Міністерство освіти і науки України

Харківський національний педагогічний університет

імені Г.С. Сковороди

В.Г. МОТОРІНА, І.Т. СІРА

Вивчення змістовного модуля «Інтегральне числення функції від однієї змінної» курсу «Математичний аналіз» (опорні конспекти лекцій)

для студентів

математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ

Харків 2010

Укладачі:

В.Г. Моторіна, І.Т. Сіра

Рецензенти:

Сергєєв В.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики ХНПУ імені Г.С.Сковороди

Водолаженко О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ХНПУ імені Г.С.Сковороди

Вивчення змістовного модуля «Інтегральне числення функції від однієї змінної» курсу «Математичний аналіз» (опориі конспекти лекцій) для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. - Харків: ХНПУ імені Г.С.Сковороди, 2016.

Затверджено кафедрою математики
Харківського національного педагогічного університету
імені Г.С.Сковороди
Протокол № 3 від 27.09.2016 р.

Видано за друк укладачів

Вивчення змістовного модуля «Інтегральне числення функцій однієї змінної»

Важливим завершенням функціональної лінії шкільного курсу “Математика” є розгляд понять похідної та інтеграла, які є необхідним інструментом дослідження руху. Проте шкільний курс математики не передбачає подальшого розвитку навичок техніки інтегрування.

Метою навчального курсу «Математичний аналіз» в педагогічному університеті є: дати наукове обґрунтування тих понять, перші уявлення про які даються у школі і які не висвітлюються іншими математичними курсами. Це такі фундаментальні поняття як функція, границя функції, неперервність, диференційованість, інтегрованість функції.

Відповідно, метою викладання змістовного модуля «Інтегральне числення функцій однієї змінної» є розвиток логічного і алгоритмічного мислення; оволодіння основними методами дослідження і розв’язування математичних задач; вироблення навичків самостійно розширювати математичні знання і проводити математичний аналіз прикладних задач.

У результаті вивчення змістового модуля студент повинен

знати: означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості; таблицю невизначених інтегралів; методи інтегрування; означення визначеного інтеграла та інтеграла Рімана; означення визначеного інтеграла зі змінною верхнею межею, властивості визначеного інтеграла; означення криволінійного сектора,довжини дуги; означення невласного інтеграла; методи наближених обчислень визначеного інтеграла;

уміти:

- знаходити невизначені інтеграли;
- перевіряти диференціюванням таблицю інтегралів;
- інтегрувати функції безпосередньо, частинами і підстановками;
- інтегрувати елементарні дроби, раціональні дроби;
- інтегрувати функції раціонально залежних від тригонометричних;
- інтегрувати функції раціонально залежних від х і корня квадратного, від квадратного трьохчлена;
- інтегрувати раціональні дроби від дробово-лінійних ірраціональностей;
- інтегрувати диференціальні біноми;
- інтегрувати частинами визначений інтеграл;
- інтегрувати методом заміни змінної визначені інтеграли;

- спрощувати інтеграли в симетричних межах від парних і непарних функцій;
- застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення невласних інтегралів;
- обчислювати наближено визначені інтеграли за формулами прямокутників, трапецій і парабол;
- розрізняти дві основні схеми застосування визначеного інтеграла;
- обчислювати площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла;
- обчислювати довжини дуг плоских і просторових кривих за допомогою визначеного інтеграла;
- обчислювати об'єми тіл за допомогою визначеного інтеграла;
- обчислювати площу поверхні обертання за допомогою визначеного інтеграла;
- обчислювати фізичні величини за допомогою визначеного інтеграла.

здатен:

- формулювати і доводити теореми про загальний вигляд первісної, про різницю двох первісних;
- формулювати і доводити основні властивості невизначеного інтеграла;
- формулювати і доводити властивості визначеного інтеграла;
- формулювати і доводити теорему про похідну від інтеграла із змінною верхньою межею;
- доводити формулу Ньютона-Лейбніца;
- формулювати і доводити ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду;
- формулювати і доводити ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду;
- обчислювати і досліджувати на збіжність невласні інтеграли;
- давати геометричну інтерпретацію невизначеному інтегралу, визначеному інтегралу, невласним інтегралам першого і другого роду, визначеному інтегралу із змінною верхньою межею;
- ілюструвати геометричне властивості визначеного інтеграла, про середнє значення функції, про монотонність визначеного інтеграла.

Структура змістовного модуля

«Інтегральне числення функцій однієї змінної».

Тема 1. Невизначений інтеграл.

Невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Інтегрування підстановкою. Інтегрування частинами. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування найпростіших алгебраїчних та трансцендентних ірраціональних функцій.

Тема 2. Визначений інтеграл та його застосування

Визначений інтеграл. Інтегровність за Ріманом. Формула Ньютона-Лейбніца. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу. Основні властивості визначеного інтегралу. Теорема про середнє значення. Визначений інтеграл із змінною верхнею межею, його властивості. Теорема про існування первісної функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Інтегрування частинами та підстановкою у визначеному інтегралі. Площа криволінійної трапеції та сектора, їх обчислення. Довжина дуги плоскої регулярної кривої.

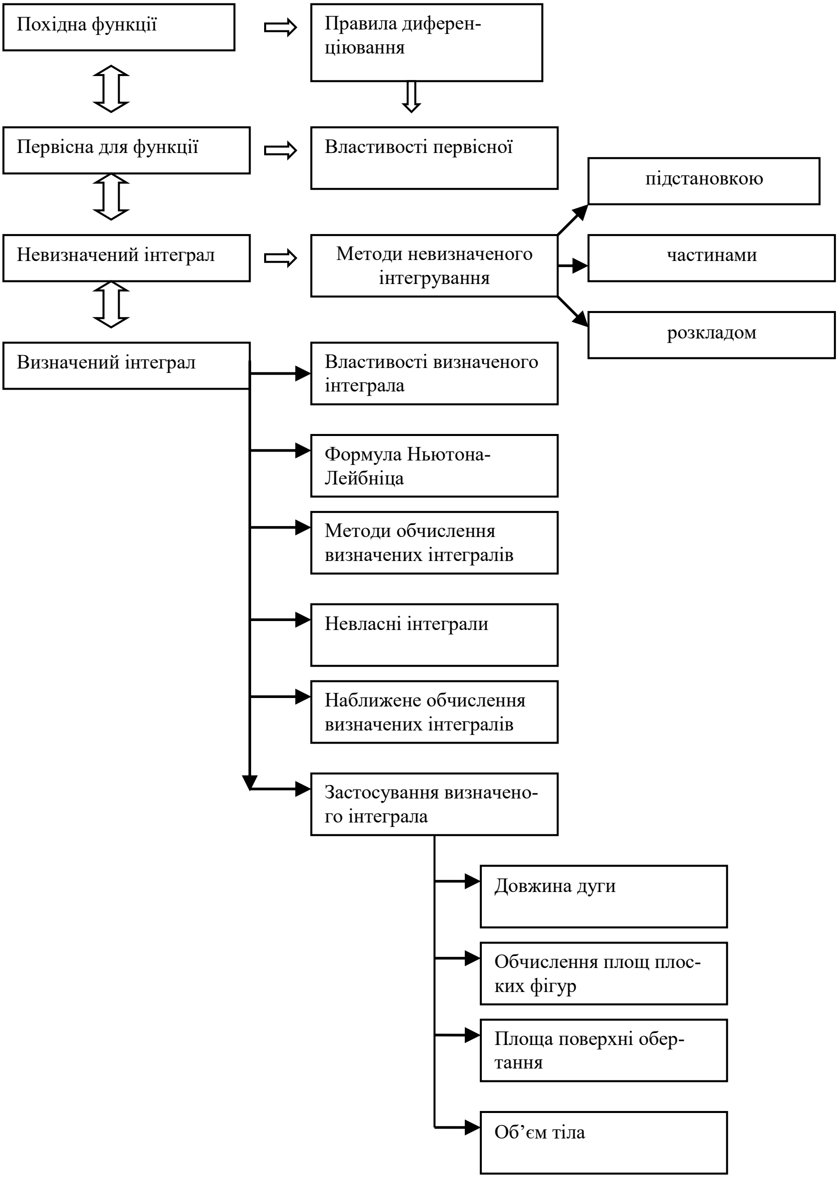
Тема 3. Невласні інтеграли.

Поняття невласного інтегралу. Невласні інтеграли першого та другого роду. Абсолютна збіжність. Достатні умови збіжності.

Тема 4. Наближені методи обчислення невласних інтегралів.

Площа криволінійної трапеції, не кругового сектора. Об’єм тіла обертання. Довжина дуги плоскої лінії. Диференціал дуги. Довжина дуги просторової кривої. Площа поверхні тіла обертання. Довжина шляху. Диференціал дуги. Площа поверхні тіла обертання.

Логічна структура модуля «Інтегральне числення функцій однієї змінної»



ТЕМА 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Поняття невизначеного інтеграла

Означення. Нехай функція $f(x)$ є похідною від функції $F(x)$, тобто $f(x)dx$ — диференціал функції $F(x)$:

$$\boxed{f(x)dx = dF(x).}$$

Тоді функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$.

Якщо $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, то будь-яка інша її первісна подається виразом $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Отже, якщо функція $f(x)$ має принаймні одну первісну, то їх існує безліч.

Означення. Найзагальніший вигляд первісної для даної функції $f(x)$ (або даного виразу $f(x)dx$) називається її **невизначеним інтегралом.**

Невизначений інтеграл виразу $f(x)dx$ позначають

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.} \qquad (1)$$

Термін «інтеграл» походить від латинського слова integralis — цілісний.

Символ $\int$ (курсивне s) — початкова літера слова summa (сума).

Слово «невизначений» підкреслює, що до загального виразу первісної входить сталий доданок, який можна взяти довільно.

Вираз $f(x)dx$ називають **підінтегральним виразом**, функцію $f(x)$ — **підінтегральною функцією**, змінну x — **змінною інтегрування**.

Постають такі запитання: 1) чи завжди можна знайти невизначений інтеграл; 2) як можна знайти цей інтеграл, якщо він існує?

Відповідь на перше запитання частково дає наведена далі *теорема,* яка є **основною теоремою інтегрального числення**.

Теорема 2.1. **Усяка неперервна функція має первісну.**

Проте ця теорема не стверджує, що первісну даної неперервної функції можна знайти за допомогою скінченної кількості відомих дій і подати результат в елементарних функціях. Більш того, існують неперервні елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Такі функції називають **неінтегровними**. Їх інтеграли не можуть бути знайдені за допомогою скінченної кількості елементарних функцій.

Наприклад, можна довести, що інтеграли $\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,$ $\int \frac{dx}{\ln x}$ не подаються елементарними функціями, тобто відповідні підінтегральні функції є неінтегровними.

Зауважимо, що за правилами диференціального числення для будь-якої елементарної функції можна знайти її похідну (також елементарну). В інтегральному численні такі правила для відшукання первісної *принципово неможливі*.

Первісні для неінтегровних функцій, таких як e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{x}{\sqrt{1-x^3}}$ і т. ін., знаходять наближеними (чисельними) методами.

Загалом знаходження невизначених інтегралів — задача, істотно складніша порівняно з диференціюванням. Її розв'язування спрощується завдяки застосуванню математичних довідників і комп'ютерних пакетів програм, наприклад Mathcad, Mathematica 3.0 тощо.

2. Основні властивості невизначеного інтеграла

Властивість 1. **Знак диференціала перед знаком інтеграла знищує останній**:

$$\boxed{d\int f(x)dx = f(x)dx.}$$

• Продиференціювавши рівність (1) дістанемо:

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx\,.$$

Властивість 2. **Знак інтеграла перед знаком диференціала знищує останній, але при цьому вводиться довільний сталий доданок**:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x)+C.} \qquad (2)$$

• Рівність (2) випливає з (1), якщо взяти $dF(x) = f(x)dx.$

Властивість 3. **Сталий множник можна виносити за знак інтеграла**:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\\ &a = \text{const}.\end{aligned}} \qquad (3)$$

• Справді, згідно з властивістю 1 диференціал лівої частини

$$d\int af(x)dx = af(x)dx \qquad (4)$$

подається так само, як і диференціал правої частини:

$$da\int f(x)dx = ad\int f(x)dx = af(x)dx. \qquad (5)$$

Якщо диференціали (4) і (5) обох частин рівності (3) однакові, то ці частини відрізняються лише сталою, яка вважається включеною в позначення невизначеного інтеграла.

Властивість 4. **Інтеграл алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів доданків**:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

Формула доводиться безпосередньою перевіркою диференціюванням. Справді, диференціал лівої частини подається так:

$$d\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)dx) = (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx.$$

3. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot dx = C.$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C; \ \int \mathrm{const} \cdot dx = \mathrm{const} \cdot x + C.$
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$
11. $\int \mathrm{ctg}\, x d\, x = \ln|\sin x| + C.$
12. $\int \mathrm{tg}\, x d\, x = -\ln|\cos x| + C.$
13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.

17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\ x + C = \operatorname{arcctg}\ x + C$.

18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\ \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\ \frac{x}{a} + C$. $\quad (a \neq 0)$

19. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C$.

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$. $\quad (a \neq 0)$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$. $\quad (a \neq 0)$

22. $\int \operatorname{tg}\boldsymbol{ax}\boldsymbol{dx} = -\frac{1}{\boldsymbol{a}}\ln|\cos\boldsymbol{ax}| + \boldsymbol{C}$,

$\int \operatorname{ctg}\boldsymbol{ax}\boldsymbol{dx} = \frac{1}{\boldsymbol{a}}\ln|\sin\boldsymbol{ax}| + \boldsymbol{C}$.

4. Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі

Нехай $F'(x) = f(x)$. Тоді $\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$.

Згідно з інваріантністю форми першого диференціала рівність $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ справджується і тоді, коли x — проміжний аргумент, тобто $x = \varphi(t)$.

Це означає, що формула $\int f(x)dx = f(x) + C$ виконується й при $x = \varphi(t)$. Таким чином, $\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$, або $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \; = F(\varphi(t)) + C$.

Отже, справджується теорема.

Теорема 2.2. **Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, а $x = \varphi(t)$ — диференційовна на проміжку $[\alpha;\beta]$ функція, значення якої належать $[a;b]$, то**

$F(\varphi(t))$ — первісна для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, і

$$\boldsymbol{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx.} \qquad (6)$$

Формула (6) називається **формулою заміни змінної під знаком невизначеного інтеграла.**

Метод заміни змінної дозволяє зводити інтеграли до табличних або до інтегралів, методи знаходження яких відомі. Після обчислення інтеграла $\int f(x)dx$ потрібно знову замінити x на $\varphi(t)$.

Робоча формула

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt, \\ t = \varphi^{-1}(x). \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C. \qquad (7)$$

Зауваження. Вивчення методів інтегрування певних функцій загалом можна звести до з'ясування того, яку заміну змінної в підінтегральному виразі потрібно зробити. Успіх інтегрування залежить значною мірою від того, наскільки вдало виконано заміну змінних, яка спрощує даний інтеграл.

Знайти $\int x\sqrt{x-5}dx$.

- $$\int x\sqrt{x-5}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-5} = t, \\ x = t^2 + 5, \\ dx = 2tdt. \end{array} \right| = \int (t^2+5)t \cdot 2tdt = 2\int t^2(t^2+5)dt =$$

$$= 2\int t^4 dt + 10\int t^2 dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x-5})^5 + \frac{10}{3}(\sqrt{x-5})^3 + C.$$

Наслідок. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (8)$$

Доведення. Згідно з формулою (7) маємо:

$$\int f(ax+b)dx = \left| \begin{array}{l} ax+b=t, \\ d(xa+b)=dt, \\ adx=dt, \\ dx=\dfrac{1}{a}dt. \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Приклад Знайти $\int \frac{dx}{5x-3}$.

