Міністерство освіти і науки України

Харківський національний педагогічний
Університет імені Г.С.Сковороди

А.Ю.Пуди, А.І.Прокопенко, О.В. Коржова

ЕЛЕМЕНТИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ТА ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник для студентів і викладачів вищих навчальних закладів

Харків 2015

517.2
УДК 517.5
Л 12

Елементи комплексного аналізу та операційного числення / А.Ю.Пуди, А.І.Прокопенко, О.В.Коржова. – Харків.: ХНПУ імені Г.С.Сковороди, 2015. – 415с.

Зміст даного підручника поділений на глави, кожна з яких містить основні методи теорії функцій комплексної змінної, включає необхідну теоретичну інформацію, варіанти завдань для індивідуальної роботи (30 варіантів) і розв’язки типових варіантів. Підручник може бути використаний студентами і викладачами університетів фізико-математичних, фізичних, фізико-технічних факультетів для проведення практичних і самостійний робіт і контролю виконання індивідуальних завдань.

The concept of this book is divided into chapters; each of them includes main methods of the theory of functions of complex variable. It is includes necessary theoretical information, the variants for individual work (each has 30 variants) and solutions of the typical variants. This guidebook can be used by students and teachers of universities of the physics-mathematics, the physics and the physics-technical faculties during practical lessons, quiz and checking of the solutions of the individual tasks.

Рецензенти:

Л.І. Білоусова – кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики ХНПУ ім.. Г.С.Сковороди;

О.Г.Нерух – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики ХНУРЕ

Затверджено редакційно-видавницькою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди
Протокол №2 від 02.04.2015р.

З М І С Т

Частина І Комплексні числа…………………………… 3
§ 1.1. Комплексні числа та основні дії над ними…………..… 3
§ 1.2. Тригонометрична форма комплексного числа………. 11
§ 1.3. Геометрична ілюстрація комплексних чисел………… 14
Практичні заняття 1.1 …………………………… 26
§ 1.4. Геометрична ілюстрація дій над комплексними числами..............….. 29
Практичні заняття 1.2 …………………………… 35
§ 1.5. Сфера комплексних чисел………………………………………. 37
Частина ІІ Диференціальне числення функції комплексної змінної………………………………………………. 42
§ 2.1. Комплексна змінна……………………………………………… 42
Практичні заняття 2.1……………………………………. 49
§ 2.2. Область та її границя ………………………………………… 50
Практичні заняття 2.2……………………………………. 57
§ 2.3. Поняття функції комплексної змінної………………………………. 58
§ 2.4. Границя функції…………………………………………………….. 61
§ 2.5. Неперервність функції…………………………………………… 63
§ 2.6. Диференціювання функції комплексної змінної……………………. 65
2.6.1. Похідна функції……………………………………………… 65
2.6.2. Деякі властивості диференційованих функцій……………………… 71
2.6.3. Аналітичність функції…………………………………………….. 72
2.6.4. Знаходження аналітичної функції за заданою дійсною (уявною) Частиною………………………………………………………… 78
2.6.5. Геометричний зміст похідної…………………………………….. 83
Практичні заняття 2.3……………………………………. 88
§ 2.7. Елементарні трансцендентні функції………………………………… 91
2.7.1. Показникова функція . Формула Ейлера……………………………. 91
2.7.2. Тригонометричні та гіперболічні функції…………………………… 99
Практичні заняття 2.4……………………………………. 103
2.7.3. Логарифмічна функція………………………………………………….. 104
2.7.4. Степінь з довільним показником……………………………………... 107
2.7.5. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції………………… 110
Практичні заняття 2.5……………………………………. 114
Індивідуальні домашні завдання І………………………. 116
Частина ІІІ Інтегральне числення функції комплексної змінної……………………………………………. 125
§ 3.1. Інтеграл від функції комплексної змінної…………………………….. 125
3.1.1. Обчислення інтеграл від функції комплексної змінної…………… 128
§ 3.2. Інтегральна теорема Коші……………………………………………. 132
3.2.1.Невизначений інтеграл……………………………………………….. 134
3.2.2. Інтеграл у многозв’язній області…………………………………. 138
Практичні заняття 3.1……………………………………. 140
§ 3.2. Інтегральна формула Коші…………………………………………… 142
Практичні заняття 3.2…………………………………….. 152
Частина IV. Ряди……………………………………………. 153
§ 4.1. Числові ряди у комплексній області………………………………… 153
§ 4.2. Функціональні ряди…………………………………………………… 156
§ 4.3. Степеневі ряди………………………………………………………... 164
Практичні заняття 4.1……………………………………. 169
§ 4.4. Ряд Тейлора………………………………………………………… 170

§ 4.5. Ряд Лорана та сингулярні точки однозначних аналітичних функцій. 177
§ 4.6. Нулі та сингулярні точки аналітичної функції………………………. 184
§ 4.7. Поведінка функції у нескінченно віддаленій точці…………………… 189
Практичні заняття 4.2……………………………………. 202
Практичні заняття 4.3……………………………………. 203
Індивідуальні домашні завдання II……………………. 206
Частина V. Теорія лишків та їх застосування………………… 215
§ 5.1. Основні теореми про лишки………………………………………… 215
Практичні заняття 5.1……………………………………. 226
§ 5.2. Обчислення визначених інтегралів……………………………….. 228
5.2.1. Обчислення визначених інтегралів у межах від 0 до 2π від функцій раціонально виражених через $\sin x$ *і* $\cos x$ …………………………… 228
5.2.2. Обчислення інтегралів у межах від $-\infty$ до $+\infty$ від раціональних функцій……………………………………………………………… 233
5.2.3. Обчислення інтегралів у межах від $-\infty$ до $+\infty$ від добутку раціонального дробу на косинус або синус кратного аргументу……….. 236
Практичні заняття 5.2……………………………………. 244
§ 5.2.Логарифмічний лишок. Принцип аргументу…………………………… 246
Практичні заняття 5.3……………………………………. 257
Індивідуальні домашні завдання III……………………. 259
Індивідуальні домашні завдання IV ……………………. 263
Частина VI. Простіші конформні відображення …………….. 272
§ 6.1. Означення конформного відображення……………………………… 272
§ 6.2. Лінійні відображення…………………………………………….. 276
§ 6.3. Відображення функцією $w=1/z$ ……………………………………... 279
§ 6.4. Дробово-лінійна функція……………………………………………….. 286
§ 6.5.Степеневе відображення ………………………………………………… 297
§ 6.6.Показникова функція…………………………………………………… 301
§ 6.7. Функція Жуковського……………………………………………… 306
Практичні заняття 6.1……………………………………. 317
Практичні заняття 6.2……………………………………. 318
Індивідуальні домашні завдання V ……………………. 320
Частина VII. Операційне числення…………………………….. 332
§ 7.1. Зображення та оригінал……………………………………………. 332
§ 7.2. Формула обертання………………………………………………… 335
§ 7.3. Головні властивості перетворення Лапласа…………………………… 346
§ 7.4. Теореми розвинення………………………………………………… 366
§ 7.5. Таблиця властивостей перетворень…………………………………….. 375
§ 7.6. Таблиця перетворень Лапласа деяких функцій……………………… 375
Практичні заняття 7.1……………………………………. 378
Практичні заняття 7.2……………………………………. 379
Практичні заняття 7.3……………………………………. 385
§ 7.7. Звичайні диференціальні рівняння і системи………………………….. 386
§ 7.8 Розв’язання інтегральних рівнянь Вольтерра з ядрами спеціального типу ……………………………………………………………………… 391
Практичні заняття 7.4……………………………………. 394
§ 7.9. Застосування операційного числення для розрахунку електричних контурів…………………………………………………………………. 397
§ 7.10.Рівняння з частинними похідними………………………………… 402
Практичні заняття 7.5……………………………………. 406
Індивідуальні домашні завдання VI ……………………. 408

Частина I. Комплексні числа

§ 1.1. Комплексні числа та основні дії над ними

Означення 1. ***Комплексним числом називають вираз виду***

$$z = x + iy \qquad (1)$$

де** "x" **і** "y" **дійсні числа а символ** "i" **називають уявною одиницею, квадрат якої дорівнює** -1 **(**$i^2 = -1$**).

Дійсні числа x і y *називають дійсною і уявною частинами* комплексного числа z і позначаються символічно

$$x = \mathrm{Re}(x+iy) \qquad y = \mathrm{Im}(x+iy) \qquad (2)$$

Якщо $x = 0$, тоді число $z = 0 + iy = iy$ *називають чисто уявним комплексним числом*; якщо $y = 0$ тоді $z = x + i \cdot 0 = x$ - *дійсне число*.

Означення 2. ***Два комплексних числа*** $z_1 = x_1 + iy_1$ ***і*** $z_2 = x_2 + iy_2$ ***рівні***

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \qquad (3)$$

тоді і тільки тоді якщо дійсні і уявні частини рівні, тобто

$$x_1 = x_2 \ \textbf{\textit{i}}\ y_1 = y_2, \qquad (4)$$

У символічній формі має вид

$$[z_1 = z_2] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2, \\ \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Означення 3. ***Якщо*** $x_2 = x_1$ ***і*** $y_2 = -y_1$***, то комплексне число*** $x_2 + iy_2 = x_1 - iy_1$ ***є комплексно-спряженим з комплексним числом*** $z_1 = x_1 + iy_1$ ***і позначається символом*** $\overline{z_1} = \overline{x_1 + iy_1}$***. Отже, якщо*** $z = x + iy$ ***тоді***

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy \qquad (6)$$

Два комплексних числа $x + iy$ ***і*** $x - iy$ *які мають протилежні знаки лише уявні частини є комплексно-спряжені.*

1.1.1. Дії над комплексними числами

1⁰. Сума комплексних чисел

Означення 4. ***Сумою*** z_1+z_2 ***двох комплексних чисел*** $z_1=x_1+iy_1$ ***і*** $z_2=x_2+iy_2$ ***називають комплексне число***

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \qquad (7)$$

Тобто, щоб знайти суму двох комплексних чисел необхідно знайти суму їх дійсних і уявних частин.

Приймаючи до уваги наведене означення випливають наступні закони додавання:

1) Комутативний закон $z_1+z_2=z_2+z_1$;

2) Асоціативний закон $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

2⁰. Різниця комплексних чисел

Означення 5. ***Різницею двох комплексних чисел*** $z_1=x_1+iy_1$ ***і*** $z_2=x_2+iy_2$ ***називається таке комплексне число*** z***, що*** $z+z_2=z_1$***. Символічно різниця*** z_1 ***і*** z_2 ***записується*** z_1-z_2**.** Очевидно

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \qquad (8)$$

3⁰. Множення комплексних чисел

Означення 6. ***Добутком двох комплексних чисел*** $z_1=x_1+iy_1$ ***і*** $z_2=x_2+iy_2$ ***називається комплексне число виду***

$$z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \qquad (9)$$

З наведеного означення випливають наступні закони множення:

1) Комутативний закон $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;

2) Асоціативний закон $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$;

3 Дистрибутивний закон (відносно додавання)

$$(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1z_3+z_2z_3$$

Зауваження 1. *Якщо* $x_1 = x_2 = 0$ *і* $y_1 = y_2 = 1$, *тоді з означення добутку отримаємо:*

$$i \cdot i = i^2 = -1 \qquad (10)$$

Отже, квадрат уявної одиниці дорівнює -1**.**

Звідси випливає, що формулу (9) *можна отримати множенням чисел* $x_1 + iy_1$ *і* $x_2 + iy_2$ *використовуючи правило множення біномів, і, що* $i \cdot i = -1$.

Зауваження 2. *Із 9) і 10) очевидно, що комплексно спряжені числа* $x + iy$ *і* $x - iy$ *задовольняють наступну рівність:*

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \qquad (11)$$

Тобто, добуток комплексно-спряжених чисел дорівнює сумі квадратів дійсної та уявної частин.

4⁰. Частка комплексних чисел

Означення 7. ***При*** $z_2 \neq 0$ ***існує таке число*** $z = x + iy$***, що***

$$z_2 \cdot z = z_1$$

Тобто, x і y задовольняють рівності:

$$(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$$

або

$$(xx_2 - yy_2) + i(xy_2 + yx_2) = x_1 + iy_1$$

і

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1 \end{cases} \qquad (12)$$

Ця система рівнянь відносно невідомих змінних x і y має наступний розв'язок

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

і нарешті:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (13)$$

Ділення комплексних чисел відбувається за таким правилом: *для того щоб поділити* $x_1 + iy_1$ *на* $x_2 + iy_2 \neq 0$ *необхідно помножити ділене і дільник на комплексно-спряжене дільника (тобто, на* $x_2 - iy_2$*). Виконуючи відповідні дії одержимо частку комплексних чисел:*

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауваження 3. *Означені таким чином комплексні числа та алгебраїчні дії з комплексними числами перетворюють множину комплексних чисел в поле комплексних чисел, яке позначають* $\mathbb{C}$ *.*

Зауваження 4. *Неважко переконатися, що комплексні числа у формулах їх сум, добутку, частки можна міняти на їм спряжені, тоді результат буде комплексно спряженим числом.*

5^0. Піднесення комплексного числа до натурального степеня

Означення 8. ***Добуток*** n ***рівних комплексних чисел називають*** $n-$***им степенем комплексного числа*** z ***і позначають символом*** z^n**.**

$$w = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n} = z^n \quad (14)$$

Для всяких $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ та для всяких z маємо співвідношення $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$. Ця рівність природно приводить до означень $z^0 = 1$; $\frac{1}{z^m} = z^{-m}$.

Піднесення до $n-$го степеня комплексного числа $z=x+iy$ зводиться до піднесення до $n-$го степеня двочлена. При застосуванні формули бінома Ньютона виникає потреба піднесення до $n-$го степеня уявної одиниці.

Нехай $z=i$, далі $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$, $i^6=i^4\cdot i^2=-1$, $i^7=i^4\cdot i^3=-i$, $i^8=i^4\cdot i^4=1$, $i^9=i^{4\cdot 2}\cdot i=i$, і так далі. Тоді для $k=0,1,2,3,\ldots$ матимемо

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\ i^{4k+4}=1.$$

Отже,

$$\omega=i^n=i^{4k+p}=i^p,$$

де $k\in$, $p=\overline{(1,4)}$

Таким чином, *для того щоб піднести уявну одиницю до $n-$го степеня необхідно виділити з n доданок, кратний чотирьом, тобто $n=4k+p$, де $p=\overline{(1,4)}$*

Приклад. *Обчислити $w=i^{377}$.*

► Тут $n=377=4\cdot 94+1$.

Отже, $w=i^{377}=i^{4\cdot 94+1}=i^{4\cdot 94}\cdot i^1=1^{94}\cdot i=i$. ◄

6^0. Здобуття кореня з комплексного числа

Означення 9. ***$n-$им коренем ($n\in N$) з комплексного числа z називають таку множину комплексних чисел, що для кожного її елемента w, $w^n=z$ і позначають цю множину символом $w=\sqrt[n]{z}$.***

Рівність $i^2=-1$ може бути записана у вигляді $i=\sqrt{-1}$.

Приклад 1. *Знайдемо квадратний корінь з комплексного числа $x+iy$.*

► З означення 9 маємо:

$$w=\sqrt{x+iy}=u+iv \qquad (1^*)$$

або

$$x+iy=(u+iv)^2$$

З означення рівності комплексних чисел випливає:

$$\left.\begin{aligned} u^2 - v^2 &= x \\ 2uv &= y \end{aligned}\right\} \qquad (2^*)$$

Після піднесення до квадрату обох частин рівнянь (2*) і додавання маємо

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = x^2 + y^2$$

або

$$(u^2 + v^2)^2 = x^2 + y^2,$$

звідси

$$u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Об'єднавши перше рівняння системи (2*) і останньою рівністю отримаємо:

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \qquad v^2 = \frac{1}{2}\left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

або

$$u = \pm\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \qquad u = \pm\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

В останніх формулах під квадратним коренем розуміють його арифметичне значення і знак добутку uv співпадає зі знаком y: $sign(u \cdot v) = sign\ y$ ◄

Приклад 2. *Знайти* $w = \sqrt{21 - 20i}$.

► Оскільки, $x = 21$ і $y = -20$ то $\sqrt{x^2 + y^2} =$ $= \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = 29$. Тоді

$$u^2 = \frac{1}{2}(21 + 29) = 25, \qquad v^2 = \frac{1}{2}(-21 + 29) = 4,$$

Звідси, $u = \pm 5$ і $v = \pm 2$. Знак $sign(y) = sign(-20) = -1$ й.

Отже, $w = \sqrt{21 - 20i} = \pm(5 - 2i)$. ◄

Приклад 3. *Розв'язати рівняння*

$$z^2 + (6 + i)z + 5 + 5i = 0.$$

► Легко показати, що формула знаходження коренів квадратного рівняння у комплексній області співпадає з формулою в дійсній області, отже:

$$z_{1,2} = \frac{-(6+i) \pm \sqrt{(6+i)^2 - 4(5+5i)}}{2} = \frac{-6-i \pm \sqrt{15-8i}}{2}$$

Нам необхідно обчислити $w = \sqrt{15-8i}$, $x = 15$, $y = -8$;

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$;

$u^2 = \frac{1}{2}(15+17) = 16$ $\qquad v^2 = \frac{1}{2}(-15+17) = 1$;

$u = \pm 4$, $\quad v = \pm 1$; оскільки $sign(y) = sign(-8) = -1$, то $w = \sqrt{15-8i} = \pm(4-i)$. Отже, $z_{1,2} = \dfrac{-6-i \pm (4-i)}{2}$.

Нарешті

$$z_1 = -1-i; \quad z_2 = -5. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Нехай* $z = x + y$. *Записати вираз* $w = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{\bar{z}^2}$ *у алгебраїчній формі* .

► $$w = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\left(\bar{z}\right)^2} = \frac{\left(\bar{z}\right)^2}{z^2 \cdot \left(\bar{z}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\bar{z}\right)^2 \cdot z^2} = = \frac{\left(\bar{z}\right)^2 + z^2}{z^2 \cdot \left(\bar{z}\right)^2} =$$

$$= \frac{(x-iy)^2 + (x+iy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \blacktriangleleft$$

§ 1.2. Тригонометрична форма комплексного числа

У попередньому параграфі ми розглянули загальну форму запису комплексного числа $z = x + iy$ яку ***називають алгебраїчною формою.*** До так званої тригонометричної форми приводять наступні перетворення:

$$x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Оскільки

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<1 \text{ і } \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<1,$$

то можна покласти

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho}=\cos\varphi, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho}=\sin\varphi$$

Тоді отримаємо

$$x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Останній вираз ***називається тригонометричною формою комплексного числа*** $z=x+iy$, ***кут*** φ ***- його аргументом,*** $\rho=|z|$ ***- його модулем***. Модуль числа z визначається формулою

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Аргумент φ комплексного числа z позначають

$$\varphi=Argz$$

Для кожного числа z він визначається співвідношеннями

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}, \qquad \sin\varphi=\frac{y}{\rho}$$

але не однозначно, а з точністю до доданка $2k\pi$, де k є ціле число. Аргумент числа $z=0$ слід вважати не визначеним. Виключаючи цей випадок, для всякого комплексного числа z існує єдине значення φ, яке задовольняє нерівності

$$-\pi<\varphi\le\pi.$$

Його називають головним значенням аргументу і позначають символом $\arg z$**.**

Якщо прийняти до уваги, що

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x},$$

то для $\arg z$ одержимо формулу

$$\arg z = 2\arctan\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Ця формула справедлива для всіх комплексних чисел z окрім дійсних від'ємних і нуля.

Легко впевнитись у справедливості наступних формул:

$$\arg z = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x}, & \textit{якщо} \quad x>0 \;\; i \;\; y>0; \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\pi, & \textit{якщо} \quad x<0 \;\; i \;\; y\ge 0; \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x}-\pi, & \textit{якщо} \quad x<0 \;\; i \;\; y<0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \textit{якщо} \quad x=0 \;\; i \;\; y>0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \textit{якщо} \quad x=0 \;\; i \;\; y<0. \end{cases}$$

Очевидно, що головне значення аргументів спряжених чисел $x+iy$ *і* $x-iy$ *рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком.*

Зауваження. *Якщо комплексні числа рівні, то їх модулі рівні, а аргументи відрізняються на* $2k\pi$, *де* k *- ціле число.*

Приклад. *Записати у тригонометричній формі комплексне число* $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, *якщо* $\pi\le\alpha\le 2\pi$.

► $\rho=\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1+\cos\alpha)}=$

$$=\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}=-2\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{1+\cos\alpha}{-2\cos\dfrac{\alpha}{2}}=-\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right);$$

$$\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{-2\cos\dfrac{\alpha}{2}}=-\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\pi\right)$$

Отже,

$$z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = -2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \pi\right)\right). \blacktriangleleft$$

§ 1.3. Геометрична ілюстрація комплексних чисел

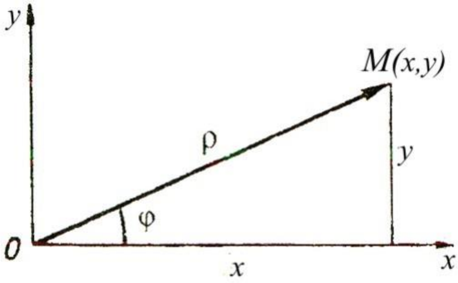


Рис. 1

Комплексне число $z = x + iy$ визначається впорядкованою парою (x, y) дійсних чисел. На площині, віднесеної до прямокутної системи координат, цим числам відповідає єдина цілком визначена точка $M(x, y)$ з координатами x і y (Рис. 1); і навпаки, всяка точка $M(x, y)$ на площині Oxy є геометричним зображенням єдиного комплексного числа $z = x + iy$.

Але якщо кожній точці $M(x, y)$ відповідає комплексне число $z = x + iy$, тоді у випадку коли точка лежить на вісі Ox, що відповідає дійсному числу ($y = 0$). Але якщо точка лежить на вісі Oy, що представляє чисто уявне комплексне число, так як $x = 0$. Отже, якщо комплексне число представлено на площині, тоді вісь Oy ***називається уявною віссю або віссю уявних комплексних чисел,*** а вісь Ox ***- дійсною віссю (вісь дійсних чисел).***

З'єднуючи точку $M(x, y)$ з початком координат, ми отримаємо цілком визначений радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$, а кожному радіус-вектору площини Oxy, відповідає єдина точка (її кінець).

Тому множину $\mathbb{C}$ ототожнюють з множиною точок площини Oxy або множиною радіусів-векторів цих точок

Саму ж площину називають комплексною і також називають □ . Корисним є подання комплексного числа, як точки або її радіуса-вектора площини, віднесеної до полярних координат $O\rho\varphi$.

Якщо $O-$ полюс, $Ox-$ полярна вісь, взаємна орієнтація Ox, Oy - права (*Рис. 1*), $\rho \geq 0$, $\varphi \in$ □ , і

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,\ \rho > 0$$

є відомими формулами зв'язку полярних і прямокутних координат. Тоді для $z \neq 0$

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{15}$$

Вираз у правій частині *називається полярною формою комплексного числа* $z = x + iy$.

Величини φ і ρ виражаються через x і y, формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{16}$$

Полярний радіус ρ *співпадає з модулем комплексного числа* $z = x + iy$ і позначається символом $|z| = |x + iy| = \rho$, а *кут* φ *є його аргумент* і позначається символом $Argz$. Дедалі, ми будемо розглядати комплексне число $z = x + iy$, як вектор $\overrightarrow{OM}$ на площині.

Аргумент комплексного числа, кут φ, розглядається додатнім, якщо розглядати від додатного напрямку вісі x проти часової стрілки, і від'ємним у протилежному напрямку. Аргумент φ очевидно не визначається однозначно з точністю до будь якого доданка кратного 2π. Тепер ми можемо записати загальну формулу для знаходження аргументу будь якого комплексного числа у вигляді:

$$\varphi = Argz = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + 2k\pi, & \textit{якщо } z \in I \textit{ і } IV \textit{ квадрантам,} \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi, & \textit{якщо } z \in II \textit{ і } III \textit{ квадрантам.} \end{cases}$$

1.3.1. Основні арифметичні операції з комплексними числами у тригонометричній формі

Нехай $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

1^0. *Добуток цих комплексних чисел дорівнює*

: $$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Отже, *модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, а аргумент добутку дорівнюється сумі аргументів множників:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \qquad Arg(z_1\cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2$$

Для добутку n комплексних чисел маємо наступні співвідношення:

$$\left|\prod_{k=1}^{k=n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{k=n}|z_k| \qquad Arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Argz_k$$

2^0. *Частка* $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, *комплексних чисел дорівнює:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Отже, *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки двох комплексних чисел дорівнює різниці аргументів:.*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2$$

3^0. *Помноживши комплексне число* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *само на себе* n *разів , отримаємо:*

$$\left(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (17)$$

Отже, *модуль натурального степеня комплексного числа дорівнює степеню модуля, а аргумент - добутку показника степеня на аргумент комплексного числа:*

$$|z^n| = |z|^n \qquad Arg\, z^n = n \cdot Arg\, z$$

Очевидно, що співвідношення (17) виконуються для всяких n. Якщо у формулі (17) обидві частини рівності скоротити на $|z|^n$, ми одержимо формулу Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (18)$$

Зауваження 1. *Використовуючи формулу Ейлера*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Комплексне число $z = x + iy$ *можна записати наступним чином*

$$z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) = |z|\cdot e^{i\arg z} \qquad (19)$$

Цей вираз ***називається показниковою формою комплексного числа.*** Формулу Ейлера будемо розглядати як показникову функцію з чисто уявним показником.

Приклад 1. *Записати комплексні числа* $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 1 - i$ *у полярній системі координат і у показниковій формі*

► Оскільки $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{2}$ і $\arg z_1 = \pi/4$, $\arg z_2 = 3\pi/4$, $\arg z_3 = 5\pi/4$, $\arg z_4 = 7\pi/4$ або $\arg z_4 = -\pi/4$.

То $\quad z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

$$z_3 = -1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}},$$

$$z_4 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

або $\quad z_4 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. ◄

Зауваження 2. $e^{i2k\pi} = 1$**;** $e^{i(2k+1)\pi} = -1$ або $e^{in\pi} = (-1)^n$**;** $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$**,** $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ *або* $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$**,** $e^{i\pi} = -1$**,** $e^{i2\pi} = 1$**.**

Приклад 2. *Обчислити* $w = z^{158} + z^{152} + \dfrac{2}{z^{122}}$, *якщо* $z + \dfrac{1}{z} = 1$.

► З умови $z + \dfrac{1}{z} = 1$ маємо $z^2 - z + 1 = 0$,

$z_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$, $z_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ належить першому квадранту площини, $z_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ - четвертому квадранту. Оскільки ці корені комплексно спряжені, то

$$|z_1| = |z_2| = 1, \qquad \arg z_1 = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arg z_2 = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

отже,

$$z_1 = |z_1| e^{i\arg z_1} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z_2 = |z_2| e^{i\arg z_2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Далі, $w_1 = z_1^{158} + z_1^{152} + \dfrac{2}{z_1^{132}}$.

Тут

$$w_{11} = (z_1)^{158} = e^{i\pi\frac{158}{3}} = = e^{53\pi i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$= e^{i\pi\left(53 - \frac{1}{3}\right)} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_{11} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$w_{12} = (z_1)^{152} = e^{i\pi\frac{152}{3}} = e^{i\pi\left(51 - \frac{1}{3}\right)} = e^{51\pi i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$w_{12} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_{13} = 2\cdot\left(z_1\right)^{-122} = 2\cdot e^{-i\pi\frac{122}{3}} = 2e^{-i\pi\left(41-\frac{1}{3}\right)} = 2e^{-41\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i} =$$

$$= -2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$w_{13} = -1 - i\sqrt{3}$$

Отже, $w_1 = w_{11} + w_{12} + w_{13}$, або

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - i\sqrt{3} = -2$$

$$w_2 = z_2^{158} + z_2^{152} + \frac{2}{z_2^{132}}.\ \textit{Тут}\ \ w_{21} = \left(z_2\right)^{158} = e^{-i\pi\frac{158}{3}} =$$

$$= e^{-i\pi\left(53-\frac{1}{3}\right)} = e^{-53\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_{21} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$w_{22} = \left(z_2\right)^{152} = e^{-i\pi\frac{152}{3}} = e^{-i\pi\left(51-\frac{1}{3}\right)} = e^{-51\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$w_{22} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_{23} = 2\cdot\left(z_2\right)^{-122} = 2\cdot e^{i\pi\frac{122}{3}} = 2\cdot e^{i\pi\left(41-\frac{1}{3}\right)} = 2\cdot e^{41\pi i}\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} =$$

$$= -2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$w_{13} = -1 + i\sqrt{3}$$

Нарешті, $w_1 = w_{11} + w_{12} + w_{13}$, або

$$w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \; -1 + i\sqrt{3} \; = -2$$

Отже $w_2 = -2$ ◄

Приклад 3. *Обчислити* $w = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{60}$.

► Тут $w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{60} = \frac{w_1}{w_2}$. $w_1 = (1+i\sqrt{3})^{60}$;

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ належить першому квадранту, тоді

$$|z_1| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2, \qquad \arg z_1 = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Отже, $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, і

$$w_1 = \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{60} = 2^{60} \cdot e^{20\pi i} = 2^{60}; \; w_1 = 2^{60},$$

$z_2 = 1 + i$, $\qquad$ z_2 належить першому квадранту, тоді

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \; w_2 = (1+i)^{60}; w_2 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{60} =$$

$$= 2^{30} \cdot e^{15\pi i} = -2^{30}; \; w_2 = -2^{30}. \; w = \frac{2^{60}}{-2^{30}} = -2^{30}.$$ ◄

Приклад 4. *Виразити* $\sin 5\alpha$ *через* $\sin\alpha$ *і* $\cos\alpha$.

► Розглянемо комплексне число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

За формулою Муавра

$$z^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha$$

З другого боку за формулою бінома Ньютона, одержимо:

$$z^5 = \cos^5\alpha + 5i\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha +$$
$$-10i\cos^2\alpha\sin^3 x + 5\cos\alpha\sin^4\alpha + i\sin^5\alpha =$$
$$= \cos^5\alpha \; - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha \; + 5\cos\alpha\sin^4\alpha +$$
$$+ i(5\cos^4\alpha\sin\alpha \; - 10\cos^2\alpha\sin^3 x + \sin^5\alpha).$$

З означення рівності комплексних чисел, випливає

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$$

і також

$$\sin 5\alpha = +5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3 x + \sin^5\alpha . ◄$$

4^0. *Корінь $n-$ого степеня з комплексного числа.*

► За означенням ***9*** (добування кореня $n-$ого степеня з комплексного числа), одержимо

$$w^n = z \tag{20}$$

Комплексні числа w і z можна записати у тригонометричній формі, тобто

$$w = |w|(\cos argw + i\sin argw) \tag{21}$$

і

$$z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) \tag{22}$$

Підставляємо (21) і (22) у (20) і за формулою Муавра, отримаємо

$$|w|^n(\cos nargw + i\sin nargw) = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z)$$

З означення рівності комплексних чисел, маємо:

$$|w|^n = |z| \quad \text{звідси} \quad |w| = \sqrt[n]{|z|} \tag{23}$$

$$n\arg w - \arg z = 2k\pi \;\text{ або }\; \arg w = \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \tag{24}$$

Отже, з урахуванням (23), (24) і (21), випливає

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \tag{25}$$

де n ціле число, яке більше одиниці; а $\sqrt[n]{|z|}$ - арифметичне (додатне) значення кореня з додатного числа $|z|$; $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Але $n-$ий корінь має тільки n різних значень. Дійсно

при $k = 0$ $w_1 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\sin\frac{\arg z}{n}\right),$

при $k = n$

$$w_{n+1} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + 2\pi + i\sin\frac{\arg z}{n} + 2\pi\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\sin\frac{\arg z}{n}\right).$$

Отже $w_1 = w_{n+1}$. Тому, достатньо покласти $k = \left(\overline{0,(n-1)}\right)$ і ми отримаємо n різних значень кореня.

Таким чином, $n -$ ***ий корінь з комплексного числа має*** n ***різних значень.***

Зауваження. *$n -$ ий корінь з дійсного числа A, який не дорівнюється нулю, також має n значень, так як дійсне число є спеціальний випадок комплексного числа і може бути представлений у тригонометричній формі.*

$$A = A(\cos 0 + i\sin 0), \qquad \text{якщо } A > 0\,;$$

$$A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi), \qquad \text{якщо } A < 0\,.$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad \text{якщо } A > 0$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right), \text{ якщо } A < 0$$

Приклад 5. *Розв'язати рівняння*

$$(x+i)^n + (x-i)^n = 0,$$

де $n \in \mathbb{N}$ *і* $n > 1$.

► Оскільки $x \neq i$, то це рівняння буде еквівалентне наступному рівнянню

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = -1$$

Отже

$$\frac{x+i}{x-i} = \sqrt[n]{-1}\,,$$

або

$$\frac{x+i}{x-i}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}=\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,$$

де $k=\overline{0,(n-1)}$

Останній вираз можна записати у вигляді $\frac{x+i}{x-i}-1=\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi-1$

або

$$\frac{2i}{x-i}=2i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-2\sin^2\frac{2k+1}{2n}\pi=$$

$$=2i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$$

$$x-i=\frac{1}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\cdot\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}$$

$$x-i=\frac{\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}$$

$x-i=\cot\frac{2k+1}{2n}\pi-i$. Нарешті, $x=\cot\frac{2k+1}{2n}\pi$. ◄

Приклад 6. *Обчислити корені* $w=\sqrt[3]{27i^5}$.

► Так як $i^5=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$,

$$w=\sqrt[3]{27i^5}=\sqrt[3]{27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=3\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)$$

$$=3\left(\cos\frac{4k+1}{6}\pi+i\sin\frac{4k+1}{6}\pi\right)$$

Надаючи k послідовно значення $k=0,1,2$ отримаємо:

$$w_1=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$$

$$w_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right),$$

$$w_3=3\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-3i\ .\ ◄$$

Example 7. *Знайти наступні суми*

$$s_n=1+\frac{\sin x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}+\frac{\sin 3x}{\sin^3 x}+\ldots+\frac{\sin nx}{\sin^n x}$$

$$\sigma_n=1+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}+\frac{\cos 3x}{\sin^3 x}+\ldots+\frac{\cos nx}{\sin^n x}$$

► Щоб знайти ці суми розглянемо наступний вираз

$$\sigma_n+i(s_n-1)=1+\frac{e^{ix}}{\sin x}+\frac{e^{2ix}}{\sin^2 x}+\frac{e^{3ix}}{\sin^3 x}+\ldots+\frac{e^{nix}}{\sin^n x}=$$

$$=1+\frac{e^{ix}}{\sin x}+\left(\frac{e^{ix}}{\sin x}\right)^2+\left(\frac{e^{ix}}{\sin x}\right)^3+\ldots+\left(\frac{e^{ix}}{\sin x}\right)^n$$

Використовуючи формулу суми геометричної прогресії, отримаємо:

$$\sigma_n+i(s_n-1)=\frac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\sin x}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\sin x}}=\frac{\sin^{n+1}x-e^{ix(n+1)}}{\sin^n x\left(\sin x-e^{ix}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^{n+1}x-\cos(n+1)x-i\sin(n+1)x}{\sin^n x\left(\sin x-\cos x-i\sin x\right)}=$$

$$=\frac{\sin^{n+2}x-\cos(n+1)x\sin nx-\sin^{n+1}x\cos x+\cos nx}{\sin^n x\left(1+\sin^2 x-\sin 2x\right)}+$$

$$+i\,\frac{\sin^{n+2}x-\sin(n+1)x\sin x+\sin nx}{\sin^n x\left(1+\sin^2 x-\sin 2x\right)}$$

З рівності комплексних виразів випливає за означенням рівність їх дійсних і уявних частин відповідно:

$$\sigma_n = \frac{\sin^{n+2} x - \sin^{n+1} x \cos x - \cos(n+1)x \sin nx + \cos nx}{\sin^n x\left(1+\sin^2 x - \sin 2x\right)},$$

$$s_n - 1 = \frac{\sin^{n+2} x - \sin(n+1)x \sin x + \sin nx}{\sin^n x\left(1+\sin^2 x - \sin 2x\right)}.$$

або

$$s_n = \frac{\sin^n x + 2\sin^{n+2} x - 2\sin^{n+1} x \cos x - \sin(n+1)x \sin x + \sin nx}{\sin^n x\left(1+\sin^2 x - \sin 2x\right)} \blacktriangleleft$$

Приклад 8. *Знайти розв'язок рівняння*

$$(z+a)^n = z^n$$

і показати, що він лежить на лінії яка паралельна уявній вісі, $a \neq 0$ *і* $a \in \square$.

► Зауважимо, що якщо $a \neq 0$ то корені цього рівняння будуть деякі $z \in \square$. $z = 0$ не належить множені комплексних коренів цього рівняння і

$$(z+a)^n = z^n \;\Rightarrow\; \left(\frac{z+a}{z}\right)^n = 1 \qquad (1^*)$$

Оскільки корінь $n-$го степеня можна записати у вигляді

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = \overline{0, (n-1)}$$

то рівняння (1*) має $(n-1)$ розв'язків z_k, $\left(k = \overline{1, (n-1)}\right)$.

$$1 + \frac{a}{z_k} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; \;\; \frac{a}{z_k} = -1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

або

$$z_k = -\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right)},\;\; z_k = -\frac{a}{2}\cdot\left(1 + i\cot\frac{k\pi}{n}\right)$$

Якщо $a \in \mathbb{R}$ (тобто $\operatorname{Im} a = 0$), тоді розв’язки будуть лежати на прямій $x = -\dfrac{a}{2}$, яка паралельна уявній вісі.◄

Практичні заняття – 1.1

1. *Довести наступні співвідношення*

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *; b)* $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ *;*

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ *; d)* $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ *; e)* $\overline{\overline{z_1}} + \overline{\overline{z_2}} = z_1 + z_2$.

2. *Довести, що для довільних* $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ *виконується рівність*

$$z_1 \cdot \operatorname{Im}\left(\overline{z_2} \cdot z_3\right) + z_2 \cdot \operatorname{Im}\left(\overline{z_3} \cdot z_1\right) + z_3 \cdot \operatorname{Im}\left(\overline{z_1} \cdot z_2\right) = 0.$$

3. *Нехай* $z \neq -1$. *Довести, що*

a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$*; b)* $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$.

4. *Знайти*

$$\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)\right]\cdot\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^4\right]\cdot\ldots\cdot\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right]$$

5. *Спростити вирази*

a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + ix}{1 - i\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$ *; b)* $\dfrac{z^2 - iz - 1}{2iz}$, *якщо* $z = e^{i\alpha}$.

6. *Записати у алгебраїчній формі комплексне число*

$$z = \frac{1}{(a+ib)^2} + \frac{1}{(a-ib)^2}.$$

7. *Знайти дійсні розв’язки рівнянь:*

a) $(3x - i)(2+i) + (x - iy)(1+2i) = 5 + 6i$ *;*

b) $(x - iy)(a - ib) = i^5$, *тут* a *і* b *- дійсні числа,* $|a| \neq |b|$ *;*

c) $\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$, *де* $z = x + iy$.

8. *Виразити* x *і* y *через* u *і* v, *якщо*

$$\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{u+iv}=1,$$

де (x, y, u, v) - *дійсні числа.*

9. *Обчислити:*

$$w=\frac{1+3i^{37}}{2+5i^{67}}\text{;}\ w=\frac{2+i^{55}}{2+5i^{63}},\ w=\frac{2+i^{49}}{\left(1+i\right)^{4}+5i^{33}}\text{;}$$

$$w=\frac{2+i^{89}}{(1+i)^{5}+2i^{21}},\ w=\frac{2+3i^{89}}{2i^{25}}.$$

10. *Довести, що не існує такого значення* m $(m\in\square)$, *що комплексне число* $\log_2(m^2-13m+44)-2+i\sqrt{\log_2 m-3}$ *може бути чисто уявним.*

11. *Для яких дійсних* x *і* y *комплексні числа* $\log(1+x\cos y)+i4^{x}$ *та* $y+i\left(2^{x+1}-3\right)$ *є взаємно спряженими?*

12. *Довести тотожність*

$$\left|z_1-z_2\right|^2+\left|z_1+z_2\right|^2=2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)$$

13. *В які вектори перетворюються:*

a) *вектор* $z=-\sqrt{3}+3i$ *після повороту на* 90^{0} ?

b) *вектор* $z=-\sqrt{3}-i$ *після повороту на* 120^{0} ?

14. *Знайти кут на який треба повернути*

a) *вектор* $z_1=4-3i$, *щоб одержати вектор* $z_2=-\frac{5}{\sqrt{2}}+i\frac{5}{\sqrt{2}}$;

b) *вектор* $z_1=3\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$ *щоб отримати вектор* $z_2=-5+i$.

15. *Записати в тригонометричній і показниковій формі наступні комплексні числа;*

a) $z=1+i\tan\alpha$, *where* $-\pi<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$;

b), $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ *if* $0\le\alpha\le\pi/2$ *;*

c) $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha$ *, if* $0\le\alpha\le\pi/2$ *;*

d) $z=\cos\alpha+i(1+\sin\alpha)$ *, if* $0\le\alpha\le\pi/2$ *;*

e) $z=\sin\alpha+i(1+\cos\alpha)$ *, if* $0\le\alpha\le\pi/2$ *.*

16. *Записати в тригонометричній формі комплексне число* $z=(1-\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$ *.*

17. *Довести рівності:*

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^n C_n^{2k}=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\,;\quad \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^n C_n^{2k+1}=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\,.$$

(Тут $\left[\dfrac{n}{2}\right]$*, є цілою частиною числа* $\dfrac{n}{2}$*,* $n\in\mathbb{N}$ *)*

<u>Вказівка.</u> *При розкладі* $(1+i)^n$*. скористатися формулою Муавра.*

18. *Нехай* z_1 *,* z_2 *,* z_3 *є вершинами трикутника сторони якого за вказаного порядку вершин обходять в додатному напрямку. Довести, що площу трикутника* S *можна обчислити, користуючись однією з наступних формул:*

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{z_1}\cdot z_2+\overline{z_2}\cdot z_3+\overline{z_3}\cdot z_1\right);$$

$$S=\frac{i}{2}\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1\\ z_2 & \overline{z_2} & 1\\ z_3 & \overline{z_3} & 1\end{vmatrix}$$

19. *Довести, що* z_1*,* z_2*,* z_3 *лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, якщо*

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1\\ z_2 & \overline{z_2} & 1\\ z_3 & \overline{z_3} & 1\end{vmatrix}=0\,.$$

Використовуючи цей результат а) знайти точку z^* *симетричну точці* z *відносно прямої яка проходить через* *точки* z_1 *і* z_2*; b) записати рівняння прямої, яка проходить через точки* z_1 *і* z_2.

§ 1.4. Геометрична ілюстрація дій над комплексними числами

1.4.1. Геометрична ілюстрація суми двох комплексних чисел

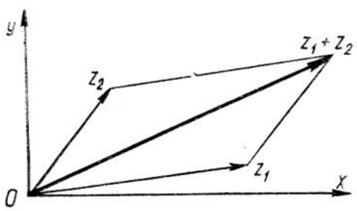


Рис. 2

Сумою двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ є комплексне число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. $(x_1 + x_2)$ і $(y_1 + y_2)$ проекції вектора $z = z_1 + z_2$ на координатні вісі Ox і Oy відповідно, дорівнює сумі відповідних проекцій векторів z_1 *і* z_2*, а це означає, що вектор* $z_1 + z_2$ комплексної площини $\mathbb{C}$ будується за правилом паралелограма. (*Рис. 2*)

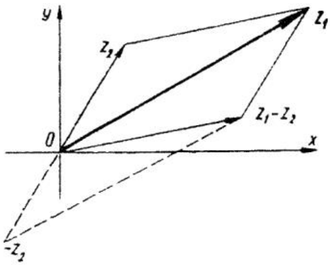


Рис. 3

1.4.2. Геометрична ілюстрація різниці двох комплексних чисел

Різниця $z = z_1 - z_2$ комплексних чисел z_1 і z_2 *є вектор - направленою діагоналлю паралелограма, побудованого на* z_1, $-z_2$. (*Рис. 3*)

1.4.3. *Геометрична ілюстрація добутку двох комплексних чисел*

Щоб побудувати вектор $\overrightarrow{OM}$, (*Рис. 4*) який відповідає *добутку векторів* $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *та* $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *ми повинні побудувати вектори* $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{O1}$ які відповідають числам z_1, z_2 і 1. Побудуємо трикутник ΔOM_1M, подібний трикутнику $\Delta O1M_2$ з відповідними сторонами OM_1 і $O1$. У цьому випадку $\overrightarrow{OM}$ є зображенням вектора $z_1 \cdot z_2$. Справді, вектор $\overrightarrow{OM}$ має аргументом $\varphi = \angle LOM = \varphi_1 + \varphi_2$, а з подібності трикутників $\Delta OM_1M \quad \Delta OLM_2$, випливає $\dfrac{OM}{OM_2} = \dfrac{OM_1}{1}$ або $\dfrac{|z|}{|z|_2} = \dfrac{|z_1|}{1}$. Тобто $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$.

