤ Користуючись формулами (2.2) і (2.3), отримаємо

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$ ➤

Властивості операції додавання матриць

1. *Асоціативність*: для будь-яких матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$ та $C_{m\times n} = (c_{ij})$ має місце рівність

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

2. *Комутативність*: для будь-яких матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ має місце рівність $A+B = B+A$.

3. Існує нейтральний елемент відносно даної операції. Це нульова матриця того ж порядку, тобто для будь-якої матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ справджуються рівності

$$A_{m\times n} + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}.$$

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на число*** λ називають матрицю $B_{m\times n} = (b_{ij})$, де

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\,;\ j = \overline{1,n}\right) \tag{1.4}$$

і записують

$$B = \lambda A. \tag{1.5}$$

При цьому λ називають *числовим множником*, а *A – матричним*. Операція, яка матриці *A* і числу λ ставить у відповідність матрицю λA, називається *множенням матриці на число* і зводиться до множення всіх її елементів на це число.

Приклад 3. Помножити матрицю $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ на число 3.

➤ За формулами (1.4) і (1.5), отримаємо $3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$. ➤

Властивості операції множення матриці на число

1. *Асоціативність*: для будь-якої матриці A і довільних чисел α і β має місце рівність $\alpha(A\beta)=(\alpha\beta)A$.

2. *Дистрибутивність відносно додавання матриць*: для будь-яких матриць A і B того самого розміру і довільного числа δ має місце рівність $\delta(A+B)=\delta A+\delta B$.

3. *Дистрибутивність відносно додавання чисел*: для будь-якої матриці A і довільних чисел α і β має місце рівність $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Різниця матриць A і B визначається як матриця, яка дорівнює сумі матриці A і матриці B, помноженої на –1: $A-B=A+(-1)B$.

1.2.2. МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ

Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Квадратні матриці одного порядку є взаємно узгодженими.

Добутком матриць $A_{m\times s}=(a_{ij})$ та $B_{s\times n}=(b_{ij})$ називають матрицю $C_{m\times n}=(c_{ij})$, елементи якої визначаються за формулами

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mn}\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right) \qquad (1.6)$$

і позначають $C=A\cdot B$. При цьому матрицю A називають *лівим*, а матрицю B – *правим* множником.

Зауваження. Операція множення вводиться лише для узгоджених матриць.

Множенням матриць називається операція, яка матрицям A і B ставить у відповідність матрицю $C=A\cdot B$ за **правилом множення матриць**: *для того, щоб отримати елемент, який стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику добутку матриці A на матрицю B, слід елементи i-го рядка матриці A помножити на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B і добутки додати*.

Приклад 4. Помножити прямокутні матриці
$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1 & \delta_1 & \lambda_1\\ \gamma_2 & \delta_2 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

➤ Перевіримо матриці на узгодженість: кількість стовпців першої матриці дорівнює два, кількість рядків другої матриці також дорівнює два, отже, матриці узгоджені, їх можна перемножити. Згідно формули (2.6), одержимо

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & \lambda_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 & \alpha_1\delta_1 + \beta_1\delta_2 & \alpha_1\lambda_1 + \beta_1\lambda_2 \\ \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 & \alpha_2\delta_1 + \beta_2\delta_2 & \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 \\ \alpha_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2 & \alpha_3\delta_1 + \beta_3\delta_2 & \alpha_3\lambda_1 + \beta_3\lambda_2 \end{pmatrix}. ➤$$

Приклад 5. Помножити квадратні матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

⮜ За означенням квадратні матриці одного порядку є взаємно узгодженими. Виконаємо множення, користуючись формулою (2.6)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 4 + 2\cdot(-1) & (-1)\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 4 + (-2)\cdot(-1) & 3\cdot 5 + (-2)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}.$$

➤

Властивості множення матриць

1. *Некомутативність*: добуток двох матриць залежить від порядку множників, тому для більшості випадків $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Проте для деяких пар квадратних матриць *A* і *B* може трапитись, що $A \cdot B = B \cdot A$; такі матриці називаються *переставними.*

2. *Асоціативність*: якщо добутки *AB* і *BC* визначені, то $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3. *Дистрибутивність відносно операції додавання матриць*:

a) якщо добутки *AC* і *BC* визначені, то $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

b) якщо добутки *CA* і *CB* визначені, то $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

4. *Дистрибутивність відносно числа*: якщо добуток *AB* визначений, то для будь-якого числа λ виконуються рівності $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

5. Існує нейтральний елемент відносно множення квадратних матриць. Це одинична матриця того ж порядку, тобто для будь-якої матриці A_n справджуються рівності $A_n \cdot E_n = E_n \cdot A_{m\times n} = A_n$.

6. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Матриці, для яких має місце рівність *AB*=*BA*, називаються *переставними*.

1.2.3.ТРАНСПОНУВАННЯ МАТРИЦЬ

Крім розглянутих основних операцій над матрицями застосовується ще одна – *транспонування* – таке перетворення матриці, при якому рядки цієї матриці стають її стовпцями з тими самими номерами.

Сума і добуток матриць та добуток матриці на число транспонуються за такими **правилами**:

1. Для будь-яких матриць A та B того самого розміру $(A+B)^T = A^T + B^T$.

2. Якщо добуток AB матриць A та B визначений, то $(AB)^T = B^T A^T$.

3. Для кожної матриці і будь-якого числа λ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо дорівнює транспонованій до неї матриці, тобто $A = A^T$, і *кососиметричною*, якщо дорівнює транспонованій до неї матриці, яка взята з протилежним знаком, тобто $A = -A^T$. Причому, довільну квадратну матрицю можна записати у вигляді суми симетричної і кососиметричної матриць, де симетрична матриця знаходиться за формулою $S = \dfrac{A + A^T}{2}$, а кососиметрична $K = \dfrac{A - A^T}{2}$.

Приклад 6. Записати матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ у вигляді суми симетричної і кососиметричної матриці.

➤ Знайдемо матрицю, транспоновану до даної $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, і за вище записаними формулами обчислимо симетричну матрицю $S=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 5 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 6 \end{pmatrix}$ і кососиметричну матрицю

$$K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{5}{2} \\ 3 & 5 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

1.2.4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці A, якщо $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. Матриця називається *невиродженою* (або *неособливою*), якщо її визначник відмінний від нуля, і *виродженою* (або *особливою*), якщо визначник дорівнює нулю.

ОБЧИСЛЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ЗА ДОПОМОГОЮ АЛГЕБРАЇЧНИХ ДОПОВНЕНЬ

Нехай $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – довільно вибрана матриця n-го порядку. Матриця A^{α}, в якій елементами i-го рядка $(i=1,2,\ldots,n)$ є алгебраїчні доповнення елементів i-го стовпця матриці A, називається *взаємною* матрицею до матриці A, тобто

$$A^{\alpha}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Щоб отримати цю матрицю A^{α}, потрібно на місце кожного елемента $a_{ij}\ (i, j=1,2,\ldots,n)$ матриці A поставити його алгебраїчне доповнення $A_{ij}\ (i, j=1,2,\ldots,n)$ і одержану матрицю транспонувати (дія, аналогічна транспонуванню визначника). Тепер обчислимо добутки AA^{α} і $A^{\alpha}A$. Користуючись формулами (1.8) – (1.11), дістанемо

$$AA^{\alpha}=A^{\alpha}A=\begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

Тепер для одержання в формулі (2.7) одиничної матриці необхідно поділити кожен елемент даної матриці на $\det A$, а цю дію можна виконати лише за умови, що визначник матриці *A* відмінний від нуля, тобто матриця *A* є невиродженою.

Теорема 2.2. *Для того, щоб існувала матриця, обернена до матриці A, необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

Отже, виконавши умови теореми 2.2, маємо *формулу оберненої матриці*:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{\alpha}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Приклад 7. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

➤ Обчислимо визначник цієї матриці $\det A=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 4 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Визначник відмінний від нуля, отже, обернена матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1;\ A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4;\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

За формулою (2.8) складемо обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{-1} & \frac{4}{-1} & \frac{3}{-1}\\ \frac{-1}{-1} & \frac{5}{-1} & \frac{3}{-1}\\ \frac{1}{-1} & \frac{-6}{-1} & \frac{-4}{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$ ➤

ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Кожну невироджену матрицю елементарними перетвореннями рядків (стовпців) можна перетворити в одиничну матрицю.

Теорема 2.3. *Якщо який-небудь ланцюжок елементарних перетворень рядків (стовпців) переводить квадратну матрицю A в одиничну матрицю E, то цей же ланцюжок перетворень переводить матрицю E в матрицю* A^{-1}.

На основі цієї теореми сформулюємо **алгоритм знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень**: *для* *знаходження матриці, оберненої до квадратної матриці A n-го порядку, необхідно прямокутну матрицю $(A \mid E_n)$ розміру $n\times 2n$ за допомогою елементарних перетворень рядків звести до вигляду $(E_n \mid C)$; одержана при цьому матриця C буде оберненою до матриці A.*

Приклад 8. Знайти матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

➤ Запишемо прямокутну матрицю $(A \mid E_3)$:

$$(A \mid E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

За допомогою елементарних перетворень рядків зведемо цю матрицю до виду $(E_3 \mid C)$. (Під стрілками, які позначають елементарні перетворення, скорочено зазначено їхній характер).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{р. 2 - р.1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{р.1} + \text{р.3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow[\substack{\text{Транспозиція} \\ \text{р. 2 і р. 3}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Помножено} \\ \text{р. 2 на } \frac{1}{2}}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (E_3 \mid A^{-1}).$$

Отже, оберненою матрицею до матриці A є матриця $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ➤

1.3. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Нехай A і B – квадратні матриці n-го порядку. Якщо дані матриці невироджені, то можна розв'язати кожне з матричних рівнянь: $A\cdot X = B,\ Y\cdot A = B$.

Розглянемо перше рівняння $A\cdot X = B$. Помножимо зліва обидві частини рівності на матрицю A^{-1}. Дістанемо $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, але праву частину цієї рівності можна спростити: $A^{-1}\cdot A\cdot X = \left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X = E_n\cdot X = X$, тому в результаті одержимо

$$X = A^{-1}\cdot B. \qquad (2.9)$$

Цей розв'язок називають *правою часткою*.

Виконавши аналогічні дії, враховуючи, що дія множення матриць некомутативна, одержимо розв'язок другого рівняння

$$Y = B\cdot A^{-1}, \qquad (2.10)$$

який називають *лівою часткою*.

Приклади. 9. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

◄ Використаємо формулу (2.9) для знаходження правої частки $X = A^{-1}\cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Знайдемо спочатку обернену матрицю до A. $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2$. $A_{11} = 4, A_{12} = -2, A_{1} = -5, A_{22} = 3$. Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; значить, $X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. ►

10. Розв'язати матричне рівняння $Y\cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

◄ Використаємо формулу (2.10) для знаходження лівої частки $Y = B\cdot A^{-1}$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Так як матриця A така сама, як і в попередньому прикладі, то і обернена матриця A^{-1} буде мати таке саме значення $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; значить $Y = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ➤

◈ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте визначення матриці; матриці-стовпця; матриці-рядка.

2. Яка матриця називається прямокутною, квадратною; ступінчастою, діагональною, скалярною, одиничною; нульовою?

3. Що є розміром матриці; порядком матриці? Для яких матриць вживаються ці поняття?

4. Коли дві матриці вважаються рівними?

5. Перелічіть елементарні перетворення рядків (стовпців) матриці.

6. Сформулюйте визначення та властивості суми та різниці двох матриць, добутку матриці на число, добутку двох матриць.

7. При виконанні яких умов можна додати; помножити матриці?

8. Запишіть правило множення матриць.

9. Яка матриця називається оберненою і яка матриця може мати обернену?

10. Обчисліть на прикладі обернену матрицю за допомогою алгебраїчних доповнень.

11. Сформулюйте алгоритм знаходження оберненої матриці елементарними перетвореннями.

12. Як записуються елементарні матричні рівняння та знаходяться їхні розв’язки?

✍ ВПРАВИ

1. Обчислити $AB - BA$, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ і

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ і

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Виконати дії:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}^2$; **4)** $\begin{pmatrix} 3 & 2\\ -4 & -2\end{pmatrix}^5$.