- $$\int \frac{dx}{5x-3} = \left\| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{x} = \ln x + C, \\ \textit{тому за формулою}(8) \end{array} \right\| = \frac{1}{5}\ln|5x-3| + C.$$

Приклад $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Приклад $$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Приклад

$$\int \frac{x^3dx}{(a+bx^2)^3} = \left| \begin{array}{l} a+bx^2=t, \\ d(a+bx^2)=dt, \\ 2bxdx=dt, \\ xdx=\dfrac{1}{2b}dt, \\ x^2=\dfrac{1}{b}(t-a). \end{array} \right| = \frac{1}{2b}\int \frac{\frac{1}{b}(t-a)dt}{t^3} = \frac{1}{2b^2}\int \frac{t-a}{t^3}dt =$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left(\frac{t^{-1}}{-1} - \frac{at^{-2}}{-2}\right) + C = \frac{1}{2b^2}\left(-\frac{1}{t} + \frac{a}{2t^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left(-\frac{1}{a+bx^2} + \frac{a}{2(a+bx^2)^2}\right) + C = -\frac{a+2bx^2}{4b^2(a+bx^2)^2}.$$

Приклад

$$\int \frac{2xdx}{1+x^4} = \left| \begin{array}{l} x^2=t, \\ dx^2=dt, \\ 2xdx=dt. \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

$$\int \frac{\cos x dx}{a+b\sin x} = \int \frac{d(a+b\sin x)}{a+b\sin x} = \ln|a+b\sin x| + C.$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x - a} = \int \frac{d(e^x - a)}{e^x - a} = \ln|e^x - a| + C.$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{d\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} = \ln|\operatorname{arctg} x| + C.$$

5. Формула інтегрування частинами

Згідно з формулою диференціювання добутку двох функцій $u(x)$ та $v(x)$ маємо:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Інтегруючи цю рівність, дістаємо:

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

або

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.} \qquad (9)$$

Ця формула відбиває методику ***інтегрування частинами.***

Нею зручно користуватися в таких випадках:

1. Підінтегральний вираз містить як множник функції $\boxed{\ln x}$, $\boxed{\ln(\varphi(x))}$, $\boxed{\arcsin x}$, $\boxed{\arccos x}$, $\boxed{\operatorname{arctg} x}$. Якщо за $u(x)$ узяти ці функції, то підінтегральний вираз vdu нового інтеграла буде простіший за початковий.

2. Підінтегральна функція має вигляд $\boxed{P(x)e^{ax}}$, $\boxed{P(x)\sin^{ax}}$, $\boxed{P(x)\cos^{ax}}$, де $P(x)$ — многочлен від x. Тоді, узявши за $u(x)$ $P(x)$, дістанемо інтеграл такого самого вигляду, але степінь його буде вже на одиницю меншим. Беручи цей многочлен за $u(x)$, можна знову знизити степінь на одиницю, і т. д.

3. Підінтегральна функція має вигляд $\boxed{e^{ax}\sin bx}$, $\boxed{e^{ax}\cos bx}$, $\boxed{\sin(\ln x)}$, $\boxed{\cos(\ln x)}$ і т. ін.

Після двократного інтегрування частинами дістанемо початковий інтеграл з деяким коефіцієнтом. Здобута рівність є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно шуканого інтеграла.

[redacted]

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \\ dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v = \int dv = \int dx = x. \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

[redacted] $\int x^n \arcsin x dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin x - \dfrac{1}{n+1} \int \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

[redacted] $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx.$

[redacted] 1. $\int \dfrac{\sin x}{x^n} dx = -\dfrac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \dfrac{1}{(n-1)} \int \dfrac{\cos x}{x^{n-1}} dx.$

2. $\int \dfrac{\cos x}{x^n} dx = -\dfrac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \dfrac{1}{(n-1)} \int \dfrac{\sin x}{x^{n-1}} dx.$

[redacted] 1. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

2. $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$

Підставивши значення інтеграла 2 у праву частину інтеграла 1 і навпаки та розв’язавши рівняння, дістанемо:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C,$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

$$\int x^m \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \\ x^m dx = dv \Rightarrow v = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \end{array} \right| = \ln x \frac{x^{m+1}}{m+1} -$$

$$- \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{1}{x} dx = \ln x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int x^m dx = \ln x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\int (x-1)^2 e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = (x-1)^2 \Rightarrow du = 2(x-1)dx, \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x. \end{array} \right| =$$

$$= (x-1)^2 e^x - 2\int e^x (x-1)dx = \left| \begin{array}{l} u = (x-1) \Rightarrow du = dx, \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x, \end{array} \right| =$$

$$= (x-1)^2 e^x - 2((x-1)e^x - \int e^x dx) = (x-1)^2 e^x - 2((x-1)e^x - e^x) =$$

$$= e^x ((x-1)^2 - 2(x-1) + 2) = e^x (x^2 - 4x + 5).$$

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx, \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x. \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - 2\int \sin x \cdot x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ \sin x dx = dv, \\ v = \int \sin x dx = -\cos x, \\ du = dx. \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \int \cos x dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C =$$

$$= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$$

6. Інтегрування раціональних дробів. Стандартний підхід

1. Інтегрування основних простих дробів

Виокремимо з класу правильних дробів **основні прості дроби**. Такі дроби бувають чотирьох типів.

I. $\frac{A}{x-a}$.

III. $\frac{Mx+N}{x^2 + 2px + q}$, $q - p^2 > 0$.

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$. IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+2px+q\right)^k}$, $q-p^2>0$.

Тут a, p, q, A, M, N — дійсні числа, $k>1$ — ціле число.

Розглянемо інтеграли від наведених чотирьох основних типів.

Дроби типів I і II інтегруються за допомогою підстановки $t=x-a$.

1. $$\boxed{\int \frac{A}{x-a}dx} = \left| \begin{array}{l} x-a=t, \\ x=a+t, \\ dx=dt. \end{array} \right| = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = \boxed{A\ln|x-1|+C.}$$

2. $$\boxed{\int \frac{A}{(x-a)^k}dx} = \left| \begin{array}{l} x-a=t, \\ x=a+t, \\ dx=dt. \end{array} \right| = A\int \frac{dt}{t^k} = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$
$$= \boxed{-\frac{1}{k-1}\frac{A}{(x-a)^{k-1}} + C.}$$

3. Розглядаючи інтеграл від дробу типу III, виокремимо із тричлена у знаменнику повний квадрат:

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2.$$

Далі за допомогою підстановки $x + p = t$ зведемо інтеграл до суми двох табличних:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{(x+p)^2+q-p^2}dx = \left| \begin{array}{l} x+p=t, \\ x=t-p, \\ dx=dt. \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{M(t-p)+N}{t^2+q-p^2}dt = \int \frac{Mt}{\underbrace{t^2+q-p^2}_{\substack{\text{Табличний інтеграл} \\ (a^2=q-p^2)}}}dt + \int \frac{N-Mp}{\underbrace{t^2+q-p^2}_{\substack{\text{Табличний інтеграл} \\ (a^2=q-p^2)}}}dt =$$
$$= \frac{1}{2}M\ln\left|t^2+q-p^2\right| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{q-p^2}} + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx = \frac{1}{2}M\ln\left|x^2+2px+q\right| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C. \quad (10)$$

Приклад. Знайти $\int \dfrac{3x+1}{x^2+2x+6}dx$.

• Можна повторити весь процес знаходження інтегралів типу III, а можна скористатися формулою (11), підставивши в неї значення $M = 3$, $N = 1$, $p = 1$, $q = 6$. Дістанемо:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+6}dx = \frac{1}{2}\cdot 3\ln\left(x^2+2x+6\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

4. Знайдемо інтеграл від дробу типу IV:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+2px+q\right)^k} = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x+p}{a}, \text{ де } a = \sqrt{q-p^2}, \\ x = at - p, \\ dx = adt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^{2k-1}}\int \frac{Mat+N-Mp}{\left(t^2+1\right)^k}dt = \frac{M}{a^{2k-2}}\underbrace{\int \frac{t}{\left(t^2+1\right)^k}dt}_{I_k} + \frac{N-Mp}{a^{2k-1}}\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^k}}_{J_k}.$$

$$I_k = \int \frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^k} = \left| \begin{array}{l} z = t^2+1, \\ dz = 2tdt, \\ tdt = \dfrac{1}{2}dz. \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{\left(z^{k-1}\right)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k-1}} + C.$$

Обчислимо інтеграл J_k.

$$J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^k} = \int \frac{\left(t^2+1\right)-t^2}{\left(t^2+1\right)^k}dt = \underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}}_{J_{k-1}} - \int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^k}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{У другому інтегралі застосуємо формулу інтегрування частинами:} \\ u = t, \quad du = dt; \\ dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2+1\right)^k}, \\ v = \displaystyle\int \frac{tdt}{\left(t^2+1\right)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}. \end{array} \right| =$$

$$= I_{k-1} - \frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}.$$

Після зведення подібних членів дістанемо:

$$I_k=\frac{1}{2(k-1)}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)}I_{k-1}. \qquad (11)$$

Інтеграл I_k виражено через I_{k-1}. Формули виду (11) називаються **рекурентними**. Для обчислення I_k при будь-якому k немає потреби виконувати інтегрування: знаючи значення I_1, з виразу $I_1=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C$ за формулою (11) знаходимо послідовно $I_2,\ldots,I_{k-1},I_k$.

Знайти $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

- $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=|k=2|=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

Зводячи разом обчислені інтеграли, остаточно дістаємо **рекурентну формулу для обчислення інтеграла від дробу типу IV**:

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+2px+q\right)^k}dx=\frac{1}{2(k-1)}\frac{(N-Mp)x+Np-Mq}{\left(q-p^2\right)\left(x^2+2px+q\right)^{k-1}}+$$
$$+\frac{N-Mp}{q-p^2}\frac{2k-3}{2(k-1)}I_{k-1}, \qquad (12)$$

де $I_{k-1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2px+q\right)^{k-1}}$.

Обчислити інтеграл $I=\int\frac{2x+3}{\left(x^2+6x+13\right)^2}dx$.

- Не повторюючи виведення формули (12), виконаємо такі підстановки:

$$M=2,\ N=3,\ p=3,\ q=13,\ k=2,\ \sqrt{q-p^2}=2.$$

Дістанемо

$$\int\frac{2x+3}{\left(x^2+6x+13\right)^2}dx=-\frac{1}{8}\frac{3x+17}{x^2+6x+13}-\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+6x+13}=$$
$$=-\frac{1}{8}\frac{3x+17}{x^2+6x+13}-\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$$

Знайти $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx$.

- $\int \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx=$

$$=\left|\frac{x^2+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\Rightarrow x^2+1=\right.$$
$$\left.=A(x+1)\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+(Cx+D)(x+1)^2\right|.$$

Розкладаємо спочатку підінтегральний дріб на прості дроби за теоремою 2.5

Коефіцієнт B знайдемо підставлянням значення кореня $x=-1$:

$$x=-1 \quad \Big| \quad B=2.$$

Коефіцієнти A, C, D знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:

Степені	**Рівності, отримані при порівнянні коефіцієнтів при відповідних степенях**
x^3	$0=A+C;$
x^2	$1=2A+B+D+2C;$
x^1	$1=A+B+D.$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=-C\\ D=-1\\ A=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}B=2,\\ C=0,\\ A=0,\\ D=-1.\end{matrix}\left|=\int\frac{2}{(x+1)^2}dx-\right.$$

$$-\int\frac{dx}{x^2+x+1}=-\frac{2}{x+1}-\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Знайти $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)(x+2)(x-4)}$.

- $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x-1)(x+2)(x-4)}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x}{(x-1)(x+2)(x-4)}=\dfrac{A}{x-1}+\\ +\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-4}\Rightarrow x=A(x+2)(x-4)+\\ +B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+2);\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l|c}
x=1 & 1=-9A\Rightarrow A=-\dfrac{1}{9}; \\
x=2 & -2=18B\Rightarrow B=-\dfrac{1}{9}; \\
x=4 & 4=18C\Rightarrow C=\dfrac{2}{9}.
\end{array}\right| =-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+4}=$$

$$=-\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)(x+2)}{(x+4)}+C.$$

Знайти $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+2)\left(x^2+9\right)^2}$.

- $\displaystyle\int\frac{xdx}{(x+2)\left(x^2+9\right)^2}=\frac{x}{(x+2)\left(x^2+9\right)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+9}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+9\right)^2};$

$$x=A\left(x^2+9\right)^2+(Bx+C)(x+2)\left(x^2+9\right)+$$
$$+(Dx+E)(x+2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{r|c}
x=-2 & -2=169A\Rightarrow A=-\dfrac{2}{169}; \\
x^4 & 0=A+B\Rightarrow B=-\dfrac{2}{169}; \\
x^3 & 0=C+2B\Rightarrow C=-\dfrac{4}{169}; \\
x^2 & 0=81A+18C+2E\Rightarrow E=\dfrac{9}{13}; \\
x^1 & 1=2D+E+18B+9C\Rightarrow D=\dfrac{2}{13}.
\end{array}\right| =$$

$$=-\frac{1}{169}\left(-2\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{2x-4}{x^2+9}dx+13\int\frac{2x+9}{\left(x^2+9\right)^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{169}\left(-2\ln|x+2|+\ln\left|x^2+9\right|-\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{13}{x^2+9}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{117}\left(\frac{x}{27\left(9+x^2\right)}+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)\right)+C.$$

7. Інтегрування ірраціональних виразів

Інтеграли від ірраціональних функцій за допомогою підстановок, які залежать від типу підінтегральних виразів, зводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Розглянемо основні типи ірраціональних підінтегральних виразів та підстановки, за якими вони раціоналізуються.

1.

$$\boxed{\int f\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx = \left| \begin{aligned} &x = t^n, \\ &dx = nt^{n-1}dt. \end{aligned} \right| = n\int f\left(t^n, t\right) t^{n-1}dt.}$$

$$\int x\sqrt{a-x}\,dx = \left| \begin{aligned} &a - x = t^2, \\ &x = a - t^2, \\ &dx = -2tdt. \end{aligned} \right| = -\int \left(a - t^2\right) t2tdt = -2\int t^2\left(a - t^2\right)dt =$$

$$= -2\int \left(at^2 - t^4\right)dt = -2a\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -2a\frac{\sqrt{(a-x)^3}}{3} + \frac{2}{5}\left(\sqrt{(a-x)^5}\right) + C.$$

2.

$$\int\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx = \left\| \begin{array}{l} f - \text{раціональна} \\ \text{функція від } x \\ \text{і радикала} \end{array} \right\| = \left| \begin{aligned} &a + bx = t^n, \\ &x = \frac{1}{b}\left(t^n - a\right), \\ &dx = \frac{n}{b}t^{n-1}dt. \end{aligned} \right| =$$

$$= \frac{n}{b}\int f\left(\frac{1}{b}\left(t^n - a\right), t^m\right)t^{n-1}dt = \left\| \begin{array}{l} \text{Підінтегральний вираз – раціональна} \\ \text{функція за властивістю 3 раціональ-} \\ \text{них функцій.} \end{array} \right\|$$

$$\int x\sqrt[3]{(2x+3)^4}\,dx=\left|\begin{array}{l}2x+3=t^3\\ x=\dfrac{t^3-3}{2}\\ dx=\dfrac{3}{2}t^2dt\end{array}\right|=\frac{3}{4}\int\left(t^3-3\right)\cdot t^4\cdot t^2dt=\frac{3}{4}\int\left(t^9-3t^6\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^{10}}{10}-\frac{9}{4}\cdot\frac{t^7}{7}+C=\frac{3}{40}\sqrt[3]{(2x+3)^{10}}-\frac{9}{28}\sqrt[3]{(2x+3)^7}+C.$$

3.