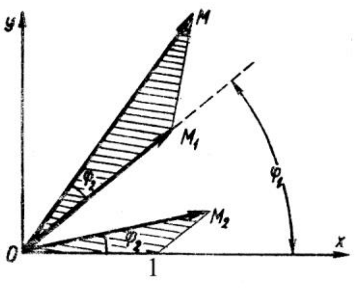


Рис. 4

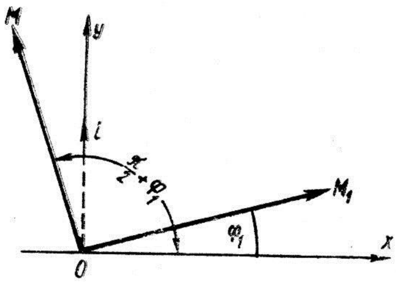


Рис. 5

Отже, *для того щоб побудувати вектор* $\overrightarrow{OM}$, *який відповідає добутку* $z_1 \cdot z_2$ *для цього достатньо повернути на кут* φ_2 *вектор* $\overrightarrow{OM_1}$ *який відповідає числу* z_1 *а потім скористатися гомотетією з центром в* $(0,0)$ *з коефіцієнтом* $|z_2|$.

Зауваження. *Якщо* $|z_2|=1$ *то в описаному складному перетворенні вектора* z_1 *залишається лише його поворот на кут* φ_2. Зокрема, *при множенні на* $i=\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}$ *вектор* $\overrightarrow{OM_1}$ *повертається на кут* $\frac{\pi}{2}$. (*Рис. 5*)

1.4.4. Геометрична ілюстрація ділення двох комплексних чисел

Ділення комплексних чисел $\frac{z_1}{z_2}$ можна перетворити у добуток $z_1\cdot\frac{1}{z_2}$, де $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Отже ми повинні навести геометричну інтерпретацію $w=\frac{1}{z}$.

Нехай $|z|<1$ (*Рис. 6*). З точки z опустимо перпендикуляр на промінь Oz через ζ - точку перетину перпендикуляра з колом $|z|=1$ і проведемо дотичну до кола. Для ω - точки перетину побудованої дотичної з променем Oz. Очевидно, маємо

$$arg\omega=\arg z.$$

А з подібності прямокутних трикутників $\Delta O\zeta z$ та $\Delta z\zeta\omega$ отримаємо $\frac{|\omega|}{|\zeta|}=\frac{|\zeta|}{|z|}$, і

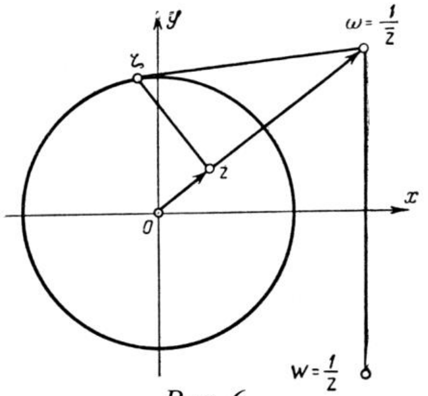


Рис. 6

$$|\omega| = \frac{1}{|z|}$$

бо $|\zeta| = 1$. Отже, число ω є спряженим з $\frac{1}{z}$, тобто $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$. Щоб отримати точку $w = \frac{1}{z}$ ми повинні побудувати точку, яка є симетричною до точки ω відносно дійсної осі.

Перехід від точки z до точки $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ *називають інверсією або симетрією відносно одиничного кола* $|z| = 1$.

Отже, *точка* $\frac{1}{z}$ *має геометричний сенс композиції інверсії відносно кола* $|z| = 1$ *та симетрії відносно дійсної осі довільного вектора* $z \neq 0$ *площини* □

Оскільки $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, і $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

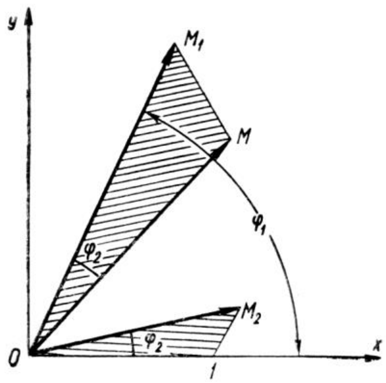


Рис. 6*

Щоб побудувати вектор $\overrightarrow{OM}$ *який відповідає числу* $\frac{z_1}{z_2}$ *ми повинні повернути на кут* $-\varphi_2$ *вектор* $\overrightarrow{OM_1}$, *який відповідає* z_1, *і виконати операцію стиснення (або розтяження якщо* $|z_2| > 1$*) у* $|z_2|$ *разів (Рис. 6*)*

1.4.4. Геометрична інтерпретація здобуття кореня $n-$го степеня з комплексного числа

З формули

$$w=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),\ (k=\overline{(0,n-1)}$$

випливає, що модулі всіх коренів приймають одні і ті ж значення при різних k, тобто $|w|=\sqrt[n]{|z|}$. Приймаючи до уваги загальну формулу для аргументів $n-$го кореня з комплексного числа $Argw=\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}$ отримаємо головне значення аргументу у вигляді $\arg w=\dfrac{\arg z}{n}$ а аргументи

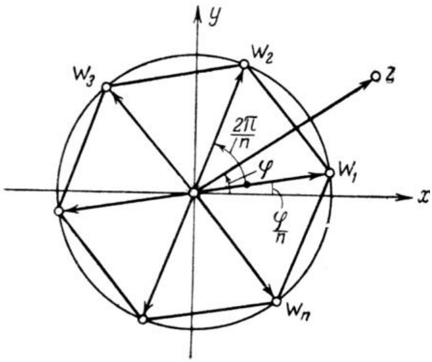


Рис. 7

коренів будуть відрізнятися на кратне $\dfrac{2\pi}{n}$, оскільки до значення $\arg z$ можна додати кратне 2π.

Отже, *$n-$ий корінь з комплексного числа $z\neq 0$ має n різних значень і всі ці значення будуть у вершинах правильного $n-$кутника який вписаний у коло радіуса $|w|=\sqrt[n]{|z|}$.(Рис.7)*

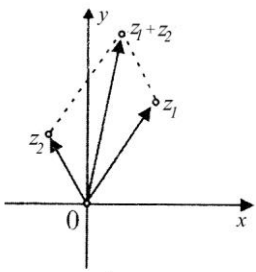


Рис. 8

Приклад 1. *Знайти суму комплексних чисел $z_1=2+3i$ і $z_2=-1+2i$, зобразити цю суму на комплексній площині*

► Розв'язок надамо наступними кроками:

1) відкладаємо дані комплексні числа на Декартові системі координат; 2) будуємо паралелограм як на сторонах векторів

z_1 *і* z_2. Одержимо паралелограм Oz_1zz_2. *3) з’єднуємо з початком координат вершину* z. Сумою векторів z_1 і z_2 буде вектор $z = z_1 + z_2 = (2+3i)+(-1+2i) \ =1+5i$.(*Рис. 8*)◄

Example 2. *Знайти різницю векторів* $z_1 = 1-3i$ *і* $z_2 = -2-5i$, *і зобразити її на комплексній площині.*

► Розв’язок можна надати у наступному порядку:

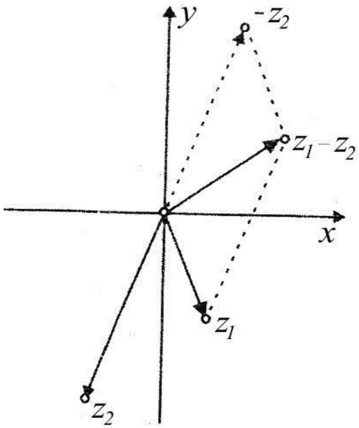


Рис. 9

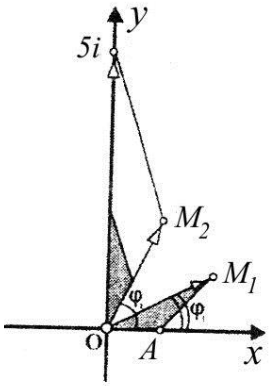


Рис. 10

1)*Будуємо на площині* □ *вектори* z_1 *і* z_2*;2) відкладаємо вектор* $-z_2$*; 3) будуємо паралелограм на сторонах якими є вектори* z_1 *і* $-z_2$. Ми отримали паралелограм $Oz_1z(-z_2)$; *4) з’єднуємо початок координат точкою* z. Вектор z є різницею векторів z_1 і z_2, тобто $z = z_1 - z_2 = (1-3i)-(-2+5i) = 3+2i$. (*Рис. 9*) ◄

Example 3. *Знайти добуток комплексних чисел* $z_1 = 2+i$ *і* $z_2 = 1+2i$, *зобразити його на площині* □ .

► *1) Будуємо на площині* □ *вектори* $z_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $z_2 = \overrightarrow{OM_2}$ *і* $1 = \overrightarrow{OA}$*; 2) побудуємо трикутник* ΔOM_1A*; 3) повернемо* ΔOM_1A *навколо початку координат у додатному* *напрямку на кут* $\varphi_2 = \arg z_2$*; 4) побудуємо трикутник* ΔOM_2M *який подібний трикутнику* ΔOM_1A. Вектор $\overrightarrow{OM}$ є комплексним числом $z = z_1 \cdot z_2$,

$z = (2+i)(1+2i) = 5i$.(*Рис. 10*)◄

Example 4. *Знайти значення виразу* $w = \dfrac{1}{1/2 - i1/3}$ *і Привести його геометричну інтерпретацію*

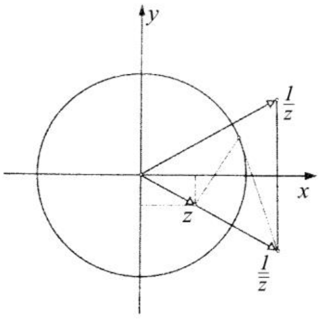


Рис. 11

► *1) Описуємо коло одиничного радіуса з центром в початку координат; 2) Будуємо вектор* $z = \frac{1}{2} - i\frac{1}{3}$*; 3) знаходимо інверсну точку* $\omega = \dfrac{1}{\overline{1/2 - i1/3}}$*; 4) будуємо точку симетричну точці* ω *відносно дійсної осі* . Ця точка і буде точкою

$$w = \frac{1}{1/2 - i1/3} = \frac{6}{3-2i} = \frac{6(3+2i)}{13} = \frac{18}{13} + i\frac{12}{13}$$. (Рис. 11) ◄

Практичні заняття – 1.2

1. *Знайти модуль і головне значення аргументу записати у тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа;*

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}i$*; 2)* $z = \frac{3\sqrt{7}}{7} - \frac{3}{\sqrt{7}}i$*; 3)* $z = -5\sqrt{5} + \sqrt{125}i$*;*
4) $z = -2\sqrt{2} - \sqrt{8}i$*; 5)* $z = \sqrt{3} + i$*; 6)* $z = -\sqrt{3} + i$*; 7)* $z = -\sqrt{3} - i$*;*
8) $z = 1 + i\sqrt{3}$*; 9)* $z = -1 + i\sqrt{3}$*; 10)* $z = 1 - i\sqrt{3}$*; 11)* $z = -1 - i\sqrt{3}$*;*
12) $z = \sqrt{3} - i$*; 13)* $z = 3\sqrt{2}i$*; 14)* $z = -2\sqrt{5}i$*; 14)* $z = 5\sqrt{2}$*;*

15) $z=-13$ *; 16)* $z=2+5i$ *; 17)* $z=2-5i$ *; 18)* $z=-2-5i$ *;*
19) $z=-2+5i$

2**.** *Після виконання відповідних операцій з наведеними комплексними числами і навести геометричну ілюстрацію на площині*

1) $w=\sqrt[3]{27}$ *; 2)* $w=\sqrt[3]{8i}$ *; 3)* $w=\sqrt[3]{-64}$ *; 4)* $w=\sqrt[4]{-16i}$ *;*
4) $w=\sqrt[3]{-8+8i}$ *;5)* $w=\sqrt[3]{8-8i}$ *; 6)* $w=\sqrt{\sqrt{3}-i}$ *; 7)* $w=\sqrt{-\sqrt{3}-i}$

8) $w=(1+2i)+(-2+i)$ *;* *9)* $w=(1-2i)+(2+i)$ *;*

10) $w=(2+i)-(-2+3i)$ *;* *11)* $w=(3-i)-(1+2i)$.

12) $w=(2+i)(1+2i)$ *; 13)* $w=(-1+2i)(3+i)$ *; 14)* $w=\dfrac{1}{1/3+i1/2}$ *;*

15) $w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}$ *; 16)* $w=\dfrac{1}{1-i\sqrt{3}}$ *; 17)* $w=\dfrac{6}{3-2i}$

3**.** *Знайти натуральне значення* n, *якщо*

a) $(1+i)^n=(1-i)^n$ *;* *b)* $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=0$

4. *Довести, що для всіх можливих* $\alpha\in\square$ *тотожність*

$$\left(\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+i\tan n\alpha}{1-i\tan n\alpha}$$

виконується $(n\in\square)$.

5. *Обчислити*

1) $w=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$ *; 2)* $w=\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{\sqrt{7}}{7}i\right)^{56}$ *; 3)* $w=(\sqrt{27}+3i)^{66}$

4) $w=\left(\dfrac{2\sqrt{2}+i\sqrt{8}}{\sqrt{64}-4\sqrt{4}}\right)^{76}$ *; 5)* $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{8}}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{126}$ *; 6)* $w=(\sqrt{48}-4i)^{96}$

6. *Виразити* $\sin nx$ *і* $\cos nx$ *через* $\sin x$ *і* $\cos x$, *якщо* $n=2,3,4,5$.

7. *Довести, що, якщо*

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=1$, *то* $(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=1$

8. *Розв'язати рівняння*

1) $z^3+3z^2+3z+2=0$*;* *2)* $z^4-4z^3+6z^2-4z-15=0$.

9. *Нехай* m *і* n *є натуральні числа. Показати, що* $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ *має* $n/(n,m)$ *різних значень, де* (n,m) *є найбільший спільний дільник чисел* m *і* n*. Переконатись, що* $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ *і* $\sqrt[n]{z^m}$ *співпадають тоді і тільки тоді. коли* $(n,m)=1$*, тобто* m *і* n *є взаємно простими.*

10. *Записати у тригонометричній формі*

$$z=\left(1-\cos\alpha+i\sin\alpha\right)^n,$$

де $n\in\mathbb{N}$.

11. *Нехай* $z+z^{-1}=1$*, Обчислити:*

a) $w=z^{176}+z^{172}+2\cdot z^{-142}$ *; b)* $w=z^{2015}+z^{-2015}$

12. *Довести, що, якщо* $z^2+z+1=0$*, тоді* $z^{3n}+z^{3m+1}+z^{3p+2}=0$*, для всяких* $(n,m,p)\in\mathbb{N}$

13. *Довести: a)* $|z|=\dfrac{1}{|\bar{z}|}$ *; b)* $\arg z=\arg\dfrac{1}{\bar{z}}$.

14. *Показати, що корені рівняння* $z^n-1=0$ *можуть бути записані у вигляді:* $1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,...,\alpha^{n-1}$.

15. *Розв'язати рівняння* $\left(\dfrac{i-x}{i+x}\right)^n=\dfrac{\cot\alpha+i}{\cot\alpha-i}$*, де* n *є натуральним числом, а* x *і* α *- дійсні числа.*

§1.5. Сфера комплексних чисел

Існує ще один спосіб геометричного зображення комплексних чисел - точками сфери, радіуса r, яка дотикається до площини комплексних чисел в початку координат (*Рис. 11**). З'єднуючи точку $M(x,y)$ площини з точкою $(0,0,2r)$ сфери, діаметрально протилежною початку координат, отримаємо єдину точку $N(\xi,\eta,\zeta)$ перетину прямої PM з сферою, яка і є геометричним зображенням комплексного числа $z = x + iy$. І навпаки; *кожній точці* N *сфери (*крім точки P) можна привести у відповідність *вказаним вище способом єдину точку* $M(x, y)$ *площини, і, значить, і єдине комплексне число* $z = x + iy$. Така побудова, *яка установлює відповідність між точками сфери і площиною, називається* ***стереографічною проекцією.*** Однак воно не взаємно-однозначне, тому що точці P, яку будемо далі називати *північним полюсом*, не приведена точка площини. Щоб зробити цю відповідність взаємно-однозначною, зауважимо, що числам $z = x + iy$ з великим модулем відповідають точки площини, які знаходяться на великих відстанях від початку координат, а останнім – точки сфери близькі до P. Тому умовились вважати, що точці P відповідає *нескінченно віддалена точка* площини комплексних чисел, тобто число $z = \infty$ (нескінченність). Точку P також називають *нескінченно віддаленою.* Всі інші точки називають *скінченними,* як і відповідні точки площини і комплексні числа

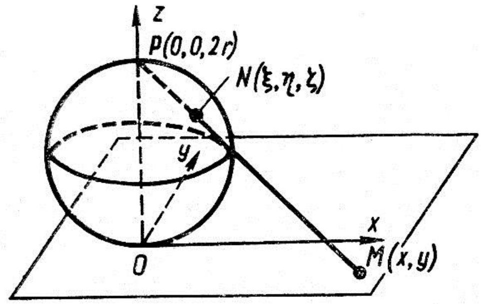


*Рис. 11**

Множині комплексних чисел відповідає множина скінченних точок площини комплексних чисел, яку називають *скінченною,* або *відкритою площиною.* Якщо ж ця площина доповнюється нескінченно віддаленою точкою *і доповнює множину* □ *числом* $z = \infty$, то відповідну площину комплексних чисел будемо називати *замкненою,* або *розширеною,* або *повною.*

У тих випадках, коли міркування не виключають число $z = \infty$, для їх геометричної ілюстрації зручно користуватися описаною вище сферою, яку будемо називати *сферою комплексних чисел.*

1.5.1. Множини точок на площині і на сфері

За допомогою стереографічної проекції різні підмножини точок площини відображуються на відповідні множини точок сфери. Зокрема, образами кіл і прямих на площині є кола на сфері. Покажемо це. Рівняння кола на площині можна записати так:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$$

Для кола $A\neq 0$. Якщо $A=0$, то цьому рівнянню буде відповідати пряма. Щоб визначити вид кривої на сфері, яка є образом кола в стереографічному проектуванні, найдемо зв'язок між координатами (x,y) точки M і координатами (ξ,η,ζ) які відповідають точці N. (*Рис. 11**). Для цього запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $P(0,0,2r)$ і $M(x,y,0)$, і замість поточних координат точок прямої підставимо координати точки $N(\xi,\eta,\zeta)$, яка належить цій прямій:

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-2r}{0-2r}$$

Звідси

$$x=\frac{2r\xi}{2r-\zeta}; \qquad y=\frac{2r\eta}{2r-\zeta}$$

Враховуючи, що $N(\xi,\eta,\zeta)$, яка належить сфері, тобто,

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=r^2$$

або

$$\xi^2+\eta^2=2r\zeta-\zeta^2,$$

знайдемо, що

$$x^2+y^2=\frac{4r^2(\xi^2+\eta^2)}{(2r-\zeta)^2}=\frac{4r^2(2r\zeta-\zeta^2)}{(2r-\zeta)^2}=\frac{4r^2\zeta}{2r-\zeta}$$

Тепер підставимо знайдені значення x, y і x^2+y^2 в рівняння кола і отримаємо:

$$A\frac{4r^2\zeta}{2r-\zeta}+B\frac{2r\xi}{2r-\zeta}+C\ \frac{2r\eta}{2r-\zeta}+D=0$$

або

$$2Br\xi+2Cr\eta+(4Ar^2-D)\zeta+2Dr=0$$

Якщо вважати ξ,η,ζ поточними координатами, то отримане рівняння як рівняння першого степеня відносно ξ,η,ζ є рівнянням площини. Таким чином, координати (ξ,η,ζ) задовольняють рівнянню сфери і рівнянню площини. Отже, точки $N(\xi,\eta,\zeta)$ лежать на перетині сфери і площини, тобто на колі.

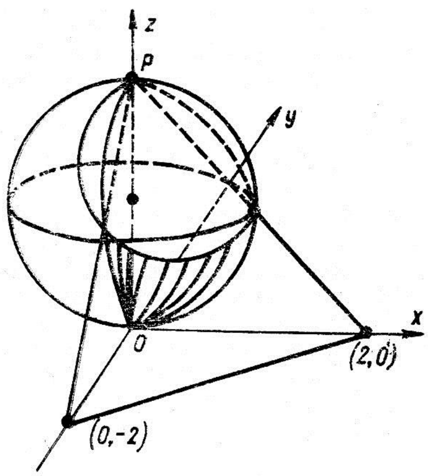


*Рис. 11***

Якщо $A=0$, то рівнянню площини задовольняють координати точки $P(0,0,2r)$, якщо $A\neq 0$, то останнє не має місця. Звідси випливає, що прямій на площині відповідає на сфері коло, яке проходить через точку P. Це дає підстави розглядати прямі на розширеній площині як *кола, які проходять через нескінченну віддалену точку*. Справедливе і обернене ствердження: *всякому колу на сфері комплексних чисел відповідає коло (у окремому випадку, пряма) на площині комплексних чисел*. Це випливає з того, що коефіцієнти A,B,C,D можна довільно міняти, отримуючи різні площини, а отже, і різні кола на сфері.

Приклад. *Що відповідає на сфері комплексних чисел контуру трикутника у площині комплексних чисел, рівняння сторін якого є:* $x=0$; $y=0$; $x-y+z=2$, $r=1$.

► Рівняння сфери має вид $x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Тому заданим прямим будуть відповідати наступні кола:

$$\mathrm{I}\begin{cases} y^2-(z-1)^2=1, \\ x=0 \end{cases} \quad \mathrm{II}\begin{cases} x^2-(z-1)^2=1, \\ y=0 \end{cases} \quad \mathrm{III}\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

Всі вони проходять через точку $P(0,0,2)$ і утворюють сферичний трикутник (*Рис. 11***).

З чисто геометричних міркувань видно, що внутрішнім точкам плоского трикутника відповідають точки частини сфери, які розташовані у четвертому октанті (заштрихована частина *Рис. 11***). ◄

Частина ІІ. Диференціальне числення функції комплексної змінної

§ 2.1. Комплексна змінна

Означення 1. ***Якщо дійсні величини x і y або одна з них є змінною, тоді величина $z = x + iy$ називається комплексною змінною.***

Комплексна змінна z вважається заданою якщо задана множина P комплексних чисел які вона приймає. Частіше всього цю множину можна задати аналітичними умовами або геометрично, як частину площини або всією площиною. Наприклад: 1) співвідношенням $|z| = 2$ описується множина чисел, модуль яких дорівнює 2, тобто, множиною точок кола радіус якого дорівнює 2; 2) система $|z| \leq 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ описує множину чисел, модуль яких не перевищує одиниці, а уявна частина невід'ємна.

Зокрема, комплексна змінна може бути послідовністю $z_1,\ z_2,\ z_3, ..., z_n, ...$ - занумерованою нескінченною сукупністю комплексних чисел. Символічно послідовність записують у вигляді $\{z_n\}$ і скорочено називають: “змінна z_n”.

Означення 2. ***Комплексне число $z_0 = x_0 + iy_0$ називається границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_ε що для всіх $n \geq n_\varepsilon$ з множини натуральних чисел нерівність***

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

виконується. В цьому випадку записують $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, і кажуть, що z_n прямує до z_0.

З використанням операторів логіки **Означення 2** можна записати наступним чином

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_\varepsilon)\,(\forall n \geq n_\varepsilon,\, n \in \mathbb{N}) : |z_n - z_0| < \varepsilon$$

У окремому випадку, якщо $z_0=0$, то $\{z_n\}$ *називається нескінченно малою послідовністю.*

Змінна z_n *називається збіжною, якщо вона має скінченну границю*. Геометрично *послідовність* $\{z_n\}$ *яка збігається до* z_0, *відповідає послідовність таких точок площини, які згущуються біля точки* z_0. Це означає, що яким би малим не був би відкритий круг з центром у точці z_0, майже всі члени послідовності за винятком хіба що членів з номерами $n\le n_\varepsilon$ попадають в цей круг.

Всі основні теореми про границі, дійсних змінних x_n, y_n, зокрема теореми про границю суми, добутку і частки, а також способи доведення цих терем справедливі і для комплексної змінної z. Але, з другого боку, вони безпосередньо випливають з наступних теорем.

Теорема 1. ***Для збіжності комплексної змінної*** $z_n=x_n+iy_n$ ***необхідно і достатньо, щоб збігались дійсні змінні*** x_n ***і*** y_n**.**

► <u>Необхідність</u>. Нехай $|z_n-z_0|<\varepsilon$ для всіх $n\ge n_\varepsilon$.

$$|x_n-x_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|z_n-z_0|<\varepsilon$$

$$|y_n-y_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=|z_n-z_0|<\varepsilon,$$

де $z_0=x_0+iy_0$. Отже, $x_n\to x_0$ і $y_n\to y_0$.

<u>Достатність</u>. Нехай $|x_n-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $|y_n-y_0|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n\ge n_\varepsilon$. Тоді

$$|z_n-z_0|=|(x-x_0)+i(y-y_0)|\le|x_n-x_0|+|y_n-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

отже, $z_n\to z_0$. ◄

Теорем 2. ***Якщо*** $\rho_n\to\rho$ ***і*** $\varphi_n\to\varphi$ ***То*** $z_n=\rho_n(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)\to\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$**.**

► Справді $z_n = \rho_n \cos\varphi_n + i\rho_n \sin\varphi_n$, і

$\rho_n \cos\varphi_n \to \rho\cos\varphi$ і $\rho_n \sin\varphi_n \to \rho\sin\varphi$

в силу неперервності дійсних функцій $\rho\cos\varphi$ і $\rho\sin\varphi$. Тоді на підставі **теореми 1**

$$z_n \to \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi. \blacktriangleleft$$

Теорема 3. ***Якщо*** $z_n \to \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi$***, то*** $\rho_n \to \rho$ ***і*** $\varphi_n \to \varphi$**.** Причому для φ і φ_n береться одна і та ж гілка $Arg\, z$.

► Якщо вибрати головну гілку, тоді покладаючи $z_n = x_n + iy_n$ отримаємо

$$\rho_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

$$\varphi_n = 2\arctan\frac{y_n}{\rho_n + x_n} \to 2\arctan\frac{y}{\rho + x} = \varphi$$

так як $\sqrt{x^2 + y^2}$ і $2\arctan\dfrac{y}{\rho + x}$ є неперервні функції. ◄

Означення 3. ***Якщо існує таке число*** $A \neq \infty$***, що всі значення*** z_n ***задовольняють нерівність*** $|z_n| < A$ ***тоді послідовність*** z_n ***називають обмеженою.***

Теорема 4. ***Збіжна послідовність*** z_n ***є обмеженою.***

► Справді, нехай $z_n \to z_0$. Тоді для всіх $n > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Отже, для всіх z_n маємо

$$|z_n| = |(z_n - z_0) + z_0| \le |z_n - z_0| + |z_0| < \varepsilon + |z_0|.$$

Якщо $A = \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|, \ldots, |z_n|, \varepsilon + |z_0|)$. Очевидно, для всіх n нерівність $|z_n| \le A$ буде виконуватись. ◄

Означення 4. ***Якщо для всякого*** $\varepsilon > 0$ ***існує таке число*** n_ε***, що для всіх значень*** z_n***, з номерами*** $n > n_\varepsilon$ ***справджується нерівність***

$$|z_n| > \varepsilon$$

то кажуть, що послідовність z_n ***має границю, яка дорівнює нескінченності.***

У цьому випадку кажуть, що z_n *прямує до нескінченності або збігається до нескінченності*.

Позначають це так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{ або } z_n \to \infty .$$

Очевидно, що якщо

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{, то } \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty .$$

Приклад 1 З'ясувати, для яких значень комплексного параметра a збігаються наступні послідовності:

$$1) \ \{a^n\}, \qquad 2) \ \left\{\frac{a^n}{a^n+1}\right\}$$

► 1) Нехай $z_n = a^n$ для всіх n які належать множині натуральних чисел. Якщо $|a|<1$, тоді приймаючи до уваги $|z_n| = |a|^n$ одержимо, що $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$, отже $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a^n = 0.$ Аналогічно, покладаючи $|a|>1$ дає можливість зробити висновок, що $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty$, тобто $z_n \to \infty$. Тому $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a<1, \\ +\infty, & a>1. \end{cases}$

Розглянемо випадок коли $|a|=1$, тобто $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$ де $\varphi = \arg a$. За формулою Муавра випливає $z_n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Доведемо, що для всіх значень φ послідовність $\{\cos n\varphi\}$ не має границі. справді, за припущенням, що для даного φ $\lim_{n\to\infty} \cos n\varphi = \alpha$, матимемо $\lim_{n\to\infty} \cos^2 n\varphi = \alpha^2$. Оскільки $2\cos^2 n\varphi = 1 + \cos 2n\varphi$ $(\forall n \in N)$, То отримаємо рівняння відносно α: $2\alpha^2 = 1 + \alpha$. Розв'язками цього рівняння є числа $\alpha = 1$ або $\alpha = -1/2$. Але співвідношення $\cos 3n\varphi = \cos^3 n\varphi - 3\sin^2 n\varphi \cos n\varphi \quad (\forall n \in N)$ показує, що число $\alpha = -1/2$ не може бути границею послідовності $\{\cos n\varphi\}$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\varphi = 1$, тоді з рівності

$$\cos(n+1)\varphi = \cos n\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \sin n\varphi \ (\forall n \in N)$$

випливає , що $\varphi = 0$. отже, при $\varphi = 0$ і $a = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\varphi = 1$. Якщо $\varphi = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\varphi = 0$, звідси

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = 1$$

Отже, послідовність $\{a^n\}$ збігається тільки тоді коли $|a| < 1$ і $a = 1$.

2) З'ясуємо для якого комплексного параметра a збігається послідовність $z_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Як і в попередньому прикладі розглянемо різні випадки.

Якщо $|a| < 1$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ а $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a^n) = 1$. Тому для таких a $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n} = 0$.

Нехай $|a| > 1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$. Отже, якщо послідовність $\{z_n\}$ запишемо у вигляді

$$z_n = 1 - \frac{1}{1+a^n} = 1 - \frac{1}{a^n} \frac{1}{1 + \frac{1}{a^n}},$$

то отримаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Розглянемо випадок коли $|a| = 1$ і $a^n \neq -1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Параметр a можна записати у вигляді $a = \cos\varphi + i \sin\varphi$, де $\varphi = \arg a$ і $\cos n\varphi \neq -1$. Для такого a

$$z_n = \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{1+\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \frac{1}{2} + i\frac{\sin n\varphi}{2(1+\cos n\varphi)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\frac{n\varphi}{2}.$$

Послідовність $\left\{\tan\frac{n\varphi}{2}\right\}$ збігається тільки тоді, коли $\varphi = 0$, тобто $a = 1$. В цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2}$.

Отже, послідовність $\left\{\frac{a^n}{1+a^n}\right\}$ збігається коли $|a| < 1,\ |a| > 1,\ a = 1$. ◄

Приклад 2. *Довести, що послідовність*

$$\zeta_n = \frac{n+1+nz+(n-1)z^2+...+z^n}{n+1} \quad (\forall n \in N)$$

збігається, якщо $|z| \le 1$ *і* $z \ne 1$. *Знайти її границю.*

► Розглянемо послідовність

$$\zeta_n \cdot z = \frac{(n+1)z + nz^2 + (n-1)z^3 + ... + z^{n+1}}{n+1}$$

Для довільних $n \in \mathbb{N}$ утворимо різницю

$$z \cdot \zeta_n - \zeta_n = \frac{z - z^{n+2}}{(1-z)(n+1)} - 1 \quad (\forall n \in N)$$

З останнього співвідношення випливає, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\zeta_n = \frac{z^{n+2} - z}{(1-z)^2(n+1)} + \frac{1}{1-z}$$

Оскільки для даного z послідовність $\left\{\frac{z^{n+2} - z}{(1-z)^2(n+1)}\right\}$ обмежена, тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z^{n+2}-z}{(1-z)^2(n+1)} = 0$. Таким чином існує $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n$ і

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_n = \frac{1}{1+z} \quad ◄$$

Приклад 3. *Довести, що* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$ $(c \in \mathbb{C} \setminus 0)$ *тоді і тільки тоді, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |c|$ *і існує така послідовність* $\{Argz_n\}$, *що* $\lim\limits_{n\to\infty} Argz_n = Argc$

► Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c = a + ib$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, і

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |c|$$

Для того щоб довести рівність $\lim\limits_{n\to\infty} Argz_n = Argc$ (для всякого $Argz_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ і $Argc$) припустимо, що c є невід'ємне число. То існує таке число, що починаючи з якого всі z_n є невід'ємні. Оскільки функція $\arg z$ неперервна (як функції x і y) для невід'ємних z одержимо рівність

$$\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg c$$

Якщо число c невід'ємне, тоді для всіх невід'ємних z_n або які належать другому квадранту покладаємо $Argz_n = \arg z_n + 2\pi$. Очевидно, що для так вибраних $Argz_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\lim\limits_{n\to\infty} Argz_n = \pi = \arg c$.

2) І навпаки, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |c|$ і для любої вибраної послідовності $\{Argz_n\}$ рівність $\lim\limits_{n\to\infty} Argz_n = Argc$ виконується. З співвідношення

$$z_n = |z_n|(\cos Argz_n + i \sin Argz_n)\ (\forall n \in \mathbb{N})$$

і неперервності тригонометричних функцій випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |c|(\cos Argc + i \sin Argc)\ (\forall n \in \mathbb{N}).$$ ◄

Практичні заняття - 2.1

Знайти границі послідовностей

1) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{3n^2}{n+3n^2}\right)^{5n}+i\left(\dfrac{5^{n+1}-3^n}{5^{n-3}+3^{n+4}}\right)\right\};$

2) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{xn^5+n-1}{yn^5+n^3}\right)+i\left(\dfrac{3xy(n+1)!+2(n-1)!}{4(n+1)!-(n-1)!}\right)\right\};$

3) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+5}-\dfrac{n}{2}\right)+i\left(\sqrt{(n+2)(n+3}-n\right)\right\};$

4) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{1+n^2+(x\ln y)n^3}{5y^2n^3+3n-1}\right)+i\left(\dfrac{5n^2+x^2n}{5n^2}\right)^{2n}\right\};$

5) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{7^{2n-1}x+5^{2n+1}}{y^2 7^{2n+2}-5^{2n-}}\right)+i\left(\dfrac{e^x(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{n^2}-\dfrac{e^x n}{3}\right)\right\};$

6) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{5(n+3)!+3(n+1)!}{2(n+3)!-(n+1)!}\right)+i\left(\sqrt{4n^2+3n-1}-2n\right)\right\};$

7) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{n^2}\right)+i\left(\dfrac{3n^3+yn}{3n^3}\right)^{n\ln x}\right\};$

8) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{x^2n^2-3n+1}{y^2n^2-1}\right)+i\left(\sqrt{(3n+1)(2n-1)}-\sqrt{6}n\right)\right\};$

9) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{(n^2+3n)\ln xy}\right)+i\left(\dfrac{4n^2}{4n^2+xn}\right)^{yn}\right\};$

10) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{y^2(1^3+2^3+\ldots+n^3)}{2n^4x^3+5n-1}\right)+i\left(\sqrt{15n^2-8n+1}-\sqrt{15}n\right)\right\}$

11) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{27-x_n^3}{9-x_n^2}\right)+i\left(\dfrac{4-y_n^2}{8-y_n^3}\right)\right\}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3,$ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2;$

12) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{25-x_n^2}{125-x_n^3}\right)+i\left(\dfrac{1-y_n^3}{1-y_n^4}\right)\right\}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=5,$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=1;$

13) $\{z_n\}=\left\{\left(\dfrac{1-x_n^2}{1+x_n^3}\right)+\left(\dfrac{8+y_n^3}{16-y_n^4}\right)\right\}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1,$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=2;$

14) $\{z_n\}=\left\{\dfrac{1-2^{1/n}}{1-6^{2/n}}+i\dfrac{1-27^{1/n}}{1-81^{1/n}}\right\};$

15) $\{z_n\}=\left\{\dfrac{1-5^{2/n}}{1-5^{4/n}}+i\dfrac{1-6^{2/n}}{1-6^{3/n}}\right\}.$

§ 2.2 Область та її границя

Множина чисел, на якій визначена комплексна змінна, може зображуватись на площині або на сфері комплексних чисел деякою множиною точок довільного виду. Однак в комплексному аналізі така загальність взагалі не потрібна. Під множиною точок площини (або відповідної, сфери), на якій задано змінну, частіше всього розуміють *множину спеціального виду, яка називається областю.*

Означення 1. ***Множина точок E комплексної площини називається областю D, якщо:***

1) разом з будь якою точкою z цієї множини їй належать і всі точки достатньо малого круга з центром у точці z;

2) всякі дві точки цієї множини можна з'єднати неперервною лінією, яка повністю їй належить.

Властивість 2) скорчено називають *зв'язністю області.*

Означення 2. ***Точка z_0, у довільному околі якої є точки які належать області D, так і не належать їй, називається межовою точкою області D.***

Означення 3. ***Множина всіх межових точок області D називається межею або контуром області D.***

Означення 4. ***Межова точка області називається ізольованою, якщо у всякому достатньо малому околі з центром у цій точці вона буде єдиною точкою, яка належить області*** D.

Означення 5. ***Область*** D ***разом із своєю межею називається замкненою областю і позначають*** $\overline{D}$.

Заштрихована частина площини (*Рис. 12а*), яка міститься в середині неперервної замкненої лінії l, є простіший приклад області. Її межа складається із однієї лінії

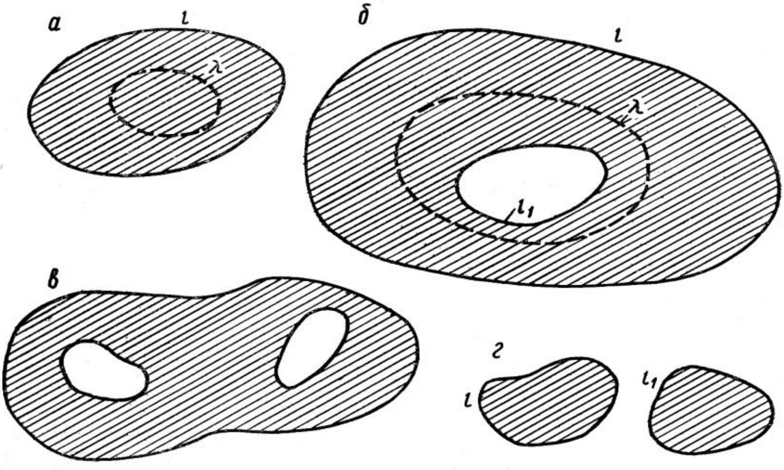


Рис. 12

l. На (*Рис. 12б*) (заштрихована частина) є прикладом області з межею, яка складається з двох замкнених ліній l і l_1. Межа області може складатись і з більшого числа ліній; наприклад на (*Рис.12в*) зображена область з межею, яка утворена трьома лініями. З другого боку, множина точок, яка розташована у внутрішності l і l_1 (*Рис. 12г*) не утворюють область, тому що не виконана властивість зв’язності.

Означення 6. ***Точка площини, в достатньо малому околі якої немає жодної точки області*** D***, називається зовнішньою точкою цієї області.***

Характерною властивістю зовнішньої точки є те , що не тільки вона, але і всі точки достатньо малого кола з центром у цій точці також не належить D. Межа області відділяє внутрішні точки області від зовнішніх, якщо такі існують.

Означення 7. ***Якщо всі точки області лежать у кругу достатнього великого радіуса з центром у нульовій точці називається обмеженою, і необмеженою, якщо такого круга не існує.***

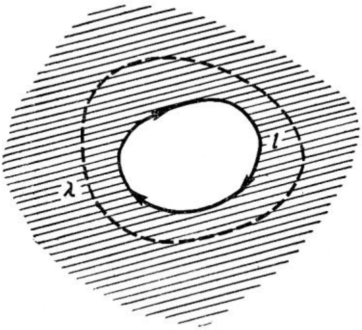


Рис. 13

Прикладом необмеженої області може бути заштрихована частина площини, яка є зовнішньою відносно замкненої кривої l (*Рис. 13*).

Межа області, як ми бачили, може складатись з однією або декількох зв'язних частин, ***Число зв'язних частин межи визначає порядок зв'язності області, і в залежності від того, чи складається межа з однієї, двох і більшої кількості. Зв'язних частин область називають, відповідно, однозв'язною, двозв'язною і взагалі багатозв'язною.*** На (*Рис. 1а*) зображена однозв'язна область. На (*Рис.12б,в*) відповідно двозв'язна і трьохзв'язна області. Область, яка зображена на *Рис. 13*, буде *однозв'язною*, якщо до неї віднести нескінченно віддалену точку, і *двозв'язною,* якщо нескінченно віддалена точка їй не належить. Для однозв'язної області характерно те, що всяка замкнена неперервна лінія, яка

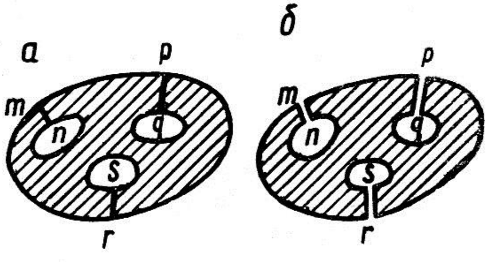


Рис. 14

належить області, можна неперервною деформацією стягнути в точку, не виходячи за межі області D. Геометрично очевидно, що всяка замкнена лінія λ (пунктирна), яка належить області D, (зображена на (*Рис. 12а*)), може бути стягнена у точку області D, а в області на (*Рис.12б,в*) з кривою λ, яка оточує контур l_1, це зробити неможливо. Якщо область, яку зображено на *Рис. 13*, розглядати як однозв'язну, то контур λ, який оточує l, стягується до нескінченно віддаленої точки.

Інколи приходиться *розрізати* область. Розрізати область вздовж деякої лінії (розрізу), це значить вилучити від області точки, які належать цій лінії, відносячи їх до межових. За допомогою певним чином вибраних розрізів можна всяку багатозв'язну область перетворити в однозв'язну. Для $n-$зв'язної області цього можна досягнути за допомогою $(n-1)$ - го розрізів. На (*Рис.14 а*) показано перетворення чотирьохзв'язної області у однозв'язну за допомогою розрізів mn, pq, rs. Якщо „відтягнути " одне від одного „береги " розрізу, як це показано на (*Рис.14 б*), то стане очевидним, що отримана область, обмежена однією замкненою лінією, тобто вона однозв'язна.

Відкрита площина дає приклад області, межа якої складається з однієї ізольованої точки (нескінченно віддаленої). Розширена площина є єдиним прикладом області, яка не має меж. Її будемо вважати однозв'язною областю.

Приклад 1. *Наступні множини точок є областями*:

a) $|z+2|<3$; *б*) $1<|z|<2$; *в*) $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$.

Вони складаються із внутрішніх точок a) круга радіуса 3 з центром у точці $(-2; 0)$; *б*) кільця радіусів 1 і 2 з центром у початку координат; *в*) другого координатного кута. Їх межами: a) коло вказаного радіуса; *б*) два кола кільця; *в*) додатна уявна і від'ємна дійсна напівосі. Перші дві області обмежені, а остання необмежена.