3. Знайти $f(A)$, якщо:

1) $f(x)=x^2-x-1,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$; **2)** $f(x)=x^2-5x+3,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$;

3) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x},\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

4. Відшукати обернену матрицю до матриці *A* за допомогою алгебраїчних доповнень:

1) $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; **2)** $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; **3)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

5. Відшукати обернену матрицю до матриці *A* елементарними перетвореннями:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. Розв'язати матричні рівняння:

1) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

2) $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

7. Представити матрицю A у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць:

1) $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -3\\ 6 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 7\\ -5 & 2 & 8\end{pmatrix}$.

ТЕМА 2. ВИЗНАЧНИКИ. ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ

2.1. ОЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧНИКА *N*-ГО ПОРЯДКУ

Перестановкою з n чисел або n елементів називають множину n перших натуральних чисел, записаних у деякому певному порядку. Перестановку з n чисел в загальному вигляді записують так: $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. У цьому записі кожен із символів i_s $(s=1,2,\ldots,n)$ означає одне з чисел $1,2,\ldots,n$, причому жодне з чисел не зустрічається двічі.

Транспозицією називається перетворення перестановки, при якому деякі два її елементи міняються місцями, а решта елементів залишається нерухомими. Наприклад, внаслідок транспозиції елементів 6 і 4 у перестановці (1, 6, 2, 5, 4, 3) дістанемо перестановку (1, 4, 2, 5, 6, 3).

Нехай $(l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots, l_s, \ldots, l_n)$ – довільна, але зафіксована перестановка з *n* символів. Кажуть, що у перестановці $(l_1, l_2, \ldots, l_k, \ldots, l_s, \ldots, l_n)$ елементи (числа) *утворюють інверсію*, якщо $l_k > l_s$, але l_k стоїть в цій перестановці лівіше від l_s. Наприклад, в перестановці (1, 5, 2, 4, 3) елементи 5 і 4, або 5 і 2, або 5 і 3, або 4 і 3 утворюють інверсію, а елементи 1 і 3 інверсії не утворюють.

Парною називається перестановка, якщо число інверсій, утворюваних її елементами, парне, і *непарною*, якщо число утворюваних інверсій непарне. Наприклад, перестановка (7, 5, 4, 6, 1, 2, 3) парна, бо її елементи утворюють 16 інверсій (перевірте!), а перестановка (2, 1, 3, 6, 4, 5, 7) непарна, бо її елементи утворюють 3 інверсії.

Множина *A* вважається *взаємно однозначно відображеною* на множину *B*, якщо кожному елементу $a \in A$ за яким-небудь правилом поставлено у відповідність один і лише один елемент $b \in B$, причому будь-яким двом різним елементам множини *A* відповідають два різні елементи множини *B* і кожен елемент множини *A* є відповідним, принаймні, для одного елемента множини *B*. Якщо множина *A* взаємно однозначно відображена на множину *B*, яка збігається з множиною *A*, то говорять, що множина *A* взаємно однозначно *відображена сама на себе*, тобто вказано правило, за яким кожному елементу $a \in A$ відповідає один і тільки один елемент $a' \in A$ і кожен елемент $b' \in A$ є відповідним для одного і тільки одного елемента $b \in A$.

Нехай *M* є множина перших *n* натуральних чисел: $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Підстановкою* множини *M* або *підстановкою n-го ступеня* називається будь-яке взаємно однозначне відображення множини $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ самої на себе. Якщо при підстановці φ число $i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ відображується в число a_i, то записують $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$, тобто під кожним з чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ підписують те число, в яке воно відображується, і ці два рядки беруть у дужки. Цей запис слід читати так: при підстановці φ 1 переходить в a_1, 2 переходить в a_2, і т. д., *n* переходить в a_n. Оскільки підстановка є взаємно однозначним відображенням, то всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ різні, і, отже, другий рядок цього запису являє собою деяку перестановку з елементів $1,2,3,\ldots,n$.

Парною називається підстановка, якщо парності верхньої та нижньої перестановок довільного її запису збігаються, і *непарною*, якщо парності цих перестановок протилежні. Або: *парною* називається підстановка, якщо сумарне число інверсій у верхній та нижній перестановках довільного її запису, парне, в іншому разі вона називається *непарною*.

<u>Зауваження</u>. Обидва означення еквівалентні.

Приклад 1. Визначити парність підстановки 6-го ступеня $\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

➤ У верхній перестановці цього запису 5 інверсій, а в нижній їх 11. Загальне число інверсій в обох перестановках – 16. Отже, підстановка парна.

Запишемо тепер цю підстановку, розставивши елементи верхньої перестановки в порядку зростання; зрозуміло, зберігаючи відповідність:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

У верхній перестановці цього запису 0 інверсій, а в нижній – їх 8. Загальне число інверсій – 8, отже, підстановка парна.

Цей приклад показує, що при різних записах даної підстановки парність загального числа інверсій в обох перестановках зберігається, а саме число загалом змінюється. ➤

Визначник (детермінант) n-го порядку записують у такому вигляді:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2.1)$$

де a_{ij} – елемент цього визначника, розташований на перетині *i*-го рядка, *j*-го стовпця, причому $i = 1, 2, \ldots, n$ та $j = 1, 2, \ldots, n$. Сукупність елементів $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ визначника називають *i–тим рядком* визначника; а сукупність елементів $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ *k–тим стовпцем* визначника. Кількість рядків (стовпчиків) визначника називається його *порядком*.

Діагональ визначника, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута, тобто утворена елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, називається *головною діагоналлю*; діагональ визначника, що йде з лівого нижнього до правого верхнього кута, тобто утворена елементами $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \ldots, a_{1n}$ називається *побічною діагоналлю*.

Визначником (детермінантом) n-го порядку називають вираз, який дорівнює алгебраїчній сумі $n!$* членів, якими є всі можливі добутки елементів цього визначника, взятих по одному з кожного його рядка і кожного стовпця, причому член береться із знаком плюс, якщо індекси його елементів-співмножників утворюють парну підстановку, в іншому разі із знаком мінус, тобто

$$\det = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \tag{2.2}$$

де $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – число інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ з чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ і підсумовування ведеться по всіх $n!$ перестановках з n чисел.

<u>Зауваження.</u> Дане означення є універсальним, так як передбачає довільну природу елементів визначника (наприклад, функції, тригонометричні вирази та ін.). Якщо ж елементами визначника є виключно числа, то визначник є число.