$$\int f\left(x,\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x},\ldots,\sqrt[r]{x}\right)dx=\left|\begin{array}{l}x=t^s,\\ s-\text{ найменше спільне кратне чисел } n, m,\ldots,r,\\ dx=st^{s-1}dt.\end{array}\right|=$$

$$=\int f\left(t^s,t^{\frac{s}{n}},t^{\frac{s}{m}},\ldots,t^{\frac{s}{r}}\right)st^{s-1}dt.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt[6]{x}=t,\\ x=t^6,\\ dx=6t^5dt.\end{array}\right|=6\int\frac{t^2dt}{t+1}=3t^2-6t+6\ln|t+1|+C=$$

$$=3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

4.

$$\int f\left(x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+l}\right)^m}\right)dx=\left\|\begin{array}{l} f - \text{раціональна функція} \\ \text{від } x \text{ і радикала.}\end{array}\right\|=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\dfrac{ax+b}{cx+l}=t^n, \\ ax+b=t^n(cx+l), \\ ax+b=cxt^n+lt^n, \\ x\left(a-ct^n\right)=lt^n-b, \\ x=\dfrac{lt^n-b}{a-ct^n}, \\ dx=\dfrac{lnt^{n-1}\left(a-ct^n\right)-\left(lt^n-b\right)\left(-cnt^{n-1}\right)}{\left(a-ct^n\right)^2}dt= \\ =\dfrac{alnt^{n-1}-bcnt^{n-1}}{\left(a-ct^n\right)^2}dt=\dfrac{nt^{n-1}(al-bc)}{\left(a-ct^n\right)^2}dt.\end{array}\right|=$$

$$\int f\left(\frac{lt^n-b}{a-ct^n},t^m\right)\frac{nt^{n-1}(al-bc)}{\left(a-ct^n\right)^2}dt=\left\|\begin{array}{l}\text{Підінтегральний вираз} - \\ \text{раціональна функція} \\ \text{за властивістю 3} \\ \text{раціональних функцій.}\end{array}\right\|$$

[redacted]

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{x-1}=t^2 \Rightarrow x+1=t^2(x-1), \\ x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \\ dx=\dfrac{2t\left(t^2-1\right)-2t\left(t^2+1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\dfrac{-4t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}.\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(t^2-1\right)^2t(-4tdt)}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2}=-2\int\frac{2t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{l}t=u,\ dt=du \\ -\dfrac{2tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=dv \\ v=\left(t^2+1\right)^{-1}.\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2t}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2t}{t^2+1}-2\operatorname{arctg}t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

5.1.

$$\int f\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right)dx = \left\| \begin{array}{l} f - \text{раціональна функція} \\ \text{від } x \text{ і радикала, } a > 0, \end{array} \right\| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Заміна :} \\ \sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a} + xz \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(a+bx+cx^2\right) = \left(\sqrt{a}+xz\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow b + cx = 2z\sqrt{a} + xz^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = 2\dfrac{c\sqrt{a} - bz + z^2\sqrt{a}}{\left(c - z^2\right)^2}dz. \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2z\sqrt{a}-b}{c-z^2}, \frac{c\sqrt{a} - bz + z^2\sqrt{a}}{c-z^2}\right)\times$$

$$\times 2\frac{c\sqrt{a} - bz + z^2\sqrt{a}}{\left(c-z^2\right)^2}dz = \left\| \begin{array}{l} \text{Підінтегральний вираз } - \\ \text{раціональна функція} \\ \text{від змінної } z \text{ за властивістю 3.} \end{array} \right\|$$

5.2.

$$\int f\left(x, \sqrt{a+bx+cx^2}\right)dx = \left\| \begin{array}{l} a < 0, \\ f - \text{раціональна функція} \\ \text{від } x \text{ і радикала.} \end{array} \right\| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{a+bx+cx^2} = x\sqrt{c} - z \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(a+bx+cx^2\right) = \left(x\sqrt{c} - z\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a + bx = z^2 - 2xz\sqrt{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \dfrac{z^2 - a}{2z\sqrt{c} + b} \Rightarrow \\ \Rightarrow dx = \dfrac{2z\left(2z\sqrt{c}+b\right) - 2\sqrt{c}\left(z^2 - a\right)}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz = \\ = \dfrac{4z^2\sqrt{c} + 2xb - 2\sqrt{c}z^2 + 2a\sqrt{c}}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz = \\ = \dfrac{2\sqrt{c}z^2 + 2zb + 2a\sqrt{c}}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz. \end{array} \right| = \int f\left(\frac{z^2-a}{2z\sqrt{c}+b}, \frac{z^2-a}{2z\sqrt{c}+b}\sqrt{c} - z\right)\times$$

$$\times \frac{2\sqrt{c}z^2 + 2zb + 2a\sqrt{c}}{\left(2z\sqrt{c}+b\right)^2}dz = \left\| \begin{array}{l} \text{Підінтегральний вираз } - \\ \text{раціональна функція} \\ \text{від змінної } z \text{ за властивістю 3.} \end{array} \right\|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+a} = z - x, \\ a = -2xz + z^2, \\ x = \dfrac{z^2 - a}{2z}, \\ \sqrt{x^2+a} = \dfrac{z^2+a}{2z}, \\ dx = \dfrac{z^2+a}{2z^2}\,dz. \end{array} \right| = \int \frac{z^2+a}{2z^2}\frac{2z}{z^2+a}\,dz = \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln z + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C.$$

6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \left| \begin{array}{l} Ax + B = z, \\ Adx = dz, \\ Ax^2 + 2Bx + C = \dfrac{1}{A}\left(z^2 + AC - B^2\right) \end{array} \right| =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{A}} \ln \left| z + \sqrt{z^2 + AC - B^2} \right| + C,\ A > 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \dfrac{Az+B}{\sqrt{B^2 - AC}} + C,\ A < 0. \end{array} \right.$$

7.

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \left| \begin{array}{l} \text{Підстановкою}\quad x - a = \dfrac{1}{z} \\ \text{зводимо даний інтеграл до інтеграла виду 6;} \\ x = a + \dfrac{1}{z}, \\ dx = -\dfrac{1}{z^2}\,dz, \\ Ax^2 + 2Bx + C = A\left(a + \dfrac{1}{z}\right)^2 + 2B\left(a + \dfrac{1}{z}\right) + C = \\ = \dfrac{A(az+1)^2 + 2Bz(az+1) + Cz^2}{z^2} = \\ = \dfrac{\left(Aa^2 + 2Ba + C\right)z^2 + (2B + 2Aa)z + A}{z^2}. \end{array} \right| =$$

$$\int -\frac{1}{z^2} \frac{z \cdot z}{\sqrt{\left(Aa^2 + 2Ba + C\right)z^2 + (2B+2Aa)z + A}}\,dz = \int \frac{dz}{\sqrt{A_1 z^2 + B_1 z + C_1}},$$

де $A_1 = Aa^2 + 2Ba + C,\ \ B_1 = 2B + 2Aa,\ \ C_1 = A.$

[illegible]

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+2bx+cz^2}}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$;

2) $\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2} + \left(\frac{a}{2}+\frac{b^2}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(bx \pm \sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right) + C$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}} + C$;

5) $\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{a+x}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right| + C$;

6) $\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a-x}{a} + C$;

8) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x}{2b}\sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}}\ln\left|bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right| + C$;

9) $\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \left|x-a=\frac{1}{y}\right| =$

$$= \int \frac{y^{n-t}dy}{\sqrt{c+2(b+ca)y+\left(a+2ba+ca^2\right)y^2}}.$$

8.

$$\int \frac{f(x)}{F(x)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx = \left\| \frac{f(x)}{F(x)} - \text{раціональн а функція} \right\| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Вираз } \dfrac{f(x)}{F(x)} \text{ потрібно розкласти на суму} \\ \text{найпростіш их дробів за відомими правилами} \\ \text{і звести інтеграл до інтегралів попередніх видів.} \end{array} \right|$$

1) $$\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}= \\ =\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{Ax^2+Bx+C}}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{Ax^2+Bx+C}};$$

2) $$\int \frac{(x+2)dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{ax^2+bx+C}}= \\ =5\int\frac{dx}{(x-3)^2\sqrt{ax^2+bx+C}}+\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{ax^2+bx+C}}.$$

1) $$\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left|x^2=y\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

2) $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{a^3-cx^4}}=-\frac{1}{2c}\sqrt{a-cx^4}+C;$$

3) $$\int\sqrt{\frac{xdx}{a^3-x^3}}dx=\left|x^3=y^2\right|=\frac{2}{3}\int\frac{dy}{\sqrt{a^3-y^2}}=-\frac{2}{3}\arccos\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}+C;$$

4) $$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\left\|\begin{array}{l}\text{Домножуємо на } \sqrt{a+x}\\ \text{чисельник та знаменник дробу.}\end{array}\right\|=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+ \\ +\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

9. Підстановки Ейлера, за допомогою яких завжди раціоналізується вираз виду $f\left(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)$, де f — раціональна функція.

Перша підстановка $(a>0)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l}t-\sqrt{a}x\\ t+\sqrt{a}x\end{array}\right..$$

Друга підстановка $(c>0)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\left[\begin{array}{l}xt+\sqrt{c}\\ xt-\sqrt{c}\end{array}\right..$$

Третя підстановка $\left(ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)\right)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda) \text{ або } t=\sqrt{a\frac{(x-\mu)}{(x-\lambda)}}.$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\left\|\begin{array}{l}\text{Застосовуємо першу}\\ \text{підстановку Ейлера}\end{array}\right\|=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x+1}=t-x,\\ x=\dfrac{t^2-1}{2t-1},\ dx=2\dfrac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,\\ t=\sqrt{x^2-x+1}+x.\end{array}\right|=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=$$

$$=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt=-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln(2t-1)+C=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C.$$

10. Виокремити алгебраїчну частину з інтеграла $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P(x)$ — многочлен n-го степеня, можна за формулою

$$\boxed{\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},} \tag{13}$$

де $Q(x)$ — многочлен n-го степеня, $\lambda=\mathrm{const}$. Коефіцієнти цього многочлена знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів. Продиференціювавши (32) і помноживши здобуту рівність на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, дістанемо:

$$\boxed{P(x)=Q'(x)\left(ax^2+bx+c\right)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+\lambda.} \tag{14}$$

Звідси методом невизначених коефіцієнтів знайдемо $Q(x)$.

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\,dx = \left\| \begin{matrix} \deg P(x) = 3,\ \deg Q(x) = 2 \\ \text{за формулою } (32). \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left(ax^2 + bx + c\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \text{За формулою (33) маємо } x^3 - x + 1 = (2a_1 x + b_1)\left(x^2 + 2x + 2\right) + \\ + \left(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\right)(x+1) + \lambda \text{. Із системи рівнянь } \begin{cases} 3a_1 = 1 \\ 5a_1 + 2b_1 = 0 \\ 4a_1 + 3b_1 + c = -1 \\ 2b_1 + c_1 + \lambda = 1 \end{cases} \\ \text{знаходимо значення } \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ b_1 = -\dfrac{5}{6} \\ c_1 = \dfrac{1}{6} \\ \lambda = \dfrac{5}{2} \end{cases} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x^2 - 5x + 1\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C.$$

8. Інтегрування тригонометричних виразів

Розглянемо деякі підстановки, що раціоналізують інтеграл від тригонометричного виразу

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де $R(\sin x, \cos x)$ — раціональна функція від $\sin x, \cos x$.

I. ***Універсальна підстановка*** $\boxed{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t.}$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t\,, \\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t\,, \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt, \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}\,, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,. \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int R^*(t)dt = \left\| R^*(t) \text{ — раціональна функція від } t\,. \right\|$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x - 1} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = t\,, \\ x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt\,, \\ \sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}\,, \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,. \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2}{t^2+1}\,dt}{\dfrac{4t+t^2-2}{t^2+1}} = 2\int \frac{dt}{4t+t^2-2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+2)^2 - 6} = \left| \begin{array}{l} t+2 = z\,, \\ t = 2 - z, \\ dt = dz. \end{array} \right| = 2\int \frac{dz}{z^2 - 6} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{z - \sqrt{6}}{z + \sqrt{6}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{t + 2 - \sqrt{6}}{t + 2 + \sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} + 2 - \sqrt{6}}{\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} + 2 + \sqrt{6}} + C.$$

В окремих випадках можна користуватися простішими підстановками.

II. ***Якщо інтеграл зводиться до виду***

$$\int R(\mathrm{tg}x)dx\,,$$

то застосовуємо заміну $\mathbf{tg}x = t$:

$$\int R(\mathrm{tg}x)dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}x = t, \\ x = \mathrm{arctg}t, \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1}. \end{array} \right| = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt = \left\| \begin{array}{l} R \text{ — раціональн а} \\ \text{функція від } t. \end{array} \right\|$$

Із цим випадком стикаємося щоразу, коли підінтегральний вираз містить парні степені $\sin x$ і $\cos x$, оскільки

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \ \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}.$$

III. ***Якщо інтеграл зводиться до виду***

$$\int \boldsymbol{R}(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx,$$

то виконуємо заміну $\sin x = t$:

$$\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = z, \\ d\sin x = dz, \\ \cos x dx = dz, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x. \end{array} \right| =$$

$$= \int R(t, 1 - z^2)dz = \left\| \begin{array}{l} R \text{ — раціональн а} \\ \text{функція від } t. \end{array} \right\|$$

IV. ***Якщо інтеграл зводиться до виду***

$$\int \boldsymbol{R}(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx,$$

то виконуємо підстановку $\cos x = z$:

$$\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = z, \\ d\cos x = dz, \\ -\sin x dx = dt. \end{array} \right| = -\int R(1 - z^2, z)dz.$$

V. ***Якщо інтеграл зводиться до виду***

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

де m, n ***— цілі числа, то підінтегральний диференціал є раціональна функція від*** $\sin x$ ***і*** $\cos x$***, яку можна зінтегрувати відомими методами.***

$$V_1.\ \int \sin^m x \cos^n x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = z, \\ d\sin x = dz, \\ \cos x dx = dz, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x. \end{array} \right| = \int z^m \left(1 - z^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Маємо біноміальний диференціал,} \\ \text{який інтегрується, коли одне з чисел} \\ \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{m+1}{2}, \dfrac{m+n}{2} \text{ — ціле.} \end{array} \right|$$

$$V_2.\ \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{За формулою} \\ u = \cos^{n-1} x, \\ dv = \sin^m x \cos x dx, \\ du = -(n-1)\cos^{n-2} x (\sin x) dx, \\ v = \dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1}. \end{array} \right| = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^{n-2} x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1}}{m+1} +$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Розв'язуючи здобуте рівняння відносно даного інтеграла, дістаємо:

$$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.}$$

VI. ***Деякі підінтегральні вирази, що зводяться до раціонального вигляду підстановками 1—4, можуть бути безпосередньо знайдені за допомогою штучних прийомів.***

$$\mathrm{VI}_1.\ \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \left| \begin{array}{l} \text{Визначимо числа} \\ r \text{ і } \alpha \text{ так, щоб} \\ a = r\cos\alpha,\ b = r\sin\alpha, \\ \text{тоді} \\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\alpha). \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)} = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-\alpha}{2}\right) + C.$$

$$\mathrm{VI}_2.\ \int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{a + b\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}x}{a + b\operatorname{tg}^2 x} = \left|\operatorname{tg}x = t\right| = \int \frac{dt}{a + bt^2}.$$

$$\mathrm{VI}_3.\ \int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{dx}{a\left[\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right] + b\left[\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right]} =$$

$$= 2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{(a+1)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + (a-b)\sin^2\frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \text{Дістаємо} \\ \text{інтеграл } \mathrm{VI}_2. \end{array} \right|.$$

$$\mathrm{VI}_4.\ \int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x} = \left| \begin{array}{l} b = r\cos\alpha, \\ c = r\sin\alpha, \\ b\cos x + c\sin x = \\ = r\cos(x-\alpha). \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{d(x-\alpha)}{a + r\cos(x-\alpha)} = \left| \begin{array}{l} \text{Дістаємо} \\ \text{інтеграл } \mathrm{VI}_3. \end{array} \right|.$$

Тригонометричні підстановки для раціоналізації ірраціональних виразів

Інтегруючи вирази виду $\sqrt{a^2-x^2}$ або $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, найчастіше користуються такими підстановками:

для виразів, що містять $\sqrt{a^2-x^2}$ підстановкою $x = a\sin z$ або $x = a\cos z$;

для виразів, що містять $\sqrt{a^2+x^2}$ підстановкою $x = a\,\mathrm{tg}\,z$ або $x = a\,\mathrm{ctg}\,z$;

для виразів, що містять $\sqrt{x^2-a^2}$ підстановкою $x = \dfrac{a}{\cos z}$ або $x = \dfrac{a}{\sin z}$.

$$1.\ \int \frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{array}{l} x = a\sin z, \\ z \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \\ dx = a\cos z dz. \end{array} \right| = \int \frac{a\cos z dz}{\left(a^2 - a^2\sin^2 z\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos z dz}{\cos^3 z} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{tg} z + C = \frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{a^2}\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

$$2.\ \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\sqrt{x^2+a^2}}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{x^2+a^2}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + a^2\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + a^2 I,$$

де $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\ z, \\ z \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ dx = \dfrac{a}{\cos^2 z} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{\cancel{a}}{\cos^2 z}}{a^2\mathrm{tg}^2 z \cdot \cancel{a}\frac{1}{\cos z}}dz = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos z dz}{\sin^2 z} =$

$$= -\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin z} + C = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C.$$

$$I_{p,q}=\int(a+bz)^p z^q dz=\begin{cases}\dfrac{(a+bz)^{p+1}z^q}{p+q+1}+\dfrac{ap}{p+q+1}I_{p-1,\,q} \\ \dfrac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+q+1)}-\dfrac{aq}{b(p+q+1)}I_{p,\,q-1}\end{cases},$$

p, q — цілі числа.