Приклад 2. *Множина точок, які відповідають числам, що задовольняють співвідношення* $|2z| < |1+z^2|$ *не є областю.*

► Справді, якщо покласти $z = x + iy$ і зауважуючи, що $|1+z^2| = |1+(x+iy)^2| = \sqrt{(1+x^2-y)^2 + 4x^2y^2}$, $|2z| = 2\sqrt{x^2+y^2}$ випливає з даного співвідношення

$$4(x^2+y^2) < 1+x^4+y^4-2x^2-2y^2-2x^2y^2+4x^2y^2;$$

$$1+x^4+y^4-2x^2-2y^2+2x^2y^2-4y^2>0;$$

$$(x^2+y^2-1)^2-4y^2>0;$$

$$(x^2+y^2-1-2y)(x^2+y^3-1+2y)>0 \left[x^2+(y-1)^2-2\right]$$
$$\left[x^2+(y+1)^2-2\right]>0$$

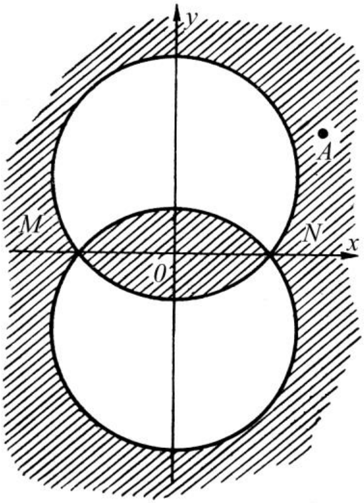


Рис. 15

Остання нерівність можлива лише у тому випадку, коли обидва множника у правій частині мають однакові знаки. Якщо вони додатні , то точки (x,y) належать зовнішності кіл $x^2+(y-1)^2=2$ і $x^2+(y+1)^2=2$. Якщо ж вони від'ємні, то шукані точки належать внутрішнім точкам перерізу кругів, обмежених цими колами. Множина точок яка розглядається складається з обох цих частин площини (заштрихована на *Рис.15*). Вона не є областю, бо не виконується друга умова означення області (зв'язність. Наприклад точки A і O не можна з'єднати неперервною лінією, не виходячи за межі множини (точки M і N не належать множині). ◄

Приклад 3. Множина точок, яка задовольняє нерівності $|z|>1$, але з якої виключена нескінченно віддалена точка, є двозв'язна область. Її межею є коло одиничного радіуса з центром у початку координат і нескінченна точка, яка у даному випадку є ізольованою межовою точкою області.

Всяка *відкрита множина, яка містить точку c* ***називається околом точки c.*** Зазвичай під околом точки будемо вважати ***відкритий круг з центром у цій точці.*** Якщо радіус круга - $\delta > 0$, то для скінченної точки c $|z - c| < \delta$ - рівняння круга, дельта-околу точки c. У випадку, коли точка нескінченно віддалена, то під круговим околом розуміють множину точок, для яких справедливе співвідношення $|z| > \delta$. Такий круговий окіл називають $\delta -$ ***околом*** точки ∞.

Криві, з яких складається межа області та береги її розрізів вважаємо далі в основному гладкими або кусково-гладкими лініями. *Гладка лінія* є неперервна лінія, яка не має точок само перетинів (може бути замкненою); в кожній точці якої існує дотична, напрямок якої неперервно змінюється при неперервному переміщенні точки дотику вздовж кривої. Якщо Жорданову криву можна скінченною кількістю її точок розбити на скінчену кількість гладких кусків, *то її називають кусково-гладкою*. Сенс цього терміну в тому, що у точках розбиття кусково-гладка крива не має точок дотику.

Гладкий відрізок лінії задається двома рівняннями $x = \varphi(t), y = \phi(t)$ для $t_1 \le t \le t_2$, причому, різним значенням t які належать $[t_1, t_2]$ відповідають різні точки (x, y). Функції $\varphi(t)$ і $\phi(t)$ мають неперервні похідні, які не дорівнюються нулю одночасно в жодній внутрішній точці проміжку $[t_1, t_2]$ і односторонні в точках t_1 і t_2 похідні. Ці рівняння є параметричними рівняннями даної лінії. Рівняння лінії можна записати одним рівнянням $z = z(t)$, де

$$z(t) = x(t) + iy(t) = \varphi(t) + i\phi(t).$$

Рівняння $z = z(t)$ називається рівнянням лінії в комплексній формі.

Очевидно, гладка лінія із кінцями у скінченних точках є спрямною, тобто такою, що має скінчену довжину.

Якщо гладка лінія $z = z(t)$ є замкнена, то повинні ще виконувати наступні умови

$$z(t_1) = z(t_2);\ \text{і}\ \frac{dz(t_1)}{dt} = \frac{dz(t_2)}{dt},\ \text{де}\ \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}.$$

Інколи треба встановити визначений напрямок обходу границі області.

Напрямок обходу межі області будемо називати додатним, якщо, за рух уздовж межі, найближча до спостерігача частина області залишається ліворуч від нього.

Приклад 4. *Записати у комплексній формі рівняння кола одиничного радіуса з центром у початку координат*

► Параметричне рівняння такого кола буде $x = \cos t,\ y = \sin t$ Звідси

$$z(t) = x + iy = \cos t + i\sin t = e^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Отже, шукане рівняння $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. ◄

Приклад 5. *Знайти рівняння кола радіуса* r *з центром у точці* $z = c$ *у комплексній формі.*

► Позначимо $z - c = \rho e^{i\varphi}$. Для точок даного кола $\rho = |z - c| = r$. Тому, шукане рівняння буде мати вид $z - c = re^{i\varphi}$, де аргумент φ грає роль параметра $\varphi \in [0, 2\pi]$. ◄

Приклад 6. *Дано рівняння кривої у комплексній формі:* $z = 3e^{it} + 2e^{-it}$. *Визначити вид цієї кривої.*

► Так як $z = x + iy = 3(\cos t + i\sin t) + 2(\cos t - i\sin t)$, тоді $x = 5\cos t,\quad y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi]$ Це параметричне рівняння кривої. Виключаємо параметр:

$$\frac{x}{5} = \cos t,\ \ y = \sin t, \qquad\qquad \frac{x^2}{25} + y^2 = 1.$$

Отже, це еліпс з напівосями 5 і 1. ◄

Практичне заняття 2.2

1. Знайти множину точок яка визначається наступними умовами

1) $\left\lvert\dfrac{z-1}{z+1}\right\rvert \le 1;$	2) $\lvert z^2-1\rvert \ge a^2$, $(a>0);$
3) $1 \le \lvert z+2+i\rvert \le 2;$	4) $\lvert z-1\rvert < \lvert z-i\rvert$;
5) $\lvert z-a\rvert < \lvert 1-az\rvert, \quad (a \in R, \lvert a\rvert \ne 1);$	6) $\lvert z\rvert > 2+\operatorname{Im} z;$
7) $\lvert z\rvert - \operatorname{Re} z \le 0;$	8) $\operatorname{Im} z^2 < 1;$
9) $4 \le \lvert z-1\rvert + \lvert z+1\rvert \le 8$;	10) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2};$
11) $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) + \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2};$	12) $\begin{cases} 0 \le \operatorname{Im} z \le 1, \\ 1 < \operatorname{Re} z < 2; \end{cases}$

2. Яка лінія визначається наступними рівняннями ?

1) $\operatorname{Im} z^2 = 2$ ’	2) $\operatorname{Re} \bar{z}^{2} = 2$;
3) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{2};$	4) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) = \dfrac{1}{2};$
5) $\operatorname{Im}\left(z^2-\bar{z}\right) = 2-\operatorname{Im} z;$	6) $z^2+\bar{z}^{2} = 1;$
7) $2z\bar{z}+(2+i)z+(2-i)\bar{z} = 2;$	8) $\lvert z-i\rvert + \lvert z+i\rvert = 4$;
6) $\lvert z-i\rvert - \lvert z+i\rvert = 2;$	10) $\lvert z\rvert - 3\operatorname{Im} z = 6;$
11) $3\lvert z\rvert - \operatorname{Re} z = 12;$	12) $\lvert z-2\rvert = \lvert 1-2\bar{z}\rvert;$
13) $\operatorname{Re}(z^2-\bar{z}) = 0$	14) $\operatorname{Re}(1+z) = \lvert z\rvert.$

3. Записати у комплексній формі рівняння наступних ліній

1) $xy=1$;	2) $x^2+(y-1)^2=1$;		3) $x^2-y^2=\frac{1}{2}$;
4) $y^2=2x+1$;	5) $y=x$;	6) $y=kx+b,\ k,b\in R$;	
7) $x^2+y^2+2x=0$;	8) Вісь Ox;		9)Вісь Oy.

§ 2.3. Поняття функції комплексної змінної

Якщо кожному значенню z, взятого з числової множини P, відповідає за певним законом одно або декілька значень комплексних чисел w, то кажуть, що на множині P визначено функцію комплексної змінної w комплексної змінної z, яку позначають $w=f(z)$, $z\in P$

Якщо кожному z поставлено у відповідність лише одне значення w, то функція $w=f(z)$ *називається однозначною, а* якщо декілька або нескінченно багато значень, то *многозначною.*

Множині P чисел z функцією $w=f(z)$ ставиться у відповідність дека множина Q чисел w. Кажуть, що функція $w=f(z)$ відображує множину P на множину Q або перетворює множину P на множину Q. Далі розглядатимемо в основному функції, для яких P і Q області – області означень і значень відповідно.

Геометрично числовій множині P відповідає на площині комплексних чисел z, яку будемо називати *площиною комплексної змінної* z або коротко – *площиною* z, певна множина точок. Функція $w=f(z)$ відображує її на множину Q точок на комплексної площини, яку відносять до прямокутної системи координат u,v. Її називають площиною w ($w=u+iv$). У цьому випадку кажуть, що функція $w=f(z)$ здійснює відображення множини P точок площини (z) на множину Q точок площин (w)

Завдання функції $w = f(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ рівносильне завданню таких двох дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ дійсних змінних x і y, що

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Якщо між точками множин P і Q існує функціональна відповідність $w = f(z)$, тоді існує і обернена до неї відповідність між множинами Q і P, за якою z розглядають як функцію w. Така функція $z = F(w)$ *називається оберненою по відношенню до функції* $w = f(z)$; вона відображує множину Q на множину P так що з відношення $z = F(w)$, $\forall w \in Q$ випливає відношення $w = f(z)$. Особливо важливим є випадок, коли обидві ці функції однозначні; тоді відображення P на Q *називається взаємно-однозначним* або *однолистим*.

Якщо функція $\omega = F(z)$ задана на множині P і відображує P на множину Q, а на множині Q задано функцією $w = \varphi(\omega)$, яка відображує Q на множину R, то функцію $w = \varphi(F(z)) = f(z)$, яка відображує множину P на множину R *називається складеною функцією змінної* z, а відображення P на R, яке вона виконує, *називається суперпозицією* відображень F і φ. $f(z) = \varphi(F(z))$ якби складено з $\omega = F(z)$ $w = \varphi(\omega)$ які є її складовими.

П**риклад 1.** Рівняння $w = az$, де a - додатна стала, встановлює відповідність між числами z та w Таким чином, w є функцією z, причому однозначною, оскільки множення чисел a і z при всякому z однозначно виконується. Вона відображує всю *відкриту площину* z на всю відкриту площину w.

Приймаючи до уваги геометричне тлумачення добутку приходимо до висновку, що вектор який відповідає числу z, лише змінює свою довжину в a разів (або залишається незмінним $a = 1$); цей вектор відповідає числу w. В цьому ми можемо впевнитись і аналітично. Нехай $z=\rho e^{i\varphi}$, $w=re^{i\theta}$. Тоді одержимо $re^{i\varphi}=a\rho e^{i\theta}$ або $r=a\rho$, що підтверджує раніше описаний характер перетворення. Це перетворення називається *перетворенням подібності*. За його допомогою, наприклад, область D (*Рис.16*) перетворюється у D_1 (площини z і w, точки $z=0$ і $w=0$ і припускають, що дійсні вісі цих площин співпадають). Легко впевнитись, що за допомогою цієї функції коло перетворюється у коло.

Приклад 2. Розглянемо характер відображення, яке здійснюється функцією $w=cz$, де c є комплексне число. Нехай $c=ae^{i\alpha}$, де $a=|c|$. Функцію $w=cz$ можна розглядати як суперпозиції $\omega=az$ і $w=e^{i\alpha}\omega$. Перше з цих відображень є перетворення подібності. Звернемось до другої складової складної функції. Щоб отримати вектор w - образ вектора ω площини z у відображенні $w=e^{i\alpha}\omega$, слід повернути вектор ω навколо початку координат на кут α. Впевнимося у цьому. Для чого скористаємося полярною формою запису комплексних чисел $z=\rho e^{i\varphi}$, $w=re^{i\theta}$. Тоді:

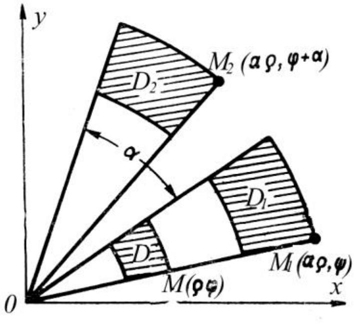


Рис. 16

$$re^{i\theta}=\rho e^{i(\varphi+\alpha)}$$

або

$$r=\rho,\ \theta=\varphi+\alpha,$$

що підтверджує описаний вище характер перетворення; його називають *перетворенням повертання площини з центром у початку координат на кут* α. Перетворення функцією $w=cz$ можна отримати шляхом послідовного застосування перетворення подібності і повороту. Якщо для зображення z і w використовувати одну і ту ж систему координат, то наприклад, область D відобразиться функцією $w=cz$ на область D_2 (*Рис. 16*). Ясно, що функція $w = cz$ коло перетворює в коло і пряму в пряму.

§ 2.4 Границя функції

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ задана у околі скінченної точки z_0 за виключенням, хіба що, точки z_0.

Означення 1. *Число* C *називається границею функції* $f(z)$ *при прямуванні* z *до* z_0 *якщо, для всякої збіжної до* z_0 *змінної* z_n, *відповідна змінна* $f(z_n)$ *збігається до* C. *Символічно це записують так:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C \text{ або } f(z) \to C \text{ коли } z \to z_0 .$$

Згадаємо, що вирази „змінна z_n” і „змінна $f(z_n)$” тотожні виразам $\{z_n\}$ і $\{f(z_n)\}$.

Означення 2. *Число* C *є границею функції* $f(z)$ *у точці* z_0, *якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta > 0$, *що з нерівності* $0 < |z - z_0| < \delta$ *випливає* $|f(z) - C| < \varepsilon$.

Це означення може записати з використанням логічних операторів так:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z\; 0 < |z - z_0| < \delta) : |f(z) - C| < \varepsilon$$

Якщо $C = \infty$ і z_0 є скінченим, то границю функції означують наступним чином.

Означення 3. *Функція* $f(z)$ *має нескінченну границю* ∞ *у точці* z_0, *якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta > 0$, *що з нерівності* $0 < |z - z_0| < \delta$ *випливає нерівність* $|f(z)| > \varepsilon$

Приведемо геометричну ілюстрацію граничного переходу для скінченних C і z_0 (**означення 2**).

Це означає, що *для всіх точок площини* z, *які лежать у середині круга (кільця)* $0 < |z - z_0| < \delta$ *з центром у точці* z_0 *і достатньо малого радіуса* δ *відповідні їм значення функції*

$w = f(z)$ *зображуються точками площини* w*, які лежать у середині круга* $|f(z) - C| < \varepsilon$ *з центром у точці* C *достатньо малого радіуса* ε. (Рис. 17)

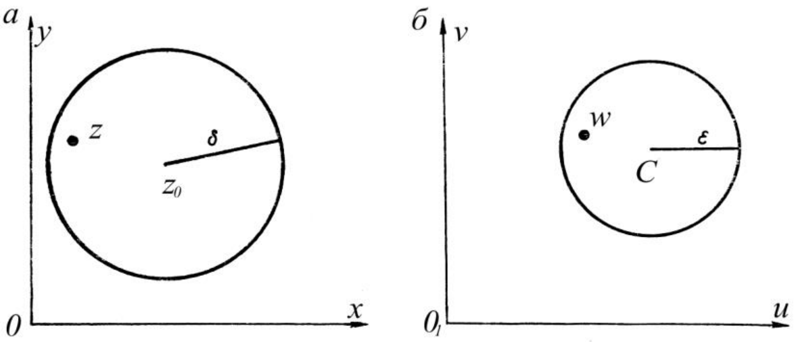


Рис. 17

Аналогічно можна навести геометричну інтерпретацію коли C і z_0 є нескінченними, але тоді зручно користуватися сферами z і w.

Важливо відмітити, що в означеннях границі функції, не конкретизується шлях прямування z до z_0**.** Це означає: *границя функції* $f(z)$ *у точці* z_0 *(якщо вона існує) не залежить від шляху прямування* z *до* z_0.

2.4.1. Основні тереми про границі функцій.

Нехай $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$; $z_0 = x_0 + iy_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$; $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = r(\rho,\varphi)e^{i\Theta(\rho,\varphi)}$; $C = A + iB = R \cdot e^{i\Phi}$

Теорема 1. ***Щоб функція*** $w = f(z)$ ***мала границею число*** C ***при*** $z \to z_0$***, необхідно і достатньо, щоб функції*** $u(x,y) \to A$ ***і*** $v(x,y) \to B$ ***при*** $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Теорема 2. ***Щоб функція*** $w = f(z)$ ***мала границею число*** C ***при*** $z \to z_0$***, необхідно і достатньо, щоб функція*** $r(\rho,\varphi) \to R$ ***і*** $\Theta(\rho,\varphi) \to \Phi$ ***при*** $(\rho,\varphi) \to (\rho_0,\varphi_0)$**.**

Теорема 3. ***Якщо функція має скінченну границю при*** $z \to z_0$***, то вона обмежена у деякому околі точки*** z_0***. Тобто,*** $|f(z)| < M$ ***, де*** M ***стала, а*** z ***- будь-яка точка цього околу.***

§ 2.5. Неперервність функції

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ задана у точці z_0 і деякому околі цієї точки.

Означення 1. ***Функція*** $f(z)$ ***неперервна у скінченній точці*** $z = z_0$***, якщо***

(1⁰) функція $f(z)$ ***визначена в точці*** z_0 ***;***

(2⁰) ***функція*** $f(z)$ ***має границю в цій точці;***

(3⁰) границя функції $f(z)$ ***співпадає із значенням функції у цій точці, тобто*** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$***, і*** $f(z_0)$ ***є скінченним числом.***

Означення 2. ***Функція*** $f(z)$ ***неперервна у точці*** $z = z_0$ ***якщо для кожного*** $\varepsilon > 0$ ***існує таке*** $\delta > 0$***, що з нерівності*** $|z - z_0| < \delta$ ***випливає нерівність*** $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ **.**

Використовуючи оператори логіки означення 2 можна записати у вигляді

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,\left(\forall z, |z - z_0| < \delta\right) : |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Нарешті, якщо назвати $z - z_0 = \Delta z$ приростом аргументу, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ - приростом функції у точці z_0 тоді можна навести наступне означення

Означення 3. ***Функція*** $f(z)$ ***неперервна у точці*** $z = z_0$***, якщо нескінченно малому приросту*** Δz ***аргументу у цій точці, і відповідає нескінченно малий приріст*** Δw ***функції. Тобто*** $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$

Означення 4. ***Якщо*** $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = M$ ***і*** M ***є скінченним, то будемо називати функцію*** $f(z)$ ***неперервною у нескінченно віддаленій точці, а число*** M ***вважають значенням*** $f(z)$ ***в цій точці.***

Означення 5. ***Функція*** $f(z)$ ***називається неперервною в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.***

Кажуть також про неперервність функції вздовж лінії , якщо умова неперервності виконується для всіх точок, взятих на цій лінії.

На основі терем про границі функції як для точок так і області справедливі наступні теореми: *сума, добуток і частка неперервних функцій є неперервні функції (*для частки виключаються ті точки, де дільник обертається у нуль); *для непереривності функцій є необхідні і достатні умови неперервності дійсної та уявної частин цієї функції*; *для непереривності функцій необхідно і достатньо, щоб були неперервними модуль і аргумент цієї функції.*

Теорема 1. ***Якщо функція*** $w = f(z)$ ***неперервна в області*** D ***і відображення нею області*** D ***на множину*** D_1 ***взаємно – однозначна, то множина*** D_1 ***є областю і обернена функція неперервна в області*** D_1.

Теорема 2. ***Якщо функція*** $\omega = F(z)$ ***неперервна в області*** D***, відображає*** D ***в*** D_1 ***а функція*** $w = \varphi(\omega)$ ***неперервна в області*** D_1***, то складена функція*** $w = f(z) = \varphi(F(z))$ ***неперервна в області*** D.

Теорема 3. ***Якщо функція*** $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ***неперервна в обмеженій замкненій області*** $\overline{D}$***, то вона в***

цій області обмежена, тобто $|f(z)| < M$***, де*** M ***- постійна,*** z ***є будь яка точка*** $\overline{D}$***, причому її модуль досягає найбільшого і найменшого значень.*** Це випливає з відповідних теорем (Вейєрштрасса) дійсного аналізу, якщо зауважити, що

$$|f(z)| = \sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y)]^2}\ .$$

§ 2.6. Диференціювання функцій комплексної змінної

2.6.1. Похідна функції

Означення 1. ***Нехай однозначна функція*** $w = f(z)$ ***визначена у скінченній точці*** z ***та її околі. Надамо аргументу*** z ***приріст*** Δz***. Тоді функція*** w ***одержить приріст*** Δw***. Складемо відношення***

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Якщо границя відношення існує при $\Delta z \to 0$***, то вона називається похідною функції*** $f(z)$ ***у точці*** z ***і позначається*** $f'(z)$***.***

Отже,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \qquad (1)$$

Означення 2. ***Функція, яка має похідну у деякій точці, називається диференційованою або моногенною у цій точці.***

Із диференційованості функції у точці випливає її неперервність. Дійсно, коли $\Delta z \to 0$ будемо мати $\Delta w = \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\Delta z \to 0.$ Однак з непевності далеко не завжди випливає диференційованість.

Зауважимо, що якщо існує границя *(1) то вона не залежить від способу, прямування точки* $z_1 = z + \Delta z$ *до точки* z. Це приводить до того, що навіть прості функції комплексної змінної можуть не мати похідної. Пояснимо це на прикладі.

Приклад.1 Нехай $f(z) = x^2 - y^2 - 2xyi$. Якщо комплексному числу $z = x + iy$ надамо приросту Δz, то x і y отримають прирости Δx і Δy. Тому з рівності $z = x + iy$ отримаємо: $z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$; а із

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2xyi$$

отримаємо:

$$f(z + \Delta z) = (x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y)i.$$

З цих рівностей знаходимо

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{2x\Delta x - 2y\Delta y - 2x\Delta yi - 2y\Delta xi}{\Delta x + i\Delta y} +$$

$$+ \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - 2\Delta x\Delta yi}{\Delta x + i\Delta y}. \qquad (2)$$

Якщо комплексна змінна $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ прямує до нуля, то його дійсна та уявна частини також прямують до нуля, і навпаки. Тобто, вираз $\Delta z \to 0$ рівносильний умовам $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Тому у правій частині (2) чисельник другого дробу є нескінченно малою величиною більш високого порядку ніж знаменник, і, отже, другий дріб прямує до нуля.

Розглянемо перший дріб. Нехай спочатку $\Delta y = 0$, $\Delta x \to 0$. Тобто точка $z_1 = z + \Delta z$ прямує до точки z вздовж прямої паралельно вісі абсцис. З (2) одержимо:

$$\lim_{\Delta z = \Delta x \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = 2x - 2yi. \qquad (3)$$

Нехай навпаки $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$, тобто точка $z_1 = z + \Delta z$ прямує до точки z здовж прямої паралельно вісі ординат. Таким чином:

$$\lim_{\Delta z=\Delta y\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=-2x+2yi \qquad (4)$$

Отже, границі за вказаних способів наближення точки z_1 до точки z, відрізняються, тому, вираз $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ не має границі, і функція не має похідної.

Приклад 2 Нехай задано функцію $f(z)=x^2-y^2+2xyi$. Виконуючи аналогічні обчислення, як і в *прикладі 1*, отримаємо:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{2x\Delta x-2y\Delta y+2x\Delta yi+2y\Delta xi}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2\Delta x\Delta yi}{\Delta x+i\Delta y}$$

У правій частині рівності чисельник першого дробу легко розкласти на множники, якщо другий доданок $-2y\Delta y$ записати так: $2i^2y\Delta y$. Отримаємо

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(2x+2yi)(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$$+\frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2\Delta x\Delta yi}{\Delta x+i\Delta y}$$

Отже

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-(2x+2yi)=\frac{(\Delta x)^2-(\Delta y)^2+2\Delta x\Delta yi}{\Delta x+i\Delta y}$$

У правій частині рівності чисельник дробу є нескінченно малою другого порядку, відносно Δx і Δy, знаменник - першого порядку, отже дріб прямує до нуля, і тому

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=2x+2yi.$$

Таким чином, функція x^2-y^2+2xyi має похідну, яка дорівнює $2x+2yi$. В той же час функція x^2-y^2-2xyi, як це було показано у першому прикладі, не має похідної.

У наступній теоремі вказані умови, за яких функція має похідну.

Теорема 1. ***Нехай функція*** $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ***визначена у деякому околі точки*** z***, причому в цій точці функції*** $u(x,y)$ ***і*** $v(x,y)$ ***диференційовані. Тоді для диференційованості функції комплексного змінного*** $f(z)$ ***в точці*** z ***необхідно і достатньо, щоб в цій точці мали місце співвідношення***

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

(*умови Д'Аламбера – Ейлера (Коші – Рімана)).*

► <u>*Необхідність*</u>. Нехай існує похідна функції

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{5}$$

Скористаємось незалежністю границі від способу наближення $z+\Delta z$ до точки z. Припустимо, що $z+\Delta z\to z$ вздовж прямої паралельно дійсній осі, тобто $\Delta y=0$, $\Delta z=\Delta x\to 0$:

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6}$$

Аналогічно, за прямуванням $z+\Delta z$ до точки z уздовж прямої паралельної уявній осі, тобто $\Delta x=0$, $\Delta z=i\Delta y$ і $\Delta y\to 0$, отримаємо

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}=$$

$$=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7}$$

Прирівнявши вирази (6) і (7) для $f'(z)$, маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{8}$$

Звідси випливає співвідношення (4) (означення рівності комплексних чисел).

Достатність. За означенням диференціала функцій від двох змінних справджується:

$$\left.\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta z) \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta(\Delta z) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

де α і β прямують до нуля разом з Δz. Тоді приріст функції $f(z)$ має вигляд

$$f(z+\Delta)-f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+\eta(\Delta z),$$

де $\eta=\alpha+i\beta$. Скориставшись умовами (4), цей приріст можна записати у вигляді:

$$f(z+\Delta z)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+\eta(\Delta z)=A\Delta z+\eta(\Delta z),$$

де $A=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ є цілком визначене число, яке не залежить від Δz, а $\eta(\Delta z)\to 0$ якщо $\Delta z\to 0$. Тому після ділення приросту функції на $\Delta z\neq 0$ отримаємо, що $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ існує і дорівнюється A. Теорема доведена. ◄

Зауваження 1. *Приймаючи до уваги умови Д'Аламбера – Ейлера похідну функції* $f(z)$ *можна подати у наступних рівносильних формах:*

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (10)$$

Умови існування похідної, отримані вище у прямокутних координатах не є єдиною формою співвідношення Д'Аламбера–Ейлера. У багатьох випадках важливо мати умови диференціювання функції комплексного змінного $f(z)=u+iv$ у точці $z\neq 0$, яка виражається в полярній системі координат. Якщо ввести полярну систему $z=\rho\left(\cos\Phi+i\sin\Phi\right)$, тоді після відділення отримаємо $f(z)=u\left(\rho,\Phi\right)+iv\left(\rho,\Phi\right)$. Де $|z|=\rho$ і $Argz=\Phi$.

Умови існування похідної (*необхідні і достатні)* наступні:

1^0) функції u і v диференційовані функції відносно ρ і Φ;

2^0) їх частинні похідні пов'язані наступними співвідношеннями:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\Phi},\qquad \frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\Phi} \tag{10}$$

Щоб впевнитись у цьому, достатньо показати, що u і v є диференційовані функції відносно ρ і Φ $(\rho\neq 0)$ тоді і тільки тоді, якщо вони диференційовані функції за x і y і для цих умов (10) еквівалентні умовам (4).

Оскільки $x=\rho\cos\Phi$, $y=\rho\sin\Phi$, і $f(z)=u(x(\rho,\Phi),y(\rho,\Phi))+iv(x(\rho,\Phi),y(\rho,\Phi))$. Відповідно, то

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\Phi+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\Phi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial\Phi}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\Phi}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\Phi}=-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\rho\sin\Phi+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\rho\cos\Phi.$$

Скориставшись (4), отримаємо першу з рівняння (10), тобто

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\Phi}.$$

Аналогічно прийдемо до другої рівності Д'Аламбера–Ейлера в полярній системі координат

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\Phi}.$$

Таким чином, *умови Д'Аламбера – Ейлера функції* $f(z)=u(\rho,\Phi)+iv(\rho,\Phi)$, *яка задана у Декартовій системі координат (9) і її похідна дорівнюється*

$$f'(z)=\frac{\rho}{\rho\left(\cos\Phi+i\sin\Phi\right)}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)=\frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) \tag{11}$$

і

$$f'(z)=\frac{1}{\rho(\cos\Phi+i\sin\Phi)}\left(\frac{\partial v}{\partial\Phi}-i\frac{\partial u}{\partial\Phi}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\Phi}-i\frac{\partial v}{\partial\Phi}\right)(12)$$

Приклад 3. *Показати, що функція* $w=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$ *має похідну у кожній точці визначення.*

► $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=6xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2.$

Умови (4) виконуються і функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ очевидно диференційовані тому, функція $f(z)$ має похідну. Скориставшись формулою (9) отримаємо: $f'(z)=3x^2-3y^2+6xyi.$ ◄

Приклад 4. Функція $f(z)=\ln\rho+i\Phi$ $(z=\rho(\cos\Phi+i\sin\Phi))$ має похідну у кожній точці $z\neq 0.$ Справді $u(\rho,\Phi)=\ln\rho,\ \ v(\rho,\Phi)=\Phi.$ тоді $\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho},\ \ \frac{\partial u}{\partial\Phi}=0,$ $\frac{\partial v}{\partial\rho}=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial\Phi}=1.$ Умови (10) виконуються і тому за формулою (11) матимемо:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos\Phi+i\sin\Phi}\cdot\frac{1}{\rho}=\frac{1}{z}.$$

2.6.2. Деякі властивості диференційованих функцій.

Оскільки похідна і границя функції комплексної змінної означаються, а основні алгебраїчні дії з функціями і їх границями формулюються точно так, як і з функцією дійсної змінної , то і основні теореми про диференціювання функцій у комплексному аналізі формулюються і доводяться точно так, як і у дійсному аналізі.

Сформулюємо деякі з цих теорем.

1) *Якщо* $w_1=f_1(z),$ *і* $w_2=f_2(z)$ *диференційовані в точці* $z=z_0$, *то сума, добуток і частка диференційовані в ній,* *причому похідні обчислюються за формулами:*

$$\frac{d}{dz}(w_1+w_2)=\frac{dw_1}{dz}+\frac{dw_2}{dz};\ \frac{d}{dz}\left(w_1\cdot w_2\right)=\frac{dw_1}{dz}\cdot w_2+w_1\cdot\frac{dw_2}{dz};$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)=\frac{\frac{dw_1}{dz}\cdot w_2-w_1\cdot\frac{dw_2}{dz}}{(w_2)^2},$$

У останньому випадку $w_2=f_2(z)\neq 0$.

2) Якщо $\omega=F(z)$ *має в точці* $z=z_0$ *похідну* $F'(z_0)$*, а функція* $w=\varphi(\omega)$ *має в точці* $\omega=\omega_0=F(z_0)$ *похідну* $\varphi'(\omega_0)$*, тоді складена функція* $w=f(z)=\varphi(F(z))$ *має похідну в точці* $z=z_0$*, яка обчисляється за формулою:*

$$f'(z_0)=\varphi'(\omega_0)\cdot F'(z_0)=\varphi'(\omega_0)\cdot\omega'(z_0).$$

3) Якщо $w=f(z)$ *має похідну* $f'(z_0)$ *в точці* $z=z_0$*, і відображення деякого околу точки* $z=z_0$ *на певний окіл точки* $w_0=f(z_0)$ *однолистне, то в околі точки* w_0 *існує функція* $z=\varphi(w)$*, обернена для функції* $w=f(z)$*, яка має у точці* $w=w_0$ *похідну* $\varphi'(w_0)$*,причому*

$$f'(z_0)=\frac{1}{\varphi'(w_0)}.$$

2.6.3. Аналітичність функції

1^0. Аналітичність однозначної функції

Означення 1. ***Однозначна функція*** $f(z)$ ***називається регулярною у деякій області, якщо у кожній її точці вона має похідну.***

Означення 2. ***Функція*** $f(z)$ ***називається аналітичною або голоморфною у області*** G ***, якщо вона диференційована у кожній точці цієї області***.

Зауваження 1. *Регулярна функція може називатися аналітичною. Але поняття аналітичності більш ширше ніж* *регулярність. Аналітична функція може бути багатозначною функцією.*

Зауваження 2. *Аналітичність функції означається для області.* Тому можна, наприклад, говорити про аналітичність деякої функції лише у відкритому крузі $|z| < R$, не замкненому $|z| \le R$ крузі. Якщо інколи і говорять про аналітичність функції в точці, на кривій або у замкненій області, то при цьому припускають, що *аналітичність має місце у деякій області, яка містить у себе точку, криву або замкнену область***.** Наприклад, аналітичність у замкненому крузі $|z| \le R$ означає аналітичність в деякому крузі $|z| < R_1$, де $R_1 > R$; Аналітичність функції в точці z_0 означає аналітичність у деякому крузі $|z - z_0| < r$ і таке інше.

2⁰. Аналітичність багатозначної функції

Аналітичність у області G припускає однозначність і диференційовність функції. Відомо, що диференційовна функція є неперервною. Значить, аналітична функція обов'язково неперервна. Тому у випадку багатозначної функції необхідно перш за все з'ясувати, чи можна виділити однозначну і неперервну у області G гілку функції. Як ми побачимо нижче, це не завжди можна зробити.

Означення 3. ***Кажуть, що в області*** G ***виділена однозначна гілка функції, якщо в кожній точці області вибрано одне із значень багатозначної функції так, що отримано однозначну неперервну функцію***.

Щоб пояснити, як виділяється однозначна гілка, розглянемо, наприклад функцію $w = \sqrt[n]{z - z_0}$. В кожній точці $z, \quad z \ne z_0$ вона має n значень. Щоб їх знайти, покладемо: $z - z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тоді

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ \left(k = \overline{0,(n-1)}\right),$$

де $r = |z - z_0|$, $\varphi = \arg(z - z_0)$.

Виберемо з n значень, якесь одне, тобто вважатимемо число k фіксованим. Подивимось, як буде змінюватись вибране значення кореня, якщо z змінюється уздовж неперервної кривої L, обходячи цю криву і точку z_0 проти

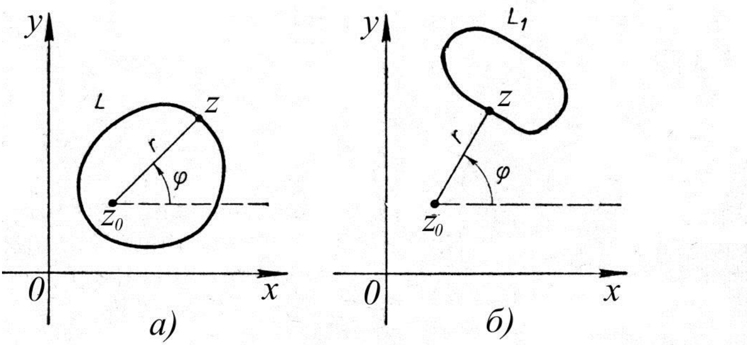


Рис. 18

ходу годинникової стрілки. З рисунка *18а* бачимо, що r і φ при цьому змінюються неперервно, значить $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ також змінюється неперервно. Якщо z, переміщуючись уздовж L, повернеться у початкове положення, то r також повернеться до початкового значення, між тим φ буде весь час зростати і одержить приріст 2π. В силу цього w одержить нове значення, тобто,

$$w_{k1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{(\varphi + 2\pi) + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{(\varphi + 2\pi) + 2k\pi}{n}\right)$$

Легко знайти зв'язок між w_{k1} і початковим значенням w_k, отже

$$w_{k1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$= w_k \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. Таким чином, нове значення кореня дорівнює попередньому помноженому на число $\omega = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$, і очевидно не залежить від форми шляху по якому обходить z_0 один раз.

Зауважимо, що $\omega^n = 1$, тобто ω є один з коренів $n-$го степеня з одиниці.

Простежимо тепер за зміною вибраного значення кореня, коли z пробіжить замкнений контур L_1, який не обходить точку z_0. З рисунка (*Рис. 18 б*)) бачимо, що в цьому випадку r і φ збільшуються або зменшуються, коли z пробігає шлях L_1 і повертаються за повного повороту до попередніх значень r і φ. Отже, до попереднього значення, повернеться і спочатку вибране значення кореня незалежно від форми шляху. В зв'язку з важливістю отриманого результату, сформулюємо його як терему.

Теорема 2. ***Якщо змінна точка z опише деякий замкнений шлях, який обходить точку z_0 один раз проти ходу годинникової стрілки, то будь яке значення кореня $\sqrt[n]{z-z_0}$ помножена на $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$ перейде у нове значення:***

$$\left.\sqrt[n]{z-z_0}\right|_{нов} = \left.\sqrt[n]{z-z_0}\right|_{стар} \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Якщо ж z опише замкнений шлях, який не обходить точку z_0, то корінь повернеться до попередньо вибраного значення.

Означення 4. ***Точка при обході якої попередньо вибране значення багатозначної функції переходить у нове,***

називається точкою розгалуження багатозначної функції.

Отже, для функції $w=\sqrt[n]{z-z_0}$ *точка* z_0 *є точкою розгалуження, так званою алгебраїчною точкою розгалуження*

. **Приклади.** 1) Якщо $n=2$ число $\omega=\cos\frac{2\pi}{2}+\sin\frac{2\pi}{2}=-1.$ Отже

$$\sqrt{z-z_0}\Big|_{нов}=(-1)\,\sqrt{z-z_0}\Big|_{стар},$$

Тобто, при обході точки розгалуження z_0 квадратний корінь $\sqrt{z-z_0}$ міняє знак на протилежний.

2) Якщо $n=3$ число $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$ отже,

$\sqrt[3]{z-z_0}\Big|_{нов}=\sqrt[3]{z-z_0}\Big|_{стар}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, тобто, при обході точку розгалуження z_0 корінь кубічний $\sqrt[3]{z-z_0}$ помножається на $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, який є корінь кубічний з 1.

3) Якщо $n=4$ тоді число $\omega=\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=i.$ Отже, $\sqrt[4]{z-z_0}\Big|_{нов}=\sqrt[4]{z-z_0}\Big|_{стар}\cdot i$, тобто , при обході точки розгалуження z_0 корінь четвертого степеня $\sqrt[4]{z-z_0}$ множиться на i, який є коренем четвертого степеня із 1.

4) Візьмемо $w=\dfrac{z+\sqrt{1+z^2}}{1-\sqrt[3]{3}}$.

Оскільки $\sqrt{1+z^2}=\sqrt{z+i}\cdot\sqrt{z-i}$, то i та $-i$ є точками розгалуження. Якщо z обійде одну з них, то один корінь змінює знак, другий же корінь не змінюється, значить, добуток змінює знак; якщо ж z не обійде жодної з точок $i, -i$, або обійде обидві, то $\sqrt{1+z^2}$ не зміниться. Наша функція має ще одну точку розгалуження: $z=0$, при обході якої $\sqrt[3]{z}$ помножається на $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Значить, шість виразів

$$\frac{z+\sqrt{1+z^2}}{1-\sqrt[3]{3}} \qquad \frac{z-\sqrt{1+z^2}}{1-\omega\sqrt[3]{3}} \qquad \frac{z+\sqrt{1+z^2}}{1-\sqrt[3]{3}}$$

$$\frac{z-\sqrt{1+z^2}}{1-\omega\sqrt[3]{3}} \qquad \frac{z+\sqrt{1+z^2}}{1-\omega^2\sqrt[3]{3}} \qquad \frac{z-\sqrt{1+z^2}}{1-\omega^2\sqrt[3]{3}}$$

є різними гилками однієї і тієї ж функції, які переходять одна у другу, коли z описує належні замкнені шляхи, Наприклад, перша перейде у другу, якщо z обійде одну з точок $i, -i$, перша перейде у четверту, якщо z одночасно обійде точку 0 і дну з точок $i, -i$, і так далі.

Повернемося до питання, яке поставлене спочатку*: в якому випадку можна виділити однозначну гілку функції? Очевидно, що для цього область не повинна містити точок розгалуження, бо при їх обході одна гилка функції переходить у другу.*

З приведених прикладів зрозуміло, що відсутність в області точок розгалуження гарантує однозначність в ній функції тільки у тому випадку, коли область однозв'язна

Означення 5. ***Однозначна в області гилка функції називається аналітичною в області, якщо в кожній її точці функція має похідну.***

2.6.4. Знаходження аналітичної функції за заданою дійсною (уявною) частинами

При багатьох застосуваннях теорії функцій комплексної змінної доводиться розв'язувати наступну задачу: за заданою функцією $\varphi(x,y)$; *1) з'ясувати з яких умов $\varphi(x,y)$ є дійсною або уявною частиною аналітичної функції; 2) знайти аналітичну функцію якщо це можливо.*

Нижче буде показано, що цю задачу можна розв'язати тоді і тільки тоді коли функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ гармонічні.

Означення.6. ***Однозначна дійсна функція двох дійсних змінних називається гармонічною в області G, якщо вона в ній неперервна, має неперервні частинні похідні першого і другого поряду і задовольняє рівнянню Лапласа***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Означення 7. ***Дві гармонічні функції, які зв'язані умовами Д'Аламбера – Ейлера, називаються гармонічно спряженими між собою, якщо вони являються дійсною і уявною частинами аналітичної функції.***

Наприклад, функції $x^2-y^2,\ \ xy,\ \ ax+by+c$ - гармонічні функції, x^2+y^2 - не гармонічна, $\ln(x^2+y^2)$ - гармонічна, $\frac{y}{x}$ - не гармонічна, $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ - гармонічна і таке інше.

` **Теорема 3.** ***Дійсна і уявна частини аналітичної функції являються гармонічно спряженими функціями.***

► Нехай $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ є аналітична функція. Тоді виконуються умови Д'Аламбера - Ейлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Якщо знайти похідні від обох частин першого рівняння за x, а від обох частин другого рівняння за y і скласти отримане:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

то матимемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \ ◄$$

Зауваження. *З доведеної теореми випливає, що і дійсною і уявною частинами аналітичної функції можна взяти лише гармонічну функцію двох дійсних змінних.*

Наприклад, не існує аналітичної функції, дійсна частина якої дорівнює $x^2 + y^2$.

Теорема 4. ***Для всякої гармонічної функції можна побудувати аналітичну функцію, дійсна (уявна) частина якої співпадає із заданою функцією.***

► Нехай задано гармонічну функцію $u(x, y)$. Доведемо, що можна побудувати таку функцію $v(x, y)$, що $u(x, y) + iv(x, y)$ буде аналітичною функцією. Для цього $v(x, y)$ повинна задовольняти умови Д'Аламбера - Ейлера: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Якщо функція $v(x, y)$, яка їм задовольняє існує, то вона гармонічна і, значить, диференційована, і

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \qquad (11)$$

В цій рівності права частина відома так як $u(x, y)$ задана. Для цього права частина повинна бути повним диференціалом, тобто $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ або $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ отже, права частина є повний диференціал. Тому з (11) знаходимо

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C.$$

Криволінійний інтеграл від нового диференціала dv не залежить від шляху інтегрування з початком в (x_0, y_0) і кінцем в (x, y), лише щоб крива лежала в області неперервності підінтегрального виразу. Отже, якщо аналітична функція із заданою дійсною частиною $u(x, y)$ існує, то її можна подати у вигляді:

$$f(z)=u(x,y)+i\left[C+\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right].$$

Навпаки, якщо за заданою гармонічною функцією $u(x, y)$ скласти, згідно з попередньою формулою, функцію $f(z)$, уявну частину якої позначено $v(x, y)$, то матимемо $v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$. Під знаком інтеграла стоїть повний диференціал, і тому можна застосовувати правило інтегрування криволінійного інтеграла за верхньою межею:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умови Д’Аламбера - Ейлера виконуються, і тому $f(z)-$ аналітична функція.