---

* Вираз $n!$ читається „ен факторіал" і обчислюється як добуток послідовних n чисел, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$; за означенням нуль-факторіал дорівнює одиниці, тобто $0! = 1$.

При $\underline{n=2}$ отримаємо визначник *другого порядку*, який має такий вигляд $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і дорівнює за означенням різниці добутків елементів головної і побічної діагоналей, тобто

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{2.3}$$

Приклад 2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$.

➤ За формулою 1.3. отримаємо: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) = -2.$

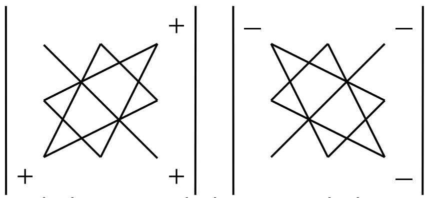
➤

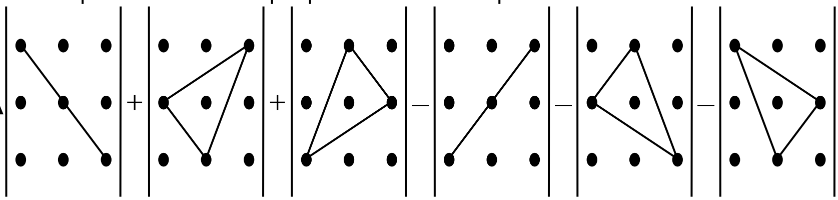
При $\underline{n=3}$ отримаємо визначник *третього порядку*, який має такий вигляд і знаходиться за означенням по формулі:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \tag{2.4}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Правило обчислення визначника третього порядку називають *правилом трикутника*, тому що цю формулу можна отримати, користуючись такою схемою:



Тобто Δ 

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 8 + 4\cdot 3\cdot 2 + 5\cdot\left(-1\right)\cdot 7 - 2\cdot 1\cdot 7 - 5\cdot 4\cdot 8 - \left(-1\right)\cdot 3\cdot 3 =$$

$$= 24 + 24 - 35 - 14 - 160 + 9 = -152.$$

2.2. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

Транспонуванням визначника називається таке його перетворення, при якому рядки цього визначника стають стовпцями з тими самими номерами. Визначник, отриманий в результаті транспонування, називають *транспонованим* і позначають Δ^T. Якщо

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ то } \Delta_n^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.5)$$

Властивості

1. Визначник при транспонуванні не змінюється.
Ця властивість підтверджує рівноправність рядків і стовпців визначника: будь-яке твердження про рядки визначника, правильність якого доведено, справедливе і для його стовпців.

2. Якщо який-небудь з рядків визначника є *нульовим* (тобто складається з нулів), то визначник дорівнює нулю.

3. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак зміниться на протилежний.

4. Визначник, в якому є два однакові рядки, дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи одного з рядків визначника помножити на деяке число λ, то визначник помножиться на λ.
Цю властивість можна сформулювати ще таким чином: спільний множник всіх елементів будь-якого рядка визначника можна винести за знак визначника.

Два рядки визначника називаються *пропорційними*, якщо один з них дістаємо множенням іншого на деяке число.

6. Визначник, у якого є два пропорційні рядки дорівнює нулю.

7. Якщо кожен елемент *i*-го рядка визначника є сумою двох доданків

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \text{ де } j = \overline{1, n},$$

то визначник дорівнює сумі двох визначників, в яких всі рядки, крім *i*-го, такі самі, як і в даного визначника, а *i*-тий рядок складається у першого визначника з елементів b_{ij}, а в другому – з елементів c_{ij}:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

Властивість 7 можна поширити і на випадок, коли кожен елемент *i*-го рядка є сумою *m* елементів, де $m > 2$.

Позначимо *i*-тий рядок $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ визначника Δ символом α_i і запишемо $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Вважатимемо, рядок α_i визначника Δ є *лінійною комбінацією* рядків $\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \ldots, \alpha_{s_m}$, якщо

$$\alpha_i = k_1\alpha_{s_1} + k_2\alpha_{s_2} + \ldots + k_m\alpha_{s_m}, \qquad (2.7)$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – деякі числа.

Аналогічно визначається лінійна комбінація стовпців визначника.

8. Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією інших його рядків, то визначник дорівнює нулю.

9. Якщо до одного з рядків визначника додамо інший його рядок, помножений на деяке число λ, то визначник не зміниться.

Число λ, звичайно, може бути і від'ємним, тому з властивості 9 випливає, що визначник не змінюється і при відніманні одного його рядка від іншого, помноженого на деяке число. Повторним застосуванням властивості 9 легко довести, що визначник не зміниться, якщо до одного з його рядків додати будь-яку лінійну комбінацію інших його рядків.

Застосування властивостей визначника значно спрощує його обчислення. Наприклад, у визначнику $\Delta = \begin{vmatrix} -12057 & 12067 \\ -456123 & 456123 \end{vmatrix}$ можна винести за знак визначника число (–456123), тоді він запишеться $\Delta = (-456123)\cdot\begin{vmatrix} 12057 & 12067 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, в такому вигляді рахувати можно і усно $\Delta = (-456123)\cdot 10 = -4561230$.

2.3. РОЗКЛАД ВИЗНАЧНИКА ЗА ЕЛЕМЕНТАМИ РЯДКА АБО СТОВПЦЯ

Мінором елемента a_{ij} $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right)$ визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, який отримано з початкового визначника викресленням i-го рядка і j-го стовпця (тобто того рядка і стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент) і позначається M_{ij}. ***Алгебраїчним доповненням*** A_{ij} елемента a_{ij} $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right)$ називається його мінор, взятий із своїм знаком, якщо число $i + j$ парне, та із протилежним знаком, якщо непарне, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 2.1. *Визначник дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого його рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \ (1 \le i \le n), \qquad (2.8)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \ (1 \le j \le n). \qquad (2.9)$$

Формулу (2.8) називають *розкладом визначника за елементами i-го рядка*, а формулу (2.9) – *розкладом визначника за елементами j-го стовпця*.