ТЕМА 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Існує кілька підходів до викладання визначених інтегралів. Розглянемо основні, що мають історичні корені і найбільш близькі до початків інтегрального числення.

1. Підсумовування нескінченно малих

Нехай задано неперерву функцію на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ —будь-яка її первісна. Розіб’ємо відрізок $[a; b]$ на n частин і утворимо різницю

$$F(b)-F(a) \tag{1}$$

значень первісної на його кінцях.

Різниця (1) дорівнює сумі таких самих різниць, складених для відрізків, на які розбито даний:

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=[F(x_1)-F(a)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots+\\&+[F(x_i)-F(x_{i-1})]+\ldots+[F(b)-F(x_{n-1})].\end{aligned} \tag{2}$$

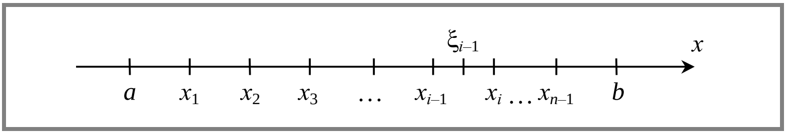


Рис. 2.1

За теоремою Лагранжа про скінченний приріст маємо:

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=(x_i-x_{i-1})F'(\xi_{i-1}),$$

де $\xi_i\in[x_i; x_{i-1}]$ (рис. 2.1).

Позначивши $x_i-x_{i-1}=\Delta x_{i-1}$ і врахувавши, що

$$F'(\xi_{i-1})=f(\xi_{i-1}),$$

рівність (2) подамо так:

$$F(b) - F(a) = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}. \qquad (3)$$

Залежність (3) справджується лише для значень ξ_0, ξ_1, … ξ_n, які задовольняють теорему Лагранжа. Але коли необмежено збільшувати кількість n частин відрізка $[a; b]$ так, щоб довжина відрізка Δx_{i-1} прямувала до нуля, то рівність (3) виконуватиметься і різниця $F(b) - F(a)$ буде сумою нескінченної кількості спадних доданків:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}[f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n] = F(b) - F(a).} \qquad (4)$$

Рівність (3) справджується не лише за певного, а й за будь-якого вибору точок ξ_0, ξ_1, … ξ_{n-1}, тому (4) є **формулою суми нескінченно малих, яку вивели Лейбніц і Ньютон**.

2. Поняття визначеного інтеграла. перший підхід

Означення. Сума

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

називається **інтегральною сумою, або сумою Рімана**.

Означення. Скінченна границя I суми σ при $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$ називається **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається

$$\boxed{I = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int_a^b f(x)dx\ ,} \qquad (5)$$

де a, b — відповідно нижня та верхня межі інтегрування, $\int$ — знак інтеграла, введений Лейбніцем. (Лейбніц увів знак інтеграла $\int$ як витягнуту букву S, що позначає підсумовування.) У разі існування границі I функція $f(x)$ називається **інтегровною на проміжку** $[a; b]$.

Вводячи поняття про визначений інтеграл як границю інтегральної суми й застосовуючи його позначення та формулу (5), рівність (4) можна переписати у вигляді:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).} \qquad (6)$$

Це відома **формула Ньютона—Лейбніца**, яка поєднує диференціальне числення з інтегральним.

В інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ символ x позначає **змінну інтегрування**. Цю змінну можна позначати будь-якою іншою буквою, а отже, завжди маємо:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.}$$

Зауважимо, що означення визначеного інтеграла можна застосувати лише до обмеженої функції.

Теорема 2.7. **(Необхідна умова інтегрування.) Інтегровна на проміжку [*a*; *b*] функція обмежена.**

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай функція $f(x)$ на проміжку необмежена. Тоді за будь-якого розбиття проміжку на частини функція $f(x)$ зберігає цю властивість хоча б в одній із частин. Завдяки вибору на цій частині точки ξ можна зробити значення $f(\xi)$, а з нею і суму σ як завгодно великою. За цих умов скінченні границі для σ існувати не можуть.

3. Властивості визначеного інтеграла

Властивість 1. **Визначений інтеграл є міра площі.**

• Справді, інтегральна сума

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (7)$$

утворена з добутків виду

$$f(\xi_{i-1})\Delta x_{i-1}. \qquad (8)$$

Нехай $\xi_{i-1} = x_{i-1}$. Тоді добуток (8) є площа прямокутника, основу якого становить різниця $x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}$, а висоту — ордината $f(x_{i-1})$.

Отже, інтегральна сума (7) являє собою суму площ таких прямокутників, або площу східчастої фігури, вписаної у криволінійну трапецію $AabB$, обмежену кривою $y = f(x)$ (рис. 2.2).

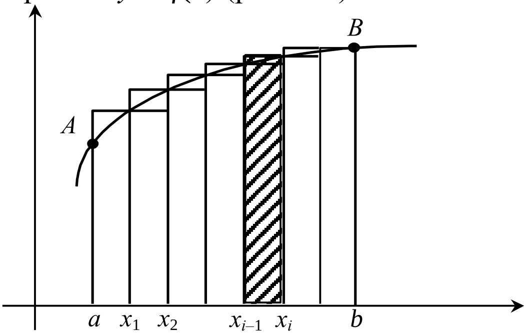


Рис. 2.2

Площа криволінійної трапеції $AabB$ більша за інтегральну суму (7). Але якщо вибрати за точки $\xi_i (i = 0, \ldots, n-1)$ праві кінці відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, то дістанемо фігуру, *описану* навколо криволінійної трапеції $AabB$. Тому площа криволінійної трапеції $AabB$ дещо менша за інтегральну суму (7).

Границя інтегральної суми (7) при будь-якому виборі точок ξ_i і при $\lambda = \max_i \Delta x_i \to 0$ за означенням є визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Отже, доходимо висновку:

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ *дорівнює площі криволінійної трапеції*.

Властивість 2. *При переставленні меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак, не змінюючи абсолютної величини.*

● Узявши $a < b$ і $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$, за означенням дістанемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Переставивши межі інтегрування a та b, розглядатимемо вже відрізок $[b; a]$ і, узявши ті самі точки розбиття, дістанемо відрізки $[x_i; x_{i-1}]$, а не $[x_{i-1}; x_i]$. Отже,

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(-(x_i - x_{i-1})) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Звідси випливає таке співвідношення:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.} \qquad (9)$$

Зауваження. Цю властивість можна довести також за формулою Ньютона—Лейбніца (6), яка справджується для будь-яких a і b. Зокрема, вона виконується, коли числа a та b поміняти місцями:

$$\int\limits_b^a f(x)dx = F(a) - F(b).$$

Таким чином, знову маємо формулу (9).

Наслідок. $\boxed{\int\limits_a^a f(x)dx = 0.}$

• Справді, узявши у формулі (9) $b = a$, дістанемо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

`Властивість 3.` (Поділ відрізка інтегрування.) **Нехай точка $c \in [a; b]$. Тоді**

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.} \qquad (10)$$

• Справді, якщо $F(x)$ — будь-яка первісна для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$, то $F(x)$ є первісною і для функції $f(x)$ на відрізках $[a, c]$ і $[c, b]$. Отже, за формулою Ньютона—Лейбніца записуємо

$$\int\limits_a^c f(x)dx = F(c) - F(b),$$
$$\int\limits_c^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Звідси

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = F(b) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Остання рівність і доводить формулу (10).

Геометрична інтерпретація

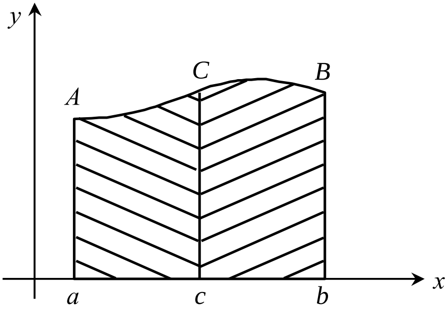


Рис. 2.3

Площа криволінійної трапеції $AabB$ дорівнює сумі площ криволінійних трапецій $AacC$ і $CcbB$ (рис. 2.3).

Властивість 4. **(Знак визначеного інтеграла.)**

1. Якщо $f(x) > 0$ для $x \in (a; b)$, $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$.

2. Якщо $f(x) < 0$ для $x \in (a, b)$, $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx < 0$.

• За означенням визначений інтеграл є границя інтегральної суми:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

1. У разі $f(x) > 0$, $a < b$ доданки $f(\xi_i)\Delta x_i$ інтегральної суми додатні, оскільки додатні обидва множники $f(x_{i-1})$ і Δx_{i-1}.

2. Якщо $a > b$, то хоча $f(x_{i-1}) > 0$, множник Δx_{i-1} від'ємний. Справді:

$$\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1} \text{ і } a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{i-1} > x_i > \ldots > b.$$

3. Розглядаючи доданки $f(x_{i-1})\Delta x_{i-1}$ інтегральної суми, встановлюємо, що множник $f(\xi_i) < 0$, множник Δx_{i-1} додатний, оскільки $a < b$.

Геометрична інтерпретація

1. Площа, обмежена кривою $B'AB$, має різні знаки по різні боки кожної межі інтегрування a (рис. 2.4).

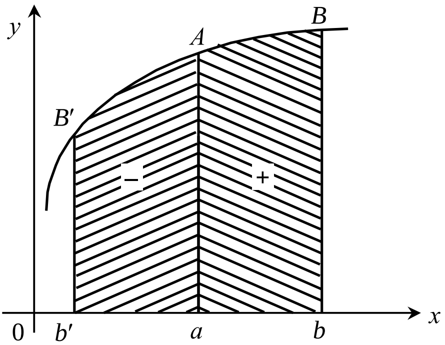


Рис. 2.4

2. Площі кривих, розміщених над віссю абсцис, вважаються додатними, а площі кривих, розміщених під віссю абсцис, — від'ємними (рис. 2.5).

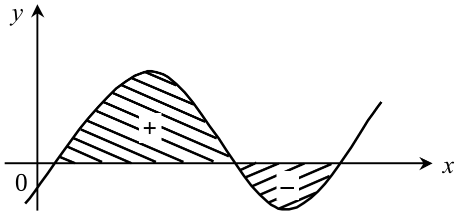


Рис. 2.5

Знайти суму площ двох сусідніх хвиль синусоїди $y = \sin x$.

• $\int\limits_0^{2\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$ (рис. 2.6).

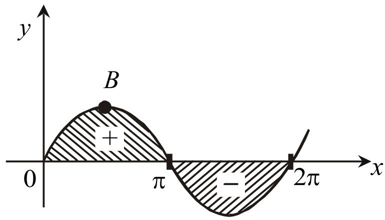


Рис. 2.6

Властивість 5. **Якщо $\varphi(x) > \psi(x)$ для $x \in (a; b)$, $a < b$, то справджується рівність:**

$$\int_a^b \varphi(x)dx > \int_a^b \psi(x)dx.$$

• Визначимо знак різниці:

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx.$$

За властивістю 4 останній інтеграл додатний.

Властивість 6. *Визначений інтеграл суми функцій подається як алгебраїчна сума інтегралів:*

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + \psi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx.} \qquad (11)$$

• Розглянемо інтегральну суму

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) + \psi(\xi_i))\Delta x_i,$$

яку згідно з властивістю дистрибутивності можна розкласти на дві суми:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \psi(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходячи до границі при $\lambda = \max_i \Delta x_i \to 0$, маємо:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) + \psi(\xi_i))\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

тобто виконується (11).

Властивість 7. **Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:**

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{const}\, f(x)\, dx = \mathrm{const} \int_a^b f(x)dx.} \qquad (12)$$

• За означенням визначеного інтеграла записуємо:

$$\int_a^b \mathrm{const}\, f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{const}\, f(\xi_i))\Delta x_i\,.$$

А оскільки в інтегральній сумі сталий множник можна винести за знак цієї суми, дістаємо:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{const}\, f(\xi_i)\Delta x_i = \mathrm{const} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Переходячи до границі, маємо:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{const}\, f(\xi_i)\Delta x_i = \mathrm{const} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Отже, виконується (6).

Властивість 8. **Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$ і $a < b$, то**

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.} \qquad (13)$$

• Рівність (13) легко дістати, перейшовши безпосередньо до границь у нерівності для інтегральних сум:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i .$$

Властивість 9. **Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, де $a < b$, і якщо на цьому проміжку виконується нерівність**

$$m \le f(x) \le M,$$

то

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).} \qquad (14)$$

• Рівність (14) дістанемо, безпосередньо перейшовши до границь у нерівності

$$m\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \le M\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i$$

та взявши до уваги, що $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b-a$.

Властивість 10. **(Теорема про середнє значення.) Нехай $f(x)$ — інтегровна на $[a; b]$ функція і на всьому проміжку $m \leq f(x) \leq M$. Тоді**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),} \qquad (15)$$

де $m \leq \mu \leq M$.

Доведення. Якщо $a < b$, то за властивістю 9 маємо:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Звідси

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M .$$

Узявши

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu ,$$

знайдемо рівність (14).

Якщо $a > b$, то на підставі аналогічних міркувань (з преставленням межі інтегрування) дістаємо (14).

Випадок неперервної функції $f(x)$. Якщо числа m і M — відповідно найбільше і найменше значення функції (вони існують за теоремою Вейєрштрасса), то за теоремою Больцано—Коші проміжного значення μ функція $f(x)$ набуває в деякій точці c проміжку $[a, b]$.

Таким чином,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), \quad c \in [a; b].}$$

Геометрична ілюстрація. Нехай $f(x) \geq 0$. Розглянемо криволінійну фігуру $ABCD$, обмежену кривою $y = f(x)$ (рис. 2.7). Площа такої фігури (виражена визначеним інтегралом) дорівнює площі прямокутника з основою AB і висотою LM.

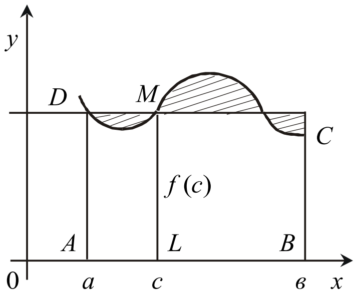


Рис. 2.7

Властивість 11. **(Узагальнена теорема про середнє значення.) Нехай виконуються такі умови:**
1) $f(x)$ і $g(x)$ — інтегровні у проміжку $[a; b]$;
2) $m \le f(x) \le M$;
3) $g(x) \ge 0$ (або $g(x) \le 0$).