Очевидно, аналогічно розв’язується задача про побудову аналітичної функції за її уявною частиною. ◄

На практиці, при побудові аналітичної функції застосують описаний нижче метод.

Приклад 1. *Знайти аналітичну функцію, у якій дійсна частина якої дорівнює* $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$.

► Оскільки $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ то $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

Підставимо ці частині похідні в умови Д'Аламбера - Ейлера, отримаємо

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}. \qquad (12)$$

Перше рівняння дає: $v(x,y)=\int -\frac{2y}{x^2+y^2}dx+\varphi(y)$.(оскільки інтегрування проводимо за x, то стала інтегрування може бути довільною функцією від y). Таким чином $v(x,y)=-2\tan^{-1}\frac{x}{y}+\varphi(y).$ Диференціюємо за y: $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)$. Порівнюючи з другим рівнянням (12) знаходимо, що $\varphi'(y)=0$ або $\varphi(y)=const.$

Отже, $v(x,y)=-2\tan^{-1}\frac{x}{y}+C.$ Нарешті одержимо

$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+i\left(-2\tan^{-1}\frac{x}{y}+C\right). \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Знайти аналітичну функцію* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *в околі точки* $z=0$, *якщо* $v(x,y)=x^3-3xy^2$ *і* $f(0)=1.$

► Задача може бути розв'язана, якщо $v(x,y)=x^3-3xy^2$ є гармонічною функцією у всіх точках площини. Покажемо, що це так:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-6xy.$$

Відповідно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=6x-6x=0.$$

Тоді ми отримаємо

$$u(x,y)=-\int 6xydx=-3x^2y+\varphi(y);\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3x^2+\varphi'(y)=$$

$$=-(3x^2-3y^2)\,;\ \varphi'(y)=3y^2,\ \varphi(y)=y^3+C.$$

і

$$u(x,y)=-3x^2y+y^3+C;\ \ f(z)=-3x^2y+y^3+C+i\left(x^3-3xy^2\right)=$$
$$=i\left(x^3+i3x^2y-3xy^2-iy^3\right)+C=i(x+iy)^3+C=iz^3+C.$$

За умови $f(0)=C=1$. Нарешті $f(z)=iz^3+1$. ◄

Приклад 3. *Знайти гармонічну функцію виду* $u(x,y)=\varphi\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

► Якщо гармонічна функція вказаного виду існує, то вона може бути найдена з рівняння Лапласа. Складемо рівняння для цієї функції. Покладаємо $t=x+\sqrt{x^2+y^2}$ і знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(t)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\varphi'(t)\frac{t}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}==\varphi''(t)\frac{t^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi'(t)\frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(t)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(t)\frac{y^2}{x^2+y^2}+\varphi'(t)\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}.$$

Підставляємо знайдені значення $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в рівняння Лапласа:

$$\varphi''(t)\frac{y^2+t^2}{x^2+y^2}+\varphi'(t)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

$$\varphi''(t)\frac{y^2+x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\varphi'(t)=0,$$

$$\varphi''(t)\left(2\sqrt{x^2+y^2}+2x\right)+\varphi'(t)=0,\ \ 2\varphi''(t)t+\varphi'(t)=0,$$

$$\frac{2\varphi''(t)}{\varphi'(t)}+\frac{1}{t}=0,\ \ 2\ln\varphi'(t)+\ln t=2\ln\left(\frac{1}{2}C\right),\ \ \varphi'(t)=\frac{C}{2\sqrt{t}},$$

$$\varphi(t)=C\sqrt{t}+C_1,\ u(x,y)=C\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_1.\ ◄$$

2.6.5. Геометричний зміст похідної.

Нехай аналітична в області D функція $w=f(z)$ має в точці z_0 похідну $f'(z_0)\neq 0$. За позначень $\Delta z=\Delta\rho e^{i\varphi}$, $\Delta w=\Delta r e^{i\theta}$, $f'(z)=Ae^{i\alpha}$, маємо:

$$f'(z)=Ae^{i\alpha}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\rho}e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Тут величини $\dfrac{\Delta r}{\Delta\rho}$ і $\theta-\varphi$ є відповідно модулем і аргументом величини $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$. Тоді

$$|f'(z_0)|=A=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\rho};\qquad \arg f'(z_0)=\alpha=\lim_{\Delta z\to 0}(\theta-\varphi).$$

Візьмемо тепер у області D довільно вибрану криву l, яка

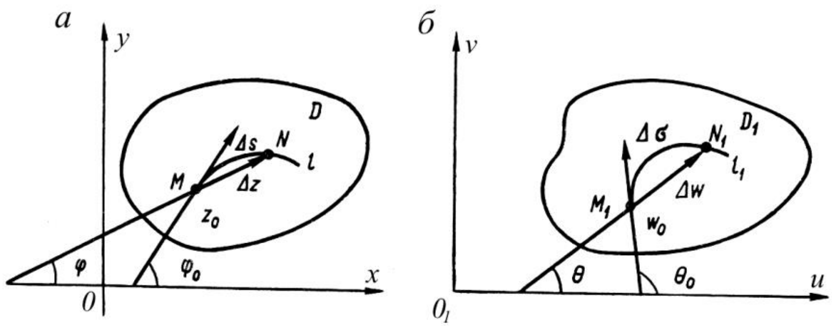


Рис. 19

виходить з точки z_0 (*Рис. 19а*), і має в цій точці дотичну. Тоді в області D_1, на яку функція $w = f(z)$ відображає область D, буде існувати крива l_1 (*Рис 19б*), яка відповідає l і, яка виходить з точки $w_0 = f(z_0)$ і теж має в цій точці дотичну. Дійсно, якщо перша крива має рівняння $z = z(t)$, причому $z_0 = z(t_0)$, то для того щоб крива мала дотичну у точці z_0, повинна бути $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} \neq 0$. Отже точкам кривої l в області D_1 будуть відповідати точки, які утворюють криву l_1 з рівнянням $w = f(z(t)) = w(t)$, причому $w_0 = w(t_0)$. Для кривої l_1, також $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=t_0} \neq 0$, оскільки

$$\frac{dw}{dt} = \frac{df[z(t)]}{dt} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt};$$

$$\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{t=t_0} = f'(z_0) \neq 0, \qquad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0} = z'(t_0) \neq 0$$

Позначимо кут, який утворений дотичною до кривої l в точці z_0 з віссю Ox через φ_0, а кут нахилу дотичної до кривої l_1 в точці w_0 до осі O_1u через θ_0. Дотична є граничним положенням січної, тому $\varphi_0 = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \varphi,\ \theta_0 = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \theta$. Але

$$\arg f'(z_0) = \alpha = \lim_{\Delta z \to 0} (\theta - \varphi) = \theta_0 - \varphi_0.$$

З відси випливає, що *кут на який повертається крива в точці z_0 при відображенні функцією $w = f(z)$, дорівнює аргументу похідної $f'(z)$ в цій точці і, отже, не залежить від виду і напрямку кривої.*

Якщо з точки z_0 (*Рис. 20а*) виходять дві криві m і l, які мають дотичні в точці z_0, тоді функція $w = f(z)$ відобразить їх на деякі криві m_1 і l_1 (*Рис 20б*), які виходять з точки w_0 і також мають дотичні в точці w_0.

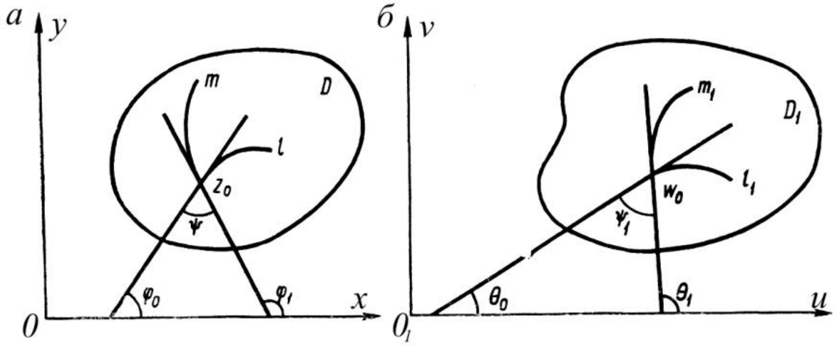


Рис. 20

Кут, між кривими m і l, дорівнює $\varphi_1 - \varphi_0 = \psi$ (*Рис. 20а*), а кут між m_1 і l_1 дорівнює $\theta_1 - \theta_0 = \psi_1$. Але, як тільки що було доведено,

$$\arg f'(z_0) = \alpha = \theta_1 - \theta_0 = \varphi_1 - \varphi_0$$

звідси, $\theta_1 - \theta_0 = \varphi_1 - \varphi_0$ або $\psi = \psi_1$. Отже,

кут між двома лініями, які перетинаються у деякій точці, дорівнює за величиною і орієнтацією куту між відповідними лініями при відображенні за допомогою аналітичної функції.

Ця властивість аналітичної функції звичайно формулюються так:

відображення за допомогою аналітичної функції має властивість консерватизму кутів у всіх точках, в яких її похідна не дорівнює нулю.

Позначимо довжину дуги *MN* кривої *l* через Δ*s*, (*Рис.19а*), а довжину дуги M_1N_1 кривої l_1 через $\Delta\sigma$ (*Рис 19б*). Відомо, що

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\rho} = 1, \; \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta r} = 1.$$

Тому можна записати

$$|f'(z_0)| = A = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}.$$

Остання границя є ***коефіцієнтом деформації лінії*** l. З останньої рівності маємо: *при відображенні аналітичною функцією коефіцієнт лінійної деформації кривої у точці, через яку проходить крива, дорівнює модулю похідної у цій точці не залежить від виду кривої.* Очевидно, що зміна лінійних розмірів залежить від точки і виду функції, яка відображує D на D_1.

Отже, *відображення аналітичною функцією має постійну деформацію лінійних розмірів у кожній точці, у якій її похідна не дорівнюється нулю.*

Означення 8. ***Відображення околу точки*** z_0 ***на окіл точки*** w_0***, що виконується аналітичною функцією*** $w = f(z)$ ***і має у точці*** z_0 ***властивість збереження кутів і постійності деформації називається конформним відображенням.***

Приклад 1. *Знайти коефіцієнт деформації і кут повороту при відображенні функцією* $w = z^2$ *в точці* $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

► Маємо $w'(z) = 2z$, $w'\big|_{z=z_0} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$

$|w'(z_0)| = 4$ і $\arg w'(z_0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким чином, коефіцієнт деформації $A = 4$, а кут повороту $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. ◄

Зауваження. *Якщо аналітична у деякій області* D *функція* $w = f(z)$ *відображує цю область на* D_1 *однозначно, при цьому дуга* $l \subset D$ *буде відображуватись на дугу* l_1 *на площині* w*, то довжина цієї дуги* l_1 *обчислюється за формулою*

$$l_1 = \int_l |f'(z)||dz| \qquad (*)$$

де D_1 *можна обчислити за формулою*

$$S_{D_1} = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy \qquad (**)$$

де, $|f'(z)|^2$ *дорівнює квадрату коефіцієнта деформації площини при відображенні функцією* $w = f(z)$.

Приклад 2. *Точка* $z = x + iy$ *описує сегмент*

$$x = 1, \quad -1 \le y \le 1.$$

Знайти довжину дуги отриману при відображенні цього відрізка функцією $w = z^2$.

► <u>*Перший метод.*</u> Ми маємо $w = z^2$ або $u + iv = x^2 - y^2 + i2xy$

звідси

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

очевидно на дузі

$$\begin{cases} u = 1 - y^2, \\ v = 2y, \end{cases}$$

Коли y змінюється від -1 до 1 змінюється від -2 до 2. З останньої системи отримаємо рівняння параболи $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.

Довжина дуги параболи обчислюється за формулою

$$l_1 = 2\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{4}}dv = \int_0^2 \sqrt{4 + v^2}dv = 2\sqrt{2} + \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

<u>*Другий метод.*</u> Скориставшись формулою (*) отримаємо

$$l_w = \int_L |2z||dz| = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1 + y^2}dy = 4\int_0^1 \sqrt{1 + y^2}dy = 2\sqrt{2} + \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right). \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Обчислити площу області, на яку функція* e^z *відображує квадрат*

$$\left(a-\varepsilon \le x \le a+\varepsilon, -\varepsilon \le y \le \varepsilon\right),$$

де $a \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < \pi$, $z = x + iy$. *Обчислити границю відношення площ цих областей, при* $\varepsilon \to 0$.

► *Перший метод.* Маємо $w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ або $w = \rho e^{i\varphi}$, де $\rho = e^x$, $\varphi = y$. Таким чином, при відображенні $w = e^z$ отримаємо на площині w область яка обмежена двома променями $\arg w = -\varepsilon$ і $\arg w = \varepsilon$, і дугами двох кіл $\rho = e^{a-\varepsilon}$ і $\rho = e^{a+\varepsilon}$. Площа відображеної області буде дорівнюватись

$$S_w = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varphi \int_{e^{a-\varepsilon}}^{e^{a+\varepsilon}} \rho d\rho = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon}\left(e^{4\varepsilon}-1\right).$$

Другий метод. Скориставшись формулою (**) отримаємо

$$S_w = \iint_D |f'(z)| dxdy = \iint_D e^{2x} dxdy = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{2x} dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon}\left(e^{4\varepsilon}-1\right).$$

Очевидно, що площа області D $S_z = 4\varepsilon^2$, тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S_w}{S_z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \cdot e^{2a-2\varepsilon}(e^{4\varepsilon}-1)}{4\varepsilon^2} = e^{2a}.$$

Практичне заняття - 2.3

1. ***Використовуючи умови Д'Аламбера – Ейлера, з'ясувати, які з наступних функцій аналітичні принаймні в одній точці, а які не аналітичні***

1) $w = z^2 \overline{z}$;	2) $w = ze^z$;	3) $w = \lvert z \rvert z$;
4) $w = e^{z^2}$;	5) $w = \lvert z \rvert \operatorname{Re} \overline{z}$;	6) $w = \sin 3z - i$;
7) $w = \overline{z} \operatorname{Re} z$;	8) $w = \overline{z} \operatorname{Im} z$;	9) $w = \lvert z \rvert \operatorname{Im} z$.

2. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за заданою дійсною або уявною її частини

1) $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2};$
2) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x shy + x^3 - 3xy^2 + y;$
3) $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2\left(x^2 + y^2\right)};$
4) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y;$
5) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, якщо $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi};$
6) $v = \arctan\dfrac{y}{x}$ $(x > 0)$, якщо $f(1) = 0;$
7) $u = x^2 - y^2 + 2x$, якщо $f(i) = 2i - 1;$
8) $v = 2(chx\sin y - xy)$, якщо $f(0) = 0;$
9) $u = 2\sin x chy - x$, якщо $f(0) = 0;$
10) $v = 2(2shx\sin y + xy)$, якщо $f(0) = 3;$
11) $v = -2\sin 2x sh2y + y$, якщо $f(0) = 2;$
12) $v = 2\cos x chy - x^2 + y^2$, якщо $f(0) = 2;$
13) $u = 2e^x\cos y$, якщо $f(0) = 2.$

3) Показати, що наступні функції являються аналітичними

1) $u = x^2 + 2x - y^2;$	2) $u = 2e^x\cos y;$	3) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2};$
4) $u = -\dfrac{y}{x^2 + y^2};$	5) $u = \arctan\dfrac{y}{x};$	6) $u = \ln(x^2 + y^2).$

4) Знайти пари гармонічно спряжених функцій до заданих пар гармонічних функцій

1) $u(x,y)=3(x^2-y^2)$, $v(x,y)=3x^2y-y^2$;
2) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;
3) $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$;
4) $u(x,y)=e^x\cos y+1$, $v(x,y)=1+e^x\sin y$.

5) З'ясувати чи існують гармонічні функції даного виду, у випадку існування знайти їх

1) $u=\varphi(ax+by)$;	2) $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;	3) $u=\varphi(xy)$;
4) $u=\varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$;	5) $u=\varphi(x^2+y^2)$;	6) $u=\varphi(x^2+y)$.

6) Знайти коефіцієнти деформації A і кут повороту α при заданому відображенні $w=f(z)$ у даних точках

1) $w=e^z$, $z_1=\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}$, $z_2=-1-i\dfrac{\pi}{2}$;
2) $w=\sin z$, z_1-0, $z_2=1+i$;
3) $w=z^3$, $z_1=2-i$, $z_2=1+i\dfrac{\pi}{2}$;
4) $w=z^2$, $z_1=1+i$, $z_2=-3+4$.

7. Яка частина площини стискається, а яка розтягується, якщо відображення здійснюється наступними функціями:

1) $w=z^2$?	2) $w=\dfrac{1}{z}$?	3) $w=e^z$?
3) $w=\ln(z-1)$?	4) $w=z^2+2z$?	

8. *Знайти довжину* l *спіралі на яку відображається відрізок* $y = x, \quad 0 \le y \le 2\pi$ *функцією* $w = e^z$.

9. *Знайти площу області на яку область* $1 \le |z| \le 2$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$ *відображується функцією* $w = z^2$.

10. *Знайти область* D_w *на яку прямокутник* D $\{1 \le x \le 2, 0 \le y \le 8\}$ *відображається* $w = e^z$ *і обчислити площу* S_w *використовуючи формулу (**). Пояснити , чому формула (**) дала невірну відповідь.*

12. *Знайти площу фігури яку одержали після відображення функцією* $w = 1 + iz$ *трикутника, який обмежений лініями* $x = 0, \ y = 0, \ x + y = 1$**.**

§ 2.7. Елементарні трансцендентні функції

2.7.1. Показникова функція. Формула Ейлера

У області дійсної змінної e^x, $\sin x$, $\cos x$ мають розвинення у ряди:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (3)$$

При всякому дійсному числовому значенні x збігаються і мають суми, які стоять у лівих частинах наведених рівностей.

Нехай r деяке дійсне число і складаємо наступні степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!} \qquad (4)$$

Ці ряди збігаються при любих додатних значеннях r. Отже дані ряди збігаються до відповідних функцій. Оскільки $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ ми можемо сказати, що ряди (4) є ряди члени яких є абсолютні величини членів рядів з комплексними змінними, які будуть називатись як і в області дійсних змінних і позначатися символами e^z, $\sin z$, $\cos z$. Наведемо означення:

Означення 1. *Яке б не було значення (дійсне або уявне) комплексного змінного* z, *під символами* e^z, $\sin z$, $\cos z$ *вважають суми наступних рядів*

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...+\frac{z^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad (5)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (6)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (7)$$

Отже, за означенням, рівності (5) – (7) будуть тотожностями у всіх точках комплексної площини z.

Покажемо, що теорема додавання для показникової функції виконується

Теорема 1. ***Для всяких комплексних чисел*** z_1 ***і*** z_2 ***виконується наступна рівність***

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2) \qquad (8)$$

або

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2} \qquad (9)$$

► Для всяких z_1 і z_2 наступні перетворення можливі

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{z_1^p}{p!}\cdot\sum_{q=0}^{\infty}\frac{z_2^q}{q!}=\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{z_1^p\cdot z_2^q}{p!\cdot q!} \qquad (10)$$

Остання рівність є подвійним рядом, який отримано після перемноження двох абсолютно збіжних рядів; після групування його можна представити у вигляді:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=1+(z_1+z_2)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}\right)+$$

$$+\left(\frac{z_1^3}{3!}+\frac{z_1^2}{2!}\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1}{1!}\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{p,q=0}\frac{n!}{p!q!}z_1^p z_2^q=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n=e^{z_1+z_2}$$

Тут, прийнято до уваги, що за умови $p+q=n$ вираз $\frac{n!}{p!q!}$ є ні чим іншим, як біноміальним коефіцієнтом C_n^p.

Отже, сума $\sum_{p,q=0}\frac{n!}{p!q!}z_1^p z_2^q$ є розкладом „бінома ” $(z_1+z_2)^n$ ◄

2.7.1.1. Формула Ейлера

Помноживши ліву і праву частину рівності (6) на уявну одиницю i, і скориставшись формулами для степеня уявної одиниці, маємо з (6) і (7):

$$i\sin z=iz+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\ldots+\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad (11)$$

$$\cos z=1+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\ldots+\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (12)$$

Після додавання рівностей (11) і (12) одержимо

$$\cos z+i\sin z=1+(iz)+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\ldots+\frac{(iz)^n}{n!}+\ldots=e^{iz}$$

Отже ми одержали ***формулу Ейлера***

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \qquad (13)$$

Різниця рівнянь (12) і (11) дає наступну формулу

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z \qquad (14)$$

У формулах (13) і (14) z може бути яким завгодно комплексним числом; зокрема буде дійсним або уявним.

2.7.1.2. Головні властивості показникової функції

Скориставшись теоремою додавання (9) і тотожністю Ейлера (13), ми легко ***виразимо показникову функцію*** $w = e^z$ ***через дійсну і уявну частини*** x і y ***незалежної змінної*** z.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (15)$$

Після позначення $u(x,y)$ і $v(x,y)$ дійсної і уявної частини $w = e^z$ отримаємо з (15)

$$\begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y, \\ v(x,y) = e^x \sin y \end{cases} \qquad (16)$$

Наразі модуль і аргумент функції e^z можна знайти за даним значенням z. З формул (16) випливає

$$|w| = |e^z| = \sqrt{u^2 + v^2} = e^x \qquad (17)$$

$$Argw = Arge^z = \tan^{-1}\frac{v}{u} = y + 2k\pi \qquad (18)$$

Останнім формулам можна надати наступного виду

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \qquad (19)$$

$$Arge^z = \operatorname{Im} z + 2k\pi \qquad (20)$$

1^0. *Функція e^z ніде на комплексній площині не має нулів, тобто при всяких значеннях z не обертається у нуль.*

Це випливає із співвідношення (19), оскільки, за властивістю показникової функції дійсної змінної, $e^{\operatorname{Re} z} > 0$ для всяких z, тобто $|e^z| > 0$.

2^0. *Якщо точка z рухається по прямій паралельно осі Oy, то змінюється лише аргумент функції e^z а її модуль e^z залишається сталим.*

Якщо точка z рухається по прямій паралельно вісі Ox, тоді міняється модуль e^z а аргумент e^z залишається не змінним.

Це очевидно з формул(17) і (18) або з (19) і (20).

3⁰. *Функція e^z прямує до нуля, рівномірно відносно уявної частини z, якщо дійсна частина z прямує до $(-\infty)$; і e^z прямує до $(+\infty)$ рівномірно відносно уявної частини z, якщо дійсна частина z прямує до $(+\infty)$:*

$$\lim_{\operatorname{Re} z\to-\infty} e^z = 0; \qquad \lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty} e^z = +\infty.$$

4⁰. *При заміні z на $z+2\pi i$ значення функції не змінюється.*

Справді за цією заміною дійсна частина $\operatorname{Re} z$ не міняється, і, отже, не міняється модуль e^z, уявна ж частина $\operatorname{Im} z$ збільшується на 2π і, тоді, аргумент e^z збільшується також на 2π, але при цьому значення e^z, очевидно, не змінюється.

Іншими словами, ***функція e^z має чисто уявний період $2\pi i$:***

$$e^{z+2\pi i} = e^z \tag{21}$$

Що випливає з формули Ейлера і теореми додавання. Покладаючи в (13) z дорівнюється $2\pi i$, одержимо:

$$e^{2\pi i} = 1, \tag{22}$$

і тоді

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$$

Зауваження. *Для всякого $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ то чисто уявне число $2n\pi i$ також є періодом функції e^z, $2\pi i$ - основний період.*

Домовившись називати всі точки виду $2n\pi i$ (n - ціле число) *гомологічними між собою,* ми бачимо, що *у всіх гомологічних між собою точках функція e^z приймає одне і теж значення.* Геометрично це означає, що гомологічними між собою є всі точки, які лежать на одній і тій же прямій, яка паралельна уявній осі, причому кожна наступна точка віддалена від попередньої на 2π. Однак, у смузі, яка характеризується нерівностями (*Рис. 21*)

$$(B_0)\begin{cases}-\infty < x < +\infty, \\ -\pi < y \le \pi\end{cases}$$

гомологічних між собою точок немає. Теж саме можна сказати відносно всякої з смуг

$$(B_n)\begin{cases}-\infty < x < +\infty, \\ -\pi + 2n\pi < y \le +\pi + 2n\pi\end{cases}$$

де n - довільне є ціле число. Яку б, однак не задати точку z_0, у кожній з смуг (B_n) знайдеться їй гомологічна, притому тільки одна.

За дослідження відображення функцією $w = e^z$ досить обмежитись множиною прообразів площини w з виколотою точкою $w = 0$, яка належить тільки одній смузі (B_0) фундаментальній смузі періодів; кожна з решти смуг (B_n) відображається також на w.

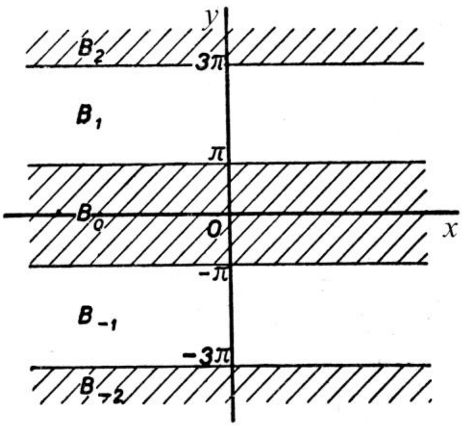


Рис. 21

5^0. *В кожній із смуг (B_n) функція e^z приймає будь яке значення w_0, яке не дорівнює нулю, один і тільки один раз*

Розглянемо сугу (B_0). Оскільки при зміні x від $-\infty$ до $+\infty$ величина $\left|e^z\right|$ непевно зростає від 0 до ∞, то можна знайти таке єдине значення x, що $\left|e^z\right| = \left|w_0\right|$. Після чого нам залишається вибрати $y \equiv \operatorname{Im} z$ так, щоб отримати рівність

$Arge^z = Argw_0$; це також можна зробити єдиним способом , бо в межах смуги (B_0) y змінюється від $-\pi$ до π включно.

6⁰. *Яким би не було* z_0, *функцію* e^z *може розвинути в степеневий ряд за невід'ємними степеням* $z - z_0$.

Достатньо покласти $z - z_0 = z'$, Тоді ми одержимо:

$$e^z = e^{z_0} \cdot e^{z'} = e^{z_0} \cdot \left(1 + z' + \frac{z'^2}{2!} + \frac{z'^3}{3!} + \ldots + \frac{z'^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= e^{z_0} + e^{z_0}\frac{(z-z_0)}{1!} + e^{z_0}\frac{(z-z_0)^2}{2!} + e^{z_0}\frac{(z-z_0)^3}{3!} + \ldots + e^{z_0}\frac{(z-z_0)^n}{n!} + \ldots$$

Цей ряд абсолютно збігається, оскільки рад $\sum_{n=0}^{\infty} e^{z_0}\frac{|z-z_0|^n}{n!}$ з модулів його членів збігається.

2.7.2. Тригонометричні та гіперболічні функції

Скориставшись формули Ейлера (13) і (14), які ми одержали раніше, тобто

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \tag{23}$$

і

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \tag{24}$$

отримаємо нові тотожності

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{25}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{26}$$

Таким чином, у *теорії функцій комплексної змінної функції* $\cos z$, $\sin z$ *і* e^z *взаємно зв'язані*

Оскільки, $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ і $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, то

$$\tan z = -i\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} \tag{27}$$

$$\cot z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} \tag{28}$$

Змінимо z на $-z$ у формулі

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^{2}}{2!} + \frac{z^{3}}{3!} + \ldots + \frac{z^{n}}{n!} + \ldots \tag{5'}$$

Отримаємо ряд

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^{2}}{2!} - \frac{z^{3}}{3!} + \ldots + (-1)^{n}\frac{z^{n}}{n!} + \ldots$$

Який очевидно також абсолютно збігається на □ . Після додавання і віднімання розвинення (5′) і (5″) отримаємо наступні розвинення для функцій як і у дійсному аналізу, називають відповідно гіперболічними косинусом і синусом

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{29}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{30}$$

Крім того

$$e^{z} = \left(1 + \frac{z^{2}}{2!} + \frac{z^{4}}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{2n!} + \ldots\right) + \left(z + \frac{z^{3}}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$$

$$e^{z} = \cosh z + \sinh z \tag{13*}$$

Приймаючи до уваги, що

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \text{ і } \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Ми одержимо

$$\tanh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} \tag{31}$$

$$\coth z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} \tag{32}$$

Легко показати, що тригонометричні і гіперболічні функції зв'язані наступними співвідношеннями:

$$\cos z = \cosh iz \tag{33}$$

$$i\sin z = \sinh iz \tag{34}$$

Якщо в останніх співвідношеннях замінити z на iz, то отримаємо з урахуванням парності косинуса і непарності синуса отримаємо нові тотожності:

$$\cosh z = \cos iz \tag{35}$$

$$i\sinh z = \sin iz \tag{36}$$

А скориставшись формулами (27), (28). (31) і (32)

$$\tanh iz = i\tan z \tag{37}$$

$$\coth iz = -i\cot z \tag{38}$$

$$\tan iz = i\tanh z \tag{39}$$

$$\cot iz = -i\coth z \tag{40}$$

2.7.2.1. Властивості тригонометричних функцій синуса і косинуса на комплексній області

Після підстановки в формулу Ейлера (13) значення $z = 2\pi$ ми одержали рівність

$$e^{2\pi i} = 1 \tag{41}$$

при $z = \pi$ і $z = \dfrac{\pi}{2}$ матимемо відповідно

$$e^{\pi i} = -1 \tag{42}$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i \tag{43}$$

при $z = n\pi$ і $z = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$

$$e^{n\pi i} = (-1)^n \tag{42*}$$

$$e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}i} = (-1)^n i \tag{43*}$$

1⁰. *Функції* $\cos z$ *і* $\sin z$ *періодичні функції з основним періодом* $T = 2\pi$*, тобто*

$$\cos(z+2\pi) = \cos z\,; \qquad \sin(z+2\pi) = \sin z \tag{44}$$

► Справді, з формул (25) і (26) маємо

$$\cos(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\frac{e^{iz}\cdot e^{i2\pi}+e^{-iz}\cdot e^{-i2\pi}}{2}$$

$$=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\,.$$

$$\sin(z+2\pi)=\frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i}=\frac{e^{iz}\cdot e^{i2\pi}-e^{-iz}\cdot e^{-i2\pi}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z\quad.\ ◄$$

2⁰. *Якщо аргумент збільшується на півперіод, тоді кожна з функцій* $\cos z$ *і* $\sin z$ *змінює тільки знак, тобто*

$$\cos(z+\pi)=-\cos z\,;\qquad \sin(z+\pi)=-\sin z \qquad (45)$$

► Справді,

$$\sin(z+\pi)=\frac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{2i}=\frac{e^{iz}\cdot e^{i\pi}-e^{-iz}\cdot e^{-i\pi}}{2i}=$$

$$=\frac{(-1)e^{iz}-(-1)e^{-iz}}{2i}==-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

Аналогічно доводиться для косинуса. ◄

3⁰. *Якщо аргумент збільшується на чверть періоду, тоді кожна з функцій* $\cos z$ *і* $\sin z$ *приймуть вид:*

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z\,;\quad \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z \qquad (46)$$

► Справді

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{i(z+\pi/2)}-e^{-i(z+\pi/2)}}{2i}=\frac{e^{iz}\cdot e^{i\pi/2}-e^{-iz}\cdot e^{-i\pi/2}}{2i}=$$

$$=\frac{(i)e^{iz}-(-i)e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\,.$$

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin z\ ◄$$

4⁰. *Основна тригонометрична тотожність виконується*

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1 \qquad (47)$$

► Справді,
$\cos^2 z+\sin^2 z=(\cos z+i\sin z)\,(\cos z-i\sin z)=e^{iz}\cdot e^{-iz}=1.$ ◄

5⁰. *Теореми додавання при любих комплексних значеннях* z_1 *і* z_2 *виконуються*

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2 \qquad (48)$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2 \qquad (49)$$

Для доведення рівностей (48) і (49) досить синуси і косинуси в їх правих частинах замінити на їх вирази через показникову функцію (25) і (26).

6⁰. *Нулями функція* $\sin z$ *є лише точки* $n\pi$*; нулями* $\cos z$ *є лише токи* $\frac{\pi}{2}+n\pi$. $n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

► Скориставшись формулою (26) отримаємо:

$$\sin n\pi=\frac{e^{in\pi}-e^{-in\pi}}{2i}=\frac{(-1)^n-(-1)^{-n}}{2i}=0$$

Щоб довести, що інших нулів функції $\sin z$ немає розглянемо рівняння:

$$\sin z=0 \qquad (50)$$

або

$$e^{iz}-e^{-iz}=0$$

тоді

$$e^{2iz}=1=e^{2n\pi i}$$

Порівнюючи аргументи у лівій і правій частинах останньої рівності, приходимо до співвідношення

$$2iz=2in\pi$$

і

$$z=n\pi$$

Отже, інших коренів рівняння (50) не має крім тих які були названі раніше, тобто $z=n\pi$.

Аналогічно розмірковуючи можна показати справедливість ствердження для косинуса. ◄

7⁰. *Якщо* z *- комплексне число, тобто,* $z=x+iy$*, то неважко знайти дійсну і уявну частини* $\sin z$ *і* $\cos z$.

► За формулою (49) і скориставшись співвідношеннями (35) і (36) отримаємо:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$$
$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Отже,

$$u = \operatorname{Re}\sin z = \sin x \cosh y$$
$$v = \operatorname{Im}\sin z = \cos x \sinh y$$

Тепер можемо знайти модуль функції $\sin z$:

$$|\sin z|^2 = \left(\sin x \cosh y\right)^2 + \left(\cos x \sinh y\right)^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$

звідси

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \qquad (51)$$

Останній дорівнює нулю тоді і тільки тоді, якщо $\sin x$ і $\sinh y$ дорівнюють нулю одночасно, тобто коли $x = n\pi$ і $y = 0$, звідси $z = n\pi$.

З формули (51) випливає, що функція $\sin z$ прямує до ∞ рівномірно відносно x, якщо $y \to \infty$ або $y \to -\infty$,

$$\lim_{|y|\to\infty} \sin z = \infty \qquad (52)$$

8⁰. *Ясно, що точки виду* $z + 2n\pi$ *гомологічні між собою і позначаємо через* $(B_n^{'})$ *«полосу з періодів»*

$$(B_n^{'}) \begin{cases} 2n\pi - \pi < x < 2n\pi + \pi, \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

очевидно, що у кожній такій полосі існують дві точки в яких $\sin z$ *приймає задане значення* w_0 $(w_0 \neq 1)$.

► Справді рівняння

$$\sin z = w_0$$

або

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w_0 \qquad (53)$$

Є квадратним рівнянням відносно e^{iz}. Ми одержимо два розв’язки

$$e^{iz} = iw_0 \pm \sqrt{1-w_0^2}$$

Звідси випливає, що знайдуться по два значення для iz в кожній полосі періодів (B_n), і відповідно, по два значення z в кожній полосі періодів $(B_n^{'})$. Якщо $w_0 = 1$, тоді $w_0^2 = 1$, $e^{iz} = i$, отже $z = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, і ми матимемо по одному («подвійному») кореню рівняння (53) в кожній полосі періодів. ◄

Практичні заняття – 2.4

1. *Обчислити дійсну і уявну частини, модуль і аргумент наступних виразів:*

$$w = e^{-2+i\sqrt{3}},\ w = 2^i,\ w = 3^{2-i},\ w = e^{2-\pi i},\ w = e^{(1-2i)^2},$$

$$w = 5^{3-i},\ w = \sin i,\ w = \sin(1-3i),\ \ w = \sin(\pi + i\ln(2+\sqrt{5})),$$

$$w = \cos\frac{\pi}{2}i,\ w = \cos(2-i),\ w = \tan(1+i\sqrt{2}),\ \ w = \cot(1-i),$$

$$w = \sinh\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right),\ \ w = \cos\left(\frac{\pi}{12} + i\ln 2\right),\ \ w = \cos(\pi + i\ln 2),$$

$$w = \cosh^2\left(i\ln 3\right),\ w = \tan \pi i,\ w = \coth(2+i),\ w = e^{i\alpha} - e^{i\beta},$$

$$(0 \le \alpha < \beta \le 2\pi),\ w = \tanh\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{3}\right).$$

2. *Знайти дійсну і уявну частини наступних функцій:*

$$w = e^{iz},\ w = e^{z^2},\ w = 2^{z^2},\ w = \cos z,\ w = \cosh(z-i),$$

$$w = \sinh z,\qquad w = \tan z,\qquad w = ze^z,\qquad w = \coth(z+1),$$

$$w = \tanh(z+1+i).$$

3. *Розв’язати наступні рівняння і з’ясувати скільки коренів вони мають:*

1) $\cos z = 0$; 2) $\cosh z = 0$; 3) $\tan z = 0$; 4) $\tanh z = 0$.

4. *Знайти наступні суми*

1) $1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$;

2) $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$;

3) $\cos x+\cos 3x+...+\cos(2n-1)x$;

4) $\sin x+\sin 3x+...+\sin(2n-1)x$;

5) $\sin x-\sin 2x+...+(-1)^{n-1}\sin nx$.

5. *Довести, що*

1) $\cos(z_1-z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$;

2) $\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2$;

3) $\sin 2z=2\sin z\cos z$; 4) $\sinh 2z=2\sinh z\cosh z$;

5) $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$; 6) $\cosh 2z=\cosh^2+\sinh^2 z$;

7) $\tan(z_1+z_2)=\dfrac{\tanh z_1+\tanh z_2}{1+\tanh z_1\tanh z_2}$; $\tan 2z=\dfrac{2\tanh z}{1+\tanh^2 z}$.

2.7.3. Логарифмічна функція

Означення. *Логарифмом комплексного числа z називається таке комплексне число w, що*

$$e^w=z \tag{54}$$

Для того щоб знайти всі значення логарифма даного числа z необхідно знайти всі точки, в яких показникова функція e^w приймає значення z. Ми бачили, що нулів показникова функція не має; всяке інше значення приймає у нескінченній множині точок. Уже з цього видно, що *логарифм комплексної змінної z є нескінченнозначною функцією цієї змінної, яка визначена для всіх її значень, крім $z=0$ і згідно з означенням (54) є функцією, оберненою до показникової функції*

Щоб знайти w за даним z з рівняння (54) необхідно розв’язати його відносно w, тобто виразити всі його корені через z. Інакше кажучи потрібно виразити дійсну і уявну частини цих коренів (або їх модулі і аргументи) через z. Властивості показникової функції спрощують розв’язання рівняння (54) у випадку коли z записано у показниковій формі, а w - в алгебраїчній.

Отже,

$$w=u+iv,\qquad z=|z|e^{i\arg z}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (54) отримаємо

$$e^{u+iv} = |z| e^{i\arg z} \quad \text{або} \quad e^u \cdot e^{iv} = |z| \cdot e^{i\arg z} \qquad (55)$$

Порівнюючи спочатку модулі лівої і правої частин, а після цього їх аргументи, прийдемо до двох дійсних рівностей:

$$\begin{cases} e^u = |z|, \\ v = \arg z + 2k\pi \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} u = \ln|z|, \\ v = \arg z + 2k\pi \end{cases} \qquad (56)$$

де k - довільне ціле число

Тут $\ln|z|$ - натуральний логарифм додатного $|z|$. Таким чином,

$$w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \qquad (57)$$

Позначивши через Lnz («комплексний логарифм») всю сукупність розв'язків рівняння (54) відносно w і врахувавши, що $Argz = \arg z + 2k\pi$ запишемо рівність (57) у вигляді

$$Lnz = \ln|z| + iA\mathrm{rg}\, z \qquad (58)$$

Отже: *комплексний логарифм деякого числа , відмінного від нуля, дорівнює сумі дійсного логарифма його модуля і аргументу, помноженого на* i. При цьому мається на увазі многозначний аргумент, звідси випливає многозначність комплексного логарифма.

Приклад. *Знайти всі значення логарифма* $Ln(1+i\sqrt{3})$.

► Скориставшись формулою (57) отримаємо:

$$Ln(1+i\sqrt{3}) = \ln\left|1+i\sqrt{3}\right| + i(\arg(1+i\sqrt{3}) + 2k\pi) =$$

$$= \ln 2 + i\left(\tan^{-1}\sqrt{3} + 2k\pi\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right). \blacktriangleleft$$

Зауваження 1. *Нехай* z *- додатне число, тобто* $z = x + i0 = x > 0$. *Тоді* $|z| = x$ $Argz = 2k\pi$ *і покладаючи* $\ln|z| = w_0$ *отримаємо для* Lnz *наступні значення*

..., $w_0 - 4\pi i$, $w_0 - 2\pi i$, w_0, $w_0 + 2\pi i$, $w_0 + 4\pi i$, ...

Отже, вираз Lnx має нескінчену множину значень і тільки одно з них дійсне. Це значення $\ln|z| = \ln x$, відоме з елементарної алгебри

Зауваження 2. *Нехай* z *є від'ємне число, тоді* $z = -x + i0$, *і тоді* $|z| = x$, $Argz = (2k+1)\pi$ *і ми одержимо для* Lnz *наступні значення:*

..., $w_0 - 3\pi i$, $w_0 - \pi i$, $w_0 + \pi i$, $w_0 + 3\pi i$, $w_0 + 5\pi i$, ...

Lnz *в цьому випадку є нескінченна множиною; яка не має жодного дійсного елемента.*

Цей випадок є одним із пояснень твердження, що в області дійсних чисел не існує логарифмів від'ємних чисел..

Зауваження 3. *Нехай модуль числа* z *дорівнюється одиниці, тобто,* $|z| = 1$. *В цьому випадку всі значення логарифма* z *уявні, тобто*

$$Lnz = iArgz \tag{59}$$

2.7.3.1. Основні властивості логарифма

1⁰.
$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2 \tag{60}$$

► Цю функціональну властивість можна довести як і в області дійсної змінної. Згідно з означенням логарифма маємо:

$$e^{Lnz_1} = z_1 \text{ і } e^{Lnz_2} = z_2$$

Скориставшись теоремою про додавання показників показникової функції отримаємо тотожність

$$e^{Lnz_1 + Lnz_2} = z_1 \cdot z_2$$

але

$$e^{Ln(z_1 z_2)} = z_1 \cdot z_2$$

тоді

$$e^{Ln(z_1 z_2)} = e^{Lnz_1 + Lnz_2}$$

З відси випливає (60)

2⁰. $$Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2 \qquad (61)$$

Ця формула може бути доведена, як і попередня.

3⁰. $$Lnz^n = nLnz \qquad (62)$$

Випливає по індукції з рівності (60) при

$$z_1 = z_2 \qquad (63)$$

Рівність

$$Lnz_1 = Lnz_2 \qquad (64)$$

називають логарифмуванням рівності (63). Результат логарифмування рівності виду

$$e^{z_1} = e^{z_2}$$

можна записати у вигляді $z_1 = z_2 + 2k\pi i$. Приписувати доданок $2k\pi i$ необхідно тому, що його не включено під знак Ln як і в рівності (64).

2.7.4. Степінь з довільним показником

Вираз $w = z^{\alpha}$ де α - довільне дійсне або комплексне число визначається, як і в дійсній області, рівністю:

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha Lnz} \qquad (65)$$

Оскільки, Lnz нескінченно многозначний вираз, то таким буде, взагалі кажучи, і z^{α}. Отже многозначність входить на цей раз не через доданки, як для Lnz, а через множники. Тобто, якщо позначити через $Ln_0 z$ якесь одне значення Lnz, множина значень логарифма визначається формулою:

$$Lnz = Ln_0 z + 2k\pi i,$$

То множину всіх значень z^{α} використовуючи одне з них, тобто, $w_0 = e^{\alpha Ln_0 z}$, можна записати так:

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha(Ln_0 z + 2k\pi i)} = w_0 \cdot e^{2k\pi\alpha i} \qquad (66)$$

де $w_0 = e^{\alpha Ln_0 z}$.