Наприклад, розкладемо визначник третього порядку за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Сума добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю*:

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \ldots + a_{in}A_{sn} = 0\ (i \neq s), \qquad (2.10)$$

$$a_{1j}A_{1m} + a_{2j}A_{2m} + \ldots + a_{nj}A_{nm} = 0\ (j \neq m). \qquad (2.11)$$

Наприклад, помножимо елементи другого рядка на алгебраїчні доповнення елементів третього рядка визначника третього порядку і обчислимо:

$$a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{22} \cdot (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{23} \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= a_{21}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{13}a_{22} - a_{22}a_{11}a_{23} + a_{22}a_{13}a_{21} + a_{23}a_{11}a_{22} - a_{23}a_{12}a_{21} = 0.$$

2.4. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

2.4.1. МЕТОД ГАУССА

Нехай у визначнику Δ елемент a_{sk} відмінний від нуля, назвемо його *ведучим елементом*. Якщо до *i*-го рядка, $i \neq s$, додамо *s*-тий рядок, помножений на деяке число α_i, то визначник від цього не зміниться. Візьмемо $\alpha_i = -\dfrac{a_{ik}}{a_{sk}}\ (i = 1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,n)$ і додамо *s*-тий рядок, помножений на α_i, до кожного рядка, крім *s*-го. Дістанемо визначник Δ', в якому всі елементи *k*-го стовпця, крім ведучого елемента a_{sk}, дорівнюватимуть нулю. Розклавши визначник Δ' за елементами *k*-го стовпця, дістанемо рівність $\Delta = \Delta' = a_{sk}A_{sk}$ і, таким чином, зведемо обчислення визначника *n*-го порядку Δ до обчислення мінору M_{sk} (визначника порядку $n-1$). З мінором M_{sk} проробимо те саме і т. д. Так діятимемо доти, поки не дістанемо запис визначника Δ у вигляді добутку двох чисел. Такий спосіб обчислення визначника носить назву *метод Гаусса.*

Зауваження 1. Замість додавання s-го рядка, помноженого на $\alpha_i = -\dfrac{a_{ik}}{a_{sk}}$, до i-го рядка $(i = 1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,n)$ і розкладання визначника за елементами k-го стовпця можна додавати k-тий стовпець, помножений на $\alpha_j = -\dfrac{a_{sj}}{a_{sk}}$, до j-го стовпця $(j = 1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n)$ і потім розкладати визначник Δ за елементами s-го рядка.

Зауваження 2. Ведучий елемент a_{sk} доцільно вибирати у тому стовпці (рядку), в якому міститься багато нулів, за ведучий краще брати елемент, який дорівнює 1, бо у цьому випадку множники $\dfrac{a_{1k}}{a_{sk}}, \dfrac{a_{2k}}{a_{sk}}, \ldots, \dfrac{a_{nk}}{a_{sk}}$ дорівнюватимуть відповідно числам $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$.

Приклад 4. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ методом Гаусса.

➤ Візьмемо за ведучий елемент $a_{31} = 1$. До першого рядка додамо третій, помножений на –1, а до другого додамо третій, помножений на 2, дістанемо: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 7 & -3 \\ 0 & -9 & -6 & 1 \\ 1 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, матимемо

$$\Delta = a_{31}A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} 10 & 7 & -3 \\ -9 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

У мінорі M_{31} за ведучий елемент візьмемо $a_{33}=1$. До першого рядка додамо третій, помножений на 3, а від другого – віднімемо третій, дістанемо $\Delta=\begin{vmatrix}16 & 22 & 0\\ -11 & -11 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$.

Розклавши цей визначник за елементами третього стовпця, матимемо

$$\Delta=a_{33}A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}16 & 22\\ -11 & -11\end{vmatrix}=-22\begin{vmatrix}8 & 11\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-22(8-11)=66. \blacktriangleright$$

2.4.2. МЕТОД ЗВЕДЕННЯ ВИЗНАЧНИКА ДО ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ

Визначник є *трикутним*, якщо всі його елементи, що розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Наприклад, трикутний визначник четвертого порядку має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix} \text{ або } \begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}.$$

Теорема 2.3. *Трикутний визначник дорівнює добутку елементів, що стоять на головній діагоналі.*

Даний метод полягає в тому, щоб, використовуючи властивості визначника, перетворити початковий визначник на трикутний і обчислити його значення за теоремою 1.3**.**

Приклад 5. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$ методом зведення визначника до трикутного вигляду.

$\blacktriangleleft$ Віднімемо від четвертого рядка третій, від третього другий, від другого перший, дістанемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix}.$$

У цьому визначнику віднімемо від четвертого рядка третій, а від третього другий, матимемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}.$$

У цьому визначнику від четвертого рядка віднімемо третій, матимемо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$ ➤

◈ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називають перестановкою, транспозицією? В якому випадку елементи перестановки утворюють інверсію? Яка перестановка є парною; непарною? Наведіть приклади.

2. Коли деяка множина вважається взаємно однозначно відображеною на іншу множину; на саму себе?

3. Дайте означення терміну „підстановка”. Яка підстановка вважається парною; непарною? Наведіть приклади.

4. Що називають порядком визначника і визначником *n*-го порядку?

5. Яку сукупність елементів називають стовпцем; рядком визначника?

6. Де розташований елемент a_{24}, a_{51}, a_{36} ?

7. Дайте визначення головної та побічної діагоналей визначника.

8. Наведіть приклади визначників 2-го і 3-го порядку та обчисліть їх.

9. Який визначник є транспонованим до даного?

10. Сформулюйте умови, при яких визначник дорівнює нулю.

11. При виконанні яких дій з елементами, згідно властивостей, визначник не змінюється?

12. Що називають мінором елемента a_{ij} визначника n-го порядку; його алгебраїчним доповненням?

13. Яким чином можна розкласти визначник за його елементами?

14. Чому дорівнює сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця)?

15. Сформулюйте такий метод обчислення визначника, як зведення його до трикутного вигляду. Наведіть приклади.

16. В чому полягає метод обчислення визначників Гауса? Наведіть приклади.

✍ ВПРАВИ

1. Виписати транспозиції, за допомогою яких від перестановки 1, 2, 4, 3, 5 можна перейти до перестановки 2, 5, 3, 4, 1.