Тоді

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx, \text{ де } m \le \mu \le M.} \qquad (16)$$

Доведення. Не порушуючи загальності, візьмемо $g(x) \ge 0$ і $a < b$. За такої умови дістанемо:

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x).$$

Звідси згідно з властивостями 6 і 3 маємо:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx. \qquad (17)$$

А оскільки $g(x) \ge 0$, то згідно з властивістю 5

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Якщо цей інтеграл дорівнює нулеві, то з попередніх нерівностей випливає співвідношення:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

а отже, і твердження теореми.

Якщо інтеграл більший від нуля, то ділячи на нього всі частини нерівності (17) і вважаючи, що

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu ,$$

дістаємо твердження, яке потрібно довести.

Випадок неперервної функції $f(x)$. Формулу (16) можна записати у вигляді

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx, \quad c \in [a; b].}$$

4. Визначений інтеграл як функція верхньої межі

Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на проміжку $[a; b]$, то вона інтегровна й на проміжку $[a; x]$, де $x \in [a; x]$. Замінивши сталу межу b у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ на змінну межу x, дістанемо

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{18}$$

тобто вираз, який є функцією від x.

***Теорема 2.8*. Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$, то функція $\Phi(x)$ неперервна за x на тому самому проміжку.**

Доведення. Надамо змінній x приросту Δx так, щоб значення $x + \Delta x$ не виходило за межі розглядуваного проміжку. Дістанемо нове значення функції (18):

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \tag{19}$$

Віднімемо почленно від рівності (19) рівність (18):

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \tag{20}$$

Застосуємо до рівності (20) теорему про середнє значення:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\mu\Delta x\,,$$

де $\mu\in[m', M']$, $m'=\inf\limits_{[x,\, x+\Delta x]} f(x)$, $M'=\sup\limits_{[x,\, x+\Delta x]} f(x)$.

Якщо $\Delta x\to 0$, то

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\to 0\,,\ \text{або}\ \Phi(x+\Delta x)\to\Phi(x),$$

що й означає неперервність функції $\Phi(x)$.

***Теорема 2.9.* Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $t = x$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, що дорівнює $f(x)$:**

$$\boxed{\Phi'(x)=f(x).}$$

Доведення. Справді, із (19) маємо

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\mu,$$

де $m'\le\mu\le M'$.

Функція $f(x)$ неперервна при $t = x$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при $|\Delta x| < \delta$ для всіх значень t на проміжку $[x, x + \Delta x]$ виконуються нерівності

$$f(x)-\varepsilon< f(x)< f(x)+\varepsilon.$$

У такому разі маємо:

$$f(x)-\varepsilon\le m'\le\mu\le M'\le f(x)+\varepsilon.$$

Це означає:

$$|\mu-f(x)|\le\varepsilon.$$

Очевидно, що

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\mu=f(x).$$

Цей висновок має принципове значення.

Для неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ завжди існує первісна — прикладом її є визначений інтеграл (18) зі змінною верхньою межею.

5. Поняття визначеного інтеграла. другий підхід

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано обмежену функцію $y = f(x)$. Розглянемо розбиття T відрізка $[a, b]$ точками поділу:

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На кожному відрізку розбиття $[x_k; x_{k+1}]$ знайдемо відповідно m_k нижню і верхню M_k межу значень функції $y = f(x)$:

$$m_k = \inf_{x\in[x_k,\, x_{k+1}]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x\in[x_k,\, x_{k+1}]} f(x).$$

Означення. Дві суми

$$\boxed{s_D = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k} \quad \text{і} \quad \boxed{S_D = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k\,,}$$

де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, називають відповідно **нижньою і верхньою сумами Дарбу**.

Властивості сум Дарбу

1. Для кожного розбиття T виконується нерівність

$$\boxed{s_D \le S_D\,.}$$

2. Якщо розбиття D_2 утворюється з розбиття D_1 додаванням кількох нових точок, то $s_{D_1} \le S_{D_2}$, $s_{D_1} \ge S_{D_2}$, тобто зі зменшенням розбиття нижні суми Дарбу можуть лише збільшитися, а верхні — лише зменшитися.

3. Для будь-яких розбиттів D_1 і D_2 виконується нерівність

$$s_{D_1} \le S_{D_2}\,,$$

тобто будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої верхньої такої суми.

Означення. Функція $y = f(x)$, обмежена на деякому відрізку, називається **інтегровною на цьому відрізку**, якщо існує єдине число I, яке відокремлює множину нижніх від множини верхніх сум Дарбу для будь-яких розбиттів відрізка $[a, b]$. Якщо функція $y = f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, то єдине число, яке відокремлює одну від одної ці дві множини, називається **визначеним інтегралом функції $y = f(x)$ за відрізком $[a, b]$** і позначається

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Розглянемо функцію Діріхле $y = D(x)$ на відрізку [0, 1]:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціонал ьне;} \\ 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональн е.} \end{cases}$$

Ця функція є типовим прикладом *обмеженої неінтегровної функції*.

• Справді, візьмемо будь-яке розбиття T. У кожному відрізку розбиття $[x_k, x_{k+1}]$ неодмінно містяться як раціональні, так і ірраціональні точки. Отже, для будь-якого відрізка Δ_k: $m_k = 0$, $M_k = 1$. Тоді всі нижні суми Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0$, оскільки всі $m_k = 0$, а всі верхні суми Дарбу $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = 1$, оскільки $\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_n = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_n = 1$ — довжина відрізка [0, 1].

Отже, множина нижніх сум містить одне число $X = \{0\}$ і множина верхніх сум містить одне число $Y = \{1\}$, причому будь-яке число з відрізка [0, 1] відокремлює множини X і Y одну від одної. Це означає, що функція Діріхле не є інтегровною на відрізку [0, 1].

Теорема 2.10. **(Критерій інтегровності.) Для того щоб визначена і обмежена на відрізку [*a*, *b*] функція *y* = *f*(*x*) була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого ε > 0 існувало розбиття *D*, таке що $S_D - s_D < \varepsilon$.**

Доведення. Достатність очевидна. Узявши $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, ...,$ дістанемо систему відрізків $[s_{2^n}; S_{2^n}]$, що збігаються до єдиної точки I. Вона і буде єдиним числом, що відокремлює одну від одної розглядувані множини.

Необхідність. Нехай, навпаки, відомо, що число, яке відокремлює розглядувані множини, єдине. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ в інтервал $(I - \varepsilon/2;\ I + \varepsilon/2)$ завдовжки ε потрапляють точки із множин $\{s_D\}$ і $\{S_D\}$. Отже, знайдуться розбиття T_1 і T_2, такі що

$$S_D^{T_1} - s_D^{T_1} < \varepsilon .$$

Візьмемо за T розбиття, яке містить точки із T_1 та із T_2. Тоді за властивістю 2 сум Дарбу дістанемо:

$$s_D^{T_1} \le S_D^{T_1}, \quad s_D^{T} \ge S_D^{T_2} .$$

Звідси

$$S_D^T - s_D^T < \varepsilon. \qquad (21)$$

Означення. Різниця $M_k - m_k$ називається **коливанням функції $f(x)$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ і позначається ω_k.**

З урахуванням означення нерівність (21) можна переписати так:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon.} \qquad (22)$$

6. Інтегровність неперервної функції

***Теорема 2.11*. Функція, неперервна на відрізку [*a, b*], інтегровна на цьому відрізку.**

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon < 0$. За властивістю рівномірної неперервності знайдеться таке розбиття T відрізка $[a, b]$, що для всіх відрізків розбиття виконуватиметься нерівність $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Згідно з (22) це означає інтегровність функції на відрізку $[a, b]$.

7. Основна формула інтегрального числення. Виведення

Відомо, що для неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$ інтеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

є первісною. Якщо $F(x)$ — будь-яка первісна для $f(x)$ функція, то

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Сталу C можна визначити, узявши $x = a$ або $\Phi(a) = 0$. Дістанемо

$$0 = \Phi(a) = F(x) + C, \text{ звідси } C = -F(x).$$

Остаточно,

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Зокрема, при $x = b$ маємо:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b - F(b) - F(a)\text{, де } F'(x) = f(x). \qquad (23)$$

Наведена залежність називається **формулою Ньютона—Лейбніца** і є основною формулою інтегрального числення.

За допомогою формули (23) встановлюється зв'язок між теоремами про середнє в диференціальному та інтегральному численні.

1. $\int_a^b \sin xdx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b.$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq m).$

8. Формули зведення. формула інтегрування частинами

Основна формула інтегрального числення може в деяких випадках відразу давати значення визначеного інтеграла. Проте за її допомогою різні формули зведення в теорії невизначених інтегралів перетворюються на аналогічні формули вже у визначених інтегралах, що дозволяє обчислення одного інтеграла зводити до обчислення іншого простішого інтеграла.

Загальна форма формул зведення має вигляд:

$$\boxed{\int f(x)dx = \varphi(x) - \int g(x)dx.} \qquad (24)$$

Якщо областю застосування такої формули є проміжок $[a, b]$, то маємо формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)dx,$$
де функції f і g — неперервні. (25)

• Справді, позначимо

$$\int g(x)dx = \Phi(x).$$

Тоді за основною формулою (24) дістанемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\varphi(x) - \Phi(x)\right)\Big|_a^b = \varphi(x)\Big|_a^b - \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Але

$$\int_a^b g(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

тому приходимо до формули (25).

Зокрема, **формула інтегрування частинами** набирає вигляду:

$$\int_a^b u\,du = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \tag{26}$$

а узагальнена формула подається так:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left(uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u^{(n)}v\right)\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.$$

Формула (25) встановлює співвідношення між *числами*, і вона простіша за формулу (24), яка встановлює відповідності між *функціями*.

Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

• За формулою (26) маємо:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x, \\ dv = \sin x dx, \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, \\ v = \int \sin x dx = -\cos x. \end{array} \right| = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2) dx =$$

$$= (n-1)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \right) = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n .$$

Звідси дістаємо рекурентну формулу:

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n ,$$

або

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} .} \qquad (27)$$

За допомогою формули (27) інтеграл I_n послідовно зводиться до інтеграла I_0 або I_1.

Якщо n — парний степінь ($n = 2k$), то

$$I_{2k} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} .$$

Якщо n — непарний степінь ($n = 2k + 1$), то

$$I_{2k+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 3\cdot 1} .$$

Отже,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } n \text{ — парне;} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n \text{ — непарне.} \end{cases} \qquad (28)$$

9. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі

Основна формула інтегрального числення дає змогу встановити правило заміни змінної у визначеному інтегралі.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ — неперервна на проміжку $[a, b]$ функція. Візьмемо $x = \varphi(t)$ і вважатимемо, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умови:

1) $\varphi(t)$ визначена і неперервна в деякому проміжку $[\alpha; \beta]$;
2) $\varphi(t) \in [a, b]$, коли $t \in [\alpha, \beta]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
4) існує неперервна похідна $\varphi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Тоді справджується формула

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.} \qquad (29)$$

• Справді, припустимо, що підінтегральні функції неперервні, тому існують не лише визначені інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, а й відповідні їм невизначені, і в обох випадках для обчислення можна застосувати основну формулу.

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ — первісна для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тому одночасно маємо:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

і

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

що доводить формулу (29).

Важлива особливість формули (29): при обчисленні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінної, дістаючи шукану функцію, що виражена через t, ми обов’язково повертаємося до старої змінної x, але в разі визначеного інтеграла в цьому потреби немає. Якщо обчислено другий із визначених інтегралів, який є числом, то це означає, що обчислено і перший.

Обчислити інтеграл

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx .$$

• $$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 5\sin t \qquad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ dx = 5\cos t dt, \\ \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \\ = \sqrt{25-25\sin^2 t} = \\ = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = \sqrt{25\cos^2 t} = 5|\cos t|, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline t & 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{array} \\ \text{Коли } t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right), \ \cos t \text{ набуває} \\ \text{додатних значень, тому } |\cos t| = \cos t . \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 5\cos t \cdot 5\cos t dt = 25\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{25}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \frac{25}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi \cdot 25}{4}}.$$

10. Обчислення визначених інтегралів за допомогою властивостей підінтегральних функцій

Істотні спрощення обчислення визначених інтегралів можливі в разі парних, непарних, періодичних підінтегральних функцій.

1. Якщо $f(x)$ — парна функція, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2. Якщо $f(x)$ — непарна функція, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

3. Якщо $f(x)$ — періодична з періодом T функція, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Знайти

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

- $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\| \begin{array}{c} \text{Підінтегральна функція} \\ \text{парна, оскільки } x\arcsin x \text{ є добуток} \\ \text{двох непарних функцій} \end{array} \right\| =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t, \\ x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6} \end{array} \end{array} \right| = 2\int_{0}^{\pi/6} \frac{\sin t \cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t dt = 2\int_{0}^{\pi/6} t \sin t dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \text{За формулою} \\ \text{інтегрування частинами} \\ \int_a^b u dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v du. \end{array} \right\| = \left| \begin{array}{l} u = t, \\ \sin t dt = dv, \\ v = \int \sin t dt = -\cos t, \\ du = dt. \end{array} \right| =$$

$$= \left(2 - t\cos t\big|_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \cos t dt \right) = -\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin t\big|_0^{\pi/6} =$$

$$= 2\left(-\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 \right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} \right) = \frac{6 - \pi\sqrt{3}}{6}\,.$$

Знайти $\int\limits_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx.$

$$\bullet\ \int\limits_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx=\left\|\begin{array}{l}\text{Підінтегральна функція}\\ \text{непарна, оскільки}\\ f(-x)=\dfrac{(-x)^3\sin^2(-x)}{(-x)^4+2(-x)^2+1}=\\ =-\dfrac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}=-f(x).\end{array}\right\|=0.$$

Знайти $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$

$$\bullet\ \int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=\left\|\begin{array}{l}\text{Підінтегральна функція періодична,}\\ \text{тому можна від верхньої та нижньої}\\ \text{меж інтегрування відняти } \pi.\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x\cos x}{\cos^4 x(1+\operatorname{tg}^4 x)}dx=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg}^4 x)}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t,\\ d\operatorname{tg}x=dt,\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt,\\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \dfrac{\pi}{4}\\ \hline t & 0 & 1\end{array}\end{array}\right|=2\int\limits_{0}^{1}\frac{tdt}{1+t^4}=\left|\begin{array}{l}t^2=z,\\ dt^2=dz,\\ 2tdt=dz,\\ tdt=\dfrac{1}{2}dz,\\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1\\ \hline z & 0 & 1\end{array}\end{array}\right|=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dz}{1+z^2}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dz}{z^2+1}=$$

$$\boxed{=\operatorname{arctg}z\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.}$$

Знайти $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

$$\bullet\ \int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left\|\begin{array}{l}\text{Невизначений інтеграл } \displaystyle\int\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\\ \text{не подається в елементарних}\\ \text{функціях, але визначений можна}\\ \text{обчислити штучним шляхом.}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left\|\begin{array}{l}\text{У другому інтегралі}\\ \text{беремо } x=\pi-t,\\ \text{тоді } dx=-dt,\\ \begin{array}{c|c|c} x & \pi/2 & \pi \\ \hline t & \pi/2 & 0\end{array}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}-\int\limits_{\pi/2}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(\pi-t)\sin t dt}{1+\cos^2 t}=$$

$$=\underbrace{\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{t\sin t dt}{1+\cos^2 t}}_{\text{(Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування)}}+\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t}=\pi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin t dt}{1+\cos^2 t}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\cos t=z,\\ d\cos t=dz,\\ -\sin dt=dz,\\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/2 \\ \hline z & 1 & 0\end{array}\end{array}\right|=\pi\int\limits_0^1\frac{dz}{1+z^2}=\pi\,\mathrm{arctg}\,z\Big|_0^1=\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

11. Геометричне застосування визначеного інтеграла

1. *Обчислення площі фігури у прямокутних координатах*

1. Якщо на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)\geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, подається так:

$$\boxed{S=\int\limits_a^b f(x)dx.} \qquad (30)$$

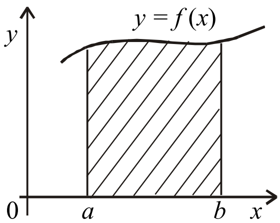


Рис. 2.8

2. Якщо потрібно обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \ge f_2(x)$) ординатами $x = a$ і $x = b$, то

$$\boxed{S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx.} \qquad (31)$$

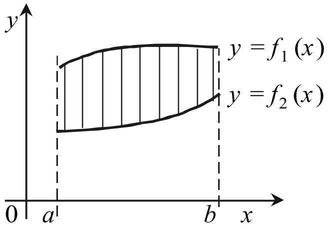


Рис. 2.9

Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = x^4$.