Розглянемо декілька окремих випадків:

1) Нехай α - ціле число, тобто $\alpha = n \in \mathbf{Z}$. Тоді

$$\omega = e^{2k\pi\alpha i} = e^{2k\pi n i} = e^{2m\pi i} = 1$$

(оскільки $m = kn$ - ціле число). Тому вираз $w = z^n$ є однозначним, і, крім того його значення не відрізняється від значення, яке було означено раніше якщо $\alpha = n > 0$. Якщо $\alpha = -n < 0$, то очевидно:

$$e^{-nLnz} = \frac{1}{e^{nLnz}} = \frac{1}{z^n}$$

Нарешті, якщо $\alpha = 0$, тоді

$$z^{\alpha} = 1.$$

2) *Нехай* α *- дробово-раціональне число:* $\alpha = \dfrac{p}{q}$ *є нескоротним дробом відношення цілого* p *до натурального* q. *Тоді*

$$\omega = e^{2k\pi i\alpha} = e^{2k\pi i\frac{p}{q}}$$

Цей вираз може приймати лише q різних значень, які відповідають значенням $k = 0, 1, 2, ..., (q-1)$; при $k = q$ матимемо $\omega = 1$ - те ж саме значення ω, що і при $k = 0$, і т.д.

В цьому випадку

$$w = z^{\frac{p}{q}}$$

може мати рівно q різних значень, виду

$$w = w_0 \cdot e^{2k\pi i\frac{p}{q}}, \quad 0 \le k \le (q-1) \qquad (67)$$

де w_0 одне з цих значень. Всі значення є коренями рівняння степеня q (відносно w):

$$w^q = z^p$$

Більше ніж q коренів це рівняння не може мати, і всі корені рівняння (67) можна знайти за формулою:

$$w = w_0 \cdot \omega_q^k \qquad (\omega_q^k = e^{\frac{2kp\pi}{q}i}; \quad k = 1, 2, ..., (q-1)) \quad (68)$$

Приклад 1. *Нехай у окремому випадку* $q = 2,\ p = 1$. *Тоді маємо рівняння*

$$w^2 = z.$$

► Якщо w_0 - деякий його корінь, то оскільки уваги $w_2 = e^{i\pi} = -1$, отримаємо, що другий корінь дорівнюється $(-w_0)$. ◄

Приклад 2. *Покладемо, що* $q = 3,\ p = 1$, *отримаємо рівняння*

$$w^3 = z.$$

► Як відомо всі корені можна визначити як $\sqrt[3]{z}$. Якщо один з них - w_0, тоді два інших кореня будуть $w_0 \cdot \omega_3^1$ і $w_0 \cdot \omega_3^2$, де $\omega_3^1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.◄

3). *Нехай* α *- ірраціональне число або чисто уявне число.*

В цьому випадку всі значення $\omega = e^{2k\pi\alpha i}$ будуть різними.

Справді, за припущення існування цілих чисел k_1 і k_2, що з рівності

$$e^{2k_1\pi\alpha i} = e^{2k_2\pi\alpha i} \qquad (k_1 \neq k_2)$$

випливала б рівність

$$2k_1\pi i\alpha = 2k_2\pi i\alpha + 2k\pi i$$

де k ціле число, або

$$(k_1 - k_2)\alpha = k$$

Звідси

$$\alpha = \frac{k}{k_1 - k_2}$$

Однак ірраціональне або уявне число α не може бути відношенням цілих чисел, значить припущення хибне і вираз z^{α} є нескінченнозначним. Всі значення знаходяться за формулою (66).

Розглянемо деякі особливі випадки:

(1^0) *якщо* α *- дійсне ірраціональне число, то всі значення* z^{α} *будуть мати один і той же модуль*;

(2^0) *якщо* α *- чисто уявне (*$\alpha = i\gamma$*, де* γ *є дійсне число,* $\gamma \neq 0$*) , то всі значення* z^{α} *будуть різні за модулем і матимуть один і той же аргумент;*

(3^0) *у загальному випадку коли* $\alpha = \beta + i\gamma$ *- комплексне число* $\beta \neq 0$ *і* $\gamma \neq 0$*, то модуль і аргумент будуть різними.*

2.7.5. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції

Ми переконалися в існуванні простого зв'язку між тригонометричними і гіперболічними та показникової функціями. Слід очікувати, що такий зв'язок неважко встановити між оберненими до тригонометричних і гіперболічних функціями та логарифмом – оберненої до показникової функції.

1). *Під символом*

$$w = \tan^{-1} z \tag{69}$$

розуміють множину розв'язків рівняння

$$\tan w = z$$

Скориставшись показниковою формою тангенса, отримаємо:

$$\frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} = z$$

або

$$\left(e^{iw}-e^{-iw}\right) = iz\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)$$

Це показникове рівняння, приводиться до виду

$$\left(1-iz\right)e^{2iw} - (1+iz) = 0$$

отже

$$e^{2iw} = \frac{(1+iz)}{(1-iz)}$$

Звідси випливає:

$$2iw = Ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

Нарешті

$$w = \frac{1}{2i} Ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

отже, маємо тотожність:

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} Ln\frac{1+iz}{1-iz} \qquad (70)$$

2) *Вираз*

$$w = \cot^{-1} z$$

є множиною розв'язків рівняння

$$\cot w = z$$

Виконуючи ті ж самі перетворення, як і в попередньому випадку, отримаємо

$$\cot^{-1} z = -\frac{1}{2i} Ln\frac{iz+1}{iz-1} \qquad (71)$$

Приклад 1. *Записати у алгебраїчній форі вираз*

$$w = \tan^{-1}(1+i)$$

► У цьому випадку $z = 1+i$, тоді

$1+iz = 1+i(1+i) = 1+i-1 = i$,

$1-iz = 1-i(1+i) = 1-i+1 = 2-i$.

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i}{2-i} = \frac{1}{5}i(2+i) = \frac{-1+2i}{5}$$

Використовуючи (69), отримаємо:

$$w = \tan^{-1}(1+i) = \frac{1}{2i} Ln\frac{-1+2i}{5} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\ln\left|\frac{-1+2i}{5}\right| + i(\pi - \tan^{-1} 2) + 2k\pi i\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\ln\left|\frac{-1+2i}{5}\right| - i\tan^{-1}2 + (2k+1)\pi i\right] =$$

$$= \frac{2k+1}{2}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1}2 + \frac{i}{4}\ln 5, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Записати у алгебраїчній формі вираз*

$$w = \tan^{-1}1$$

$$\blacktriangleright \; w = \tan^{-1}1 = = \frac{1}{2i}L\,\mathrm{n}\frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2i}Ln\frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1}{2i}Lni$$

$$= \frac{1}{2i}Lni = \frac{1}{2i}\left[\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right] = \frac{\pi}{4} + k\pi, \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \blacktriangleleft$$

3) *Співвідношення*

$$w = \sin^{-1} z$$

є множиною розв'язків рівняння

$$\sin w = z$$

Скориставшись показниковою формою синуса отримаємо наступне рівняння

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$$

або

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

Розв'язок цього рівняння можна записати у наступній формі

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

$$iw = Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$w = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Отже, виходячи з умови отримаємо тотожність

$$w = \sin^{-1} z = \frac{1}{i}Ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad (72)$$

4) *За аналогічних перетворень для* $w = \cos^{-1} z$ *отримаємо наступну тотожність для оберненого косинуса, тобто*

$$w = \cos^{-1} z = \frac{1}{i} Ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right) \qquad (73)$$

Приклад 3. *Розв'язати рівняння*

$$\sin z + \cos z = 2$$

► Щоб розв'язати дане рівняння скористуємося показниковою формами синус і косинус, тобто:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$

$$e^{iz} - e^{-iz} + i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 4i$$

$$(1+i)e^{iz} - (1-i)e^{-iz} = 4i$$

$$(1+i)e^{2iz} - 4ie^{iz} - (1-i) = 0$$

Розв'язками цих показникових рівнянь є вирази:

$$e^{iz} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+2}}{1+i} = \frac{2i \pm i\sqrt{2}}{1+i}$$

або

$$e^{iz_1} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)i}{1+i} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

і

$$e^{iz_2} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)i}{1+i} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$iz_1 = Ln\frac{2+\sqrt{2}}{2}(-1+i) =$$

$$iz_1 = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) + i\frac{3\pi}{4} + 2k\pi i$$

$$z_1 = \frac{8k+3}{4}\pi - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \ \ \mathbf{(}k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\mathbf{)}$$

$$z_2 = \frac{8k+3}{4}\pi - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \ \ \mathbf{(}k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\mathbf{)}$$ ◄

Функції в кожній із формул (70) – (73) є многозначними. Слід пам'ятати, що радикали у формулах (72) і (73) мають два значення.

Розглянемо обернені гіперболічні функції.

З рівності

$$w = \cosh^{-1} z$$

випливає рівняння

$$z = \cosh w \qquad \text{або} \qquad \frac{e^{w} + e^{-w}}{2} = z$$

Яке приводиться до рівняння

$$e^{2w} - 2ze^{w} + 1 = 0$$

Розв'язок цього рівняння має вид

$$w = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

отже,

$$w = \cosh^{-1} z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \tag{74}$$

Аналогічно отримаємо

$$w = \sinh^{-1} z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \tag{75}$$

$$w = \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z} \tag{76}$$

$$w = \coth^{-1} z = \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1} \tag{77}$$

Практичне заняття – 2.5

1. *Обчислити:*

a) $w = Ln4$, $w = Ln(-1)$, $w = \ln(-1)$; *b)* $w = Lni$, $w = \ln i$;

c) $w = Ln\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$, $w = Ln(2-3i)$ $w = Ln(-2+3i)$,

2. *Знайти логарифм наступних чисел:*

$z = e$; $z = -i$; $z = -1 - i$; $z = 3 - 2i$; $z = i^{i}$.

3. *Знай ти всі значення наступних степенів:*

$z = i^{2i}$; $z = i^{\frac{1}{i}}$; $z = (-1)^{\sqrt{2}}$; $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}$; $z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$;

$z = (1-i)^{3-3i}$; $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; $z = (1)^{-i}$; $z = (3-4i)^{1+i}$; $z = (-3+4i)^{1+i}$

4. *Знайти всі значення наступних функцій:*
$w = \sin^{-1}(1/2)$; $w = \cos^{-1}(1/2)$; $w = \cos^{-1}(2)$;
$w = \sin^{-1}(i/3)$; $w = \tan^{-1}(1+2i)$; $w = \cosh^{-1}(2i)$
$w = \tanh^{-1}(1-i)$; $w = \cosh^{-1}(1+i)$.

5. *Розв'язати наступні рівняння:*
$\sin z - \cos z = 2$; $\sin z + \cos z = 3$; $\sin z - \cos z = i$;
$\cosh z - \sinh z = 1$; $\cosh z - \sinh z = 2i$; $2\cosh z + \sinh z = i$.

6. *Знайти всі корені наступних рівнянь:*
$\cos z = \cosh z$; $\sin z^2 = i \sinh z$; $\cos z = i \sinh 2z$.

7. *Розв'язати наступні рівняння:*
$e^z + i = 0$; $4\cos z + 5 = 0$; $\sin iz = -i$; $\cosh z = i$;
$\ln(z+i) = 0$; $\ln(i-z) = 1$.

Індивідуальні домашні завдання I
(для I і II частин)

1. Знайти значення коренів і навести геометричну ілюстрацію

1.1 $w=\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$	1.2 $w=\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$	1.3 $w=\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$
1.4 $w=\sqrt[3]{i}$	1.5 $w=\sqrt[4]{1}$	1.6 $w=\sqrt[3]{-27i}$
1.7 $w=\sqrt[3]{-1}$	1.8 $w=\sqrt[3]{-i}$	1.9 $w=\sqrt[4]{-16}$
1.10 $w=\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$	1.11 $w=\sqrt[3]{8}$	1.12 $w=\sqrt[3]{8i}$
1.13 $w=\sqrt[4]{16}$	1.14 $w=\sqrt[4]{-1}$	1.15 $w=\sqrt[3]{-8}$
1.16 $w=\sqrt[3]{-8i}$	1.17 $w=\sqrt[4]{-1/16}$	1.18 $w=\sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$
1.19 $w=\sqrt[3]{-1/8}$	1.20 $w=\sqrt[3]{i/8}$	1.21 $w=\sqrt[4]{i/16}$
1.22 $w=\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$	1.23 $w=\sqrt[3]{27}$	1.24 $w=\sqrt[3]{1/8}$
1.25 $w=\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$	1.26 $w=\sqrt[3]{-i/8}$	1.27 $w=\sqrt[4]{i/256}$
1.28 $w=\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$	1.29 $w=\sqrt[3]{i/27}$	1.30 $w=\sqrt[4]{256}$

2. *Обчислити дані вирази використовуючи відповідні умови*

2.1. $w=z^{278}+z^{-256}$, якщо $z+z^{-1}=1$	2.2. $w=z^{345}+z^{-455}$, якщо $z+z^{-1}=-1$
2.3. $w=\left(\dfrac{z}{2}\right)^{428}+\left(\dfrac{z}{2}\right)^{-356}$, якщо $z+4z^{-1}=2$	2.4. $w=\left(\dfrac{z}{2\sqrt{2}}\right)^{278}+\left(\dfrac{z}{2\sqrt{2}}\right)^{-256}$, якщо $z+8z^{-1}=-4$

2.5. $w=\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{257}+{\frac{z}{\sqrt{2}}}^{-457}$, якщо $z+2z^{-1}=-2$	2.6. $w=\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{358}+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{-236}$, якщо $z+2z^{-1}=2$
2.7. $w=\left(\frac{z}{2\sqrt{2}}\right)^{378}+\left(\frac{z}{2\sqrt{2}}\right)^{-286}$, якщо $z+8z^{-1}=4$	2.8. $w=\left(\frac{z}{6}\right)^{478}+\left(\frac{z}{6}\right)^{-632}$, якщо $z+36z^{-1}=6$
2.9. $w=\left(\frac{z}{6}\right)^{478}+\left(\frac{z}{6}\right)^{-376}$, якщо $z+36z^{-1}=-6$	2.10. $w=\left(\frac{z}{3\sqrt{2}}\right)^{297}+\left(\frac{z}{3\sqrt{2}}\right)^{-556}$, якщо $z+18z^{-1}=6$
2.11. $w=\left(\frac{z}{3\sqrt{2}}\right)^{478}+\left(\frac{z}{3\sqrt{2}}\right)^{-357}$, якщо $z+18z^{-1}=-6$	2.12. $w=z^{278}+z^{-256}$, якщо $z+z^{-1}=1$
2.13. $w=\left(\frac{z}{2}\right)^{579}+\left(\frac{z}{2}\right)^{-357}$, якщо $z+4z^{-1}=-2$	2.14. $w=\left(\frac{z}{4\sqrt{2}}\right)^{378}+\left(\frac{z}{4\sqrt{2}}\right)^{-259}$, якщо $z+32z^{-1}=-8$
2.15. $w=\left(\frac{z}{4\sqrt{2}}\right)^{299}+\left(\frac{z}{4\sqrt{2}}\right)^{-356}$, якщо $z+32z^{-1}=8$	2.16. $w=\left(\frac{z}{8}\right)^{298}+\left(\frac{z}{8}\right)^{-359}$, якщо $z+64z^{-1}=8$
2.17. $w=\left(\frac{z}{8}\right)^{398}+\left(\frac{z}{8}\right)^{-259}$, якщо $z+64z^{-1}=-8$	2.18. $w=\left(\frac{z}{4}\right)^{478}+\left(\frac{z}{4}\right)^{-356}$, якщо $z+16z^{-1}=4$
2.19. $w=\left(\frac{z}{4}\right)^{278}+\left(\frac{z}{4}\right)^{-256}$, якщо $z+16z^{-1}=-4$	2.20. $w=\left(\frac{z}{5\sqrt{2}}\right)^{328}+\left(\frac{z}{5\sqrt{2}}\right)^{-526}$, якщо $z+50z^{-1}=10$
2.21. $w=\left(\frac{z}{5\sqrt{2}}\right)^{278}+\left(\frac{z}{5\sqrt{2}}\right)^{-256}$, якщо $z+50z^{-1}=-10$	2.22. $w=\left(\frac{z}{5}\right)^{478}+\left(\frac{z}{5}\right)^{-456}$, якщо $z+25z^{-1}=5$

2.23. $w=\left(\frac{z}{5}\right)^{357}+\left(\frac{z}{5}\right)^{-356}$, якщо $z+25z^{-1}=-5$	2.24. $w=\left(\frac{z}{7}\right)^{258}+\left(\frac{z}{7}\right)^{-276}$, якщо $z+49z^{-1}=7$
2.25. $w=\left(\frac{z}{7}\right)^{458}+\left(\frac{z}{7}\right)^{-346}$, якщо $z+49z^{-1}=-7$	2.26. $w=\left(\frac{z}{3}\right)^{378}+\left(\frac{z}{3}\right)^{-456}$, якщо $z+9z^{-1}=3$
2.27. $w=\left(\frac{z}{3}\right)^{478}+\left(\frac{z}{3}\right)^{-357}$, якщо $z+9z^{-1}=-3$	2.28. $w=\left(\frac{z}{10}\right)^{246}+\left(\frac{z}{10}\right)^{-425}$, якщо $z+100z^{-1}=10$
2.29. $w=\left(\frac{z}{10}\right)^{359}+\left(\frac{z}{10}\right)^{-245}$, якщо $z+100z^{-1}=-10$	2.30. $w=\left(\frac{z}{11}\right)^{458}+\left(\frac{z}{11}\right)^{-357}$, якщо $z+121z^{-1}=11$

3. ***Записати дані вирази в алгебраїчній формі***

3.1 $w=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$	3.2 $w=\cos\left(\frac{\pi}{6}+3i\right)$
3.3 $w=Ln(-6)$	3.4 $w=\sinh\left(2+\frac{\pi i}{4}\right)$
3.5 $w=\cosh\left(2+\frac{\pi i}{2}\right)$	3.6 $w=Ln(1+i)$
3.7 $w=\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$	3.8 $w=\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$
3.9 $w=Ln\left(\sqrt{3}+i\right)$	3.10 $w=\sinh\left(1+\frac{\pi i}{2}\right)$
3.11 $w=\cosh(1-\pi i)$	3.12 $w=Ln(1+i\sqrt{3})$
3.13 $w=Ln(-1+i)$	3.14 $w=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2i\right)$

3.15 $w=\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$	3.16 $w=\sinh\left(3+\frac{\pi i}{6}\right)$
3.17 $w=\cosh\left(1+\frac{\pi i}{3}\right)$	3.18 $w=Ln(-1-i)$
3.19 $w=\sin\left(\frac{\pi}{6}-3i\right)$	3.20 $w=\cos\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)$
3.21 $w=Ln(1-i)$	3.22 $w=\sinh\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)$
3.23 $w=\cosh\left(-1-\frac{\pi i}{6}\right)$	3.24 $w=(-1)^{2i}$
3.25 $w=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$	3.26 $w=\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$
3.27 $w=(-1)^{2i}$	3.28 $w=\sinh(2-\pi i)$
3.29 $w=\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$	3.30 $w=(-1)^{2i}$

4. *Записати дані вирази в алгебраїчній формі*

4.1 $w=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-3i}$	4.2 $w=\sin^{-1}4$
4.3 $w=\cosh^{-1}(-2)$	4.4 $w=\tan^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$
4.5 $w=\tanh^{-1}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$	4.6 $w=\cot^{-1}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$
4.7 $w=\tanh^{-1}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$	4.8 $w=\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$
4.9 $w=\sinh\left(1-\frac{\pi i}{2}\right)$	4.10 $w=\left(-1-i\right)^{5i}$

4.11 $w=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+i\right)$	4.12 $w=\cosh^{-1}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$
4.13 $w=\tan^{-1}\left(\dfrac{3+4i}{5}\right)$	4.14 $w=\tanh^{-1}\left(\dfrac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$
4.15 $w=\cosh^{-1}(3i)$	4.16 $w=\tanh^{-1}\left(\dfrac{4-3i}{5}\right)$
4.17 $w=\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$	4.18 $w=\cos^{-1}(-5)$
4.19 $w=\tanh^{-1}\left(\dfrac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$	4.20 $w=\sinh^{-1}(-4i)$
4.21 $w=\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6i}$	4.22 $w=\sin\dfrac{1}{z}$, if $z=\dfrac{8-2\pi i}{\pi^2+16}$
4.23 $w=e^{\frac{1}{z}}$, якщо $z=\dfrac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$	4.24 $w=\cosh iz$, якщо $z=\dfrac{\pi}{4}+2i$
4.25 $w=\tanh^{-1}\left(\dfrac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$	4.26 $w=\cos^{-1}(-3i)$
4.27 $w=\cosh^{-1}\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)$	4.28 $w=\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$
4.29 $w=\left(4-3i\right)^{-2i}$	4.30 $w=\left(-12+5i\right)^{-4i}$

5. *Викреслити області, які задані нерівностями*

5.1 $\begin{cases}\lvert z-1\rvert\le 1,\\ \lvert z+1\rvert>2\end{cases}$	5.2 $\begin{cases}\lvert z+i\rvert\ge 1,\\ \lvert z\rvert<2\end{cases}$
5.3 $\begin{cases}\lvert z-i\rvert\le 2,\\ \operatorname{Re} z>1\end{cases}$	5.4 $\begin{cases}\lvert z+1\rvert\ge 1,\\ \lvert z+i\rvert<1\end{cases}$

5.5 $\begin{cases} \lvert z+1\rvert < 1, \\ \lvert z-i\rvert \le 1 \end{cases}$	5.6 $\begin{cases} \lvert z+i\rvert \le 2, \\ \lvert z-i\rvert > 2 \end{cases}$
5.7 $\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert \le 1, \\ \operatorname{Re} z \ge 1, \quad \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$	5.8 $\begin{cases} \lvert z-1+i\rvert \ge 1, \\ \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z < -1 \end{cases}$
4.5 $\begin{cases} \lvert z-2-i\rvert \le 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 3, \quad \operatorname{Im} z < 1 \end{cases}$	5.10 $\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert \ge 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z \le 2 \end{cases}$
5.11 $\begin{cases} \lvert z+i\rvert < 2, \\ 0 < \operatorname{Re} z \le 1 \end{cases}$	5.12 $\begin{cases} \lvert z-i\rvert < 1, \\ 0 < \arg z \le \pi/4 \end{cases}$
5.13 $\begin{cases} \lvert z-i\rvert \le 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2 \end{cases}$	5.14 $\begin{cases} \lvert z+i\rvert > 1, \\ -\pi/4 \le \arg z < 0 \end{cases}$
5.15 $\begin{cases} \lvert z-1-i\rvert < 1, \\ \lvert \arg z\rvert \le \pi/4 \end{cases}$	5.16 $\begin{cases} \lvert z\rvert < 1, \\ \lvert \arg(z-1)\rvert \le \pi/4 \end{cases}$
5.17 $\begin{cases} \lvert z\rvert \le 1, \\ \arg(z+1) > \pi/4 \end{cases}$	5.18 $\begin{cases} \lvert z\rvert < 2, \\ \arg z \le \pi/4, \quad \operatorname{Re} z \ge 1 \end{cases}$
5.19 $\begin{cases} 1 < \lvert z-1\rvert \le 2, \\ \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$	5.20 $\begin{cases} 1 < \lvert z-i\rvert \le 2, \\ \operatorname{Re} z \le 0, \quad \operatorname{Im} z > 1 \end{cases}$
5.21 $\begin{cases} \lvert z\rvert > 1, \\ 0 < \operatorname{Re} z \le 2, -1 < \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$	5.22 $\begin{cases} \lvert z-1\rvert > 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3, -1 \le \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$
5.23 $\begin{cases} \lvert z+i\rvert < 1, \\ -3\pi/4 < \arg z \le -\pi/4 \end{cases}$	5.24 $\begin{cases} \lvert z-i\rvert \le 1, \\ -\pi/4 < \arg(z-i) \le \pi/4 \end{cases}$
5.25 $\begin{cases} z \cdot \bar{z} < 2, \\ \operatorname{Re} z \le 1, \operatorname{Im} z > -1 \end{cases}$	5.26 $\begin{cases} z \cdot \bar{z} < 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 1, \operatorname{Im} z < -1 \end{cases}$

5.27 $\begin{cases} 1 < z \cdot \bar{z} < 2, \\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}$	5.28 $\begin{cases} \lvert z-1 \rvert \le 1, \\ \arg z \le \pi/4, \\ \arg(z-1) > \pi/4 \end{cases}$
5.29 $\begin{cases} \lvert z-i \rvert \le 1, \\ \arg z \ge \pi/4, \\ \arg(z+1-i) \le \pi/4 \end{cases}$	5.30 $\begin{cases} \lvert z-2-i \rvert \le 1, \\ 1 \le \operatorname{Re} z < 3, \\ 0 < \operatorname{Im} z \le 3 \end{cases}$

6. *Визначити форму заданої кривої*

6.1 $z = 3\sec t + i2\tan t$	6.2 $z = 2\sec t - i3\tan t$
6.3 $z = -\sec t + i3\tan t$	6.4 $z = 4\tan t - i3\sec t$
6.5 $z = 3\tan t + i4\sec t$	6.6 $z = -4\tan t - i2\sec t$
6.7 $z = 3\cos ect + i2\cot t$	6.8 $z = 4\cos ect - i2\cot t$
6.9 $z = \cot t - i2\cos ec\,\mathrm{t}$	6.10 $z = -\cot t + i3\cos ec\,\mathrm{t}$
6.11 $z = 3\cosh 2t + i2\sinh 2t$	6.12 $z = 2\cosh 3t - i3\sinh 3t$
6.13 $z = 5\sinh 4t + i4\cosh 4t$	6.14 $z = -4\cosh 5t - i5\sinh 5t$
6.15 $z = 2\left(\cosh 2t\right)^{-1} + i4\tanh 2t$	6.16 $z = 3e^{it} - \left(2e^{it}\right)^{-1}$
6.17 $z = \tanh 5t + i5\left(\cosh 5t\right)^{-1}$	6.18 $z = \left(\sinh t\right)^{-1} - i\coth t$
6.19 $z = 2e^{it} - \left(2e^{it}\right)^{-1}$	6.20 $z = 4\left(\cosh 4t\right)^{-1} + i2\tanh 4t$
6.21 $z = -2e^{it} - e^{-it}$	6.22 $z = t^2 + 2t + 5 - i(t^2 + 2t + 1)$
6.23 $z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}$	6.24 $z = t^2 - 2t + 3 - i(t^2 - 2t + 1)$
6.25 $z = \dfrac{1+i}{1-t} + \dfrac{t}{1-t}(2-4i)$	6.26 $z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t}$
6.27 $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4)$	6.28 $z = -2e^{2it} - e^{-2it}$
6.29 $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$	6.30 $z = \dfrac{t-1+it}{t(t-1)}$

7 Побудувати аналітичну функцію $f(z)$ у околі точки z_0, якщо відомі дійсна частина $u(x,y)$ або уявна $v(x,y)$ і значення функції $f(z_0)$

7.1 $u(x,y)=x^2-y^2+x,$	$f(0)=0$
7.2 $u(x,y)=x^3-3xy^2+1,$	$f(0)=1$
7.3 $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y),$	$f(0)=0$
7.4 $u(x,y)=x^2-y^2-2y,$	$f(0)=0$
7.5 $u(x,y)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\cos y,$	$f(0)=2$
7.6 $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},$	$f(1)=1+i$
7.7 $v(x,y)=e^{-y}\sin x+y,$	$f(0)=1$
7.8 $v(x,y)=e^x\cos y,$	$f(0)=1+i$
7.9 $v(x,y)=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2},$	$f(1)=1+i$
7.10 $v(x,y)=y-\dfrac{y}{x^2+y^2},$	$f(1)=2$
7.11 $v(x,y)=e^{-y}\cos x+y,$	$f(0)=1$
7.12 $u(x,y)=y-2xy,$	$f(0)=0$
7.13 $u(x,y)=x^2-y^2+2x+1,$	$f(0)=i$
7.14 $u(x,y)=3x^2y-y^3,$	$f(0)=1$
7.15 $u(x,y)=x^2-y^2-2x+1,$	$f(0)=1$
7.16 $v(x,y)=2xy+y,$	$f(0)=0$
7.17 $u(x,y)=3x^2y-y^3-y,$	$f(0)=0$
7.18 $v(x,y)=e^{-y}\sin x,$	$f(0)=1$
7.19 $v(x,y)=2xy+2x,$	$f(0)=0$
7.20 $v(x,y)=1-e^x\sin y,$	$f(0)=1+i$

7.21	$v(x,y)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}}\cos y,\qquad f(0)=2$
7.22	$v(x,y)=1-\dfrac{y}{x^2+y^2},\qquad f(1)=1+i$
7.23	$u(x,y)=e^{-y}\cos x,\qquad f(0)=1$
7.24	$u(x,y)=e^{x}(x\cos y-y\sin y),\qquad f(0)=0$
7.25	$u(x,y)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2},\qquad f(0)=1$
7.26	$u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},\qquad f(1)=2$
7.27	$u(x,y)=x^2-y^2-x,\qquad f(0)=0$
7.28	$u(x,y)=-2xy-2y,\qquad f(0)=i$
7.29	$u(x,y)=2xy-2y,\qquad f(0)=1$
7.30	$u(x,y)=x^3-3xy^2-x,\qquad f(0)=0$

8 *Розв'язати наступні рівняння*

8.1. $2\sin z+2\cos z=3$	8.2. $\cos z-\sin z=2$
8.3. $4shz-ichz=2i$	8.4. $4chz-4ishz=3$
8.5. $\cos z-4\sin z=2i$	8.6. $3shz+ichz=4$
8.7. $2\sin z-2i\cos z=2i$	8.8. $2shz-2ichz=3$
8.9. $3\cos z+3i\sin z=2$	8.10. $3shz-3ichz=4i$
8.11. $shz-ichz=2i$	8.12. $\cos z-\sin z=2$
8.13. $6shz-6ichz=5$	8.14. $chz-ishz=2$
8.15. $4\sin z-4\cos z=3$	8.16. $2shz-2ichz=3$
8.17. $2shz+2ichz=5$	8.18. $3shz-3ichz=4$
8.19. $2\cos z+2\sin z=3$	8.20. $\cos z+\sin z=4$
8.21. $3shz+ichz=2$	8.22. $3shz+3ichz=2$
8.23. $\cos z+\sin z=4i$	8.24. $3shz+3ichz=4i$
8.25. $shz-ichz=2i$	8.26. $2shz+2ichz=5i$
8.27. $5chz-5ishz=2i$	8.28. $3shz-3ichz=4$
8.29. $2\cos z+2\sin z=3i$	8.30. $4i\sin z-4\cos z=3i$

Частина III. Інтегральне числення функції комплексної змінної

§ 3.1. Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай в області D комплексної площини z задано кусково-гладку криву l, з кінцями у точках z_0 і z, і в кожній точці кривої задана однозначна і неперервна функція $w = f(z)$.(*Рис. 22*)

Розіб'ємо криву l довільним чином точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ на n частин (елементарних дуг) у напрямку від початкової точки z_0 до кінцевої $z = z_n$. На кожній частині кривої,

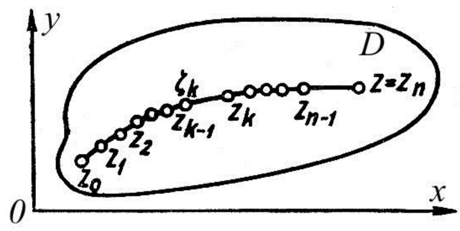


Рис. 22

яка обмежена точками z_{k-1} і z_k $(k = \overline{1,n})$ виберемо деяку точку ζ_k і обчислимо значення функції в ній $w_k = f(\zeta_k)$.

Складемо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

де $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Якщо границя цієї суми S_n при $n \to \infty$, і $\max|\Delta z_k| \to 0$ існує незалежно від способу розбиття кривої l на частини і вибору точки ζ_k, то ця границя ***називається інтегралом від функції*** $f(z)$ вздовж кривої l від точки z_0 до точки z і позначається так

$$\int_l f(z)dz \qquad \text{або} \qquad \int_{AB} f(z)dz$$

Очевидно, що, якщо $\max|\Delta z_k|$ - найбільша з довжин Δz_k прямує до нуля, то і всі Δz_k прямуватимуть до нуля і n - до нескінченності. Таким чином за означенням:

$$\int_l f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k .$$

Покажемо, що цей інтеграл існує, якщо $f(z)$ є однозначною і неперервною функцією, а l є кусково-гладкою лінією.

Позначимо $z = x + iy$; $z_k = x_k + iy_k$; $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тоді можна записати:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right]\left[\Delta x_k + i\Delta y_k\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\right].$$

Кожна з цих сум є інтегральною для відповідного криволінійного інтегралу другого роду від дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ дійсних змінних x, y по кривій l.

Із неперервності функція $f(z)$ випливає неперервність функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ у області D; так як l є кусково-гладка, тоді на основі теореми (у теорії криволінійних інтегралів) про існування криволінійного інтеграла справедливі наступні рівності:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k,\Delta y_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] = \int_l udx - vdy,$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k,\Delta y_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\right] = \int_l udy + vdx.$$

Але тоді існує

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \int_l f(z)dz,$$

причому

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_l u(x,y)dy + v(x,y)dx. \qquad (1)$$

Корисно пам’ятати, що $|\Delta z_k|$ є відстань між точками z_{k-1} і z_k, тобто довжиною хорди, яка стягує дугу частини кривої l, яка обмежена тими ж точками. Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж кривої дедалі будемо ***називати контурним інтегралом.***

З формули (1) випливає, що обчислення контурного інтегралу від функції комплексної змінної зводиться до обчислення криволінійних інтегралів від функцій дійсних змінних. Тому слід очікувати складність деяких властивостей контурного і криволінійного інтегралів.

Основні властивості контурного інтеграла

1⁰. $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\int\limits_{BA} f(z)dz.$

2⁰. $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AC} f(z)dz + \int\limits_{CB} f(z)dz.$ (адитивність контурного інтегралу).

3⁰. $\int\limits_l af(z)dz = a\int\limits_l f(z)dz$, де a є константа.

4⁰. $\int\limits_l [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int\limits_l f_1(z)dz + \int\limits_l f_2(z)dz$ (лінійність контурного інтегралу).

Ці властивості випливають зразу з відповідних властивостей криволінійних інтегралів другого роду і формули (1), причому для властивості **2⁰** точку C належить взяти за точку ділення кривої.

5^0. ***Якщо на кривій*** l ***виконується нерівність*** $|f(z)| \le M$ ***і*** $|l|$ ***є довжина цієї кривої, тоді***

$$\left|\int\limits_l f(z)dz\right| \le M|l|.$$

Цю нерівність називають ***теоремою про оцінку інтеграла або нерівністю Дарбу.*** Доведемо її.

$$\blacktriangleright \left|\int_l f(z)dz\right| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le$$

$$\le \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} M|\Delta z_k| = M \lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = M|l|.$$

Тут використано те, що $\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$ є периметром ламаної, яку вписано в криву l і

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = l. \blacktriangleleft$$

3.1.1. Обчислення інтеграла від функції комплексної змінної

Інтеграл від комплексної змінної можна обчислювати за допомогою криволінійних інтегралів, але частіше всього поступають наступним чином.

Якщо крива l *задана рівнянням* $z = z(t)$, *де* t *змінюється від* t_1 *до* t_2 *причому за зміни* t *від* t_1 *до* t_2 *крива* l *описується від початкової точки до кінцевої, то контурний інтеграл обчислюється за формулою:*

$$\int_l f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

Ця формула *має вид перетворення змінної до визначеного інтеграла*. Її неважко довести, скориставшись тим, що рівняння

$$z = x + iy = z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in [t_1, t_2]$$

еквівалентно параметричним рівнянням $x = x(t)$, $y = y(t)$ лінії l, і відомими формулами обчислення дійсних криволінійних інтегралів в правій частині рівності (1) до визначених інтегралів.

Якщо дійсну і уявну частини $f(z(t))z'(t)$ позначити $\operatorname{Re}(t)$ і $\operatorname{Im}(t)$ відповідно, тоді ми отримаємо

$$\int_l f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}(t)dt + i\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im}(t)dt$$

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $\int_C \frac{dz}{z}$, *- де C коло* $|z| = R$.

► Параметричне рівняння кола має вид $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, параметр t змінюється від 0 до 2π. Тоді $z = R(\cos t + i\sin t)$ або за формулою Ейлера, $z = R\cdot e^{it}$. Звідси $dz = i\cdot R\cdot e^{it}dt$. Тоді даний інтеграл набуде вигляду

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_o^{2\pi} \frac{i\cdot R\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. *Обчислити інтеграл* $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^m}$, *де C є коло* $|z - z_0| = R$, m *- деяке ціле число.*

► Рівняння кола запишемо у параметричній формі $z - z_0 = R\cdot e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Звідси, $dz = iR\cdot e^{it}dt$. Отже:

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{iR\cdot e^{it}}{R^m e^{imt}}dt = \frac{i}{R^{m-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt$$

Розглянемо два випадки : а) $m \ne 1$, b) $m = 1$.

а) У випадку коли $m \ne 1$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(1-m)t}dt = \left.\frac{e^{i(1-m)t}}{i(1-m)}\right|_0^{2\pi} = \frac{e^{i(1-m)2\pi} - 1}{i(1-m)} = 0,$$

Оскільки $1 - m$ є ціле число. То $e^{i(1-m)2\pi} = 1$, отже

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = 0.$$

б) При $m = 1$, $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$.

Таким чином, *інтеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{(z-z_0)^m}$ *уздовж кола* $|z-z_0| = R$, *яке проходить у додатному напрямку дорівнює нулю при* $m \neq 1$ *і дорівнює* $2\pi i$, *якщо* $m=1$. ◄

Приклад 3. *Обчислити* $\int\limits_C z^2 dz,$ *де* C *є ламана лінія з вершинами у точках* $O(0,0),\ A(1,1),\ B(2,1).$

► Рівняння прямої OA є $y = x$ в параметричній формі має вид $x=t,\ \ y=t;$ звідси $z = x+iy = (1+i)t;$ очевидно, що на відрізку $[0;1]$ параметр t змінюєтьсь від 0 до $1.$ Отже,

$$\int\limits_{OA} z^2 dz = \int\limits_0^1 \left[(1+i)t\right]^2 (1+i)dt = (1+i)^3 \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}(-1+i).$$

$y=1$ є рівняння прямої AB або в параметричному виді $x=t$, $y=1$. Параметр t буде змінюватись на відрізку $[AB]$ від 1 до 2 .Тоді ми маємо $z = x+iy = t+i,$ і тому

$$\int\limits_{AB} z^2 dz = \int\limits_1^2 (t+i)^2 dt = \left.\frac{(t+i)^3}{3}\right|_1^2 = \frac{4}{3} + 3i.$$

Нарешті, інтеграл вздовж всієї ламаної лінії буде дорівнювати:

$$\int\limits_C z^2 dz = \int\limits_{OA} z^2 dz + \int\limits_{AB} z^2 dz = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i. \text{ ◄}$$

Приклад 4. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_C (1+i-2\bar{z})dz$ *вздовж ліній, які з'єднують точки* $z_1 = 0$ *і* $z_2 = 1+i,$

1) вздовж прямої;

2) вздовж параболи $y = x^2$*;*

3) вздовж ламаної лінії $z_1 z_3 z_2$, *де* $z_3 = 1.$

► Підінтегральну функцію можна записати так $1+i-2\bar{z} = (1-2x)+i(1+2y).$ Тут $u = 1-2x,\ \ v = 1+2y.$

Тоді

$$\int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_C (1-2x)dx-(1+2y)dy+$$

$$+i\int_C (1-2x)dy+(1+2y)dx.$$

1) Рівняння прямої, яка проходить через точки $z_1=0$ і $z_2=1+i,$ буде $y=x,\ 0\le x\le 1,$ і тоді $dy=dx$. Тому

$$\int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 \left[(1-2x)-(1+2x)\right]dx+$$

$$+i\int_0^1 \left[(1-2x)+(1+2x)\right]dx = 2(i-1).$$

2) У випадку $y=x^2$ ми маємо $dy=2xdx\ \ (0\le x\le 1)$.

$$\int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 \left[(1-2x)-(1+2x^2)2x\right]dx+$$

$$+i\int_0^1 \left[(1-2x)2x+(1+2x^2)\right]dx = -2+\frac{4}{3}i.$$

3) На відрізку $\left[z_1z_3\right]$: $y=0,\ \ dy=0,\ \ 0\le x\le 1.$ На відрізку $\left[z_3z_2\right]$: $x=1, dx=0, 0\le y\le 1.$ Використовуючи адитивність криволінійних інтегралів, отримаємо

$$\int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z})dz + \int_{z_3z_2} (1+i-2\bar{z})dz =$$

$$= \int_0^1 (1-2x)dx + i\int_0^1 dx - \int_0^1 (1+2y)dy + i\int_0^1 (1-2\cdot 1)dx = -2.$$

Таким чином наш інтеграл від неперервної, але не аналітичної функції, в загалі кажучи залежить від шляху інтегрування.◄

§ 3.2. Інтегральна теорема Коші

Означення 1. ***Жорданову (без само перетину у внутрішніх точок) кусково-гладку криву називають замкненим контуром.***

Так як величина контурного інтеграла залежить від напрямку інтегрування, то виникає необхідність нагадати визначення додатного і від'ємного напрямків руху.

Умовимось ***додатнім вважати напрямок руху вздовж контура такий напрямок обходу контура, за якого внутрішня область обмежена цим контуром, залишається ліворуч того хто обходить контур***

Інтегрування в додатному напрямку будемо позначати символом $\int\limits_{C^+} f(z)dz$ *або просто* $\int\limits_{C} f(z)dz$*; інтегрування у протилежному від'ємному напрямку – символом* $\int\limits_{C^-} (z)dz$.

Теорема 1. ***(Основна теорема Коші). Якщо функція*** $w = f(z)$ ***однозначна аналітична у однозв'язній області*** D***, то інтеграл від цієї функції уздовж замкненого контура*** l ***області D дорівнює нулю.***

► Нехай $z = x + iy$ і $w = u(x, y) + iv(x, y)$.

Будемо вважати, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, а також їх частинні похідні за змінними x і y є неперервними у області D.