2. Вважаючи, що 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – початкове розташування, визначити число інверсій в перестановках:

1) 1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5; **2)** 2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4; **3)** 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

3. Вважаючи, що 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – початкове розташування, підібрати i та k так, щоб:

1) перестановка 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 була парною;

2) перестановка 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7, була непарною.

4. З яким знаком у визначник 6-го порядку входять добутки:

1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; **2)** $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$?

5. Підібрати i та k таким чином, щоб добуток $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$ входив у визначник 5-го порядку зі знаком плюс.

6. Виписати всі доданки, які входять до складу визначника 4-го порядку зі знаком мінус і містять множник a_{23}.

7. Визначник $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ дорівнює Δ. Чому дорівнює визначник $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$?

8. Спростити визначник $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$, розклавши його на доданки.

9. Довести, що $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

10. Розкласти за елементами рядка або стовпця, що містить букви, та обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$**; 2)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$**;**

3) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$**; 4)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$**.**

11. Обчислити визначники 2-го та 3-го порядку, користуючись формулами (1.3) та (1.4):

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & \lg_b a \\ \lg_a b & 1 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28423 \end{vmatrix}$ **;** **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; **8)** $\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

12. Обчислити визначники методом Гауса:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **; 4)** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **.**

13. Обчислити визначники зведенням до трикутного вигляду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **; 2)** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ **;**

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **; 4)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **.**

14. Розв’язати рівняння та нерівності:

1) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ **2)** $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ **3)** $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \end{vmatrix} \le 0;$ **4)** $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 1.$

15. Використовуючи властивості визначників, довести рівності:

1) $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0$ **; 2)** $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$ **;**

3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 1 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$ **.**

ТЕМА 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

3.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається *лінійним*, якщо його можна записати у такому вигляді:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b, \tag{3.1}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – деякі числа, причому $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називаються *коефіцієнтами* цього рівняння, b – вільним членом цього рівняння.

Сукупність записаних у певному порядку n чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ називається ***розв'язком рівняння*** (3.1), якщо після заміни в ньому невідомих x_i відповідними числами l_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ воно перетворюється на правильну рівність.

Якщо сукупність чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ є розв'язком рівняння (3.1), то кажуть, що вона задовольняє це рівняння, і навпаки.

Нехай дано m лінійних рівнянь з n невідомими $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для яких потрібно знайти спільні розв'язки. Тоді вважають, що задана система m лінійних рівнянь з n невідомими, яку записують у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.2}$$

Якщо $m = n$, то система лінійних рівнянь називається *квадратною*, якщо ж $m \neq n$, то вона називається *прямокутною*.

Розв'язком системи лінійних рівнянь (3.2) називається кожна ***сукупність чисел***, записаних у певному порядку $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, що є розв'язком кожного рівняння цієї системи, тобто *розв'язком* системи лінійних рівнянь (3.2) називається кожна сукупність записаних у певному порядку чисел $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, яка кожне рівняння системи (3.2) перетворює на правильну рівність після заміни в ньому невідомих x_i числами l_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок; система лінійних рівнянь, яка не має жодного розв'язку, називається *несумісною*. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо має лише один розв'язок, і *невизначеною*, якщо число її розв'язків перевищує один.

Приклад 1. Дослідити системи лінійних рівнянь на сумісність і, якщо це можливо, знайти розв'язки:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 14x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 21 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$.

➤ **1)** система лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$ – сумісна, бо має розв'язок (1, 3). З'ясуємо, скільки розв'язків має ця система; припустимо, що сукупність чисел (l_1, l_2) є розв'язком цієї системи; тоді

$$\begin{cases} l_1 + 2l_2 = 7 \\ l_1 + 3l_2 = 10 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} l_1 = 7 - 2l_2 \\ l_1 = 10 - 3l_2 \end{cases} \Rightarrow 7 - 2l_2 = 10 - 3l_2 \Rightarrow l_2 = 3,$$

підставивши у рівність $l_1 + 2l_2 = 7$ замість l_2 число 3, дістанемо $l_1 = 1$. Отже, розв'язок (l_1, l_2) збігається з розв'язком (1, 3) і дана система має єдиний розв'язок (1, 3), тобто є визначеною системою;

2) система лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 14x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 21 \end{cases}$ очевидно, має розв'язок $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, а також нескінченну множину інших розв'язків; які б не були числа l_1 і l_2, сукупність чисел $(l_1, l_2, 3 - l_1 - l_2)$ є розв'язком даної системи, отже, дана система невизначена;

3) система лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$ – несумісна. Ліві частини рівнянь однакові, а праві різні. Тому ніяка сукупність чисел (l_1, l_2, l_3) не може одночасно задовольняти обидва рівняння цієї системи.➤

Розв'язати систему лінійних рівнянь означає: дослідити сумісна вона чи ні, в разі сумісності встановити число її розв'язків і знайти їх.

Лінійне рівняння

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{3.3}$$

називається *однорідним*, якщо його вільний член дорівнює нулю. Система лінійних рівнянь називається *лінійною однорідною системою* або *системою лінійних однорідних рівнянь*, якщо всі її рівняння є однорідними (виду (3.3)), тобто якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Ця система сумісна завжди, оскільки вона має нульовий розв'язок $(0, 0, \ldots, 0)$.

Нехай, крім системи лінійних рівнянь (3.2) дано систему

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{s1}x_1 + a'_{s2}x_2 + \ldots + a'_{sn}x_n = b'_s. \end{cases} \tag{3.5}$$

Системи лінійних рівнянь (3.2) і (3.5) називаються *еквівалентними*, якщо кожен розв'язок однієї з них є розв'язком іншої ы навпаки, або якщо обидві системи несумісні. По-іншому: системи лінійних рівнянь (3.2) і (3.5) називаються *еквівалентними*, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.

Приклад 2. Перевірити пари даних систем на еквівалентність:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 = -12 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -14 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 = -12 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -14 \\ x - 5x_2 = 10 \end{cases}$.

➤ **1)** розв’язавши системи рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 = -12 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -14 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$, переконаємось, що кожна з них має лише єдиний розв’язок (1, 3), отже, ці системи еквівалентні;

2) системи рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 = -12 \end{cases}$ і $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -14 \\ x - 5x_2 = 10 \end{cases}$ нееквівалентні, оскільки перша з них має розв’язок (1, 3), а друга – несумісна. ➤

Дві системи лінійних рівнянь, еквівалентні одній і тій самій третій системі, еквівалентні між собою.