- Знаходимо точки перетину кривих:

$$\sqrt[4]{x} = x^4 \Rightarrow x = x^{16},$$

отже,

$$x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1.$$

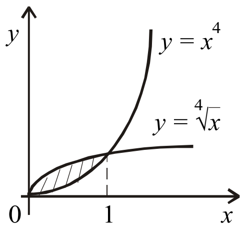


Рис. 2.10

Звідси за формулою (31)

$$S = \int_0^1 (\sqrt[4]{x} - x^4)dx = \left. \left(\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} - \frac{x^5}{5} \right) \right|_0^1 = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{3}{5}}\,.$$

③ Якщо криву задано рівняннями в параметричній формі

$$x = \varphi(t) \quad \text{і} \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \quad \begin{matrix} \varphi(\alpha) = a, \\ \varphi(\beta) = b, \end{matrix} \tag{32}$$

то площа криволінійної фігури обчислюється за формулою

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.} \tag{33}$$

• Справді, нехай рівняння (32) визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Тоді площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y dx$$

або

$$\int_a^b y(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t), \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array}, \\ y(x) = y(\varphi(t)) = \\ = f(\varphi(t)) = \psi(t). \end{matrix} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

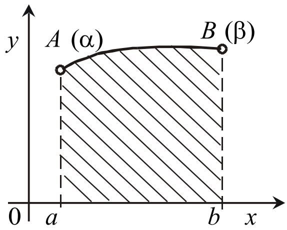


Рис. 2.11

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю x і однією аркою циклоїди $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$.

• За формулою (33) маємо:

$$S = \int_0^{2\pi} 5(1-\cos t)5(1-\cos t)dt = 25\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= 25\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t dt\right) = 25(2\pi - 0 + \pi) = 25 \cdot 3\pi = \boxed{75\pi}\ .$$

2. Довжина дуги кривої

1. *Довжина дуги кривої у прямокутних координатах*. Нехай у прямокутних координатах на площині задано криву рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ і $f'(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$ функції.

Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 2.12).

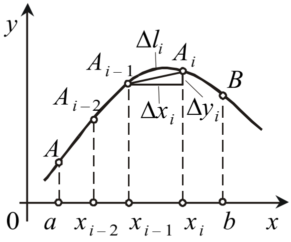


Рис. 2.12

Нагадаємо означення довжини дуги кривої.

Візьмемо на дузі AB точки A, A_1, A_2, …, B з абсцисами $a = x_0$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ і проведемо хорди AA_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно Δl_1, Δl_2, …Δl_n. Тоді дістанемо ламану $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$, вписану в дугу AB. Довжина ламаної дорівнює $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Означення. **Довжиною *l* дуги *AB*** називається границя, до якої прямує довжина вписаної в цю дугу ламаної, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля:

$$\boxed{l = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .} \qquad (34)$$

Довжина дуги кривої обчислюється за формулою:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .} \qquad (35)$$

• Доведемо формулу (35). Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i .$$

За теоремою Лагранжа про середнє значення маємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i .$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i .$$

Таким чином, довжина вписаної в дугу ламаної набирає вигляду:

$$l_n = \sum_{i-1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i .$$

За умовою $f'(x)$ — неперервна, тому функція $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ також неперервна. Отже, існує границя інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i =$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .$$

Обчислити довжину півкубічної параболи $y = (x+1)^{3/2}$, $-1 \le x \le 4$.

● За формулою (35) маємо:

$$l = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{9x+13}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(9x+13)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{4} = \frac{1}{27}(9\cdot 4+13)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27}(-9+13)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}\cdot(49)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27}(4)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot 7^3 - \frac{1}{27}\cdot 8 = \frac{343}{27} - \frac{8}{27} = \frac{335}{27} .$$

3. довжина дуги кривої заданої в параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta), \tag{36}$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ —функції, неперервні разом зі своїми першими похідними, причому $\varphi(t) \ne 0$, $t \in [\alpha; \beta]$. У цьому разі рівняння (36) визначають деяку функцію $y = f(x)$ — неперервну і таку, що має неперервну похідну:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Нехай $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тоді, виконавши в інтегралі (35) підстановку $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dx$, дістанемо:

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt\,,$$

або

$$\boxed{s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\psi'(t))^2+(\varphi'(t))^2}\,dt.} \qquad (37)$$

Обчислити довжину дуги астроїди

$$x=5\cos^3 t,\quad y=5\sin^3 t.$$

● Ця крива симетрична відносно обох координатних осей, тому обчислюємо спочатку довжину її четвертої частини, розміщеної в першій чверті:

$$x_t'=-15\cos^2 t\sin t,$$
$$y_t'=15\sin^2 t\cos t\,.$$

Параметр t змінюватиметься від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\pi/2}\sqrt{225\cos^4 t\sin^2 t+225\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=15\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=$$
$$=15\int_0^{\pi/2}\sin t\cos dt=15\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt=15\frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{15}{2}.}$$

Зауваження. У разі просторової кривої, заданої параметричними рівняннями

$$x=\varphi(t)\,,\qquad y=\psi(t)\,,\qquad z=\chi(t)$$

довжина дуги обчислюється за формулою:

$$\boxed{l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.}$$

4. Довжина дуги кривої в полярних координатах

Нехай маємо рівняння кривої

$$\rho = f(\theta), \tag{38}$$

де ρ — полярний радіус; θ — полярний кут.

Запишемо формули переходу від полярних координат до декартових: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Підставивши замість ρ вираз його через θ згідно з (38), дістанемо рівняння

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta.$$

Ці рівняння можна розглядати як параметричні рівняння кривої, і для обчислення довжини дуги застосувати формулу (37). Для цього знайдемо похідні від x і y за параметром θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta;$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Тоді

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Отже,

$$\boxed{l = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta.}$$

Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\theta)$ (рис. 2.13).

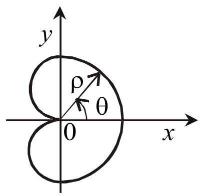


Рис. 2.13

• Змінюючи полярний кут θ від 0 до π, дістаємо половину шуканої довжини. Оскільки $\rho' = -a\sin\theta$, маємо:

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\,.$$

5. Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів

Нехай маємо деяке тіло T. Припустимо, що відома площа будь-якого його перерізу площиною, перпендикулярною до осі x (рис. 2.14). Ця площа залежатиме від положення площі перерізу, тобто буде функцією від x:

$$Q = Q(x).$$

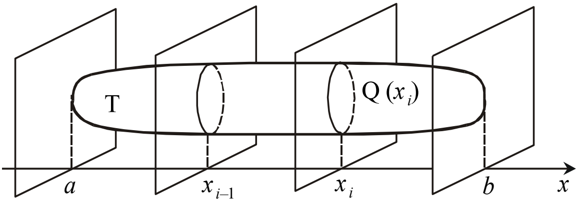


Рис. 2.14

Вважаючи, що $Q(x)$ є неперервна функція від x, визначимо об'єм даного тіла. Проведемо площини $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, …, $x_n = b$. Ці площини розбивають тіло на шари.

У кожному окремому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку ξ_i і для кожного значення $i = 1, 2, \ldots, n$ побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі x, а напрямна являє собою контур перерізу тіла T площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого елементарного циліндра з площею основи $Q(\xi_i)$ $(x_{i-1} \le x \le x_i)$ і висотою Δx_i дорівнює $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Об'єм усіх циліндрів буде

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i.$$

Границя цієї суми при $\max x_i \to 0$ (якщо вона існує) називається **об'ємом даного тіла**:

$$\boxed{V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i\,.} \qquad (39)$$

Сума V_n є інтегральною сумою для неперервної функції $Q(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, границя (39) існує і виражається визначеним інтегралом:

$$V=\int_a^b Q(x)dx. \qquad (40)$$

6. Об'єм тіла обертання

Розглянемо тіло, утворене обертанням навколо осі x криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю x і прямими $x = a$, $x = b$.

У цьому разі довільний переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис, є коло, площа якого $Q=\pi y^2=\pi(f(x))^2$.

Застосовуючи (40), дістаємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx. \qquad (41)$$

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лінії

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

навколо осі Ox на проміжку від 0 до b (рис. 2.15).

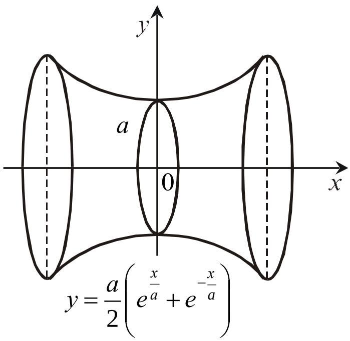


Рис. 2.15

● За формулою (41) маємо:

$$V = \pi \frac{a^2}{4}\int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\int_0^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx = \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right]_0^b =$$

$$= \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2} = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} \right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

7. Площа поверхні тіла обертання

Нехай задано поверхню, утворену обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі x. Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $a \le x \le b$. Функції $f(x)$, $f'(x)$ неперервні, якщо $x \in [a; b]$.

Проведемо хорди AM_1, M_1M_2, …, $M_{n\text{-}1}B$, довжини яких позначимо Δl_1, l_2, …, Δl_n (рис. 2.16).

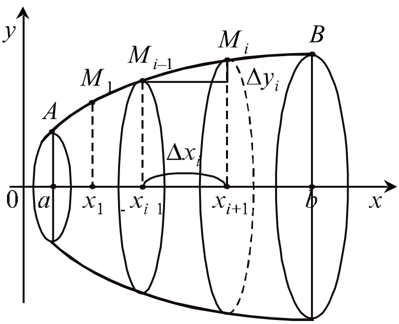


Рис. 2.16

Кожна хорда завдовжки $\Delta l_i (i = 1,2,...,n)$ під час обертання описує зрізаний конус, площа поверхні якого така:

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i.$$

Але $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)} \Delta x_i.$

Застосовуючи теорему Лагранжа, маємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(\xi_i).$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

$$\Delta S_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

Площа поверхні, описаної ламаною, подається у вигляді

$$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

або

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \qquad (42)$$

Означення. Границя суми (42), коли найбільша ланка ламаної Δl_i прямує до нуля, називається **площею поверхні обертання**.

Сума (42) за своєю побудовою не є інтегральною сумою для функції

$$2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}. \qquad (43)$$

Але можна довести, що границя суми (42) дорівнює границі інтегральної суми для функції (43):

$$S_{\text{поверхні}} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i,$$

або

$$\boxed{S_{\text{поверхні}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.} \qquad (44)$$

Визначити площу поверхні параболоїда, утвореного обертанням навколо осі x дуги параболи $y^2 = 2px$, $0 \le x \le a$.

$$f(x) = \sqrt{2px}, \qquad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}.$$

- За формулою (44) маємо:

$$S=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx=$$

$$=2\pi\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}(2x+p)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\Big|_0^a=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left((2a+p)^{3/2}-p^{3/2}\right).$$

12. Формула Валліса

Припускаючи, що $0<x<\frac{\pi}{2}$, дістаємо нерівності:

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x.$$

Інтегруючи ці нерівності у проміжку від 0 до $\frac{\pi}{2}$, маємо:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}xdx<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x<\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}xdx.$$

Звідси згідно з формулою (28) знаходимо:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\quad\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

або

$$\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n}.$$

Різниця між двома крайніми виразами

$$\frac{1}{2n(2n+1)}\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2<\frac{1}{2n}\frac{\pi}{2}$$

прямує до 0 при $n\to+\infty$, тому $\frac{\pi}{2}$ є їхньою спільною границею.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.}$$

Це є **формула Валліса**.

ТЕМА 3. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

1. Інтеграли з нескінченними межами інтегрування 1-го роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ та інтегровна в будь-якій скінченній його частині $[a; A]$, так що інтеграл $\int_a^A f(x)dx$ має зміст при будь-якому $A > a$.

Означення. Границя інтеграла $\int_a^A f(x)dx$ (скінченна або нескінченна) при $A \to +\infty$ називається **невласним інтегралом 1-го роду** від функції $f(x)$.

Позначення.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.} \qquad (1)$$

Геометрична інтерпретація.

Нехай задано невід'ємну функцію $y = f(x)$, неперервну на промені $[a; +\infty)$. Для кожного $b > a$ визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ задає площу криволінійної трапеції $aABb$.

Перемістивши відрізок Bb праворуч, дістанемо замість значення невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ площу «трикутника» $Aa\infty$ (рис. 2.20).

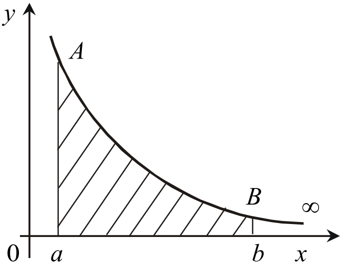


Рис. 2.20

Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \, (a > 0)$ залежно від параметра λ.

● Скориставшись означенням (52), розглянемо два випадки.

1. $\lambda \neq 1$:

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \left. \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_a^A = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \infty, & \text{якщо } \lambda < 1; \\ \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, & \text{якщо } \lambda > 1. \end{array} \right.$$

2. $\lambda = 1$:

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x} \pm \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln a) = \infty \, .$$

Отже,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \to \left[\begin{array}{ll} \text{збіжний}, & \text{якщо } \lambda > 1; \\ \text{розбіжний}, & \text{якщо } \lambda \leq 1. \end{array} \right.$$

Якщо границя $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ існує і скінченна, то невласний інтеграл *збіжний*. У противному разі — *розбіжний*.

Аналогічно, за означенням (52) можна розглядати невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{A} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx.} \qquad (2)$$

Можна також розглядати невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; \infty)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \\ c \in (-\infty; \infty). \end{array}} \qquad (3)$$

Можна показати, що права частина (3) не залежить від вибору проміжної точки c.

Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_0^{+\infty} \sin bx dx \, (b > 0)\,. \tag{4}$$

● За означенням (52) маємо:

$$\int_0^{+\infty} \sin bx dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \sin bx = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bx \Big|_0^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bA + \frac{1}{b} \right).$$

Границя $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} \cos bA \right)$ не існує, тому інтеграл (4) розбіжний.

Нехай r — відсоткова ставка, а $R(t)$ — відповідна рента, отримувана від земельної ділянки. Тоді знаходження дисконтованої вартості приводить до формули:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} R(t) e^{-rt} dt\,.} \tag{5}$$

Візьмемо $R(t) = 5e^{-0,5t}$ (млн грн / рік), $r = 12\%$.
За формулою (56):

$$\int_0^{+\infty} 5e^{-0,5t} \cdot e^{-0,12t} dt = 5 \int_0^{+\infty} e^{-0,62t} dt = \lim_{A\to\infty} 5 \int_0^A e^{-0,62t} dt = 5 \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-0,62t}}{-0,62} \Bigg|_0^A =$$

$$= 5 \lim_{A\to\infty} \left(\frac{A^{-0,62t}}{-0,62} + \frac{1}{0,62} \right) = \frac{5}{0,62} \approx 8,06 \quad (\text{млн грн}).$$

Можна порівняти цю вартість з вартістю ділянки в даний момент, яка становить $R(0) = 5e^{-0,7\cdot 0} = 5$ (млн грн.).