Відомо (формула (1) § 3.1)

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_l v(x, y)dx + u(x, y)dy \quad (*)$$

Якщо прийняти до уваги теорему Гріна

$$\oint\limits_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) ds$$

до криволінійних інтегралів, що стоять у правій частині рівності (*) для $P(x, y) = u(x, y)$ та $Q(x, y) = v(x, y)$ у першому інтегралі, і $P(x,y)=v(x,y)$ та $Q(x,y)=u(x,y)$ у другому інтегралі, то

$$\int_l f(z)dz=\iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)ds+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)ds \qquad (**)$$

Функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ задовольняють рівнянням Даламбера-Ейлера $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то обидва інтеграла в правій частині останньої рівності (**) дорівнюють нулю. Таким чином

$$\int_l f(z)dz=0$$

Отже, теорема доведена. ◄

Можна показати, що теорема справджується, коли l *- межа замикання* $\overline{D}$ *області* D*, на якій функція* $f(z)$ *в* D *зберігає неперервність.*

Теорема 2. ***Нехай*** $f(z)$ ***є аналітичною функцією в многозв'язній області*** D***, яка зовні обмежена контуром*** C_0***, а з середини контурами*** $C_1, C_2, C_3,..., C_n$ ***і нехай функція*** $f(z)$ ***неперервна в замкненій області*** $\overline{D}$***. Тоді*** $\int_C f(z)dz=0$***, де*** C ***є повною межею області*** D***, яка складається з контурів*** C_0, C_1, $C_2,..., C_n$***, причому обхід границі*** C ***відбувається в додатному напрямку.***

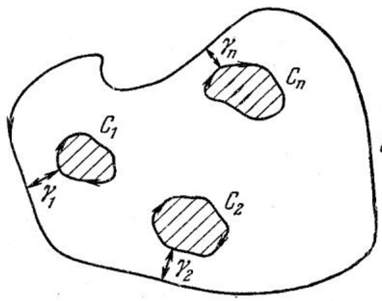


Рис. 23

► Проведемо гладкі криві γ_1, $\gamma_2,..., \gamma_n$ які з'єднують контур C_0 з контурами $C_1, C_2,..., C_n$. (*Рис 23*) Тоді область, що обмежена контурами $C_0, C_1, C_2,..., C_n$ і кривими γ_1,

$\gamma_2,..., \gamma_n$, які проходяться двічі у протилежних напрямках, стає однозв'язною (криві γ_1, $\gamma_2,..., \gamma_n$ можна вибрати так, щоб не перетиналися). Приймаючи до уваги основну теорему Коші, інтеграл вздовж межі цієї області дорівнює нулю. Але інтеграли вздовж допоміжних кривих γ_1, $\gamma_2,..., \gamma_n$ які проходяться двічі у протилежних напрямках і при підсумовуванні інтегралів випадають. Тому справджується рівність

$$\int_{C_0^+} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz + ...,+ \int_{C_k^-} f(z)dz = 0 \blacktriangleleft \qquad (3)$$

Таким чином, якщо функція $f(z)$ є аналітичною в много зв'язній замкненій області $\overline{D}$, то інтеграл від цієї функції при додатному обході зовнішнього контура дорівнює сумі інтегралів по внутрішнім контурам:

$$\int_{C_0^+} f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^+} f(z)dz + ...,+ \int_{C_k^+} f(z)dz \qquad (4)$$

3.2.1. Невизначений інтеграл

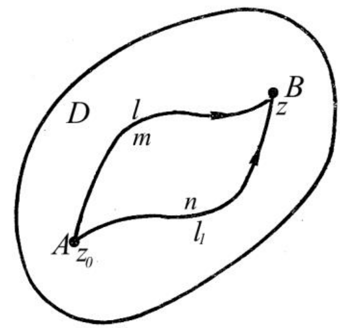


Рис. 24

Нехай функція $f(z)$ аналітична у однозв'язній області D. Покажемо, що *контурний інтеграл від $f(z)$ вздовж кусково-гладкої кривої l, яку взяли у цій області, не залежить від виду кривої («не залежить від шляху»), а залежить лише від початкової і кінцевої точок.* Візьмемо точки z_0 і z (*Рис.24*) у області D і з'єднаємо їх довільно вибраними кривими l і l_1, без точок перетину крім A і B, які належать D. За теоремою Коші

$$\int\limits_{AmBnA} f(z)dz = 0$$

Але

$$\int\limits_{AmBnA} f(z)dz = \int\limits_{AmB} f(z)dz + \int\limits_{BnA} f(z)dz = \int\limits_{AmB} f(z)dz -$$

$$-\int\limits_{AnB} f(z)dz = \int\limits_{l} f(z)dz - \int\limits_{l_1} f(z)dz = 0$$

Тоді

$$\int\limits_{l} f(z)dz = \int\limits_{l_1} f(z)dz$$

де обидва контура l і l_1 проходять у напрямку від z_0 до z. А це означає, що $\int\limits_{l} f(z)dz$ залежить не від шляху l, а від початкової і кінцевої точок z_0 і z. Теорема легко узагальнюється на випадок скінченної кількості спільних точок кривих l і l_1. Досить цими точками розбити криву з l та l_1 на скінченну кількість замкнених контурів для кожної з яких теорема доведена.

У цьому випадку інтеграл прийнято позначати так

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

Числа z_0 і z будемо називати *нижньою і верхньою межами інтеграла.*

Якщо зафіксувати нижню межу, то величина $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ залежатиме від верхньої межи, тобто буде однозначною функцією верхньої межі

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z).$$

Для $F(z)$ можна довести наступну теорему.

Theorem 3. ***Нехай функція*** $f(z)$ ***неперервна в області*** D***, для якої інтеграл уздовж всяких кусково-гладких кривих які належать області*** D ***залежить тільки від початкової і кінцевої точок кривих. Тоді інтеграл***

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

є аналітичною функцією, причому

$$F'(z)=f(z).$$

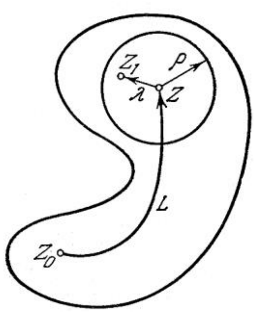


Рис. 25

► Розглянемо деякий окіл U точки $z: |\zeta - z| < \rho$, який належить області D. Нехай $L \subset D$ якась крива, яка з'єднує точку z_0 з точкою z, і λ - прямолінійний відрізок, який з'єднує точку z з деякою точкою $z_1 \subset U$ (*Рис. 25*), тоді

$$F(z)=\int_L f(z)dz,$$

$$F(z_1)=\int_{L+\lambda} f(z)dz=\int_L f(z)dz+\int_\lambda f(z)dz$$

і, отже,

$$F(z)-F(z_1)=\int_\lambda f(\zeta)d\zeta,$$

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z_1-z}-f(z)=\frac{\int_\lambda f(\zeta)d\zeta - f(z)(z_1-z)}{z_1-z}=$$

$$=\frac{\int_\lambda [f(\zeta)-f(z)]d\zeta}{z_1-z}.$$

Оскільки $f(z)$ неперервна в D, то для всякого $\varepsilon>0$ можна вибрати радіус ρ, у околі U настільки малим, що для буд-яких точок $\zeta \in U$ буде виконуватись нерівність $\left| f(\zeta) - f(z) \right| < \varepsilon$. Тоді матимемо:

$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon \cdot довжина \lambda}{\left| z_1 - z \right|} = \varepsilon$$

(бо $\left| z_1 - z \right| = довж.\ \lambda$), звідки випливає, що

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} = f(z) = F'(z). ◄$$

Назвемо функцію $\Phi(z)$, аналітичну в деякій області D, первісною функції $f(z)$, якщо $\Phi'(z) = f(z)$ у всіх точках області. За умов приведеної теореми можна стверджувати, що $\int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$ є первісною для $f(z)$ в області D. Покажемо, що для $\Phi(z)$ - всякої первісної для $f(z)$ виражається формулою

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta + C, \tag{4}$$

де C - комплексна стала. Покладемо

$$\omega(z) = \Phi(z) - \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta = u(x, y) + iv(x, y)$$

тоді

$$\omega'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f(z) - f(z) = 0$$

звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

і, отже,

$$u(x, y) = C_1 \qquad v(x, y) = C_2$$

тобто

$$\omega(x, y) = C_1 + iC_2 = C$$

Покладаючи у формулі (4) $z = z_0$, отримаємо:

$$\Phi(z_0)=C.$$

тому

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=\Phi(z)-\Phi(z_0) \qquad (5)$$

Цей результат дозволяє зводити обчислення інтеграла від аналітичної функції $f(z)$ до знаходження деякої первісної підінтегральної функції.

Приклад. Оскільки у області $-\pi<\arg z<\pi$ функція $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ є первісною від функції $f(z)=\dfrac{1}{z}$, одержимо:

$$\int_{1}^{z}\frac{dt}{t}=\ln z-\ln 1=\ln z.$$

3.2.2. Інтеграл у многозв'язній області

Припустимо, що в області G існують замкнені контури L (принаймні один), для яких $\int_L f(z)dz\neq 0$. Наприклад,

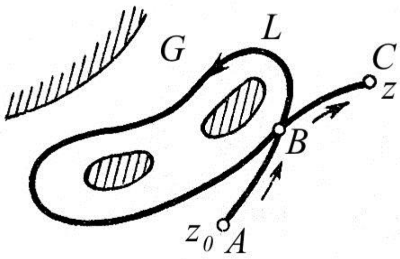


Рис. 26

функції $\dfrac{1}{z}$ у області $z\neq 0$ та $\dfrac{1}{z^2+1}$ в області $z^2+1\neq 0$, тобто $z\neq i$ і $z\neq -i$, В першому $\int_{|z|=\rho}\dfrac{dz}{z}=2\pi i$; у другому випадку при $r<2$

$$\int_{|z-i|=r}\frac{dz}{1+z^2}=\pi,\quad \int_{|z+i|=r}\frac{dz}{1+z^2}=-\pi.$$

Покажемо, що тоді для всяких двох точок z_0 і z в області G знайдуться принаймні два шляхи (*Fig. 26*), які з'єднують точки $A(z_0)$ з точкою $C(z)$ вздовж яких функція $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ має різні значення. Це $L_1 = AB + BC$ і $L_2 = AB + L + BC$, для яких

$$\int\limits_{L_2} f(z)dz - \int\limits_{L_1} f(z)dz = \left(\int\limits_{AB} + \int\limits_{L} + \int\limits_{BC}\right) - \left(\int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}\right) = \int\limits_{L} f(z)dz \neq 0$$

Отже, функція $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ є многозначною у області G.

Приклад. Функція $f(z)=\dfrac{1}{z}$ визначена у області $G:\ z \neq 0.$ Переконаємось, що інтеграл $\int\limits_{L}\dfrac{dz}{z}$ де $L \subset D$ є довільна гладка, яка з'єднує точки $z_0 = 1$ і z можна подати у вигляді суми інтеграла вздовж всякої іншої кривої l, що з'єднує ці ж самі точки і виразу довільно кратного значенню інтеграла вздовж Жорданового замкненого контура γ, який містить точку $z=0$ (0 не належить області). Нехай L, l, γ зображені на *Рис 27*. Приєднаємо до L дуги AB і AC кожна з яких, при обчисленні інтегралів, буде проходитись двічі в протилежних напрямках.

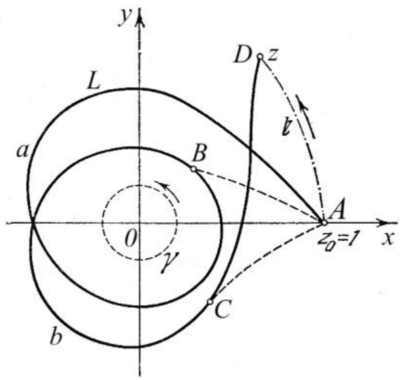


Рис. 27

Отримаємо:

$$\int\limits_{L}\frac{dz}{z} = \int\limits_{AaBA}\frac{dz}{z} + \int\limits_{ABbCA}\frac{dz}{z} + \int\limits_{ACD}\frac{dz}{z}.$$

Кожний з двох замкнених контурів, $AaBA$, $ABbCA$ разом з контуром γ утворюють складений контур. Отже, за теоремою 2

$$\int\limits_{AaBA} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}, \quad \int\limits_{ABbCA} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Криві l і DCA утворюють замкнений контур, внутрішні відносно якого точки, належить області G. Тому інтеграл уздовж нього дорівнює нулю

$$\int\limits_{ACD} \frac{dz}{z} = \int\limits_{l} \frac{dz}{z}$$

Отже,

$$\int\limits_{L} \frac{dz}{z} = \int\limits_{l} \frac{dz}{z} + 2\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Для всякої кривої L матимемо:

$$\int\limits_{L} \frac{dz}{z} = \int\limits_{l} \frac{dz}{z} + n\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Приймаючи до уваги, що $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ і $\int\limits_{l} \frac{dz}{z} = \ln z$ отримаємо:

$$F(z) = \int\limits_{1}^{z} \frac{dz}{z} = \int\limits_{L} \frac{dz}{z} = \ln z + 2n\pi i = Lnz.$$

Звідси випливає, що інтеграл $\int\limits_{1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}$ представляє в області $z \neq 0$ многозначну функцію $Ln\, z$.

Практичні заняття - 3.1

1. Обчислити наступні інтеграли:

1). $\int\limits_{C} z \operatorname{Im} z^2 dz,\ C: |z| = 1\ \left(-\pi \le \arg z \le 0\right).$

2). $\int\limits_C e^{|z|^2}\operatorname{Re} z dz,$ C є пряма лінія яка з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i.$

3). $\int\limits_C \ln z dz,$ ($\ln z$ - головне значення логарифма), $C: |z| = 1,$ a) початковою точкою шляху інтегрування є точка $z_0 = 1;$

b) $z_0 = -1.$ Рух відбувається проти ходу годинникової стрілки.

4). $\int\limits_C z\operatorname{Re} z dz,$ $C: |z| = 1.$ За додатного обходу C.

5) $\int\limits_C z \cdot \bar{z} dz,$ $C: |z| = 1.$ За додатного обходу C.

6). $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz,$ 7). $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz,$ $C:$ a) $z = (2+i)t$ $(0 \le t \le 1);$

b) ламана лінія, яка має сегмент $[0;2]$ дійсної осі і відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 2$ і $z_2 = 2 + i.$

8) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz;$ 9) $\int\limits_0^{i+1} z^3 dz$. 10) $\int\limits_1^i (3z^4 - 2z^2)dz$.

11) $\int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 - z)\cdot e^{\frac{z^2}{2}} dz.$ 12) $\int\limits_0^i z\cos z dz.$ 13) $\int\limits_0^i z\sin z dz.$

14) $\int\limits_0^1 (z - i)e^{-z} dz.$ 15) $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$

16) $\int\limits_C \operatorname{Re}(\sin z)\cos z dz,$ $C: |\operatorname{Im} z| \le 1,$ $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$.

17) $\int\limits_C z\operatorname{Im}(z^2)dz;$ $C: |\operatorname{Im} z| \le 1,$ $\operatorname{Re} z = 1.$

18) $\int\limits_C \tan z dz,$ $C:$ є дуга параболи $y = x^2$, яка з'єднує точки $z = 0,$ $z = 1 + i.$

19) $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z} dz$ уздовж прямої, яка з'єднує точки $z_1 = 1$ і $z_2 = i$.

20) $\int_C e^z dz$, C: a) дуга параболи $y = x^2$, яка з'єднує точки $z = 0$, $z = 1 + i$; b) відрізок прямої, який з'єднує ті ж самі точки.

21) Обчислити інтеграли $I_1 = \int_C x dz$ $I_2 = \int_C y dz$ вздовж наступних шляхів :

a) вздовж радіуса вектора точки $z = 2 + i$;

b) вздовж півкола $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ (початкова точка руху $z = 1$);

c) вздовж кола $|z - a| = R$.

22) Нехай C є деякий простий замкнений контур, який обмежує область площини S. Довести наступні рівності:

1) $\int_C x dz = iS$; 2) $\int_C y dz = -S$; 3) $\int_C \bar{z} dz = 2iS$.

§ 3.3. Інтегральна формула Коші

Основна терема Коші дає можливість вивести формулу, яка є основною у всій теорії функцій комплексної змінної.

Теорема 1. ***Якщо замкнена крива*** C ***обмежує однозв'язну область*** D***, а функція*** $f(z)$ ***аналітична у області*** D'***, яка містить область*** D ***і її межу*** C***, тоді для всякої внутрішньої точки*** z ***області*** D ***справджується наступна формула***

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (1)$$

де C ***проходиться у додатному напрямку***.

► Для доведення розглянемо підінтегральну функцію, вважаючи ζ змінним, а z сталим. За умовою теореми чисельник дробу $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ - функція $f(z)$ аналітична в області D' (*Рис.28*). Знаменник дробу $\zeta - z$ - лінійна функція, аналітична на всій площині. Таким чином, дріб $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ аналітична у всіх точках області D' окрім нуля знаменника $\zeta = z$. Виключивши точку z із D' одержимо двозв'язну область, у якій дріб аналітична функція.

Щоб виконувались умови, при яких справджується теорема Коші для многозв'язної області, опишемо коло l з центром у точці z такого радіуса r, що $l \subset D$. На підставі теореми Коші, отримаємо

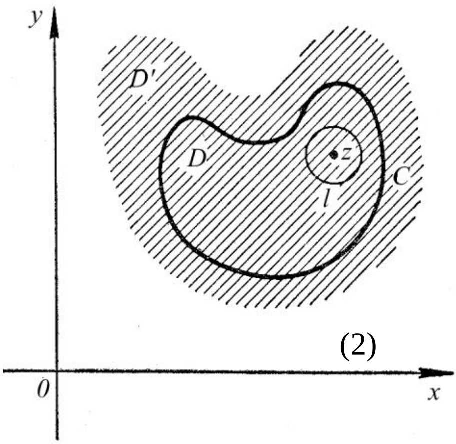


Рис. 28

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (2)$$

Де межа області проходиться у додатному напрямку.

Позначимо $\zeta - z = re^{i\varphi}$ і виконаємо заміну в правій частині рівності (2) $\zeta = z + re^{i\varphi}$, $d\zeta = ire^{i\varphi} d\varphi$. Тоді

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi =$$

$$
=i\int_0^{2\pi}[f(z)+f(z+re^{i\varphi})-f(z)]d\varphi=i\int_0^{2\pi}f(z)d\varphi+
$$

$$
+i\int_0^{2\pi}[f(z+re^{i\varphi})-f(z)]d\varphi=if(z)2\pi+
$$

$$
+i\int_0^{2\pi}[f(z+re^{i\varphi})-f(z)]d\varphi.
$$

Отже

$$
\left|\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-2\pi if(z)\right|=\left|i\int_0^{2\pi}[f(z+re^{i\varphi})-f(z)]d\varphi\right|\le
$$

$$
\le\int_0^{2\pi}\left|f(z+re^{i\varphi})-f(z)\right|d\varphi. \qquad (3)
$$

Оскільки $f(z)$ неперервна, то для любого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що з нерівності

$$
\left|(z+re^{i\varphi})-z\right|=\left|re^{i\varphi}\right|=r<\delta
$$

Випливатиме нерівність

$$
\left|f(z+re^{i\varphi})-f(z)\right|<\varepsilon.
$$

Наразі з співвідношення (3) отримаємо нерівність

$$
\left|\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}dt-2\pi if(z)\right|<\int_0^{2\pi}\varepsilon d\varphi=2\pi\varepsilon,
$$

Яке показує, що ліва частина може бути зроблена як завгодно малою, якщо взяти достатньо малим радіус r кола l. З другого боку , вона не залежить від r. Отже вона повинна дорівнюватись нулю

$$
\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-2\pi if(z)=0
$$

або

$$
\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi if(z).
$$

і

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}dt. ◄$$

Приклад 1. *Скориставшись формулою Коші обчислити інтеграл* $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}$*, де* C *є коло радіуса 1 з центром у точці* $z=i$*, і рух відбувається вздовж контура* C *проти ходу годинникової стрілки*

$$► \int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}=\int\limits_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)}=\int\limits_C \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}dz.$$

Оскільки $f(z)=\frac{1}{z+i}$ - функція аналітична в крузі кола і на границі, тому отримаємо за формулою Коші:

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}=\int\limits_C \frac{f(z)}{z-i}dz=2\pi i f(i)=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi.$$

Приклад 2. *Скориставшись інтегральною формулою Коші обчислити інтеграл*

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz,$$

якщо: 1) $C:|z-2|=1;\ C:|z-2|=3;\ C:|z-2|=5.$

►1) У замкненій області, яка обмежена колом $|z-2|=1$, підінтегральна функція аналітична тому за теоремою Коші

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=0.$$

2) Область, яка обмежена колом $|z-2|=3$, містить точку $z=0$ в якій знаменник підінтегральної функції обертається у нуль. Тоді інтеграл можна записати у вигляді

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_C \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz.$$

Функція $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z-6}$ - аналітична в заданій області. За інтегральною формулою Коші $(z_0=0)$, отримаємо:

$$\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = 2\pi i\cdot\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) Область, яка обмежена колом $|z-2|=5$ містить точки $z=0, z=6$ які обертають у нуль знаменник підінтегральної функції. Формулу (1) не можна застосувати безпосередньо. Для того щоб обчислити інтеграл необхідно скористатись теоремою про складений контур. Побудуємо кола γ_1 і γ_2 з центрами у точках $z=0$ і $z=6$ з достатньо малими радіусами, щоб вони не перетиналися і повністю лежать в середині круга $|z-2|\le 5$

У тризв'язній області, яка обмежена колами $|z-2|=5,\gamma_1,\gamma_2$ підінтегральна функція є аналітична функція. Тому

$$\int\limits_{|z-2|-5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{z^2}}{z}}{z-6}dz =$$

$$= 2\pi i\cdot\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} + 2\pi i\cdot\left.\frac{e^{z^2}}{z}\right|_{z=6} = \pi i\frac{e^{36}-1}{3}. ◄$$

Зауваження 1. *Інтеграл*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

називається інтегралом Коші, *де C є замкнений контур, який обмежує область, де $f(z)$ аналітична.*

Зауваження 2. *Якщо C є деяка кусково-гладка лінія, замкнена або незамкнена, а функція $f(z)$ неперервна на контурі C, то інтеграл (4)* ***називається інтегралом типу Коші.***

Теорема 2. ***Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області D і неперервною в замкненій області $\overline{D}$. Тоді у внутрішніх точках області D існує похідна довільного порядку функції $f(z)$ і причому для неї має місце формула***

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (5)$$

► Нехай функція $f(z)$ аналітична у деякій точці z. Тоді, як відомо, вона аналітична в деякому околі точки z. Покажемо, що функція $f(z)$ має похідну, і яка дорівнює

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\ .$$

Надамо z такого приросту Δz, що $z+\Delta z$ належатиме області D. Тоді приріст функції можна записати у вигляді:

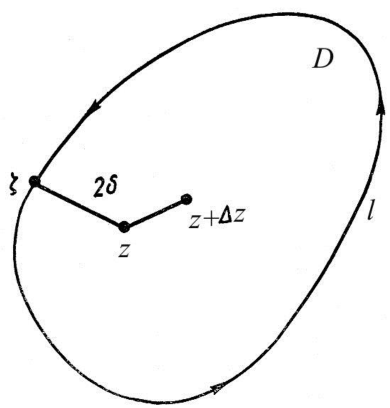


Рис. 29

$$\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z}\right] d\zeta\ .$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} = \frac{\Delta z}{(\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z)} = \Delta z\frac{\zeta - z - \Delta z + \Delta z}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)} =$$

$$= \Delta z\left[\frac{1}{(\zeta - z)^2} + \frac{\Delta z}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - \Delta z)}\right],$$

і при $\Delta z \neq 0$:

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta+\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{(\zeta-z)^2}dt+\alpha\cdot\Delta z$$

Але ж $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\alpha\cdot\Delta z)=0$, бо α є обмеженою змінною. Справді, оскільки $f(z)$ неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то вона обмежена. Нехай на контурі C $|f(z)|\le M$. Позначимо найкоротшу відстань від точки z до контура C через 2δ і будемо вважати, що $|\Delta z|<\delta$ (*Рис. 29*). Тоді

$|\zeta-z|\ge 2\delta$; $|\Delta z|<\delta$; $|\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|>2\delta-\delta=\delta$;

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\right|<\frac{M}{4\delta^2\delta}=\frac{M}{4\delta^3},$$

і за теоремою Дарбу (3.1.1 властивість 5^0)

$$|\alpha|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{4\delta^3}L.$$

Отже, ми довели, що

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta,$$

тобто

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

Подібно доводиться існування $f''(z), f'''(z),...$ і по індукції існування похідної довільного порядку n, а також істотності формули (5).

Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{D}$, тоді вона і неперервна у області $\overline{D}$. Отже, ***аналітична функція має похідні довільного порядку***, які обчислюється за формулою

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt,$$

де $n=1,2,\ldots$ ◄

Зауваження. *Оскільки друга похідна є першою похідною від першої похідної, тоді похідна аналітичної функції є також аналітична функція.*

Приклад 3. *Обчислити інтеграл* $\int_C \frac{\sin z}{z^4}dz$, *де* C *- деякий замкнений контур, який не проходить через точку* $z=0$.

► а) Якщо точка $z=0$ находиться у зовнішності контура C, то функція $\frac{\sin z}{z^4}$ аналітична у середині області обмеженої контуром C, а і на контурі. Тоді за основною теоремою Коші

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4}dz=0.$$

b) Якщо точка $z=0$ належить області обмеженої контуром C, то

$$\int_C \frac{\sin z}{z^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}(\sin z)'''\big|_{z=0}=\frac{\pi i}{3}(-\cos(0))=-\frac{\pi i}{3}.$$ ◄

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz.$$

►Підінтегральна функція $\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}$ аналітична у всіх точках області $|z-1|\le 1$, окрім точки $z_0=1$. Виділимо функцію, яка аналітична у області $|z-1|\le 1$. Для чого запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2},$$

Функція $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$ аналітична у задані й області. Покладаючи $n=1$ за формулою (5) отримаємо

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\dfrac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(1).$$

Знайдемо похідну

$$f'(z) = \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{\pi \cos \pi z \cdot (z+1) - 2\sin \pi z}{(z+1)^3}.$$

Звідси

$$f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{8} = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. *Обчислити інтеграл*

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3 (z-1)} dz.$$

► Знаменник $(z+1)^3 (z-1)$ підінтегральної функції обертається у нуль у точках $z_1 = -1$ і $z_2 = 1$, які лежать в середині круга $|z| \le 2$. Побудуємо кола γ_1 і γ_2 з центрами в точках -1 і 1, з такими достатньо малими радіусами, які не перетинаються і повністю належать кругу $|z| \le 2$. У тризв'язній області, яка обмежена колами $|z| = 2$, γ_1, γ_2 підінтегральна функція є аналітичною За теоремою Коші, про складений контур, ми матимемо

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz .$$

Застосовуючи формулу (5) до

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\cosh z dz}{(1+z)^3(z-1)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{\cosh z}{z-1}}{(z+1)^3}dz ,$$

в якому функція $f(z) = \dfrac{\cosh z}{z-1}$ аналітична в замкненому крузі з межею γ_1, отримаємо

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{\cosh z}{(z-1)}}{(z+1)^3}dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\cosh z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1} = -\frac{2e^{-1}+\cosh 1}{4}\pi i .$$

Далі за інтегральною формулою Коші

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz = \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{\cosh z}{(z+1)^3}}{z-1}dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\cosh z}{(z+1)^3}\Bigg|_{z=1} = \pi i \cdot \frac{\cosh 1}{4} .$$

Нарешті:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz = -\frac{2e^{-1}+\cosh 1}{4}\pi i + \pi i \cdot \frac{\cosh 1}{4} = -\frac{\pi i}{2e} . \blacktriangleleft$$

Практичні заняття - 3.2

Обчислити наступні інтеграли

1. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1/2}\frac{e^{1/z}}{z^2+z}dz.$	2. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{e^{z}\cos\pi z}{z^2+2z}dz.$
3. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\frac{\cosh z}{z^4-1}dz.$	4. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-1-i\rvert=1}\frac{\sin\pi(z-1)}{z^2-2z+2}dz.$
5. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{\tan z}{ze^{1/(z+2)}}dz.$	6. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^{z}+2)}dz.$
7. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}dz.$	8. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=}\frac{dz}{(z^2+9)(z-9)}.$
9. $\displaystyle\oint\limits_{C}\frac{\sinh(z+1)}{z^2+1},\ \ C: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}.$	10. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=5}\frac{dz}{z^2+16}.$
11. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{\cos z}{z^3}dz.$	12. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{\sinh^2 z}{z^3}dz.$
13. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz.$	14. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{z\sinh z}{(z^2-1)^2}dz.$
15. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=6}\frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}.$	16. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=3}\frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz.$
17. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2}\frac{1}{z^3}\cos\frac{\pi}{z+1}dz$	18. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=1}\frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}dz.$
19 $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2}\frac{1-\sin z}{z^2}dz.$	20. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1/2}\frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}dz.$

Частина IV. Ряди

§ 4.1. Числові ряди у комплексній області

Означення 1. ***Нехай задана нескінченна послідовність комплексних чисел***

$$\{c_n\} = \{a_n + ib_n\},\ \ n = 1,2,\ldots.$$

Вираз виду

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n + \ldots \qquad \textbf{(1)}$$

називається числовим рядом. Числа $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ ***називаються членами ряду***

Означення 2 ***Сума скінченного числа членів (перші*** n ***членів) ряду називається*** $n-$***ою частковою сумою ряду:***

$$s_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо існує скінченна границя

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

то вона називається сумою ряду (1) і кажуть, що ***ряд збігається.***

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не існує або дорівнюється нескінченності, тоді кажуть, що ***ряд*** (1) ***розбіжний і не має суми.***

Розглянемо ряд

$$a_0 + a_0q + a_0q^2 + a_0q^3 + \ldots. + a_0q^n + \ldots \qquad (3)$$

Членами цього ряду є члени геометричної прогресії, і він називається ***рядом геометричної прогресії*** або просто ***геометричним рядом*** з першим членом a_0 і знаменником q ($a_0 \neq 0$). Сум перших n членів геометричної прогресії можна знайти за формулою

$$s_n = \frac{a_0 - a_0q^n}{1-q},$$

або

$$s_n = \frac{a_0}{1-q} + \frac{a_0q^n}{1-q}$$

Нехай $|q|<1$, тоді $|q|^n \to 0$, при $n\to\infty$ і , відповідно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_0}{1-q}+\frac{a_0q^n}{1-q}\right)=\frac{a_0}{1-q},$$

отже ряд (3) збігається.

Якщо $|q|>1$, то $|q|^n\to\infty$ при $n\to\infty$ і тоді $\frac{a_0-a_0q^n}{1-q}\to\infty$. Тому коли $|q|>1$ ряд (3) розбіжний

Теорема 1. ***Ряд (1) збігається тоді і тільки тоді, коли ряди дійсної й уявної частини збігаються, тобто***

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+...+a_n)+i\lim_{n\to\infty}(b_1+b_2+..+b_n)=a_0+ib_0$$

Можна показати, що необхідна умова збіжності ряду виконуеться, тобто

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Приймаючи до уваги, що $|c_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ наступна теорема може бути доведена

Теорема 2. ***Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$, який складений з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$.***

► Зауважимо, що ця теорема справедлива для рядів з дійсними членами, про що відомо з дійсного аналізу. Нехай $c_n=a_n+ib_n$. Тоді

$$|a_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|c_n|;|b_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|c_n|$$

Отже, за ознакою порівняння ряди $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ і $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ збігаються.

Тоді збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, значить збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. ◄

Означення 2. *Якщо збігається не тільки ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *, але і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$*, утворений із модулів членів даного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ***, то даний ряд називається абсолютно збіжним***

Означення 3. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *збігається, але ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ *розбіжний, тоді даний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ***називається не абсолютно або умовно збіжним.***

Теорема 3. ***Якщо даний ряд збігається, тоді і ряд, утворений із даного ряду виключенням декількох членів також збігається.***

Теорема 4. ***Якщо всі члени збіжного ряду помножити на одне і теж саме число, то новий ряд буде збіжним, а його сума буде дорівнюватись сумі даного ряду, яка помножена на теж саме число***

Теорема 5. ***Якщо ряди*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ***і*** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ***збіжні, а їх суми дорівнюють*** s_1 ***і*** s_2 ***відповідно, тоді збігається і ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$***, а його сума дорівнює*** $s_1 + s_2$**.**

Теорема 6. ***(Ознака порівняння). Якщо для всіх*** $n > N$ ***виконується нерівність*** $|u_n| < |v_n|$ ***тоді зі збіжності ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ ***випливає абсолютна збіжність ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$***, а з розбіжності ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ ***випливає розбіжність ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ **.**

Теорема 7. ***(Ознака Д'Аламбера). Якщо існує границя*** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = q$***, то при*** $q < 1$ ***ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ ***збігається абсолютно, а при*** $q > 1$***, ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ ***розбіжний.***

Теорема 8. ***(Ознака Коші). Якщо існує границя*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = q$***, то при*** $q < 1$ ***ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ ***збігається абсолютно, а при*** $q > 1$***, ряд*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ ***розбіжний.***

Теорема 9. ***Якщо в абсолютно збіжному ряді зробити будь яку перестановку його членів, то від цього не порушиться його збіжність і не зміниться його сума.***

Теорема 10. ***Якщо ряди*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ***і*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ***абсолютно збіжні і мають відповідно суми*** s_1 ***і*** s_2***, то ряд, утворений перемноженням даних рядів за правилом множення многочлена на многочлен, також абсолютно збігається і має суму*** $s = s_1 \cdot s_2$***.***

Зауваження. *При множені рядів* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *звичайно зручніше всього вести записи так:*

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + ..)(v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots) =$$
$$= u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots$$

§ 4.2. Функціональні ряди

Означення 1. ***Нехай задана послідовність функцій комплексної змінної*** $z = x + iy$

$$u_1(z),\ u_2(z),\ u_3(z), \ldots\ u_n(z), \ldots$$

у заданій області D ***(або на кривій*** l***), тоді ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***називається функціональним рядом.***

Означення 2. ***Якщо ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***збігається в усіх точках*** z ***області*** D ***(на кривій*** l***), то він називається збіжним у області*** D ***(на кривій*** l***), а його сума буде функцією від*** z ***на цій області (на кривій*** l***). Позначивши цю суму*** $s(z)$***, можна записати:***

$$s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ збігається у деякій області. Покладаючи

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z), \qquad r_n(z) = s(z) - s_n(z),$$

де $s(z)$ - сума даного ряду, $r_n(z)$ - залишковий член ряду, отримаємо $\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0$ для всіх z даної області. Останнє ствердження можна сформулювати так:

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***збігається, тоді для кожного*** $\varepsilon > 0$ ***існує такий номер*** N***, що для всіх*** $n > N$ ***виконується нерівність***

$$|r_n(z)| < \varepsilon \qquad \textbf{(1)}$$

Це N звичайно, залежить від ε, але ж воно залежить і від вибору точки z. У такому випадку, коли множина, на якому збігається ряд, є не областю, а скінченним числом точок $z_1, z_2, z_3, ..., z_k$, можна знайти для кожного з цих $z_1, z_2, z_3, ..., z_k$, своє $N_1, N_2, N_3, ..., N_k$ і вибрати з них найбільше число N_i таке, що нерівність (1) буде виконуватись для всіх $z_1, z_2, z_3, ..., z_k$ одночасно, як тільки стане $n > N_i$. У такому випадку число N_i не залежить від z. У випадку області, коли число z нескінченне, хоча для кожного z існує N, починаючи з якого виконується нерівність (1), найбільшого серед них може не бути. Ряди, для яких існує вказаний вище номер N, що залежить тільки від ε, і, відповідно, підходе для всіх z області, яку розглядаємо. Такі ряди називаються рівномірно збіжними.

Означення 3. ***Ряд, який збігається для всіх*** z ***області*** D

$$u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + ... + u_n(z) + ...,$$

називається рівномірно збіжним в цій області, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ ***існує такий не залежний від*** z ***номер*** N***, що для всіх*** $n > N$ ***нерівність***

$$|r_n(z)| < \varepsilon \tag{2}$$

виконується одночасно для всіх z ***області*** D***.***

Оскільки

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z),$$

тоді останню нерівність (2) можна замінити наступною

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon.$$

Доведемо ознаку рівномірної збіжності ряду, яку зручно застосовувати.

Теорема 1 ***(Ознака Вейєрштрасса). Якщо члени функціонального раду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***визначені на області*** D ***і задовольняють в ній нерівності***

$$|u_n(z)| \le a_n, \ (n = 1, 2, 3, ..) \tag{3}$$

і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***збігається, тоді даний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***рівномірно збігається в області*** D***.***

► Даний рад збігається, і причому абсолютно, у довільній точці z області D, оскільки його члени за модулем не більші за члени a_n ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який збігається. Покажемо його рівномірну збіжність. Користуючись даною нерівністю (3), отримаємо

$$|r_n(z)| = |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + ...| \le |u_{n+1}(z)| + |u_{n+2}(z)| + ...$$
$$\le a_{n+1} + a_{n+2} + ... = \rho_n .$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і його члени a_n не залежать від z, то для нього знайдеться такий номер N, який не залежить від z, що при $n > N$ буде виконуватись нерівність $\rho_n < \varepsilon$. Тоді буде виконуватись і нерівність $|r_n(z)| < \varepsilon$, причому для всіх точок z області D одночасно. Цим і доводиться рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$. ◄

Теорема 2. ***Якщо члени ряду є неперервні в області*** D ***функції, а ряд рівномірно збігається в цій області, то сума цього ряду є функцією, неперервною у цій області*** D.

Теорема 3. ***Якщо члени*** $u_n(z)$ ***рівномірно збіжного ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***в області*** D ***являються функціями, неперервними у цій області, то цей ряд можна почленно інтегрувати вздовж любої лінії*** l, ***яка розташована у області*** D.

Таким чином,

$$\int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_C u_n(z) dz \right)$$

Теорема 4. ***Якщо члени*** $u_n(z)$ ***збіжного у області*** D ***ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***мають неперервні похідні у цій області (це***

означає, що $u_n(z)$ ***аналітичні), і ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(z)$ ***рівномірно збігається, то ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***можна почленно диференціювати у області, тобто***

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(z)\right)'.$$

В означеннях рівномірної збіжності ряду і теоремах мали на увазі відкриту область D, проте все це можна було б віднести до замкненої області $\overline{D}$ або до лінії l.

Теорема Вейєрштрасса. ***Якщо члени ряду*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ***аналітичні в області*** D ***і цей ряд збігається в*** D ***і рівномірно збігається у будь якій замкненій області*** $\overline{D_1}$ ***яка належить області*** D***, то його сума*** $s(z)$ ***є функцією, аналітичною у*** D***, то ряд можна почленно диференціювати і одержаний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(z)$ ***рівномірно збігається у*** $\overline{D_1}$ ***до*** $s'(z)$

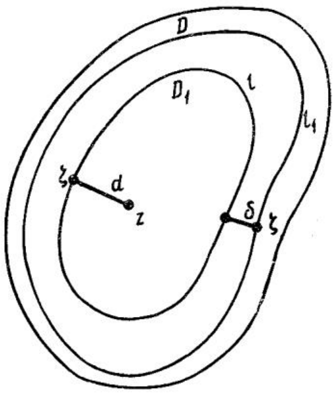


*Рис. 1**

► Візьмемо будь яку точку z в області D і побудуємо область D_1 з контуром l (*Рис. 1**), яка лежить в області D і містить всередині себе цю точку z. Нехай найменша відстань точки z від контура l буде d, таким чином відстань між будь якою точкою ζ контура l і точкою z: $|\zeta - z| \geq d$. Оскільки даний ряд рівномірно збігається у $\overline{D_1}$, то він рівномірно збігається і на контурі l. Помножимо цей ряд

$$s(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\zeta) \qquad (*)$$

на величину $\dfrac{1}{2\pi i(\zeta-z)}$. Отримаємо ряд

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{s(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{u_n(\zeta)}{\zeta-z} \qquad (**)$$

який рівномірно збігається до своєї суми $\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{s(\zeta)}{\zeta-z}$, оскільки функція $\dfrac{1}{2\pi i(\zeta-z)}$ обмежена на l. Дійсно, з нерівності $|\zeta-z|\geq d$ випливає, що $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{1}{\zeta-z}\right|\leq\dfrac{1}{2\pi d}$. Рівномірно збіжний на кривій l ряд (**) почленно інтегруємо. Після інтегрування, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_l\frac{s(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_k\frac{u_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

Оскільки функції $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z),\ldots,u_n(z)$, аналітичності в замкненій області $\overline{D_1}$, то застосовуючи інтегральну формулу Коші, останню рівність можна записати так:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_l\frac{s(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$$

Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ дорівнює $s(z)$, і, відповідно, одержимо рівність

$$s(z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_l\frac{s(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

Але $s(z)$, як сума рівномірно збіжного ряду, є функцією неперервною, а так як крім того, представлена інтегралом типу Коші, вона є аналітичною функцією у будь якій області $\overline{D_1}$, внутрішній до D, і, відповідно, аналітичною у D. Таким чином перша половина тереми доведена.

Доведемо тепер можливість почленного диференціювання даного ряду і рівноміру збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(z)$ у будь якій області $\overline{D_1}$, яка лежить у D. Оскільки для з'ясування рівномірної збіжності доведется вести доведення не для одного, а для всіх z області $\overline{D_1}$ одночасно, тоді величина d може бути як завгодно малою і для оцінок не підходить. Тому проведемо замкнену лінію l_1, яка лежить між контуром області D і контуром l (*Рис. 1**); нехай найменша відстань між l і l_1 буде δ.

Помножимо рівність (*) на величину $\dfrac{1}{2\pi i(\zeta - z)^2}$, де ζ будь яка точка лінії l_1. Ця величина обмежена, оскільки

$$|\zeta - z| \geq \delta \qquad \text{і} \qquad \left|\frac{1}{2\pi i(\zeta - z)^2}\right| \leq \frac{1}{2\pi\delta^2}$$

При цьому отримаємо ряд, який рівномірно збігається на лінії l_1, і його можна інтегрувати за членами. Отже, одержимо:

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_l \frac{s(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_k \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

Але функції $s(z), u_1(z), u_2(z), ..., u_n(z), ...$ аналітичні, і для них справедлива формула

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\ ;$$

Використовуючи її, останній ряд можна переписати так:

$$s'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(z),$$

що і доводить можливість почленного диференціювання даного ряду.

Залишилося довести рівномірну збіжність одержаного ряду. Позначимо остаточний член ряду (*) після $n-$ого члена через $r_n(z)$, а остаточний член ряду, який одержали почленним диференціюванням, через $\rho_n(z)$. Очевидно,

$$\rho_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{r_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

Оскільки ряд (*) збігається рівномірно на l_1, то для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться таке N, яке залежить від ε, що для $n>N$ буде виконуватись нерівність $|r_n(\zeta)|<\varepsilon$. Крім того $|\zeta-z|\geq\delta$. Тому, згідно нерівності Дарбу, одержимо

$$|\rho_n(z)|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta^2}\cdot l_1=\varepsilon_1.$$

Отже, нерівність $|\rho_n(z)|<\varepsilon_1$, де ε_1 - довільне число, виконується у всіх точках z області $\overline{D_1}$ для $n>N$, де N не залежить від z.

Цим доведена рівномірна збіжність ряду, який одержаний почленним диференціюванням даного ряду

Висновок. *Застосовуючи доведену терему до ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(z)$, *одержимо* $s''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u''_n(z)$

Звідси також випливає, що даний ряд *можна диференціювати почленно скільки завгодно раз. При цьому одержані ряди будуть рівномірно збігатися у любій області* $\overline{D_1}$*, яка лежить у* D.

Зауваження. *Ми впевнились, що рівномірно збіжний в області* D *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *має сумою аналітичну функцію в області* D, *якщо всі члени* $u_1(z), u_2(z), \ldots$ *цього ряду аналітичні функції в* D. *Такий ряд можна почленно інтегрувати від* z_0 *до* z, *і якщо* D *- однозв'язна область, тоді знову прийдемо до ряду, члени якого аналітичні в області* D. *Можна довести, що новий ряд теж буде рівномірно збігатися в середині* D.

§ 4.3. Степеневі ряди

У попередньому параграфі були розглянуті функціональні ряди, причому вид функцій $u_n(z)$ не конкретизували. Зараз розглянемо ряди членами яких є функції виду $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$, де c_n - деякі комплексні числа, а z_0 - фіксована точка комплексної площини.

Означення 1. ***Степеневим рядом називається ряд виду***

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

Члени ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ є аналітичними функціями на всій комплексній площині, тому для дослідження властивостей даного ряду можуть бути застосовані загальні теореми попереднього параграфа. Як було встановлено, багато важливих властивостей є наслідками рівномірної збіжності. Отже, при дослідженні степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ важливо встановити область рівномірної збіжності. Зауважимо, що область збіжності степеневого ряду визначається видом коефіцієнтів c_n. Області збіжності такого ряду встановлюється наступною теоремою.

Теорема 1. ***(Теорема Абеля). Якщо степеневий ряд***

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (1)$$

збігається у деякій точці $z_1 \neq z_0$***, тоді він абсолютно збігається і в будь якій точці*** z***, яка задовольняє умові*** $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$***; причому у кругу*** $|z - z_0| < \rho$ ***радіуса*** ρ***, який менший за*** $|z_1 - z_0|$***, ряд збігається рівномірно.***

► Виберемо довільну точку z, яка задовольняє умові $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, і розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Позначимо $|z - z_0| = q\,|z_1 - z_0|$, $q < 1$. За умовою теореми числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ збігається. Приймаючі до уваги необхідні умови збіжності числового ряду, тобто, що члени ряду $c_n (z_1 - z_0)^n \to 0$ прямують до нуля при $n \to \infty$, випливає існування такої константи M, що $|c_n||z_1 - z_0|^n \leq M$. Таким чином, коефіцієнти c_n данного ряду отримаємо оцінку $|c_n| \leq \dfrac{M}{|z_1 - z_0|^n}$. Тоді

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z - z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n. \qquad (2)$$

За умовою теореми число $q = \left|\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, що представляє собою суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником меншим одиниці ($q < 1$), збігається. Тоді з (2) випливає збіжність ряду, який розглядаємо.

Щоб довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ у колі $|z - z_0| \le \rho < |z_1 - z_0|$, достатньо, за ознакою Вейєрштрасса побудувати збіжний числовий ряд, який можерирує даний функціональний ряд в області що розглядаємо. Очевидно, що таким рядом є ряд $M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n}$, який також представляє собою суму нескінченої геометричної прогресії із знаменником, меншим одиниці. Теорема повністю доведена. ◄

Висновок 1. ***Якщо степеневий ряд*** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ***розбіжний у деякій точці*** z_1***, то він розбіжний і у всіх точках*** z***, які задовольняють нерівності*** $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Покладаючи протилежне, одержимо, що за теоремою Абеля ряд повинен збігатися у будь якому крузі радіуса $\rho < |z - z_0|$, зокрема у точці $z = z_1$, що суперечить умові.