Елементарними перетвореннями систем лінійних рівнянь називають, як і перетворення матриць, такі операції:

- перестановка (транспозиція) двох рівнянь системи;
- множення якого-небудь рівняння системи на число, відмінне від нуля;
- додавання до одного рівняння системи іншого її рівняння, помноженого на деяке число.

Теорема 3.1. *Кожне елементарне перетворення будь-якої системи лінійних рівнянь переводить її в еквівалентну.*

3.2. МАТРИЦЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ, ЇЇ РАНГ ТА СПОСОБИ ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ, ОЗНАКА СУМІСНОСТІ ТА ВИЗНАЧЕНОСТІ

3.2.1. МАТРИЦЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему лінійних рівнянь (3.2)

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матрицю, утворену з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь (3.2), називають *матрицею цієї системи* або *основною матрицею системи*:

$$A(S)=A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

Поряд з матрицею (3.6) системи лінійних рівнянь розглядають також *розширену матрицю* $\overline{A}$ *системи лінійних рівнянь* (3.2), яка отримується приєднанням до основної матриці (3.6) стовпця вільних членів системи (3.2) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$, скорочено розширена матриця записується $\overline{A}=\left(a_{ij} \mid b_i\right)$ і має такий вигляд:

$$\overline{A}(S)=\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3.7)$$

3.2.2. РАНГ МАТРИЦІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Рангом $r(A)$ матриці *A* системи лінійних рівнянь є число, яке дорівнює найбільшому з порядків її мінорів, відмінних від нуля, тобто

- ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому $0\le r(A)\le \min(m,n)$;
- $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O_{m\times n}$, тобто ранг матриці дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ця матриця нульова;
- для квадратної матриці *n*-го порядку ранг дорівнює *n* тоді і лише тоді, коли матриця невироджена.

ОБЧИСЛЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ МЕТОДОМ ОБВІДНИХ МІНОРІВ.

Метод обвідних мінорів полягає в тому, що потрібно переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків; якщо вже знайдено мінор *r*-го порядку M_r, відмінний від нуля, то далі потрібно обчислювати лише ті мінори $(r+1)$-го порядку, які обводять мінор M_r (а не всі підряд); якщо вони всі дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює r. За початковий мінор 2-го порядку, ранг якого обчислюють спочатку, беруть той мінор, що стоїть у лівому верхньому куті (так зручніше тоді обраховувати обвідні мінори); якщо ж цей мінор дорівнює нулю, то за початковий беруть інший.

Приклад 3. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

◄ Мінор другого порядку, що стоїть у лівому верхньому куту матриці A $M_2' = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$, дорівнює нулю. Однак у матриці є мінори другого порядку, відмінні від нуля. Таким, зокрема, є мінор

$$M_2'' = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці вже не менший за два, тобто $r \le 2$.

Мінор третього порядку $M_3' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix}$, що обводить мінор M_2'', відмінний від нуля, бо дорівнює 9. Значить, ранг матриці вже не менший за три, тобто $r \ge 3$. Обрахуємо тепер обидва мінори четвертого порядку, що обводять мінор M_3':

$$M_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } M_4'' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

З цього виходить, що $r \neq 4$, а це означає, що ранг матриці A дорівнює 3. ➤

ОБЧИСЛЕННЯ РАНГУ МАТРИЦІ ЗВЕДЕННЯМ МАТРИЦІ ДО СТУПІНЧАСТОГО ВИГЛЯДУ

Так як метод обчислення рангу матриці за допомогою обвідних мінорів є громіздким (бо іноді потрібно обраховувати більше десяти визначників, а це не зручно), тому на практиці краще застосовувати такий ефективний метод обчислення рангу матриці зведенням її до ступінчастого вигляду, який ґрунтується на двох основних теоремах та на вже відомих поняттях (ступінчаста матриця, елементарні перетворення).

Теорема 3.2. *Будь-яке елементарне перетворення матриці не змінює її рангу.*

Теорема 3.3. *Ранг будь-якої ступінчастої матриці дорівнює числу її ненульових рядків*.

Приклад 4. Знайти ранг матриці зведенням її до ступінчастого вигляду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -11 & 17 & 8 \end{pmatrix}.$$

◄ За допомогою елементарних перетворень рядків перетворимо матрицю A в ступінчасту. Віднявши від другого рядка перший, помножений на 2, а від четвертого рядка – перший, дістанемо матрицю $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 13 & 5 \end{pmatrix}$.

Віднімемо тепер від третього рядка другий, а до четвертого додамо другий, помножений на 2; дістанемо матрицю

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, додавши до третього рядка четвертий, дістанемо ступінчасту матрицю

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}..$$

За теоремою 3.3 $r(A''') = 3$.Згідно теореми 3.2 $r(A) = r(A''')$. Отже, ранг матриці A дорівнює 3. ➤

3.2.3. УМОВИ СУМІСНОСТІ ТА ВИЗНАЧЕНОСТІ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Встановити, сумісна чи несумісна система лінійних рівнянь (3.2) (без відшукання її розв'язків) дає змогу така теорема.

Теорема 3.4. Теорема Кронекера-Капеллі ***(критерій сумісності системи лінійних рівнянь)***. *Система лінійних рівнянь (3.2) сумісна тоді і лише тоді, коли ранг основної матриці цієї системи дорівнює рангові її розширеної матриці*.

Приклад 5. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1. \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

➤ Запишемо основну та розширену матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ і $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$. Обчислимо ранги цих матриць. Мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Мінори третього порядку основної матриці A, які обводять мінор M_2, дорівнюють нулю:

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } M_3'' = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тому ранг матриці A дорівнює двом. Ранг розширеної матриці $\overline{A}$ дорівнює трьом, оскільки мінор $M_3''' = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 35 \neq 0.$

Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі система рівнянь несумісна. ➤

Для з'ясування питання про сумісність конкретної системи лінійних рівнянь обчислюють ранг основної та розширеної матриць системи, а потім застосовують теорему Кронекера-Капеллі. Після цього постає запитання, визначена ця система чи ні. Відповідь на нього дає теорема 3.5.