Якщо функція $f(x)$ додатна, то інтеграл

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx \tag{6}$$

являє собою монотонно зростаючу функцію від змінної A. Питання про існування скінченної границі при $A \to \infty$ розв'язується за допомогою поданих далі (без доведення) теорем.

***Теорема. 2.12.* Для збіжності невласного інтеграла (3) необхідно і достатньо, щоб інтеграл (57) зі зростанням A залишався обмеженим зверху**:

$$\int_a^A f(x) dx \le L \qquad (L = \text{const}).$$

***Теорема 2.13.* Якщо хоча б при $x \ge A$ виконується нерівність**

$$f(x) \le g(x),$$

то зі збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ або з розбіжності $\int_a^{\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 2.14. **Якщо існує границя**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \le K \le +\infty), \tag{7}$$

то зі збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ при $K < +\infty$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності першого інтеграла випливає розбіжність другого.

Теорема 2.15. (Коші.) **Нехай для достатньо великих x функція $f(x)$ має вигляд**

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}} \quad (\lambda > 0).$$

Тоді: 1) якщо $\lambda > 1$ і $\varphi(x) \le c$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається;

2) якщо $\lambda \le 1$ і $\varphi(x) \ge c > 0$ то цей інтеграл розбіжний.

Теорема 2.16. **Якщо збіжним є інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то збіжний і інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.**

Означення. Якщо одночасно з інтегралом $\int_a^{\infty} f(x)$ збігається інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ називається **абсолютно збіжним**, а функція $f(x)$ — **абсолютно інтегровною** на проміжку $[a; \infty)$.

Теорема 2.17. (Ознака Абеля.) **Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $[a; \infty)$, причому:**

1) функція $f(x)$ інтегровна на цьому проміжку, так що інтеграл (52) збігається;

2) функція $g(x)$ монотонна і обмежена:

$$\boldsymbol{|g(x)| \le L \quad (L = \mathrm{const})} .$$

Тоді інтеграл

$$\boldsymbol{\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx} \tag{8}$$

збіжний.

Теорема 2.18. (Ознака Діріхле.) **Нехай виконуються такі умови:**

1) функція $f(x)$ інтегровна на будь-якому проміжку $[a, A]$ і інтеграл (57) обмежений:

$$\boldsymbol{\left|\int_a^A f(x)dx\right| \le K \quad (K = \mathrm{const})} ;$$

2) функція $g(x)$ монотонно прямує до 0 при $x \to \infty$:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} g(x) = 0} .$$

Тоді інтеграл (59) збіжний.

Дослідити збіжність інтегралів.

1. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx \quad (a > 0).$
2. $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x^3}dx \quad (a > 0).$
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\mu}e^{-ax}\cos xdx \quad (\mu,\, a > 0).$

● 1. За ознакою Діріхле візьмемо

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Умови 1 і 2 виконано, оскільки $\left|\int_a^A \sin xdx\right| = |\cos a - \cos A| \le 2$ і функція $\frac{1}{x^2}$ монотонно спадає, прямуючи до 0 при $x \to \infty$.

Тому інтеграл збіжний.

2. За ознакою Абеля візьмемо

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad g(x) = \mathrm{arctg}\, x .$$

За умовою 1 інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ збіжний, за умовою 2

$$|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збіжний.

3. За ознакою Абеля візьмемо

$$f(x) = x^{\mu} e^{-ax}, \quad g(x) = \cos x.$$

Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^{\mu} e^{-ex} dx$ збіжний, $|\cos x| \le 1$, тому розглядуваний інтеграл збіжний.

2. Невласні інтеграли 2-го роду: інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; b)$.

Означення. Точка $x = b$ називається **особливою точкою**, якщо функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки b.

Означення. Границя інтеграла $\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx$ при $\eta \to +0$ (скінченна або нескінченна) називається **невласним інтегралом 2-го роду функції *f(x)* від *a* до *b***.

Позначення:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to 0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx.} \qquad (9)$$

Якщо границя існує, то говорять, що невласний інтеграл (9) **збіжний**. Якщо границя не існує або нескінченна, то цей інтеграл **розбіжний**.

Геометрична інтерпретація (рис. 2.21).

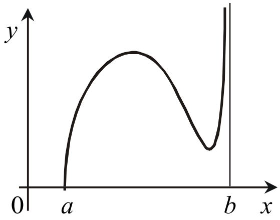


Рис. 2.21

Аналогічно, якщо $x = a$ — особлива точка, то невласний інтеграл визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо $x = c$ — єдина внутрішня особлива точка на проміжку $(a; b)$, то вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

за умови, що обидва невласні інтеграли праворуч збіжні.

Якщо особливих точок на відрізку $[a; b]$ кілька, то його розбивають так, щоб у кожному проміжку розбиття була не більш ніж одна особлива точка, і користуються означенням (60).

Нехай $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$. Візьмемо

$$F(a+0) = \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon),$$
$$F(b-0) = \lim_{\varepsilon\to-0} F(b-\varepsilon)$$

(якщо ці границі існують). Тоді аналогом формули Ньютона—Лейбніца для збіжних інтегралів, в яких особливими є точки $x = a$ і $x = b$, буде формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0).$$

Дослідимо збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x^\lambda}, \quad a>0, \quad a=\text{const}.$$

• 1. $\underline{\lambda \neq 1}$. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x^\lambda}$ має одну особливу точку на проміжку інтегрування (0; a]:

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_{0+\varepsilon}^{a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}-\frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right)=\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Відповідь. Інтеграл збіжний.

2. $\underline{\lambda = 1}$. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x}$ має одну особливу точку на проміжку інтегрування (0; a]. Звідси випливає:

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln a - \ln\varepsilon) = +\infty.$$

Відповідь. Інтеграл розбіжний.

3. Основні ознаки збіжності інтеграла 2-го роду

1. Нехай $f(x) \geq 0$. Тоді для збіжності невласного інтеграла (1) необхідно і достатньо, щоб при всіх $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq L \quad (L=\text{const}).$$

2. *Ознака Коші.* Нехай для достатньо близьких до b значень x функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^\lambda}, \quad (\lambda>0).$$

Тоді: 1) якщо $\lambda<1$ і $0<g(x)\leq c$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збіжний;

2) якщо $\lambda \geq 1$ і $g(x) \geq c > 0$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбіжний.

3. Якщо при $x \to b$ функція $y = f(x)$ є нескінченно великою порядку $\lambda > 0$ (порівняно з $\dfrac{1}{b-x}$), то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збіжний або розбіжний залежно від того, яка умова виконується: $\lambda<1$ або $\lambda \geq 1$.

Дослідити збіжність інтеграла:

1) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$; 2) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\ln x}$.

• 1. $x = 1$ — особлива точка. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ є нескінченно великою порядку $1/4$, оскільки

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}\to\frac{1}{\sqrt[4]{4}},\ \text{коли } x\to 1.$$

Отже, інтеграл збіжний.

2. $x = 1$ — особлива точка. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ є нескінченно великою порядку 1, оскільки

$$\frac{\ln x}{x-1}\to 1\ \text{при } x\to 1.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

! ***Зауваження.*** Властивості невласних інтегралів аналогічні властивостям визначених інтегралів і випливають із них, а саме: інтеграли є границею визначених, тому звичайно достатньо написати для цих останніх рівність або нерівність, що виражає потрібну властивість, і перейти до границі.

2.2.16. ДЕЯКІ ОСОБЛИВІ ІНТЕГРАЛИ

1. Інтеграл Ейлера

$$\boxed{I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx.} \qquad (10)$$

• $I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=$ ‖ Інтегруван ням частинами цей невласний інтеграл можна звести до визначеног о і довести таким чином його існування. ‖ $=$

$$=x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}x\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\int\limits_0^{\pi/2}x\operatorname{ctg}x\,dx.$$

Обчислимо інтеграл (61):

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\left|\begin{array}{c} x=2t \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array}\end{array}\right|=2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c} \text{В останньому} \\ \text{інтегралі візьмемо:} \\ \hline t=\dfrac{\pi}{2}-u \\ dt=-du \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/4 \\ \hline u & \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{4} \end{array}\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,$$

або

$$\boxed{I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.}$$

Зауваження. До інтеграла I зводяться також інтеграли $\int_0^{\pi/2}x\operatorname{ctg}x\,dx$, $\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$.

2. Інтеграл Ейлера—Пуассона

$$\boxed{P=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.} \qquad (11)$$

• Функція $f(t) = (1 + t)\, e^{-t}$ досягає свого найбільшого значення 1 при $t = 0$.

Отже,

$$(1 + t)e^{-t} < 1 \quad \text{при} \quad t > 0 \ \text{ і } \ t < 0.$$

Беручи $t = \pm x^2$, дістаємо:

$$(1-x^2)e^{x^2}<1 \ \text{ і } \ (1+x^2)e^{-x^2}<1,$$

звідки

$$1-x^2<e^{-x^2}, \quad x\in(0;\,1)\,; \tag{12}$$

$$e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}, \quad x>0\,. \tag{13}$$

Підносячи вирази (12) і (13) до степеня з будь-яким натуральним показником n, маємо:

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2} \quad (0<x<1)\,; \tag{14}$$

$$e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x>0)\,. \tag{15}$$

Інтегруючи нерівність (14) на проміжку від 0 до 1, а нерівність (15) — від 0 до $+\infty$, дістаємо:

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx<\int_0^1 e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Водночас виконуються такі співвідношення:

1) $$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{n}x; \\ \dfrac{u}{\sqrt{n}}=x; \\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{n}}du. \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-n\cdot\frac{u^2}{n}}du=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{n}}P\,;$$

2) $$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\left|\begin{array}{l} x=\cos t; \\ dx=-\sin t dt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt=\frac{2n!!}{(2n+1)!!}\,;$$

3) $$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\left|\begin{array}{l} x=\mathrm{ctg}\,t; \\ dx=-\dfrac{1}{\sin^2 t}dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}tdt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Звідси

$$\sqrt{n}\,\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<P<\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\,. \tag{16}$$

Підносячи до квадрата і перетворюючи вираз (16), дістаємо:

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{(2n!!)^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}<P^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{[(2n-3)!!]^2(2n-1)}{[(2n-2)!!]^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (17)$$

Із формули Вілліса

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}$$

випливає, що обидва крайні вирази у (68) при $n\to\infty$ прямують до $\frac{\pi}{4}$, тому

$$P^2=\frac{\pi}{4} \quad \text{і} \quad P=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отже,

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

3. Інтеграли Фруллані подаються у вигляді

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx \quad (a,b>0),}$$

причому виконуються такі умови:

1) $f(x)$ визначена і неперервна при $x\geq 0$;
2) існує скінченна границя

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

Можна довести, що:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.}$$

Обчислити інтеграл

$$\Phi=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax-\operatorname{arctg}bx}{x}dx.$$

• У цьому разі $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(0) = 0$, $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\Phi = -\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

ТЕМА 4. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Якщо первісна підінтегральної функції відома, визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона—Лейбніца. Але можлива ситуація, коли первісна або не подається у вигляді елементарної функції, або вираз для первісної складний. Тоді застосовують наближені формули обчислення визначених інтегралів.

Основна ідея побудови цих формул полягає в заміні підінтегральної функції на функцію простішого вигляду, наприклад многочлен, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона—Лейбніца.

1. **Формула прямокутників**. Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ — функція, інтегровна на відрізку $[a; b]$. Розіб’ємо відрізок інтегрування на $2n$ частин:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

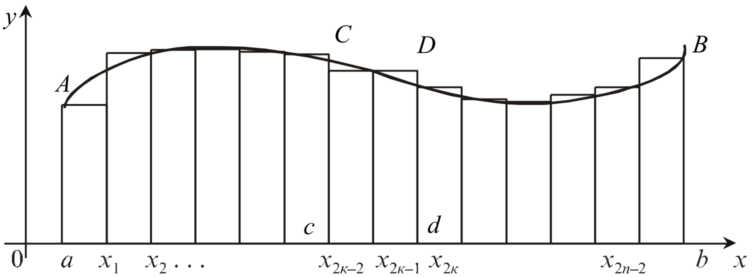


Рис. 2.17

На кожному з відрізків $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ побудуємо прямокутник $cCDd$ висотою $f(x_{2k-1})$ (рис. 2.17). Площу криволінійної трапеції замінимо на суму площ усіх таких прямокутників. Отже, визначений інтеграл наближено дорівнює такій сумі:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_1)\cdot 2h + f(x_3)\cdot 2h + \ldots + \\ + f(x_{2n-1})\cdot 2h = 2h(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})), \tag{1}$$

де h — довжина відрізка розбиття,

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_1 = a + h, \ldots, x_{2k+1} = x_{2k} + 2h.$$

Формула (45) називається **формулою прямокутників**.

Доведено, що похибка застосування формули (45) не перевищує

$$\Delta = \frac{(b-a)^2}{24n^2}M, \\ M = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|. \tag{2}$$

Звичайно обчислення закінчується, коли модуль різниці $|S_{2n} - S_n|$ стає меншим від заданої похибки.

Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$.

● Візьмемо $f(x) = e^{-x^2}$, $a = -1$, $b = 1$, тоді $h = \frac{1}{n}$;

$$x_1 = -1 + h; \; S_0 = 0,$$
$$x_{i+1} = x_i + 2h, \; i = 2,\ldots,n-1,$$
$$S_i = S_{i-1} + f(x_i).$$

Результати обчислень наведено в таблиці:

n	2	4	8	16	32	64	128
S_n	2	1,558	1,509	1,497	1,495	1,494	1,494

З таблиці бачимо, що значення інтеграла із заданою точністю дістаємо на 6-му кроці.

2. Формула трапецій. Геометричні розрахунки приводять до іншої формули: **формули трапеції**. Замінимо задану криву вписаною в неї ламаною з вершинами в точках (x_i, y_i), де $y_i = f(x_i)$. Тоді криволінійна трапеція заміниться фігурою, утвореною *трапеціями*.

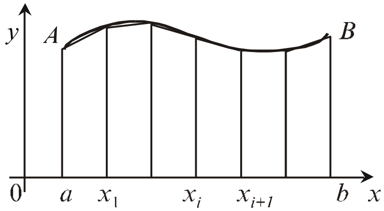


Рис. 2.18

Якщо проміжок $[a,\ b]$ поділений на рівні частини, то площі відповідних трапецій будуть такі:

$$\frac{b-a}{n}\,\frac{y_0+y_1}{2},\quad \frac{b-a}{n}\,\frac{y_1+y_2}{2},\ \ldots,\ \frac{b-a}{n}\,\frac{y_{n-1}+y_n}{2}.$$

Додаючи, дістаємо:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).} \qquad (3)$$

Формула (3) називається **формулою трапецій**.
Доведено, що похибка застосування формули (3) не перевищує

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M,\\ &M = \max_{x\in[a;b]} f''(x).\end{aligned}} \qquad (4)$$

Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ з точністю до 0,001.

- За формулою (4) маємо:

$$R_n < 0,\quad |R_n| < \frac{1}{6n^2}.$$

Візьмемо $n = 10$, тоді

$$|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1\cdot 7\cdot 10^{-3}.$$

Обчислення подамо таблицею:

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Отже, за формулою (3):

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1\cdot 500}{2} + 6{,}1877\right) = \boxed{0{,}69377}\ .$$

3. Формула Сімпсона. Щоб для обчислення визначеного інтеграла дістати наближену формулу вищої точності, ніж формули прямокутників і трапецій, вписуватимемо в дану криву замість прямолінійних відрізків відрізки *параболи*.