Розглянемо точну верхню грань R відстаней $|z - z_0|$ від точки z_0 до точки z в яких збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Якщо $R \ne \infty$, то у всіх точках z', які задовольняють умові $|z' - z_0| > R$, даний степеневий ряд розбіжний. Нехай R строго більше нуля, тоді найбільшою областю збіжності даного ряду є круг $|z - z_0| < R$. Всюди у зовнішності цього круга ряд розбігається, у точках границі $|z - z_0| = R$ ряд може бути як збіжним так і розбіжним.

Область $|z - z_0| < R$ $(R > 0)$ ***називається кругом збіжності степеневого ряду, а число*** R ***- його радіусом збіжності.***

Висновок 2. *Для всякого степеневого ряду існує таке число R, що всередині круга $|z-z_0|<R$ даний степеневий ряд збігається, а у зовнішності цього круга розбігається*

У крузі $|z-z_0|\le\rho<R$ будь якого радіуса ρ, меншим за радіус R, степеневий ряд збігається рівномірно. Зауважимо, що радіус збіжності степеневого ряду в залежності від виду його коефіцієнтів, може мати будь яке значення від 0 до ∞. Перший випадок буде відповідати ряду, який збігається лише у точці $z=z_0$, другий – який збігається на всій комплексній площині

Висновок 3. ***У** середині круга збіжності степеневий ряд збігається до античної функції**.***

Дійсно члени степеневого ряду $u_n(z)=c_n(z-z_0)^n$ представляють собою функції, які аналітичні на всій комплексній площині, ряд збігається рівномірно у будь якій замкненій підобласті круга збіжності. Отже, за теоремою Вейєрштрасса сума ряду є аналітичною функцією.

Висновок 4. *Степеневий ряд усередині круга збіжності можна почленно інтегрувати і диференціювати нескінченне число разів, причому радіус збіжності одержаних рядів дорівнюється радіусу збіжності початкового ряду.*

Ця властивість є прямим наслідком теореми Абеля та Вейєрштрасса.

Теорема 2. ***Радіус збіжності*** R ***степеневого ряду*** $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ ***визначається за формулою*** $R=\frac{1}{l}$, ***де*** $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ $\left(l=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right)$ $(0<l<\infty)$. ***Якщо*** $l=0$ ***тоді ряд збігається у будь якій точці*** z***, тобто*** $R=\infty$***; якщо*** $l=\infty$ ***то ряд розбіжний у будь якій точці*** $z\ne z_0$***, тобто*** $R=0$.

Приклад 1. *Визначити радіус збіжності ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

► Ми маємо $c_n = \cos in = \dfrac{e^{-n} + e^n}{2} = \cosh n$. Щоб знайти радіус збіжності R застосуємо формулу $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Отже

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\cosh n|}{|\cos(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cosh n}{\cosh n \cosh 1 + \sinh n \sinh 1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cosh 1 + \tanh n \sinh 1} = \frac{1}{\cosh 1 + \sinh 1} = e^{-1},$$

оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \tanh n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1.$$

Тому радіус збіжності даного степеневого ряду $R = e^{-1}$. ◄

Приклад 2. *Знайти радіус збіжності степеневого ряду*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

►Знайдемо модуль коефіцієнтів $c_n = (1+i)^n$.

$$|c_n| = |1+i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{n/2}.$$

За формулою $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ знайдемо радіус збіжності даного степеневого ряду. Отже, $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n/2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ◄

Практичні заняття - 4.1

Дослідити дані числові ряди на збіжність

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$.	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$.	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$.	5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$	6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos in}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh i\sqrt{n}}{\sin in}$.	8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sinh in}$.	9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh i\frac{\pi}{n}}{n^{\ln n}}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\tan i\pi n}$.	11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\pi/n}$.	12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{i^n(2n)!}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n}$.	14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$	15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

Знайти радіус збіжності наступних степеневих рядів

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{in}z^n$.	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$.	3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$.	5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cosh\frac{i}{n}\cdot z^n$	6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^n z^n$	8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{n}\cdot z^n$.	9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^n\frac{i\pi}{\sqrt{n}}\cdot z^n$.
10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sinh^n(1+i\pi)}$.	11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+i)z^n$.	12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.
13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n z^{n!}$	14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$	15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$.

§ 4.4. Ряд Тейлора

У попередньому параграфі було показано, що степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

збігається до функції $s(z)$, яка є аналітична у крузі збіжності цього ряду. Інакше можна сказати, що функція $s(z)$, аналітична в крузі з центром у точці $z = z_0$, може бути представлена степеневим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

або вона може бути розвинена у степеневий ряд .

Доведемо, що всяка аналітична в крузі функція може бути розвинена у степеневий ряд

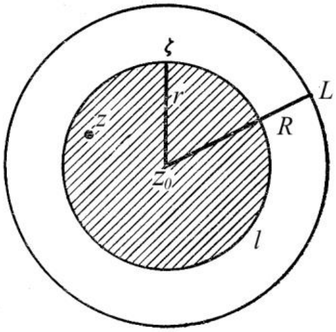


Рис. 30

Теорема 1. (Терема Тейлора). ***Будь яка аналітична функція $f(z)$ у крузі $|z - z_0| < R$ може бути розвинена всередині цього круга у степеневий ряд за степенями $(z - z_0)$, і такий розклад єдиний.***

► Виберемо деяку точку z всередині даного круга $|z - z_0| < R$ (*Рис. 30*) і побудуємо концентричний з ним круг $r < R$ так щоб точка z лежала всередині цього круга. Нехай коло круга $|z - z_0| \le r$ буде l.

Так як функція $f(z)$ аналітична у замкненому колі $|z - z_0| \le r$, то за інтегральною формулою Коші можна записати :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = =\frac{1}{2\pi i}\int_l f(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta =$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta,$$
де інтеграл вздовж контура l береться у додатному напрямку.

Оскільки
$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}=\frac{|z-z_0|}{r}=q<1,$$
тоді ряд
$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\ldots(*)$$
утворює суму нескінченно спадної геометричної прогресії. Модуль його загального члена
$$\left|\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right|=\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n=q^n,$$
і, відповідно, за ознакою Вейєрштрасса ряд збігається на лінії l відносно ζ, оскільки числовий ряд $1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ збігається. Якщо помножити вираз (*) на величину $\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}$, то його рівномірна збіжність не порушиться, бо $f(\zeta)$ є неперервною і обмеженою на лінії l. Тобто $|f(\zeta)|<M$, і $|\zeta-z_0|=r$, тоді $\left|\dfrac{f(t)}{\zeta-z_0}\right|<\dfrac{M}{r}$, обмежена також. Інтегруючи почленно цей рівномірно збіжний ряд, дістанемо:
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta+\ldots$$

Якщо позначити

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = c_0, \ \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}d\zeta = c_1, \ldots$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta = c_n, \ldots$$

будемо мати:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

що доводить першу частину тереми. Зауважимо, що тут

$$c_0 = f(z_0), \ c_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}, \ c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \ldots, \ c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$$

і тому ряд можна записати так:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots$$

Цей ряд називається рядом Тейлора для функції $f(z)$.

Для доведення, що розвинення в ряд єдине покладемо, що функція $f(z)$ всередині того ж круга представлена ще рядом

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots + b_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Оскільки степеневий ряд можна диференціювати почленно скільки завгодно раз, тоді знайдемо:

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z - z_0) + 3b_3(z - z_0)^2 + \ldots + nb_n(z - z_0)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(z) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(z - z_0) + \ldots + (n-1)\cdot nb_n(z - z_0)^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(z) = 1\cdot 2\cdot 3b_3 + \ldots + (n-2)\cdot(n-1)\cdot nb_n(z - z_0)^{n-3} + \ldots$$

і т.і. Покладаючи у всіх цих рівностях $z = z_0$, одержимо

$$b_0 = f(z_0), \ b_1 = \frac{f'(z_0)}{1!}, \ b_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}, \ldots, \ b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ldots$$

тобто цей ряд співпадає з рядом Тейлора для функції $f(z)$. Отже, якщо одна і та ж сама функція розвинена за степенями $(z - z_0)$ двома способами, то коефіцієнти при однакових степенях $(z - z_0)$ у цих розвиненнях повинні бути рівні

Висновок 1. *Якщо* R *є максимальним радіусом круга з центром у точці* $z = z_0$, *у якому аналітична функція* $f(z)$ *може бути розвинена у ряд Тейлора за степенями* $(z - z_0)$, *тоді на колі цього круга не може бути аналітичною у всіх точках. Дійсно, якщо покласти протилежне, тоді кожна точка кола буде мати деякий круговий окіл, де* $f(z)$ *є аналітичною, і тоді, можна довести, що знайдеться таке число* $\rho > 0$, *що* $f(z)$ *буде аналітичною у крузі радіуса* $R + \rho$. *Але це суперечить припущенню, що* R *є найбільшим радіусом.*

Висновок 2. *Точка, де функція є аналітичною, називається* ***регулярною***, ***правильною*** *або* ***звичайною*** *точкою цієї функції. Якщо точка не є регулярною для функції* $f(z)$, *то будь який її окіл має регулярні точки* $f(z)$, *тоді таку точку називають* ***особливою (сингулярною)*** *точкою цієї функції. Тому можна сказати, що найбільший радіус круга з центром у точці* $z = z_0$, *в якій функція* $f(z)$ *розкладається у степеневий ряд за степенями* $(z - z_0)$, *дорівнює відстані від центра цього круга до найближчої від нього сингулярної точки* $f(z)$. *Очевидно, що найбільшим радіусом є радіус круга збіжності ряду* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ *до своєї суми* $f(z)$.

Висновок 3. *Якщо ряд*

$$f(z) = u_0(z) + u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$$

рівномірно збігається у крузі $|z - z_0| < R$ *і функції* $u_k(z)$, *де* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *можна представити там степеневими рядами*

$$u_k(z) = c_{0k} + c_{1k}(z - z_0) + c_{2k}(z - z_0)^2 + \ldots + c_{nk}(z - z_0)^n + \ldots,$$

то у цьому крузі $f(z)$ *представляється рядом*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_k(z - z_0)^k + \ldots$$

коефіцієнти якого

$$c_k = c_{1k} + c_{2k} + c_{3k} + \ldots + c_{nk} + \ldots \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Таким чином, у цьому випадку ряди підсумовуються як поліноми

Дійсно, за теоремою Вейєрштрасса функція $f(z)$, як сума рівномірно збіжного ряду аналітичних функцій є аналітичною функцією всередині круга $|z - z_0| < R$, але тоді вона може бути розвинена там у ряд Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_k(z - z_0)^k + \ldots$$

де $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Проте, за тією ж теоремою Вейєрштрасса

$$f^{(k)}(z_0) = f_1^{(k)}(z_0) + f_2^{(k)}(z_0) + f_3^{(k)}(z_0) + \ldots + f_n^{(k)}(z_0) + \ldots$$

Звідси одержимо

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{f_1^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f_2^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f_3^{(k)}(z_0)}{k!} + \ldots + \frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!} + \ldots$$

$$= c_{1k} + c_{2k} + c_{3k} + \ldots + c_{nk} + \ldots$$

Приклад 1. *a)* $f(z) = e^z$, b) $f(z) = \sin z$, c) $f(z) = \cos z$.

► *a)* $f(z) = f'(z) = f''(z) = \ldots = f^{(n)}(z) = \ldots = e^z$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

отже

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

b) Як відомо, $f^{(n)}(z) = \sin\left(z + \dfrac{n\pi}{2}\right)$; $f^{(n)}(0) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

Звідси отримаємо

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

c) Так само як і для $\sin z$, одержимо

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Оскільки $e^z, \sin z, \cos z$ регулярні функції на всій відкритій площини z, тоді одержані рівності справедливі для всіх скінчених z. ◄

Приклад 2. $f(z) = (1+z)^m$.

► Якщо $m \in \mathrm{Z}$, тоді $(1+z)^m$ є однозначною функцією. При $m \in \mathrm{N}$ розклад буде звичайною формулою Ньютона. Якщо $m > 0$, то обчислимо похідні $f(z) = (1+z)^m$, знайдемо

$$f'(z) = m(1+z)^{m-1},\ f''(z) = m(m-1)(1+z)^{m-2},$$

…………………………………………………………………

$$f^{(n)}(z) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+z)^{m-n} \ \ldots\ldots..$$

Підставляючи $z = 0$, одержимо:

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = m, \qquad f''(0) = m(m-1), \ldots,$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1), \ldots$$

Тому ми можемо написати:

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots + + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} z^n + \ldots \ (*)$$

Так як точка $z = -1$ є сингулярна точка для функції $f(z)$, то одержаний розклад має місце лише у кругу $|z| < 1$.

Якщо m не ціле число, тоді $(1+z)^m = e^{mLn(1+z)}$ є функцією багатозначною. Візьмемо головну гілку $Ln(1+z)$ і користуючись правилом диференціювання складеної функції, одержимо

$$f(z) = e^{m\ln(1+z)},\ f'(z) = e^{m\ln(1+z)} \cdot \frac{m}{1+z} = me^{(m-1)\ln(1+z)}$$

$$= m(1+z)^{m-1}, f''(z) = m(m-1)e^{(m-2)\ln(1+z)} = m(m-1)(1+z)^{m-2}, \ldots$$

Оскільки для головної гілки логарифма $\ln 1 = 0$ (для інших $Ln1 = 2k\pi i$), то приходимо до висновку, що рівність (*) справедлива для цієї гілки при всіх m в кругу $|z| < 1$. Точка

$z=-1$ є сингулярна для $(1+z)^m$, окрім випадків, коли m натуральне. Причому, якщо m не є цілим, тоді $z=-1$ є точкою розвинення функції. Збіжність на колі круга збіжності залежить від m. Одержаний ряд *називається біноміальним рядом*. ◄

Приклад 3. *Розвинути у ряд за додатними цілими степенями x функцію*

$$f(x)=(1+x^2)^{m/2}\sin(m\arctan x)$$

де $x-$ *дійсна змінна і* $m-$ *дійсне число.*

► Функція $f(x)$ є уявною частиною бінома $(1+ix)^m$. Дійсно, модуль цього бінома $r=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^m=(1+x^2)^{m/2}$, а аргумент $\varphi=\arctan x$. Дійсно, $f(x)=r\sin m\varphi$. Користуючись біноміальним рядом, отримаємо:

$$(1+ix)^m=1+\frac{m}{1!}(xi)+\frac{m(m-1)}{2!}(xi)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(ix)^3+...+$$

Якщо відокремити уявну частину, тоді

$$f(x)=\frac{m}{1!}x-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)(m-2)...(m-2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Радіус збіжності ряду $R=1$ ◄

Приклад 4. *Знайти суму рядів*

$$1+\frac{\cos\varphi}{1!}+...+\frac{\cos n\varphi}{n!}+...$$

і

$$\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2!}+...+\frac{\sin n\varphi}{n!}+...$$

► Обидва ряди збігаються абсолютно. Дійсно

$$\left|\frac{\cos n\varphi}{n!}\right|\le\frac{1}{n!} \quad \text{і} \quad \left|\frac{\sin n\varphi}{n!}\right|\le\frac{1}{n!}.$$

Позначимо суму першого ряду S_1, другого - S_2 і приймаючи до уваги, що

$$\cos k\varphi + i\sin k\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = z^k,$$

де $|z| = 1$

$$S_1 + iS_2 = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^{\cos\varphi + i\sin\varphi} =$$

$$= e^{\cos\varphi} e^{i\sin\varphi} = e^{\cos\varphi}(\cos\sin\varphi + i\sin\sin\varphi).$$

Порівнюючи дійсні та уявні частини останньої рівності, отримаємо

$$S_1 = e^{\cos\varphi}\cos\sin\varphi \text{ і } S_2 = e^{\cos\varphi}\sin\sin\varphi.$$

Дані ряди для функцій S_1 і S_2 є тригонометричні ряди Фур’є. ◄

§ 4.5. Ряд Лорана та ізольовані сингулярні точки однозначних аналітичних функцій

4.5.1. Область збіжності рядів Лорана

Означення. ***Розглянемо ряд виду***

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

де z_0 ***є фіксована точка на комплексній площині,*** c_n ***– деяке комплексне число, а підсумовування ведеться як за додатними так і недодатними значенням індексу*** n. ***Ряд виду (1) називається рядом Лорана.***

Установимо область збіжності цього ряду. Для чого представимо вираз (1) у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{2}$$

Очевидно, областю збіжності ряду (1) являється загальна частина областей збіжності кожного з доданків правої частини (2). Областю збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ являється круг з центром у точці z_0 деякого радіуса R_1 (R_1 може приймати значення від 0 до ∞). D середині круга збіжності цей ряд збігається до деякої аналітичної функції комплексної змінної (3)

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < R_1. \tag{3}$$

Для визначення області збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ зробимо заміну змінної, поклавши $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$. Тоді цей ряд прийме вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n$. Тобто, він представляє собою звичайний степеневий ряд, який збігається в середині свого круга збіжності до деякої аналітичної функції $\varphi(\zeta)$ комплексної змінної ζ. Позначимо радіус збіжності одержаного степеневого ряду через $\frac{1}{R_2}$. Тоді

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n. \qquad |\zeta| < \frac{1}{R_2}. \tag{4}$$

Повертаючись до старої змінної і покладаючи $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$, одержимо

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \qquad |z - z_0| > R_2. \tag{5}$$

Звідси випливає, що областю збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ за недодатними степенями різниці $(z - z_0)$ являється область, зовнішня до кола $|z - z_0| = R_2$ (так само як і R_1, значення R_2, може в окремих випадках, приймати значення нуль або нескінченність).

Отже, кожний із степеневих рядів правої частини (2) збігається у своїй області збіжності до відповідної аналітичної функції.

Якщо $R_2 < R_1$, тоді існує загальна область збіжності цих рядів – *кругове кільце* $R_2 < |z - z_0| < R_1$ в якому ряд (1) збігається до аналітичної функції

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad R_2 < |z - z_0| < R_1. \quad (6)$$

Оскільки ряди (3) і (4) є звичайні степеневі ряди, тоді у вказаній області функція $f(z)$ має всі властивості суми степеневого ряду. Це означає, що ***ряд Лорана (1) збігається в середині свого кільця збіжності до деякої функції $f(z)$ аналітичної у даному кільці*** .

Якщо $R_2 > R_1$, тоді ряди (3) і (4) загальної області збіжності не мають. У цьому випадку ряд (1) ніде не збігається.

4.5.2. Розвинення аналітичної функції у ряд Лорана

Теорема. ***(Теорема Лорана). Всяка функція $f(z)$, регулярна у круговому кільці $r < |z - z_0| < R$, розкладається у середині цього кільця у ряд виду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, і такий розклад єдиний.***

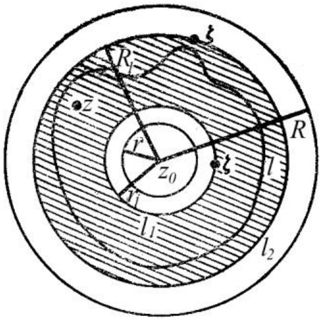


Рис. 31

► Виберемо деяку точку z в середині даного кільця $r < |z - z_0| < R$ (*Рис.31*) і побудуємо концентричні з ним кільце $r_1 < |z - z_0| < R_1$ радіусів $r < r_1 < R_1 < R$ так, щоб точка z

лежала в середині цього кільця. Позначимо менше коло кільця $r_1 < |z - z_0| < R_1$ - l_1, а більше - l_2.

Оскільки функція $f(z)$ є аналітична у замкненому кільці $r_1 < |z - z_0| < R_1$, то за теоремою Коші для складного контура, будемо мати.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\xi)}{\zeta - z}d\zeta \,, \tag{7}$$

Причому інтеграли вздовж l_1 і l_2 беруться у додатному напрямку.

На l_2 виконується нерівність $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \le q < 1$

Представивши дріб $\dfrac{1}{\zeta - z}$ у вигляді

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

і інтегруючи почленно, що можливо в силу рівномірної збіжності ряду, одержимо

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z - z_0)^n \tag{8}$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \,, \quad n \ge 0 \tag{9}$$

Оскільки на l_1 виконується нерівність $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$, тоді

аналогічно попередньому маємо

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$$

Тоді цей інтеграл, записаний у вигляді суми інтегралів, зобразиться так:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}, \qquad (10)$$

де

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}d\zeta, \quad n > 0. \qquad (11)$$

Зауважимо, що підінтегральні функції в (9) і (11) є аналітичними у круговому кільці $r < |z - z_0| < R$. Тому можна замість різних контурів l_1 і l_2 взяти загальний контур l, який лежить у цьому кільці і оточує точу z_0. За теоремою Коши для багато зв'язної області отримаємо

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_2} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{l} f(z)(z - z_0)^{n-1}dz, \qquad n = 1,2,3,...$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \qquad n = 0,1,2,3,...$$

Або, об'єднуючи ці формули в одну одержимо

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{l}\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \quad (12)$$

Доведемо єдиність такого розкладу. Нехай у середині кільця $r < |z - z_0| < R$ має місце розклад

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \qquad (11^*)$$

Візьмемо у цьому кільці замкнений контур l, який оточує точку z_0 і помножимо рівність (11*) на обмежену функцію

$(z-z_0)^{-k-1}$. Отриманий рівномірно збіжний ряд Проінтегруємо почленно по z вздовж l. Всі інтеграли у правій частині крім одного, який містить $(z-z_0)^{-1}$ обертаються у нуль, а останній – у $b_k 2\pi i$. Отже, одержимо:

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz = c_k\,,\; k = 0,\pm1,\pm2,...$$

Що доводить єдиність розкладу. ◄

Отриманий ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ***називається рядом Лорана для функції*** $f(z)$***; його частина*** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ***називається правильною або регулярною частиною, а*** $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$ ***називається головною частиною.***

Правильною частиною ряду Лорана є степеневий ряд, який збігається у крузі $|z-z_0| < R.$ Головною частиною, очевидно, є ряд, який збігається для $|z-z_0| > r$, тобто у зовнішності круга радіуса r з центром у точці z_0. Як правильна, так і головна частини рівномірно збігаються у всякому кільці, який знаходиться в середині даного, а їх суми в цьому кільці являються аналітичними функціями. Так само, як і для ряду Тейлора, можна довести, що кожне з кіл, що обмежує кругове кільце $r < |z-z_0| < R$ найбільшої ширини, у середині якого функція $f(z)$ може бути розвинена у ряд Лорана, яка містить хоча б одну сингулярну точку $f(z)$.

Приклад 1. *Розкласти функцію* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ *у ряд Лорана у наступних кільцях:*

a) $0 < |z| < 1$; b) $|z| > 1$; c) $0 < |z-1| < 1$.

У всіх цих кільцях функція $f(z)$ є аналітичною і тому може бути представлена там рядами Лорана. Представимо функцію у вигляді

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z},$$

a) При $|z|<1$ функцію $\dfrac{1}{1-z}$ можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником $q=z$, таким чином

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\ldots-z^n-\ldots=$$

$$=-\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

Тут головна частина має тільки один член.

b) в випадку коли $|z|>1$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, тому

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

У цьому розвинені правильна частина відсутня .

c) Для випадку $0<|z-1|<1$ величину $\dfrac{1}{z}$ треба привести до збіжної геометричної прогресії, але зі знаменником $q=z-1$. Отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\left(1-(z-1)+(z-1)^2-\right.$$

$$\left.-(z-1)^3+\ldots.+(-1)^n(z-1)^n+\ldots\right)=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

Тут головна частина має тільки один доданок $\frac{1}{z-1}$ ◄

Приклад 2. *Розкласти по степеням* $(z-2)$ *функцію*

$$f(z)=\sinh\left(\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}\right)$$

► Перш за все виконаємо деякі перетворення з функцією

$$\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2}=1-\frac{4}{\left(z-2\right)^2}$$

Отримаємо функцію

$$f(z)=\sinh\left(1-\frac{4}{\left(z-2\right)^2}\right)$$

Тепер застосуємо формулу

$$\sinh(z_1-z_2)=\sinh z_1\cosh z_2-\cosh z_1\sinh z_2$$

Покладаючи, що $z_1=1$ а $z_2=\frac{4}{(z-2)^2}$, функція $f(z)$ буде мати наступний вигляд

$$f(z)=\sinh 1\cosh\left(\frac{4}{(z-2)^2}\right)-\cosh 1\sinh\left(\frac{4}{(z-2)^2}\right)$$

Застосовуючи відповідні розвинення гіперболічних функцій у степеневі ряди Тейлора, отримаємо

$$f(z)=\sinh 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(z-2)^{4n}(2n)!}-\cosh 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(z-2)^{4n+2}(2n+1)!}$$ ◄

§ 4.6. Нулі та сингулярні точки аналітичної функції

4.6.1.Нулі аналітичної функції

Нехай $f(z)$ є регулярною функцією в точці z_0. Тоді у деякому околі цієї точки функція $f(z)$ може бути представлена рядом Тейлора:

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+...+c_n(z-z_0)^n+...$$

Означення. ***Точка $z=z_0$ називається нулем або коренем кратності m функції $f(z)$, якщо в околі цієї точки розвинення функції $f(z)$ у ряд Тейлора має вид***

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+...,$$

де $c_m\neq 0$.

Отже, якщо $z=z_0$ *є нулем кратності* m *функції* $f(z)$, *тоді* $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(m-1)}(z_0)=0.$

Теорема. ***Якщо $z=z_0$ є коренем аналітичної функції $f(z)$, тоді існує такий окіл цієї точки, в якому інших коренів даної функції не існує.***

Або інакше: ***нулі аналітичної функції являються ізольованими точками.***

► Дійсно,

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+...$$

$$=(z-z_0)^m(c_m+c_{m+1}(z-z_0)+...)=(z-z_0)^m\varphi(z),$$

де $\varphi(z)$ - регулярна функція, $\varphi(z_0)=c_m\neq 0$. Причому $(z-z_0)^m\neq 0$ для всякого $z\neq z_0$. Оскільки $\varphi(z_0)\neq 0$, то $|\varphi(z_0)|\neq 0$. Але $|\varphi(z)|$ є неперервною дійсною функцією. Для неї знайдеться такий окіл точки $z=z_0$, де $|\varphi(z)|\neq 0$, і, відповідно, $\varphi(z)\neq 0$. Але тоді у цьому околі $f(z)\neq 0$, якщо $z\neq z_0$, що і доводить теорему. ◄

За допомого властивості ізольованості нулів регулярної функції можна довести, що

Регулярна функція в обмеженій області має лише скінченне число нулів (*або взагалі їх там немає).*

Приклад 1. *Показати, що* $z=k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ *являється нулем першого порядку для функції* $f(z)=\sin z$.

► Користуючись розвиненням

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

знайдемо

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - k\pi) =$$

$$= (-1)^k \left((z - k\pi) - \frac{(z - k\pi)^3}{3!} + \frac{(z - k\pi)^5}{5!} - \dots \right),$$

Звідси випливає, що $z = k\pi$ являється нулем першого порядку для функції $f(z) = \sin z$. ◄

Приклад 2. *Показати, що* $z = 0$ *є нуль другого порядку для функції* $1 - \cos z$.

►Дійсно,

$$1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) =$$

$$= \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$= z^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} + \dots \right) ◄$$

4.6.2. Класифікація ізольованих сингулярних точок аналітичної функції

Означення 1. ***Точка*** z_0 ***називається ізольованою сингулярною точкою функції*** $f(z)$***, якщо*** $f(z)$ ***аналітична у круговому кільці*** $0 < |z - z_0| < R$***, а точка*** z_0 ***є сингулярною точкою функції*** $f(z)$.

У самій точці z_0 функція може бути невизначена. Якщо точка $z = z_0$ ізольована сингулярна точка функції $f(z)$, тоді у деякому кільці з центром у точці $z = z_0$ і радіусами: одним - не більшим відстані від z_0 до найближчої до неї сингулярної точки, а другим – меншим за першого, функція $f(z)$ розкладається у ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Причому можуть бути три випадки:одержаний ряд Лорана:

1⁰. *Не містить членів з від'ємними степенями різниці* $(z-z_0)$.

2⁰. *Містить скінченне число членів з від'ємними степенями різниці* $(z-z_0)$.

3⁰. *Містить нескінченне число членів з від'ємними степенями різниці* $(z-z_0)$.

1⁰. Означення 2. ***Ізольована сингулярна точка*** z_0 ***називається усувною, якщо розклад функції*** $f(z)$ ***у ряд Лорана не містить членів з від'ємними степенями різниці*** $(z-z_0)$.

Теорема 1. ***Для того щоб ізольована сингулярна точка однозначної аналітичної функції*** $f(z)$ ***була усувною, необхідно і достатньо, щоб функція*** $f(z)$ ***у точці*** z_0 ***мала скінчену границю.***

► Нехай точка z_0 - усувна сингулярна точка функції $f(z)$, тоді

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n .$$

де $z\in D=\left\{z:0<\left|z-z_0\right|<R\right\}$. Оскільки сума степеневого ряду є неперервна функція всередині круга збіжності цього ряду, то $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, тобто функція $f(z)$ в точці z_0 має границю. Нехай значення функції $f(z)$ в точці z_0 дорівнює границі цієї функції в цій точці, тобто $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, тоді функція

$f(z)$ дорівнює сумі степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ збіжного в крузі $|z-z_0|<R$, є аналітична функція в усьому крузі, в тому числі і в точці z_0, і, отже ніякої особливої точки не буде. Тому точку z_0 називають усувною сингулярною точкою функції.

Припустимо тепер, що аналітична функція $f(z)$ має скінченну границю в ізольованій сингулярній точці z_0. Тоді в області $z \in D_1 = \{z : 0 < |z-z_0| < R_1\}$ при достатньо малому $R_1 > 0$ функція $f(z)$ обмежена, тобто $|f(z)| \le M$ для $z \in D_1$. Вибираючи $0<\rho<R_1$ так, щоб коло γ_ρ належало D_1, для коефіцієнтів ляду Лорана маємо такі оцінки:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} dz \right| \le \frac{M \cdot 2\pi\rho}{2\pi\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}$$

Візьмемо $n = -1, -2, \ldots$ Тоді маємо:

$$|c_n| \le \lim_{\rho \to 0} \frac{M}{\rho^n} = 0$$

і, отже, z_0 - усувна сингулярна точка функції $f(z)$. Теорему доведено. ◄

При доведенні цієї теореми ми довели і таке твердження:

Теорема. ***Якщо в околі ізольованої сингулярної точки*** z_0 ***аналітична функція обмежена, то вона в цій точці має скінченну границю.***

Справді, рівність нулю коефіцієнтів c_n $(n = 1, -2, \ldots)$ у ряді Лорана випливає з обмеженості функції в околі ізольованої сингулярної точки z_0. Але якщо $c_n = 0$ $(n = 1, -2, \ldots)$ то звідси випливає існування скінченної границі функції $f(z)$ в точці z_0.

Приклад 1. Функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ має сингулярну точку $z=0$. В її околі маємо

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots;$$

тут $z\neq 0$. У цьому випадку немає головної частини $c_0=1$. З іншого боку, приймаючи до уваги другу чудову границю, одержимо $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. Отже, точка $z=0$ є усувною сингулярною точкою.

Приклад 2. *Показати, що точка* $z=0$ *являється усувною для функції* $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

► Ця функція не визначена у точці $z=0$. У всіх точках $|z|>0$ являється аналітичною і може бути розвинена у ряд Лорана при $z\neq 0$. Користуючись розвиненням функції $\cos z$ у ряд Тейлора, одержимо:

$$f(z)=\frac{1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots\right)}{z^2}=\frac{\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots$$

Оскільки головна частина ряду відсутня, то $z=0$ являється усувною сингулярною точкою. Покладаючи $f(0)=\dfrac{1}{2!}$ ми усунемо сингулярність, і функція буде регулярна для всіх скінченних z. Коли $z\to 0$ $f(z)\to\dfrac{1}{2!}$ і, відповідно, $f(z)$ буде обмежена у достатньо малому околі точки $z=0$. ◄

Означення 3. ***Якщо ряд Лорана функції*** $f(z)$ ***в околі її ізольованої сингулярної точки*** z_0 ***містить скінченне число***

m ***членів з від'ємними степенями різниці*** $(z - z_0)$, ***тобто*** $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, ***то точка*** z_0 ***називається полюсом прядку*** m ***функції*** $f(z)$.

Поведінка регулярної функції в околі її полюса визначається наступною теоремою

Теорема 2. ***Якщо точка*** z_0 ***являється полюсом регулярної функції*** $f(z)$, ***тоді при*** $z \to z_0$ ***модуль функції*** $f(z)$ ***необмежено зростає незалежно від способу за яким точка*** z ***прямує до точки*** z_0.

► Представимо функцію $f(z)$ в околі точки z_0 у вигляді

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= (z - z_0)^{-m} \left[c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} \right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} \varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \qquad (1)$$

Очевидно, що функція $\varphi(z)$ є обмеженою аналітичною функцією в околі точки z_0. Із представлення (1) випливає, що при $z \to z_0$ модуль функції $f(z)$ необмежено зростає незалежно від способу за яким точка z прямує до точки z_0, що і доводить теорему ◄

Зауважимо, що якщо до визначити функцію $\varphi(z)$ *у точці* z_0, *поклавши* $\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0$, *то формула (1) може бути переписана у вигляді*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad (2)$$

де $\phi(z)$ *- регулярною функцією і* $\phi(z_0) \neq 0$; ***число*** m ***називається порядком полюса***.

Якщо $m=1$, *то точка* z_0 ***називається простим полюсом.***

Означення 4. ***Якщо ряд Лорана функції*** $f(z)$ ***в околі її ізольованої сингулярної точки*** z_0 ***містить нескінченне число членів з від'ємними степенями різниці*** $(z-z_0)$, ***тобто*** $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. ***В цьому випадку точка*** z_0 ***називається суттєво сингулярною точкою функції*** $f(z)$**.** Поведінка аналітичної функції в околі її суттєво сингулярної точки описується наступною теоремою.

Теорема 3. ***(Теорема Сохоцького-Вейєрштрасса). Яке б не було*** $\varepsilon>0$, ***у будь якому околі суттєво сингулярної точки*** z_0 ***функції*** $f(z)$ ***знайдеться хоча б одна точка*** z_1 ***в якій значення функції*** $f(z)$ ***відрізняється від довільно заданого комплексного числа менше ніж на*** ε.

Це означає, що у достатньо малому околі суттєво сингулярної точки деякої функції дана функція приймає значення, скільки завгодно близьке до всякого наперед заданого числа (скінченного або нескінченного). Інколи це формулюється так: *в як завгодно малому околі суттєво сингулярної точки функція стає невизначеною*

Існує більш точна теорема, яка належить Пікару.

Теорема Пікара. ***В як завгодно малому околі суттєво сингулярної точки функція*** $f(z)$ ***приймає нескінченно багато разів будь яке комплексне значення за виключенням, майже, одного.***

4.6.3. Зв'язок між нулями та полюсами

Якщо точка $z=z_0$ є сингулярною точкою функції $f(z)$, тоді в залежності від того, чи являється ця точка усувною, полюсом або суттєво сингулярною, функція у достатньо малому околі точки $z=z_0$ буде відповідно обмеженою, нескінченно великою або невизначеною. Оскільки інших ізольованих сингулярних точок для регулярної функції на площині комплексної змінної не існує, тоді випливає обернене твердження: *Якщо точка* $z = z_0$ *є ізольованою сингулярною точкою функції* $f(z)$, *тоді вона буде усувною, полюсом або суттєво сингулярною точкою в залежності від того, чи являється у достатньо малому околі цієї точки функція* $f(z)$ *відповідно обмеженою, нескінченно великою або невизначеною.*

Це обернене ствердження у багатьох випадках дає можливість з'ясувати характер сингулярної точки функції , не розкладаючи її у ряд Лорана . Наведемо наступні теореми

Теорема І. ***Якщо для аналітичної функції*** $f(z)$ ***число*** $z = z_0$ ***є нулем порядку*** m, ***тоді для функції*** $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ***це число є полюсом порядку*** m.

► Оскільки $z = z_0$ - корінь кратності m функції $f(z)$, то

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots, \qquad c_m \neq 0$$

Звідси

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + ..} =$$

$$= \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{c_m + c_{m+1}(z - z_0) + ..} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \varphi(z)$$

і

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{c_m} \neq 0$$

У достатньо малому околі точки $z = z_0$ знаменник функції $\varphi(z)$ є регулярною функцією яка не обертається у нуль, а тому там буде регулярною і функція $\varphi(z)$.

Розкладаючи у ряд Тейлора за степенями $(z-z_0)$ функції $\varphi(z)$ у околі точки z_0, одержимо:

$$F(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\left[b_0+b_1(z-z_0)+...\right]=\frac{b_0}{(z-z_0)^m}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}+}+...$$

причому $b_0=\varphi(z_0)\neq 0$. Це означає, що $z=z_0$ є полюсом кратності m. ◄

Теорема ІІ. ***Якщо*** $z=z_0$ ***є полюсом кратності*** m ***функції*** $f(z)$***, тоді для*** $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ ***число*** $z=z_0$ ***є коренем кратності*** m

► У достатньо малому околі точки $z=z_0$ за означенням полюса маємо:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}+}+...+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)+...=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\left[c_{-m}+b_{-m+1}(z-z_0)+...\right]==\frac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\varphi(z)$$

причому $\varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0$.

Звідси

$$F(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}.$$

Оскільки, у достатньо малому околі точки $z=z_0$ функція $\varphi(z)$ - регулярна і не обертається у нуль, то $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ також регулярна. Розкладаючи у ряд Тейлора за степенями $(z-z_0)$ функцію $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ у цьому околі отримаємо

$$F(z)=(z-z_0)^m\cdot\left[b_0+b_1(z-z_0)+...\right]$$

$$=b_0(z-z_0)^m+b_1(z-z_0)^{m+1}+...,$$

причому $b_0 = \dfrac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$, а це значить, що $z = z_0$ є коренем кратності m функції $F(z)$.

Теорема III. ***Якщо дві функції у деякій області не мають інших сингулярних точок крім полюсів, тоді їх сума, добуток і частка можуть мати у цій області сингулярними точками тільки полюси.***

Теорема IV. ***Якщо*** $z = z_0$ ***є суттєво сингулярною точкою функції*** $f(z)$ ***і полюсом або правильною точкою функції*** $\varphi(z)$, ***тоді для кожної з функцій*** $f(z) \pm \varphi(z)$, $f(z) \cdot \varphi(z)$, $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ ***точка*** $z = z_0$ ***буде суттєво сингулярною точкою.***

Теорема V. ***Якщо*** $z = z_0$ ***є суттєво сингулярною точкою функції*** $f(z)$, ***тоді для функції*** $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ***точка*** $z = z_0$ ***являється суттєво сингулярною, або неізольованою сингулярною точкою.***

Приклад 1. *Дослідити поведінку функції* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *у околі точки* $z = 0$.

► $f(z)$ як складна показникова функція являється аналітичною при всіх скінченних значеннях z, крім $z = 0$. При всіх z, тобто при $|z| > 0$, функція $f(z)$ розкладається у ряд Лорана. Одержимо, якщо у рівності $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + \ldots$, покласти $t = \dfrac{1}{z}$, т отримаємо

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots .$$

Звідси видно, що головна частина ряду Лорана функції $e^{\frac{1}{z}}$ має нескінченну множину членів. Це означає, що $z=0$ є суттєво сингулярною точкою функції $e^{\frac{1}{z}}$. Покажемо, що у цій точці функція $e^{\frac{1}{z}}$ поводить себе так, як це сказано у теоремі Пікара. Нехай A - будь яке число, що не дорівнює нулю. Покладемо $A=\rho\cdot e^{i\varphi}$. Із рівняння $e^{\frac{1}{z}}=A$ знайдемо:

$$\frac{1}{z}=LnA=\ln\rho+i(\varphi+2k\pi).$$

Звідси

$$z=\frac{1}{\ln\rho+(\varphi+2k\pi)},$$

де $k=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\quad \ldots$.

Видно, що який би не був малим радіус круга з центром в точці $z=0$ можна взяти таке велике число k_1, що воно і всі k, такі що $|k|>|k_1|$ будуть давати значення z у цьому крузі які являються коренями рівняння $e^{\frac{1}{z}}=A$ при всякому A крім $A=0$. ◄

Приклад 2. *Дослідити поведінку функції* $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ *у околі точки* $z=0$.

► Очевидно, що функція $f(z)$ є регулярною у будь якій скінченній точці $z\neq0$. В околі точки $z=0$ розвинення в ряд Лорана має вид $\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots$. Звідси видно, що $z=0$ є суттєво сингулярною точкою функції $\sin\frac{1}{z}$. Перевіримо на цьому прикладі теорему Пікара. Нехай задано деяке число A. Зясуємо, чи має розв'язок рівняння $\sin\frac{1}{z}=A$.

Застосовуючи представлення синуса у показниковій формі, це рівняння можна переписати так

$$\frac{e^{\frac{i}{z}} - e^{-\frac{i}{z}}}{2i} = A,$$

або

$$e^{\frac{2i}{z}} - 2iAe^{\frac{i}{z}} - 1 = 0.$$

Звідси ми можемо знайти

$$e^{\frac{i}{z}} = Ai \pm \sqrt{(Ai)^2 + 1} = B.$$

Очевидно, $B \neq 0$. Інакше було б $Ai = \pm\sqrt{(Ai)^2 + 1}$, або $(Ai)^2 = (Ai)^2 + 1$. Нехай

$$B = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Із рівняння $e^{\frac{i}{z}} = B$ одержимо

$$\frac{i}{z} = LnB = \ln\rho + i(\varphi + 2k\pi),$$

$$z = \frac{1}{\varphi + 2k\pi - i\ln\rho},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Звідси видно, що у любому околі точки $z = 0$ знайдуться розв'язки рівняння $\sin\frac{1}{z} = A$ при всяких A, бо число k можна взяти як завгодно великим за модулем.

Слід відмітити, що у будь якому околі точки $z = 0$ функція $\sin\frac{1}{z}$ має нескінчену множину нулів. Дійсно, числа $z = \frac{1}{k\pi}$ являються нулями функції і при достатньо великих k будуть достатньо малими. ◄

Приклад 3 . *Функція* $f(z)$ *задана рядом Лорана*

$$\ldots+\frac{1}{2^n z^{n+1}}+\frac{1}{2^{n-1}z^n}+\ldots+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\ldots+(-1)^n z^{n-1}+\ldots .$$

Чи буде точка $z=0$ *сингулярною для* $f(z)$?

► Оскільки ряд містить нескінченну множину членів з від'ємними степенями z, то може показатись, що $z=0$ є суттєво сингулярною точкою для $f(z)$. Однак, щоб зробити такий висновок, треба бути впевненим у тому, що даний розклад має місце у деякому околі $0<|z|<\rho$ точки $z=0$.

Даний ряд є сумою рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}z^n}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}$. Кожний з них є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії, причому перший ряд збігається при $|z|>\frac{1}{2}$ і має суму

$\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{2z}}=\dfrac{2}{2z-1}$; другий збігається при $|z|<1$ і його сума

$\dfrac{-1}{1-(-z)}=-\dfrac{1}{1+z}$. отже, даний ряд збігається у кільці $\frac{1}{2}<|z|<1$

і має суму $f(z)=\dfrac{2}{2z-1}-\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{3}{2z^2+z-1}$. звідси випливає, що точка $z=0$ є правильною точкою для $f(z)$. ◄

Приклад 4. *Знайти всі сингулярні точки функції* $f(z)=\dfrac{z^3}{\sin z-z}$.