Теорема 3.5. ***(критерій визначеності системи лінійних рівнянь).*** *Для того, щоб система лінійних рівнянь була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці цієї системи дорівнював кількості невідомих, що входять до цієї системи.*

Приклад 6. Дослідити систему лінійних рівнянь на визначеність

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}.$$

⮜ Запишемо основну та розширену матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ і } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right).$$

Обчислимо ранги основної матриці A системи рівнянь і розширеної матриці $\bar{A}$. Ранг матриці A дорівнює 3, оскільки її мінор третього порядку $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$

Ранг розширеної матриці $\bar{A}$ також дорівнює трьом, бо її мінор четвертого порядку дорівнює нулю:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \\ 0 & 2 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, за теоремою 3.4 система сумісна, бо $r(A)=r(\overline{A})=3$. А так як змінних у системі теж три, то за теоремою 3.5 ця система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок. ➤

Теорема 3.6. ***(ознака невизначеності квадратної системи лінійних однорідних рівнянь).*** *Для того, щоб система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник цієї системи дорівнював нулю.*

3.2.4. ФОРМУЛИ КРАМЕРА

Спинимося на застосуванні теорії визначників до розв'язування системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Означення. Визначник, елементами якого є коефіцієнти при невідомих у системі (1)

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

називається **визначником цієї системи**.

Теорема 3.7. Якщо визначник *D* системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1) відмінний від нуля, то ця система має єдиний розв'язок:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D}.} \qquad (3)$$

Тут D_k — визначник, утворений з визначника D системи (1) заміною *k*-го стовпця на стовпець із правих її частин.

Доведення. Помноживши k-те рівняння системи (1) на алгебраїчне доповнення A_{ks} елемента a_{ks} і додавши всі рівняння, дістанемо:

$$(a_{11}A_{1s} + a_{21}A_{2s} + \ldots + a_{n1}A_{ns})\, x_1 + \ldots$$
$$\ldots + (a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns})\, x_s + \ldots$$
$$\ldots + (a_{1n}A_{1s} + a_{2n}A_{2s} + \ldots + a_{nn}A_{ns})\, x_n =$$
$$= b_1A_{1s} + b_2A_{2s} + \ldots + b_nA_{ns}.$$

Згідно з властивостями 9 і 10 визначників маємо рівняння

$$Dx_s = D_s,$$

з якого при $s = 1, 2, \ldots, n$ випливають формули (3).

Отже, якщо система рівнянь (1) має розв’язок, то він подається у вигляді (3).

Доведемо, що ці формули справді визначають розв’язок системи рівнянь (1), підставивши туди розв’язки (3). Для k-го рівняння маємо:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n =$$
$$= a_{k1}\,(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1})\, D^{-1} +$$
$$+ a_{k2}\,(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2})\, D^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{kn}\,(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn})\, D^{-1} =$$
$$= b_1\,(a_{k1}A_{11} + a_{k2}A_{12} + \ldots + a_{kn}A_{1n})\, D^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + b_k\,(a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn})\, D^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + b_n\,(a_{k1}A_{n1} + a_{k2}A_{n2} + \ldots + a_{kn}A_{nn})\, D^{-1} = b_k,$$

з якого випливає справедливість теореми. ♦

Приклад 7. Розв’яжемо за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12, \\ 4x_1 - 5x_2 = 2\,. \end{cases}$$

➤ Запишемо відповідні визначники і знайдемо розв’язки системи рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22,\ \ D_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -66,\ \ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -44;$$

$$x_1 = \frac{-66}{-22} = 3,\ \ x_2 = \frac{-44}{-22} = 2. \ \bullet$$

Приклад 8. Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

◀ Обчислимо визначник цієї системи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot$$

Визначник системи відмінний від нуля. Знайдемо тепер визначник $D_k (k = 1, 2, 3)$ і розв'язки системи рівнянь:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12, \; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8, \; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4;$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3, \; x_2 = \frac{8}{4} = 2, \; x_3 = \frac{4}{4} = 1. \bullet$$

Формули Крамера незручні для практичних обчислень при $n \geq 4$, але вони застосовуються в теоретичних дослідженнях

◈ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається лінійним рівнянням та його розв'язком?

2. Яке лінійне рівняння називається однорідним?

3. Сформулюйте визначення системи лінійних рівнянь та системи лінійних однорідних рівнянь; їхніх розв'язків.

4. Коли система лінійних рівнянь є сумісною (несумісною); визначеною (невизначеною)?

5. Що означає розв'язати систему рівнянь?

6. Які дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними?

7. Перелічіть елементарні перетворення систем лінійних рівнянь.

8. Запишіть приклад системи лінійних рівнянь та складіть її основну і розширену матриці.

9. Дайте визначення рангу матриці системи лінійних рівнянь.

10. Які є основні способи обчислення рангу? В чому полягає сутність цих способів?

11. Сформулюйте критерії сумісності та визначеності систем лінійних рівнянь та систем лінійних однорідних рівнянь.

✍ ВПРАВИ

1. Скласти матрицю, ранг якої дорівнює: **1)** 2; **2)** 3.

2. Як може змінитися ранг матриці, коли до неї приписати: **1)** один стовпець; 2**)** два стовпця?

3. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$;

4. Обчислити ранг матриці способом зведення її до ступінчастого вигляду:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

3)
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4)
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Дослідити системи на сумісність:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

6. В залежності від значення параметра λ дослідити системи на сумісність та визначеність:

1) $\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda - 1)x_3 = \lambda, \\ (\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + 3)x_3 = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (3 + 2\lambda)x_1 + (1 + 3\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 3, \\ 3\lambda x_1 + (3 + 2\lambda)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1, \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + 3x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1, \\ 3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1)x_4 = 1. \end{cases}$

Навчальне видання

Укладач: Сіра Ірина Тихонівна

Вивчення модуля «Лінійна алгебра» курсу «Лінійна алгебра та геометрія»

Опорні конспекти лекцій для студентів
математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ
(Навчально-методичний посібник)

Підписано до друку 15.09.17 р. Формат 60x90/16
Гарнітура Times. Папір офсетний.
Обсяг 3,5 ум.друк.арк. Друк ізографічний.
Тираж 50 прим.

Надруковано у друкарні ХНУПС імені Івана Кожедуба
61023, м. Харків, вул. Сумська, 77/79