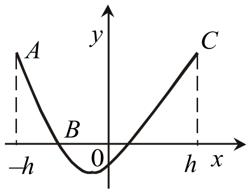


Рис. 2.19

Можна довести, що площа S криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = ab^2 + bx + c$, яка проходить через точки $A(-h; y_1)$, $B(0; y_2)$, $C(h; y_3)$ (рис. 2.19), обчислюється формулою:

$$\boxed{S = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).} \qquad (5)$$

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $y = f(x)$, і розіб'ємо відрізок інтегрування $[a; b]$ на $2n$ рівних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

Провівши через кожні три точки

$$A_0A_1A_2,\ \ldots\ A_{2k}A_{2k+1}A_{2k},\ \ldots,\ A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$$

параболу, дістанемо n криволінійних трапецій, обмежених згори параболами. За формулою (49) площа кожної такої частинної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, подається у вигляді

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})\ ,$$

де $y_k = f(x_k)$, $0 \le k \le 2n$.

Додаючи почленно ці наближені рівності, дістаємо формулу:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})\right]. \qquad (6)}$$

Формула (6) називається **формулою Сімпсона**.

Можна довести, що похибка формули (6) не перевищує

$$\boxed{M\frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \quad M = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{\mathrm{IV}}(x)\right|.} \qquad (7)$$

Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$ з точністю до 0,001.

• За формулою (51) маємо:

$$y^{\mathrm{IV}} > 0, \ \left|y^{\mathrm{IV}}\right| = y^{\mathrm{IV}} = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3).$$

Очевидно, що похідна y IV зростає при 0 ≤ x ≤ 1 і набуває найбільшого значення при x = 1.

Отже,

$$|R_n| \le \frac{1}{180n^4}\cdot 76e.$$

Узявши $n = 10$, дістаємо

$$|R_n| \le \frac{76e}{180\cdot 10^4} < 0{,}00012.$$

Розрахунки наведемо в таблиці:

Таблиця 2.3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	1,0101	1,0408	1,0942	1,1735	1,2840	1,433	1,6323	1,8965	2,2479	2,7183

Тоді за формулою (6) маємо $\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1{,}463.$

Самостійна робота: Розв’язування індивідуальних завдань

Невизначений інтеграл

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$

3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx.$

4. $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}.$

5. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{5-\sin^2 x}}dx.$

6. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$

7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

8. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$

9. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}.$

10. $\int \arcsin x dx.$

11. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

12. $\int \ln(x^2+1)dx.$

13. $\int \sin(\ln x)dx.$

14. $\int (2x+5)e^{-3x}dx.$

15. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx.$

16. $\int \frac{(8x-1)dx}{x^2-4x+1}.$

17. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

18. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

19. $\int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+3)}.$

20. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx.$

21. $\int \cos^5 x dx.$

22. $\int \sin^4 x dx.$

23. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

24. $\int \cos\frac{4}{3}x \cdot \cos 3x dx.$

25. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}.$

26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}.$

27. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx.$

28. $\int \cos^2 5x dx.$

29. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}.$

Визначений інтеграл

1. $\int\limits_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}dx.$

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

4. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

6. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

7. $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin xdx.$

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$

9. $\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx.$

10. Обчислити значення інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ за формулами прямокутників та трапецій, розбивши проміжок інтегрування на 10 рівних частин.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

11. $y=x^2+4x$, $y=x+4.$

12. $y=-x^2+9$, $y=2x+1.$

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

14. $y=\frac{\ln x}{4x}$, $y=x\ln.$

15. $y=\operatorname{tg}x$, $y=\frac{2}{3}\cos x,\quad x=0.$

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями:

16. $y^2=1-x,\ \ x=0$ навколо осі Oy.

17. $x^2-y^2=4,\ \ y=\pm 2$ навколо осі Oy.

18. $y=xe^x,\ \ y=0,\ \ x=1$ навколо осі Ox.

Невласні інтеграли

У задачах 1—13 обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

3. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

4. $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin xdx$.

5. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$.

6. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

9. $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

10. $\int\limits_{0}^{1} x\ln xdx$.

У задачах 14—18 дослідити збіжність інтегралів.

14. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$.

15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$.

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$.

17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$.

18. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Методичний програмовий засіб для контролю і корекції знань студентів з модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної»

I рівень

Блок 1

1. Знайдіть загальний вигляд первісної для функції *f*:

а) $f(x)=2-x^4$.

a. $2x-\frac{x^4}{4}+C$;

b. $2x-\frac{x^5}{5}+C$;

c. $2x-\frac{4x^3}{3}+C$.

Підказка 1. Використайте правила знаходження первісних.

Підказка 2. Постійний множник можна винести за знак первісної.

Підказка 3. Використаємо правила знаходження первісних. $f(x)$ це сума двох функцій $y=2$ і $y=-x^4$, тобто, можна скористатися правилом знаходження первісних №1(первісна суми дорівнює сумі первісних), для функції $y=2$ первісною є $y=2x$, для того щоб обчислити первісну для функції $y=-x^4$ необхідно скористатися правилом знаходження первісних №2(постійний множник можна винести за знак первісної), тобто можна винести -1, у функції $y=x^4$ первісною є функція $y=\frac{x^5}{5}$, звідси $y=-x^4$ має первісну $y=-\frac{x^5}{5}$, а функція $f(x)$ має первісну $F(x)=2x-\frac{x^5}{5}$.

Відповідь: $F(x)=2x-\frac{x^5}{5}+C$.

б) $f(x)=\frac{1}{(4-15x)^4}$.

a. $\frac{1}{45(4-15x)^3}+C$. b. $\frac{1}{4(4-15x)^3}+C$. c. $\frac{1}{45(4-15x)^3}$

Підказка 1. Якщо функція $y=g(x)$ має первісну $y=G(x)$,то функція $y=g(tx+m)$ має первісну $y=\frac{1}{t}G(tx+m)$

Підказка 2. Використаємо правило знаходження первісних №3 (якщо функція $y=g(x)$ має первісну $y=G(x)$,то функція $y=g(tx+m)$ має первісну

$y=\frac{1}{t}G(tx+m))$, тобто, $t=$ –15, $m=4$, а $g(x)=\frac{1}{x^4}$, звідси $F(x)=$

$-\frac{1}{3(4-15x)^3}\cdot(-\frac{1}{15})=\frac{1}{45(4-15x)^3}$. Відповідь: $F(x)=\frac{1}{45(4-15x)^3}+C$.

2. Знайти невизначений інтеграл

а) $\int 3\sqrt{3x+2}dx$

a. $3(3x+2)^{\frac{1}{2}}+C$ b. $\frac{2}{3}\cdot(3x+2)^{\frac{3}{2}}$ c. $\frac{2}{3}\cdot(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

Підказка 1. Використайте правила знаходження невизначеного інтеграла.
Підказка 2. Використаємо правила знаходження невизначеного інтеграла:

$$\int 3\sqrt{3x+2}dx=3\int\sqrt{3x+2}dx=\frac{2}{3\cdot 3}\cdot 3\cdot(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\cdot(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}\cdot(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C$.

3. Обчисліть інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^{2}x^4dx$.

a. $\frac{x^5}{5}$ b. $\frac{33}{5}$ c. $\frac{31}{5}$.

Підказка 1. Використайте формулу Ньютона–Лейбніца.
Підказка 2. Використаємо формулу Ньютона–Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. $\int\limits_{-1}^{2}x^4dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{2}=\frac{32}{5}+\frac{1}{5}=\frac{33}{5}$. Відповідь: $\frac{33}{5}$

Перегляньте лекцію №3.п.3

4. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^4$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

a. 0,4; b. 2; c. $\frac{1}{2}$.

Підказка 1. Фігурою є криволінійна трапеція.

Підказка 2.Фігура,що обмежена даними лініями є криволінійна трапеція і її площа дорівнює: $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{5} - (-\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$ Відповідь: 0,4.

Блок 2 Тест самоконтролю

1. Чи є функція F первісною для функції f на вказаному проміжку:

а) $F(x)=3-\sin x$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty;\ \infty)$;

б) $F(x)=5-x^4$, $f(x)=-4x^3$, $x\in(-\infty;\ \infty)$;

в) $F(x)=\cos x-4$, $f(x)=-\sin x$, $x\in(-\infty;\ \infty)$;

г) $F(x)=3x+x^{-2}$, $f(x)=\frac{1}{2x^3}+3$, $x\in(0;\ \infty)$?

Відповідь: ні, так, так, ні.

2. Чи правильно обчислені інтеграли:

а) $\int_{2}^{3}(1-x)^4 dx = 6\frac{2}{5}$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x)dx = 6$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = -6$; г) $\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx = \frac{1}{3}$;

д) $\int_{0}^{2}(x^3-x)dx = 2$?

Відповідь: ні, так, ні, так, так.

3. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$.

Відповідь:2.

4. Чи правильні рівності:

а) $\int_{0}^{1}x^3 dx = \frac{1}{4}$; б) $\int_{0}^{5}x^2 dx = 2\frac{1}{3}$;

в) $\int_{2}^{4}x^2 dx = 2x$; г) $\int_{0}^{3}5dx = \left.\frac{5x^2}{2}\right|_{0}^{3} = \frac{5}{2}(3^2-0^2) = \frac{45}{2}$

д) $\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$; е) $\int\limits_1^4 (3-2x)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)$?

Відповідь: а) так; б) ні; в) ні; г) ні; д) так; е) ні.

Блок 3 Контрольний тест Варіант 1

1. Знайдіть невизначений інтеграл :

а) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4x+1}} - 3\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{\sin^2(x-1)} + x\right)dx$;

в) $\int\left(\cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) + 2\right)dx$; г) $\int\left(\sqrt[3]{(x-3)} - 2x\right)dx$;

д) $\int\left(4x^4 + \frac{1}{x^3} - 5\right)dx$; е) $\int(3-4x)^4 dx$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^3 x^2dx$***;*** ***б)*** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} (108\sin 6x)dx$***;*** ***в)*** $\int\limits_1^2 (4x^3 + 2x)dx$***;*** ***г)*** $\int\limits_{-3\pi}^0 \cos 3x dx$**.**

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y=1-x^3$, $y=0$, $x=0$;

б) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\pi/6$, $x=\pi/3$.

Блок 3 Контрольний тест Варіант 2

1. Знайдіть невизначений інтеграл :

а) $\int\left(7x + \frac{2}{\sqrt{x-4}}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + x\right)dx$;

в) $\int\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})dx$; г) $\int\left(\sqrt[4]{(x-3)} + \cos x\right)dx$;

д) $\int\left(5x^5 - 3x^2 + \frac{1}{x^4} + 1\right)dx$; е) $\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$.

2. Обчислити інтеграли:

а) $\int_{1}^{3} 2dx$***;*** ***б)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (4\cos 2x)dx$***;*** ***в)*** $\int_{-1}^{1} (6x^3 - 5x)dx$***;*** ***г)*** $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{36}{\cos^2 2x}dx$***;***

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^4$, $y=1$;

б) $y=2\sin x$, $y=0$, $x=\pi/6$, $x=\pi/3$.

<u>ІІ. рівень</u>

Блок 1

1.Покажіть, що функції $F_1(x)=\mathrm{tg}^2 x$, $F_2(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $F_3(x)=-\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$ є первісними функції $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ на інтервалі $(-\pi/2;\ \pi/2)$. Знайдіть первісну для функції f на інтервалі $(-\pi/2;\ \pi/2)$, графік якої проходить через точку $(0;10)$.

4. Знайдіть площу фігури, обмеженою параболою $2x-4x^2$, лінією $x=-2$ і дотичною до даної параболи, проведеної через її точку з абсцисою $x=0$.

5. В якому відношенні ділиться площа квадрата параболою, що проходить через дві його сусідні вершини і дотикається однією стороною в її середині?

Блок 2 Контрольний тест

Варіант 1

1. Наведіть приклад обмеженої на інтервалі функції з необмеженою на цьому інтервалі первісною.

2. Наведіть приклад функції f і її первісної F, заданих на R таких, що $f(x)=2F(\pi/2-2x)$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $x^2- 4x+5$ і дотичною до даної параболи, проведеної через її точки с абсцисами $x=1$ і $x=3$.

4. Доведіть наступну формулу: $\int udv = uv - \int vdu$, де *u, v* –довільні функції, *dv, du* – похідні функції *v* и *u*відповідно.

5. Використовуючи вище доведену формулу знайти інтеграл $\int x \sin x dx$

Блок 3 Контрольний тест Варіант 2

1. Наведіть приклад обмеженої на R функції з обмеженою на R первісною.

2.Наведіть приклад функції f і її первісної F, заданих на R таких, що $F(x)=-f(\pi/2-x)$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y=8x-2x^2$, лінією $x=0$ і дотичною до даної параболи, проведеної через її вершину.

4. Доведіть наступну формулу: $\int udv = uv - \int vdu$, де *u, v* –довільні функції, *dv, du* – похідні функції *v* и *u*відповідно.

5. Використовуючи вище доведену формулу знайти інтеграл $\int x \sin x dx$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. Пособие.-М.:Изд-во Моск. ун-та, 1991.-352 с.
2.Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука,1985.
3.Богданов Ю.С., Кастрица О.А. Начала анализа в задачах и упражнениях: Учеб. пособие.-Мн.: Выш. шк., 1988.-174 с.
4.Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа. – М.: Просвещение, 1972, т. I-II.
5.Давидов М.О. Курс математичного аналізу:Підручник:У 3ч.Ч.1.Функції однієї змінної.-2-ге вид., перероб. і допов.– К.: Вища школа, 1990.-383 с.
6.Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н.. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973.
7.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М: Высшая школа,1980. – Ч.1.
8.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
9.Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1, 2. К.: Либідь, 1994.
10. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібн.-У трьох частинах. Ч..2.- .-2-ге вид. – Х.: Веста, 2008.-240с.
11. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах, ч.1, 2. — К.: Вища школа, 2003.
12. Задачник по курсу математического анализа. /Под. ред. Н.Я.Виленкина – М.: Просвещение, 1971, ч. I-II..
13. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М: Высш. шк.,1966.
14. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1981, ч. I.
15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982.-616 с. ч. I; 1983, ч. II.
16. Козаков В.А. Самостоятельная работа студентов и ее информационно-методическое обеспечение.-К.: Вища школа, 1990.-248с.
17. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981, т. I-II.
18. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа.-К.: Выща шк. Главное изд-во,

1988.-591 с.
19. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2ч.: Навч. посіб../Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесик, М.Я. Лященко та ін.-К.: Вища шк.,2003.-Ч.1.-462 с.
20. Минорский В.П. Сборник задач й упражнений по высшей математике - М.: Наука, 1978
21. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1973, т. I-II.
22. Овчинников П.П. Вища математика /П.П. Овчинников, Ф.П.Яремчук, В.М. Михайленко. – К.: Техніка,2000. - Ч.1.
23. Очан Ю.С. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.
24. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М: Наука,1980. - Т.1.
25. Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. Математичний аналіз: приклади і задачі. Навч. посібник.-К.: Либідь, 1995.-240 с.
26. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1967, т. I-II.
27. Шкіль М.І. Математичний аналіз:Підручник: У 2 ч. Ч.1.-3-тє вид., переробл. і допов.– К.: Вища школа, 2005.-447 с.
28. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Визначений інтеграл, функції багатьох змінних. - К.: Вища шк., 1986.-512 с.
29. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика: Підручник: У 3 кн.: Кн. 2. Диференційне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. - К.: Либідь 2004-352 с.
30. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. Навч. посібник.-К.:Вища шк., 1993.-375 с.

Навчальне видання

Укладачі: Моторіна Валентина Григорівна
Сіра Ірина Тихонівна

Вивчення змістовного модуля «Інтегральне числення функції від однієї змінної» курсу «Математичний аналіз» (опорні конспекти лекцій)

для студентів

математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ

.

Відповідальний за випуск: Сіра І.Т.

Підписано до друку 06.10.16 Формат 60x90/16
Гарнітура Times. Папір офсетний.
Обсяг 7,9 ум.друк.арк. Друк ізографічний.
Тираж 50 прим.
Надруковано у СПДФО Шевченко С.А.
Свідоцтво про державну реєстрацію№04058870Ф0070809 від 21.07.2001р.
61024, м. Харків, вул. Петровського, 34