►Функція регулярна на всій відкритій площині z за виключенням $z=0$. Якщо $z\to 0$, то

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)-z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots}=-6.$$

Отже, $f(z)$ обмежена у околі точки $z=0$, і точка $z=0$ є усувною сингулярною точкою. ◄

Example 5. *Знайти всі сингулярні точки функції* $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

► При $z=0$ знаменники обох дробів обертаються у нуль і отже точка $z=0$ є сингулярною для функції $f(z)$. Приймаючи до уваги періодичність функції e^z, приходимо до висновку, що знаменник дробу дорівнює нулю при $z=2k\pi i$, де $k\in\mathbb{Z}$. В інших точках функція $f(z)$ аналітична. Якщо $z=2k\pi i$, але $k\neq 0$, тоді $\dfrac{1}{z}$ аналітична, а для функції $\dfrac{1}{e^z-1}$ це буде полюс. З'ясуємо порядок полюса; він дорівнює порядку нулів знаменника e^z-1. Покладаючи $\varphi(z)=e^z-1$, знайдемо: $\varphi'(z)=e^z$; $\varphi(2k\pi i)=e^{2k\pi i}-1=0$; $\varphi'(2k\pi i)=e^{2k\pi i}=1\neq 0$. Звідси бачимо, що точки $z=2k\pi i$ будуть нулями першого порядку для e^z-1 і, відповідно, полюсами першого порядку як для функції $\dfrac{1}{e^z-1}$, так і для даної функції $f(z)$. При $z\to 0$ одержимо, що

$$f(z)=\frac{1+z-e^z}{z(e^z-1)}=\frac{1+z-\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\ldots\right)}{z\left[\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots\right)-1\right]}=$$

$$=\frac{-\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^{3}1}{3!}-\ldots}{z\left(z+\dfrac{z^2}{2!}+\ldots\right)}=\frac{-\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z}{3!}-\ldots}{1+\dfrac{z}{2!}+\ldots}\to-\frac{1}{2},$$

тобто, $f(z)$ обмежена в околі $z=0$, і ця точка є усувною сингулярною точкою. ◄

Приклад 6. *Знайти всі сингулярні точки функції* $f(z)=e^{\cot\frac{1}{z}}$.

► Покладаючи $\tan\dfrac{1}{z}=t$, тоді дана функція $f(z)$ буде мати вид $e^{\frac{1}{t}}$. Ця функція має єдину сингулярну точку $t=0$. Але якщо $t=\tan\dfrac{1}{z}=0$, тоді $\dfrac{1}{z}=k\pi$ і $z=\dfrac{1}{k\pi}$, де $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Таким чином, функція $f(z)$ має нескінченну множину суттєво сингулярних точок, для яких точка $z=0$ є граничною. Це видно з того, що при достатньо великих $|k|$ числа $z=\dfrac{1}{k\pi}$ будуть достатньо малими за абсолютною величиною. В точці $z=0$ функція $f(z)$ не визначена, тобто $z=0$ є сингулярною точкою функції $f(z)$, але вона не є ізольованою. Ні яких інших точок, крім $z=0$ і $z=\dfrac{1}{k\pi}$, функція $f(z)$ у відкритій площині не має. ◄

§ 4.7 Поведінка функції у нескінченно віддаленій точці

На площині комплексної змінної z існує тільки одна нескінченно віддалена точка $z=\infty$. Околом нескінченно віддаленій точки вважають множину всіх точок z, для яких справедливе співвідношення $|z|>R$. Геометрично їм відповідає зовнішність круга радіуса R з центром у початку координат. Звичайно, за центр кола можна було б взяти не тільки $z=0$, але й будь яку іншу точку

Якщо покласти $z=\dfrac{1}{t}$ або $t=\dfrac{1}{z}$, то окіл нескінченно віддаленої точки площини z перейде в окіл нуля площини t.

Тім самим дослідження поведінки функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$ зведеться до дослідження поведінки функції $\varphi(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ в околі точки $t=0$.

Нехай функція $f(z)$ - аналітична в околі точки $z=\infty$. Тоді функція $\varphi(t)$ буле аналітичною в околі $t=0$, і її можна розкласти у ряд Лорана. Нехай цей розклад має вид:

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{t^n},$$

де ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n$ є правильною частиною цього розкладу, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{t^n}$ - головна частина. Якщо зробивши заміну $t=\frac{1}{z}$ і $c_n=a_{-n}$, одержимо розвинення

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n$$

яке називається розкладом функції $f(z)$ *у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки.*

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}$ *називається його правильною частиною, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z_n$ *- головною частиною*

Таким чином , головна частина містить додатні степені z, а правильна - нульову і від'ємні.

При цьому можуть бути три випадки.

I. Головна частина дорівнює нулю, тобто $a_1=a_2=...=a_n=...=0$, тоді точку $z=\infty$ *називають усувною сингулярною точкою функції* $f(z)$. Якщо прийняти до уваги, що $f(z)\to a_0$ при $z\to\infty$, то, поклавши $f(\infty)=a_0$, можна сказати, що $f(z)$ *аналітична у нескінченно віддаленій точці.*

Якщо, крім того, $a_0 = a_{-1} = ... = a_{-m+1} = 0$, але $a_{-m} \neq 0$, тоді точку $z = \infty$ *називають нулем кратності* m функції $f(z)$.

II. Головна частина містить скінченне число доданків, тобто має вид:

$$a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + ... + a_1 z\,,\ a_m \neq 0\,.$$

У цьому випадку точку $z = \infty$ *називають полюсом порядку* m функції $f(z)$

III. Головна частина містить нескінченну множину членів. Тоді точку $z = \infty$ *називають суттєво сингулярною точкою* функції $f(z)$.

Оскільки характер поведінки функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ співпадає з характером поведінки функції $\varphi(t)$ в околі точки $t = 0$, то функція у околі точки $z = \infty$ буде обмеженою, нескінченно великою або невизначеною в залежності від того чи буде ця точка відповідно,:усувною, полюсом або суттєво сингулярною. Також справедливі й обернені їм теореми.

Означення 1. *Функція* $f(z)$ *називається цілою трансцендентною, якщо вона може бути представлена степеневим рядом, який збігається на всій відкритій площині*

Такими є функції $e^z, \sin z, \cos z, \ \sinh z, \cosh z$.

За характером сингулярних точок можна судити про вид функції.

Теорема. ***Якщо функція аналітична у відкритій площині, то вона буде постійною, цілою раціональною або цілою трансцендентною в залежності від того, чи буде для цієї функції точка*** $z = \infty$***, відповідно, регулярною, полюсом або суттєво сингулярною точкою.***

Зауважимо, що всі ці функції об'єднуються одним ***терміном – ціла функція.***

Можна також довести, що якщо аналітична функція у розширеній площині має сингулярними точками тільки полюси, то ця функція являється раціональною.

Дробово-раціональна функція є окремим випадком так званої *мероморфної функції.*

Означення 2. ***Функція називається мероморфною, якщо вона не має у відкритій площині інших сингулярних точок, крім полюсів.***

Такі, наприклад, функції $\tan z$, $\dfrac{1}{\sin z}$. Можна довести, що мероморфна функція може бути представлена у вигляді відношення двох цілих функцій.

Практичні заняття – 4.3

1. Розвинути наступні функції в ряд Лорана ву околі точки $z = 0$.

1. $\dfrac{\sin z}{z^2}$;	2. $\dfrac{\sin^2 z}{z}$;	3. $\dfrac{e^z}{z}$;
4. $\dfrac{e^z}{z^3}$;	5. $z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$;	6. $z^3 \cdot \cos\dfrac{1}{z}$;
7. $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$;	8. $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;	9. $\dfrac{e^z - 1}{z}$;
10. $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$;	11. $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$;	12. $\dfrac{\ln(1+z)}{z^3}$.

2. Розвинути в ряд Лорана у заданій області наступні функції

1. $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $\quad a)\ 2 < \lvert z \rvert < 3;$ $\quad b)\ 3 < \lvert z \rvert < +\infty.$
2. $\dfrac{1}{z+z^2}$, $\quad a)\ 0 < \lvert z \rvert < 1;$ $\quad b)\ 1 < \lvert z \rvert < +\infty.$
3. $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $\quad a)\ 1 < \lvert z \rvert < 4;$ $\quad b)\ 4 < \lvert z \rvert < +\infty.$

4. $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $\quad 1<\lvert z\rvert<2.$	
5. $\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $\quad a)\ \lvert z\rvert<1; \quad b)\ 1<\lvert z\rvert<2; \quad c)\ 2<\lvert z\rvert<+\infty.$	
6. $\dfrac{2}{z^2-1}$, $\quad 1<\lvert z+2\rvert<3.$	
7. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $\quad 1<\lvert z+2\rvert<4.$	
8. $\dfrac{z+2}{z^2-4z+83}$, $\quad 2<\lvert z-1\rvert<+\infty.$	
9. $\dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $\quad 2<\lvert z\rvert<+\infty.$	
10. $\dfrac{1}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $\quad 1<\lvert z\rvert<2.$	
11. $\dfrac{1}{z^2+1}$, $\quad 0<\lvert z-i\rvert<2.$	
12. $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $\quad 4<\lvert z+2\rvert<+\infty.$	

Практичні заняття – 4.4

1. ***Знайти нулі даних функцій і визначити їх порядок***

1. $f(z)=z^4+4z^2;$	2. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z};$
3. $f(z)=z^2\sin z;$	4. $f(z)=\dfrac{\sinh^2 z}{z};$
5. $f(z)=1+\cosh z;$	6. $f(z)=\dfrac{(1-\sinh z)^2}{z}$
7. $f(z)=(z+\pi i)\sinh z;$	8. $f(z)=\cos z^3;$
9. $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z});$	10. $f(z)=\cos z+\cosh iz.$

2. Визначити порядок $z_0 = 0$ для наступних функцій

1. $f(z) = \dfrac{z^6}{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2 - \left(\sin\dfrac{z}{2}\right)^2}$;	2. $f(z) = e^{\sin z} - e^{\tan z}$;
3. $f(z) = \dfrac{z^2}{1 + z - e^z}$	4. $f(z) = 2(\cosh z - 1) - z^2$;
5. $f(z) = \dfrac{(1 - \cos 2z)^2}{z - \sinh z}$;	6. $f(z) = (e^z - e^{z^2})\ln(1 - z)$;
7. $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$;	8. $f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.

3. Визначити характер сингулярності $z_0 = 0$ для наступних функцій

1. $\dfrac{1}{z - \sin z}$;	2. $\dfrac{1}{\cos z - 1 + \dfrac{z^2}{2}}$;	3. $\dfrac{1}{e^{-z} + z - 1}$;
4. $\dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$;	5. $\dfrac{\sinh z}{z - \sinh z}$;	6. $e^{\frac{1}{z^2}}$.

4. Знайти сингулярну точку наступних функцій і визначити їх характер

1. $a)\ f(z) = \dfrac{1}{1 - \sin z}$; $b)\ f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$.
2. $a)\ f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$; $b)\ f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$.
3. $a)\ f(z) = \dfrac{z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; $b)\ f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} - 1} + \dfrac{1}{z^2}$.
4. $a)\ f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$; $b)\ f(z) = z\sin\dfrac{1}{z}$; $c)\ f(z) = z\sinh\dfrac{1}{z}$.

5. $a)\ f(z)=\dfrac{z\cos\frac{1}{z}}{\cos z-1}$; $b)\ f(z)=\tanh z$; $c)\ f(z)=z\cot z$.

5. Визначити характер даних сингулярних точок

1. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$.	2. $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$.
3. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$.	4. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$.
5. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=0$, $z=-1$.	6. $f(z)=\dfrac{\sinh z}{z}$, $z_0=0$.
7. $f(z)=\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2}$, $z_0=0$.	8. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$.
9. $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=e$.	10. $f(z)=z\sinh\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

Індивідуальні домашні завдання 2
(для 3 і 4 частин)

1.Обчислити інтеграли функцій комплексної змінної

1.1. $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz$; $AB:\ \{y = x^2;\ z_A = 0,\ z_B = 1 + i\}$.
1.2. $\int\limits_{L} (z+1)e^z dz$; $L:\ \{|z| = 1,\quad \mathrm{Re}\, z \ge 0\}$.
1.3. $\int\limits_{AB} \mathrm{Im}\, z^3 dz$; AB - відрізок лінії, $z_A = 0,\quad z_B = 2 + 2i$.
1.4. $\int\limits_{AB} (z^2 + 7z + 1) dz$; AB - відрізок лінії, $z_A = 1,\quad z_B = 1 - i$.
1.5. $\int\limits_{ABC} |z| dz$; ABC - ламана лінія, $z_A = 0,\quad z_B = -1 + i$, $z_C = 1 + i$.
1.6. $\int\limits_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1) dz$; AB - відрізок лінії, $z_A = 1,\quad z_B = i$.
1.7. $\int\limits_{L} z|z| dz$; $L:\ \{|z| = 1,\quad \mathrm{Im}\, z \ge 0\}$.
1.8. $\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$; ABC - ламана лінія, $z_A = i,\quad z_B = 1,\ z_C = 0$.
1.9. $\int\limits_{ABC} \mathrm{Re}\, \frac{\overline{z}}{z} dz$; $AB:\ \{|z| = 1,\quad \mathrm{Im}\, z \ge 0\}$, BC і- відрізок лінії $z_B = 1,\ z_C = 2$.
1.10. $\int\limits_{ABC} (z^2 + \cos z) dz$; ABC - ламана лінія, $z_A = 0,\quad z_B = 1$, $z_C = i$.
1.11. $\int\limits_{AB} \frac{\overline{z}}{z} dz$; L - обмежена область: $\{1 < |z| < 2,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$.
1.12. $\int\limits_{ABC} (\cosh z + \cos iz) dz$; ABC - ламана лінія $z_A = 0,\ z_B = 1$, $z_C = i$.

1.13. $\int\limits_L \lvert z\rvert \bar{z}dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=4,\quad \operatorname{Re}z\ge 0\}.$
1.14. $\int\limits_L (\cosh z+z)dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=1,\quad \operatorname{Im}z\le 0\}.$
1.15. $\int\limits_L \lvert z\rvert \operatorname{Re}z^2 dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=R,\quad \operatorname{Im}z\ge 0\}.$
1.16. $\int\limits_{AB} (3z^2+2z)dz;\quad AB:\{y=x^2,\, z_A=0,\, z_B=1+i\}.$
1.17. $\int\limits_L z\operatorname{Re}z^2 dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=1,\quad \operatorname{Re}z\ge 0\}.$
1.18. $\int\limits_{ABC} (z^2+1)dz;$ ABC - ламана лінія $z_A=0,\quad z_B=-1+i,$ $z_C=i.$
1.19. $\int\limits_{AB} e^{\lvert z\rvert^2}\operatorname{Im}z dz;$ AB - відрізок лінії, $z_A=1+i,\ \ z_B=0.$
1.20. $\int\limits_L (\sin iz+z)dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=1,\quad \operatorname{Re}z\ge 0\}.$
1.21. $\int\limits_{AB} z\operatorname{Re}z^2 dz;$ AB - відрізок лінії, $z_A=0,\ \ z_B=1+2i.$
1.22. $\int\limits_{AB} (2z+1)dz;\ AB:\{y=x^3,\, z_A=0,\, z_B=1+i\}.$
1.23 $\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz;\quad AB:\{\lvert z\rvert=1, \operatorname{Re}z\ge 0, \operatorname{Im}z\ge 0\},$ BC - відрізок лінії, $z_B=1,\ \ z_C=0.$
1.24. $\int\limits_L (\cos iz+3z^2)dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=1,\ \operatorname{Im}z\ge 0\}.$
1.25. $\int\limits_L \lvert z\rvert dz;\quad L:\{\lvert z\rvert=\sqrt{2},\ 3\pi/4\le \arg z\le 5\pi/4\}.$
1.26. $\int\limits_{ABG} (z^2+1)dz;$ ABC - ламана лінія, $z_A=0;\ \ z_B=1;\ \ z_C=i.$
1.27. $\dfrac{1}{2i}\int\limits_{\lvert z\rvert=R} \bar{z}dz\,.$

1.28. $\int\limits_{ABC}(\sin z+z^5)dz;$ ABC - ламана лінія, $z_A=0;$ $z_B=1;$ $z_C=2i.$
1.29. $\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z^2dz;$ AB - відрізок лінії, $z_B=0,$ $z_C=1+i.$
1.30. $\int\limits_{L}(z^3+\sin z)dz;$ $L:\{\lvert z\rvert=1,\ \mathrm{Im}\,z\ge 0\}.$

2. Знайти всі Лоранівські розклади даних функцій за степенями z

2. 1 $f(z)=\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}.$	2.2 $f(z)=\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}.$
2.3 $f(z)=\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}.$	2.4 $f(z)=\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}.$
2.5 $f(z)=\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}.$	2.6 $f(z)=\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}.$
2.7 $f(z)=\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}.$	2.8 $f(z)=\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}.$
2.9 $f(z)=\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}.$	2.10 $f(z)=\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$
2.11 $f(z)=\dfrac{11z-242}{2z^3-11z^2-121z}$	2.12 $f(z)=\dfrac{6z-144}{z^3-6z^3-72z^2}$
2.13 $f(z)=\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}.$	2.14 $f(z)=\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}.$
2.15 $f(z)=\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}.$	2.16 $f(z)=\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}.$
2.17 $f(z)=\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}.$	2.18 $f(z)=\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}.$
2.19 $f(z)=\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}.$	2.20 $f(z)=\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}.$

2.21 $f(z)=\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-1z^3}$.	2.22 $f(z)=\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$.
2.23 $f(z)=\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$.	2.24 $f(z)=\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.
2.25 $f(z)=\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$.	2.26 $f(z)=\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$.
2.27 $f(z)=\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.	2.28 $f(z)=\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$.
2.29 $f(z)=\dfrac{13z+338}{169z+13^2-2z^3}$.	2.30 $f(z)=\dfrac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$.

3. Знайти всі Loранівські розклади даних функцій за степенями $z-z_0$

3.1 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=1+2i$.
3.2 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=2-3i$.
3.3 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-3-2i$.
3.4 $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=-2+i$.
3.5 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=1+3i$.
3.6 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=2-i$.
3.7 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-1+2i$.
3.8 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0=-2-3i$.

3.9 $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0=2+i.$
3.10 $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0=3-i.$
3.11 $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0=-2+3i.$
3.12 $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0=-2-2i.$
3.13 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}, \quad z_0=2+i.$
3.14 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}, \quad z_0=1-2i.$
3.15 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}, \quad z_0=-3+i.$
3.16 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}, \quad z_0=-3-2i.$
3.17 $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=-2+2i.$
3.18 $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=1-3i.$
3.19 $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=-3-i.$
3.20 $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0=-2+i.$
3.21 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}, z_0=-1-2i.$
3.22 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}, z_0=3+i.$
3.23 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}, \quad z_0=2-2i.$

3.24 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0=-2-i.$
3.25 $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0=-1-3i.$
3.26 $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0=-3+2i$
3.27 $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4},\quad z_0=2+3i.$
3.28 $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4},$
3.29 $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0=-1+3i$
3.30 $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0=2+2i$

4. Розвинути дані функції в ряд Лорана у околі точки z_0

4.1 $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z-2},\ z_0=2$	4.2 $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1},\quad z_0=1.$
4.3 $f(z)=ze^{z/(z-5)},\ z_0=5.$	4.4 $f(z)=\sin\dfrac{2z-1}{z+2},\quad z_0=-2.$
4.5 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-i},\ z_0=i.$	4.6 $f(z)=\sin\dfrac{5z}{z-2i},\quad z_0=2i.$
4.7 $f(z)=\sin\dfrac{3z-i}{3z+i},\quad z_0=-\dfrac{i}{3}.$	4.8 $f(z)=z\cos\dfrac{3z}{z-1},\ z_0=1.$
4.9 $f(z)=z\sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0=1.$	4.10 $f(z)=(z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z},\ z_0=0.$
4.11 $f(z)=z^2\sin\dfrac{z+1}{z},\ z_0=0.$	4.12 $f(z)=z\cos\dfrac{z}{z+2i},\ z_0=-2i.$
4.13 $f(z)=\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2.$	4.14 $f(z)=\sin\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0=i.$

4.15 $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-3},\ z_0=3.$	4.16 $f(z)=ze^{1/(z-2)},\ z_0=2.$
4.17 $f(z)=e^{z/(z-3)},\ z_0=3.$	4.18 $f(z)=\sin\dfrac{2z}{z-4},\ z_0=4.$
4.19 $f(z)=\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2.$	4.20 $f(z)=e^{(4z-z^2)/(z-1)^2},\ z_0=1.$
4.21 $f(z)=ze^{\pi/(z-a)},\ z_0=a.$	4.22 $f(z)=ze^{\pi z/(z-\pi)},\ z_0=\pi.$
4.23 $f(z)=z\sin\pi\dfrac{z+2}{z},\ z_0=0.$	4.24 $f(z)=z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1},\ z_0=1.$
4.25 $f(z)=z^2\sin\dfrac{z+3}{z},\ z_0=0$	4.26 $f(z)=z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2},\ z_0=1.$
4.27 $f(z)=z\cos\dfrac{z}{z-3},\ z_0=3.$	4.28 $f(z)=z\sin\pi\dfrac{z-1}{z-2},\ z_0=2.$
4.29 $f(z)=z\cos\dfrac{z}{z-5},\ z_0=5.$	4.30 $f(z)=ze^{z/(z-4)},\ z_0=4.$

5. Визначити тип сингулярної точки $z=0$ даних функцій

5.1 $f(z)=\dfrac{e^{9z}-1}{\sin z-z+z^3/6}.$	5.2 $f(z)=z^3\cdot e^{\frac{7}{z^2}}.$
5.3 $f(z)=\dfrac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+z^2/2}.$	5.4 $f(z)=\dfrac{\cos 7z-1}{\sinh z-z-z^3/6}.$
5.5 $f(z)=\dfrac{\sinh 6z-6z}{\cosh z-1-z^2/2}.$	5.6 $f(z)=\dfrac{\cosh 5z-1}{e^z-1-z}.$
5.7 $f(z)=z\sin\dfrac{6}{z^2}.$	5.8 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin z-z+z^3/6}.$
5.9 $f(z)=\dfrac{\sin z^2-z^2}{\cos z-1+z^2/2}.$	5.10 $f(z)=\dfrac{\cos z^2-1}{\sinh z-z-z^3/6}.$
5.11 $f(z)=\dfrac{e^{5z}-1}{\cosh z-1-z^2/2}.$	5.12 $f(z)=\dfrac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z}.$

5.13 $f(z) = z^4 \cos\frac{5}{z^2}$.	5.14 $f(z) = \dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.
5.15 $f(z) = \dfrac{\sinh 2z - z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.	5.16 $f(z) = \dfrac{\cosh 2z - 1}{\sinh z - z - z^3/6}$.
5.17 $f(z) = \dfrac{e^{z^3} - 1}{\cosh z - 1 - z^2/2}$.	5.18 $f(z) = z \cdot e^{\frac{4}{z^2}}$.
5.19 $f(z) = \dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$.	5.20 $f(z) = \dfrac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z - z^3/6}$.
5.21 $f(z) = \dfrac{e^{7z} - 1}{\cos z - 1 - z^2/2}$.	5.22 $f(z) = \dfrac{\sin 6z - 6z}{\sinh z - z - z^3/6}$.
5.23 $f(z) = z \sin\frac{3}{z^3}$.	5.24 $f(z) = \dfrac{\cos 5z - 1}{\cosh z - 1 - z^2/2}$.
5.25 $f(z) = \dfrac{\sinh 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.	5.26 $f(z) = \dfrac{\cosh 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.
5.27 $f(z) = \dfrac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.	5.28 $f(z) = \dfrac{\sin z^z - z^4}{\sinh z - z - z^3/6}$.
5.29 $f(z) = z \cos\frac{2}{z^3}$.	5.30 $f(z) = \dfrac{e^{z^5} - 1}{e^z - 1 - z}$.

6 Знайти сингулярні точки даних функцій і визначити їх тип

6.1 $f(z) = e^{1/z}/\sin(1/z)$.	6.2 $f(z) = 1/\cos z$.
6.3 $f(z) = \tan^2 z$.	6.4 $f(z) = z \cdot \tan z \cdot e^{1/z}$.
6.5 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}$.	6.6 $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.
6.7 $f(z) = \dfrac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z \sin^2 z}$.	6.8 $f(z) = \tan\frac{1}{z}$.
6.9 $f(z) = \cot\frac{1}{z}$.	6.10 $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$.

6.11 $f(z)=\cot\pi z.$	6.12 $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^3}.$
6.13 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z^2}.$	6.14 $f(z)=\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}.$
6.15 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}.$	6.16 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z}.$
6.17 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-1}}.$	6.18 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}.$
6.19 $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)}$	6.20 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}.$
6.21 $f(z)=\tanh z$	6.22 $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}.$
6.23 $f(z)=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}z}{z^4-1}$	6.24 $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}.$
6.25 $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}.$	6.26 $f(z)=\cot\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}.$
6.27 $f(z)=\dfrac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{\frac{1}{z}}.$	6.28 $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}.$
6.29 $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}.$	6.30 $f(z)=\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}.$

Частина V. Теорія лишків та їх застосування

§ 5.1. Основні тереми про лишки

Означення 1. ***Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій сингулярній точці z_0 називається комплексне число, яке дорівнює величині інтеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_l f(z)dz$ вздовж усякого замкненого контура l, який знаходиться в області аналітичності функції $f(z)$ і містить єдину сингулярну точку***

Символічно це може бути записано так:

$$res\left[f(z), z_0\right] \text{ або } res\, f(z)\big|_{z=z_0} = resf(z_0).$$

Для обчислення лишка функції $f(z)$ в ізольованій сингулярній точці застосовують наступну формулу:

$$res\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_l f(z)dz \qquad (1)$$

Теорема 1. ***(Основна теорема теорії лишків)***

Якщо функція $f(z)$ аналітична у замкненій області $\overline{D}$, яка обмежена контуром Γ, за винятком скінченого числа точок z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_k$ які належать D і є полюси або суттєво сингулярними точками $f(z)$, то інтеграл від функції $f(z)$ вздовж контура Γ у додатному напрямку дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків $f(z)$ у цих точках z_1, z_2, $z_3, \ldots, z_k$.

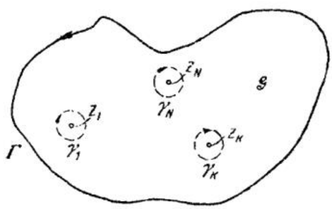


Рис. 1

► Відділимо кожну із сингулярних точок z_k функції $f(z)$ замкненими контурами γ_k так, щоб ці контури не перетинались, і не мали всередині кожного інших сингулярних точок, крім z_k. Ми отримали многозв'язну область, яка обмежена зовнішнім контуром Γ і внутрішніми контурами γ_k (*Рис. 1*). Всередині цієї області функція $f(z)$ є всюди аналітичною, тому за теоремою Коші про многозв'язну область отримаємо:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0 \qquad (2)$$

Перенесемо другий доданок (2) у праву частину і враховуючи позначення (1), ми отримаємо твердження теореми

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res\left[f(z), z_k \right] \blacktriangleleft \qquad (3)$$

Зауваження 1. ***Якщо функція*** $f(z)$ ***- аналітична на розширеній площині, крім скінченного числа точок, які є її полюсами або суттєво сингулярними точками, то сума лишків*** $f(z)$ ***відносно всіх цих точок, включаючи нескінченно віддалену (навіть якщо вона регулярна), дорівнює нулю.***

Дійсно, візьмемо коло l настільки великим радіусом, щоб всі скінченні сингулярні точки лежали в її середині. Тоді $\frac{1}{2\pi i}\int_{l} f(z)dz$ - сума лишків у скінченних сингулярних точках, а $\frac{1}{2\pi i}\int_{l^-} f(z)dz$ - лишок у нескінченно віддаленій точці.

Тому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{l^-} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{l} f(z)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{l} f(z)dz = 0.$$

Тобто

$$res\left[f(z), \infty \right] = -\sum_{j=1}^{n} res\left[f(z), z_j \right]$$

Теорема 2. ***Лишок функції*** $f(z)$ ***відносно полюса або суттєво сингулярної точки дорівнює коефіцієнту при першій від'ємній степені в розкладі функції в ряд Лорана в околі відповідної сингулярної точки:***

$$res\left[f(z), z_0\right] = c_{-1} \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

якщо

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ... + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + ... \textit{(5)}$$

► Дійсно, за формулою (Ч.ІУ.,12) для коефіцієнтів ряду Лорана, при $k=1$ маємо $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_l f(z)dz$. Приймаючи до уваги означення лишка, випливає ствердження теореми. ◄

У випадку, коли сингулярна точка є полюсом, правило обчислення лишка функції можна спростити.

Теорема 3. ***Лишок функції відносно простого полюса дорівнює границі при*** $z \to z_0$ ***добутку функції на різницю*** $z - z_0$***:***

$$res\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)\right] \qquad \textbf{\textit{(6)}}$$

У випадку $k-$***кратного полюса лишок можна обчислювати за формулою:***

$$res\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right] \qquad \textbf{\textit{(7)}}$$

У випадку подвійного полюса

$$res\left[f(z), z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^2\right]'$$

► Дійсно, якщо z_0 є простий полюс, то ряд Лорана прийме наступний вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z) + c_2(z-z)^2 + ...,$$

звідси

$$f(z)(z-z_0) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z)^2 + c_2(z-z)^3 + ...$$

Якщо перейти до границі при $z \to z_0$ і за теоремою 2, отримаємо формулу (6).

Нехай z_0 - полюс кратності k, отже ряд Лорана має вид:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z) + c_2(z-z)^2 + \ldots$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на $(z-z_0)^k$ і отримаємо

$$f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} +$$
$$+ c_0(z-z_0)^k + c_1(z-z)^{k+1} + \ldots$$

Після диференціювання $k-1$ разів дану рівність маємо:

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k \right] = (k-1)!c_{-1} + k! \cdot c_0(z-z_0) + \ldots$$

і якщо перейти до границі при $z \to z_0$, отримаємо формулу (7).◄

Зауваження 2. ***Оскільки*** $f(z)$ ***є часткою двох аналітичних функцій*** $\varphi(z)$ ***і*** $\phi(z)$***, тобто*** $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\phi(z)}$***, і*** z_0 ***- простий полюс*** $f(z)$***, тоді***

$$res\left[f(z), z_0 \right] = \frac{\varphi(z_0)}{\phi'(z_0)} \qquad (8)$$

► Дійсно, якщо точка z_0 є простим полюсом $f(z)$, то вона повинна бути простим нулем функції $\phi(z)$. Отже маємо: $\varphi(z_0) \neq 0$; $\phi(z_0) = 0$; $\phi'(z_0) \neq 0$. Застосовуючи формулу (6) отримаємо:

$$res\left[f(z), z_0 \right] = \lim_{z \to z_0}(z-z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\phi(z)} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\phi(z) - \phi(z_0)}{(z-z_0)}} = \frac{\varphi(z_0)}{\phi'(z_0)}.$$

Результат доводить вище зазначене твердження.◄

Приклад 1. *Знайти лишки наступних функцій :*

1) $f(z)=\cot z^2$ *; 2)* $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$ *: 3)* $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{(z-1)}$.

► 1) Функція $f(z)=\cot z^2=\dfrac{\cos z^2}{\sin z^2}$, як відношення цілих функцій має на відкритій площині сингулярними точками лише полюси, які є нулями функції $\sin z^2$. Це нулі $z_k=\pm\sqrt{k\pi}$, де $k=0;\pm1;\pm2;...$

Оскільки не тільки $\sin z^2$, але і її перша похідна $2z\cos z^2$ обертається в нуль при $z=0$, а друга похідна $2\cos z^2-4z^2\sin z^2$ не дорівнюється нулю у цій точці, то $z=0$ є нулем другого порядку функції $\sin z^2$, і полюс другого порядку функції $\cot z^2$. Так само упевнимося, що точки $z_k=\pm\sqrt{k\pi}$, при $k=0;\pm1;\pm2;...$ є полюси першого порядку $\cot z^2$. В точці $z_k=\pm\sqrt{k\pi}\neq0$ лишок дорівнює

$$res\left[\cot z^2; z=\pm\sqrt{k\pi}\right]=\left.\frac{\cos z^2}{\left(\sin z^2\right)'}\right|_{z=\pm\sqrt{k\pi}}=\left.\frac{\cos z^2}{2z\cos z^2}\right|_{z=\pm\sqrt{k\pi}}=$$

$$=\frac{1}{\pm2\sqrt{k\pi}},\text{ де } k=\pm1;\pm2;...$$

Для $z=0$ отримаємо:

$$res\left[\cot z^2; z=0\right]=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cot z^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to0}\left(2z\cot z^2-\frac{2z^3}{\sin^2 z^2}\right)=\lim_{z\to0}\left(\frac{2z\cos z^2\sin z^2-2z^3}{\sin^2 z^2}\right)$$

$$=\lim_{z\to0}\left(z\frac{\sin 2z^2-2z^2}{\sin^2 z^2}\right)=$$

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\left[2z^2-\frac{(2z^2)^3}{3!}+\frac{(2z^2)^5}{5!}-...\right]-2z^3}{\left[z^2-\frac{(z^2)^3}{3!}+\frac{(z^2)^5}{5!}-\right]^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z^7\left[-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5z^4}{5!}-\right]}{z^4\left[1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{5!}\right]}=\lim_{z\to 0}\frac{z^3\left[-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5z^4}{5!}-\right]}{\left[1-\frac{z^4}{3!}+\frac{z^8}{5!}\right]}=0$$

Точка $z=\infty$ є граничною для полюсів $z_k=\pm\sqrt{k\pi}$ функції $\cot z^2$.

2) $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$. Перший множник функції $f(z)=e^z\cdot e^{-\frac{1}{z}}$ має тільки одну сингулярну точку $z=\infty$. Вона є правильною для другого множника, оскільки $e^{-\frac{1}{z}}\to 1$ при $z\to\infty$, і суттєво сингулярною точкою для $f(z)$. Так само упевнимося, що і $z=0$ є суттєво сингулярною точкою функції $f(z)$. Оскільки більше сингулярних точок функції $f(z)$ немає, то $resf(0)=-resf(\infty)$. Щоб знайти $resf(0)$, розкладемо $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки $z=0$. Користуючись рядом Тейлора для функції e^u, отримаємо

$$f(z)=e^z\cdot e^{-\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+...\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-...\right)$$

Члени цього розкладу, який містить коефіцієнт c_{-1}, який нас цікавить, отримаємо як суму добутків множників виду Az^k, розкладу e^z, на множники виду $\frac{B}{z^{k+1}}$, розкладу $e^{-\frac{1}{z}}$, тобто

$$1\cdot\frac{-1}{z}+z\cdot\frac{1}{2z^2}-...+\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!z^{n+1}}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(n+1)!z}$$

Звідси, $resf(0) = -resf(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (n+1)!}$.

3) $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{(z-1)}$. Точка $z = 1$ єдина скінчена сингулярна точка функції $f(z)$. Щоб знайти $resf(1)$ розвинемо $f(z)$ у ряд Лорана в околі точки $z = 1$. Скористаємось рядом Тейлора для косинуса. Отримаємо

$$f(z) = (1 + (z-1))^2 \left[1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots \right] =$$

$$= \left[1 + 2(z-1) + (z-1)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - .. \right]$$

Нам потрібний лише коефіцієнт при $\frac{1}{z-1}$. Відповідний йому буде $2(z-1) \cdot \frac{1}{2!(z-1)^2}$. Звідси випливає, що $c_{-1} = resf(1) = -1$. Але оскільки більше скінчених сингулярних точок функція $f(z)$ не має , то $resf(\infty) = -resf(1) = 1$. ◄

Приклад 2. *Обчислити інтеграл*

$I = \int_l \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)}$, *де* l - *коло* $|z| = 2$

► Щоб застосувати основну теорему про лишки ми повинні знайти сингулярні точки підінтегральної функції. Функція має три сингулярні точки: $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -3$

Але тільки дві лежать у середині круга $l : |z| \le 2$. Відповідно, застосовуючи формулу (3), маємо: $I = \int_l \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)} =$

$$= 2\pi i \left[res\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}, z_1 = -i \right) + res\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}, z_2 = i \right) \right]$$

Лишки обчислюємо за формулою (6) :

$$res\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}, z_1=-i\right)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+3)}(z+i)=$$

$$=\frac{i^2}{-2i(3-i)}=\frac{1-3i}{20}.$$

$$res\left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}, z_2=i\right)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+3)}(z-i)=$$

$$=\frac{i^2}{2i(3+i)}=\frac{1+3i}{20}.$$

Нарешті, отримаємо:

$$I=\int_l\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z+3)}=2\pi i\left[\frac{1-3i}{20}+\frac{1+3i}{20}\right]=\frac{\pi i}{5}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Обчислити інтеграл*

$I=\int_l\frac{\cos z}{z^2(z-2)}$, *де* l *є одиничне коло* $|z|=1$.

► Підінтегральна функція має подвійний полюс $z=0$ і простий полюс $z=2$. Перший - розташований в середині круга обмеженого контуром $l:|z|=1$, а другий – у зовнішності області обмеженої цим колом. Таким чином,

$$\int_l\frac{\cos z}{z^2(z-2)}=2\pi i\cdot res\left[\frac{\cos z}{z^2(z-2)}, z=0\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{z^2(z-2)}\cdot z^2\right]'=2\pi i\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{(z-2)}\right]'=$$

$$=2\pi i\cdot\lim_{z\to 0}\frac{(-\sin z)(z-2)-\cos z}{(z-2)^2}=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Обчислити інтеграл* $I=\int_l\frac{\cot z}{4z-\pi}$,

де l *- коло* $|z|=1$.

► Підінтегральна функція $f(z)$ має наступні сингулярні точки: $z_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_2 = 0$, $z_k = k\pi$, де $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, які є простими полюсами. В середині круга $|z| < 1$ розташовані тільки точки z_1 і z_2, а всі інші за межам круга, оскільки $|z_k| = |k\pi| \ge \pi > 1$.

Обчислимо лишки функції у точках z_1 і z_2

$$resf\left(\pi/4\right) = \left.\frac{\cot z}{(4z-\pi)'}\right|_{z=\pi/4} = \frac{1}{4};$$

$$resf\left(0\right) = \left.\frac{\dfrac{\cos z}{4z-\pi}}{(\sin z)'}\right|_{z=0} = -\frac{1}{\pi}.$$

Тоді за основною теоремою про лишки отримаємо:

$$\int_l \frac{\cot z}{4z-\pi} = 2\pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{i}{2}(\pi - 4).$$ ◄

Приклад 5. *Обчислити інтеграл*

$I = \int_l \frac{\ln(z+2)}{z^2} dz$, *де* l *- коло* $|z| = 1/2$;

► В середині кола $|z| = 1/2$ знаходиться тільки одна сингулярна точка підінтегральної функції. Це подвійний полюс $z = 0$. Тоді

$$resf(0) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\ln(2+z)}{z^2}\cdot z^2\right]' = \lim_{z\to 0}\left[\ln(2+z)\right]' = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}$$

Отже $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\ln(z+2)}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$ ◄

Приклад 6. *Обчислити інтеграл* $I = \int_l z^m (e^z + e^{1/z}) dz$, *де* m *- ціле число,* $l : |z| = a$.

► Підінтегральна функція має єдину сингулярну точку $z=0$ усередині кола $|z|=a$. Щоб знайти $resf(0)$ необхідно розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z=0$. Користуючись рядом Тейлора експоненціальної функції, отримаємо:

$$f(z)=z^m\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{1}{z^n\cdot n!}+\ldots\right)\right]$$

Якщо $m\geq 0$, тоді член $\frac{c_{-1}}{z}$ можна отримати, якщо помножити z^m на такий член розкладу доданка $e^{1/z}$, що має $n=m+1$. Тобто

$$z^m\cdot\frac{1}{(m+1)!\,z^{m+1}};\qquad c_{-1}=resf(0)=\frac{1}{(m+1)!}$$

$$\int\limits_{|z|=a} z^m(e^z+e^{1/z})dz=2\pi i\cdot\frac{1}{(m+1)!}=\frac{2\pi i}{(m+1)!}.$$

Якщо $m<-1$, то покладаючи $m=-k$ (де $k>0$) можна знайти член $\frac{c_{-1}}{z}$, виконуючи множення $\frac{1}{z^k}$ на такий член розкладу доданка e^z, що має $n=k-1$. Отримаємо

$$\frac{1}{z^k}\cdot\frac{z^{k-1}}{(k-1)!}=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{z},\ c_{-1}=resf(0)=\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{(-m-1)!};$$

$\int\limits_l z^m(e^z+e^{1/z})dz=\frac{2\pi i}{(-m-1)!}$. якщо $m=-1$, тоді $resf(0)=2$,

$$\int\limits_l z^{-1}(e^z+e^{1/z})dz=4\pi i. ◄$$

Приклад 7. *Обчислити інтеграл*

$$I=\int\limits_l \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}dz,\ \text{де}\ l:|z|=1.$$

► Сингулярні точки підінтегральної функції знаходимо з рівняння $(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4=0$. Очевидно, що всі корені рівняння розташовані у колі $|z|=1$.

Оскільки обчислення лишків у всіх цих точках є важкою задачею, то доцільно застосувати **зауваження 1** до основної теореми про лишки, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} res\left[f(z), z_k\right] + res\left[f(z), z=\infty\right] = 0 .$$

У цьому випадку можна знайти лишок тільки в одній точці $z=\infty$, тобто $res\left[f(z), z=\infty\right]$. Розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленій точки, має вид:

$$f(z) = \frac{z^{21}}{2^3 z^6\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^3 \cdot 3^4 z^{16}\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^4} = \frac{1}{2^3 3^4}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^{-3} \cdot$$

$$\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^{-4} = \frac{1}{648}\frac{1}{z}\left(1+\frac{-3}{1!}\frac{1}{2z^2}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{-4}{1!}\frac{1}{3z^4}+\ldots\right)=$$

$$= \frac{1}{648}\frac{1}{z}\left(1-\frac{3}{2z^2}+\ldots\right) = \frac{1}{648}\frac{1}{z} - \frac{1}{432}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots$$

Лишок функції $f(z)$ у нескінченно віддаленій точці є коефіцієнтом при $c_{-1}\frac{1}{z}$ який береться із протилежним знаком.

Отже, $\sum_{k=1}^{n} res\left[f(z), z_k\right] = -res\left[f(z), z=\infty\right] = \frac{1}{648}$.

Звідси

$$\int_l \frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{648} = \frac{\pi i}{324} . ◄$$

Практичні заняття - 5.1

1. *Знайти лишки функцій у сингулярних точках*

1. $f(z)=\dfrac{\tan z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$	2. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$
3. $f(z)=\dfrac{\cosh z}{(z^2+1)(z-3)}$	4. $f(z)=\dfrac{e^z}{1/4-\sin^2 z}$
5. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z-1)}$	6. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$
7. $f(z)=\dfrac{e^{-1/z^2}}{1+z^4}$	8. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$
9. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$	10. $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$
11. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$	12. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)(z-i/2}$
13. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$	14. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\pi/2\,z^2}$
15. $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$	16. $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $(n\in N)$
17. $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z^3-\pi/4\,z^2}$	18. $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$

2. *Обчислити інтеграли*

1. $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=1} z\tan\pi z dz$	2. $\displaystyle\int_{\lvert z-3\rvert=3}\frac{e^{z^2}}{z^3-iz^2}dz$
3. $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=2}\frac{e^z}{z^2+z}dz$	4. $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$

5. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1/2} z^2\sin\frac{1}{z}dz$	6. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=\sqrt{3}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$
7. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+1\rvert=4} \frac{z}{e^z+3}dz$	8. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{z^2}{\sin^2 z\cos z}dz$
9. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-i\rvert=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$	10. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$
11. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$	12. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1/3} (z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$
13. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=2/3} \left(\sin\frac{1}{z}+e^{z^2}\cos z\right)dz$	14. $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-i\rvert=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}dz$
15. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}dz$, $\quad l: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$	
16. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{\cos\left(z^2/2\right)}{z^2-2}dz$, $\quad l: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	
17. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^3}dz$, $\quad l: \frac{x^2}{4}+y^2=1$	
18. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{e^{2z}}{(z^3-1)}dz$, $\quad l: x^2+y^2-2x=0$	
19. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$ $\quad l: x^2+y^2=16$	
20. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{z\sin z}{(z-1)^2(z+2)}dz$, $\quad l: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$	
21. $\displaystyle\int\limits_{l} \frac{z}{z^4+1}dz$, $\quad l: x^2+y^2=2x$	

§ 5.2. Обчислення визначених інтегралів

5.2.1. ***Обчислення визначеного інтеграла у межах від*** 0 ***до*** 2π ***від функцій раціонально виражених через*** $\sin x$ ***і*** $\cos x$**.**

Нехай необхідно обчислити інтеграл виду

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx \qquad (9)$$

де $R(\sin x, \cos x)$ - дробово-раціональна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$. Якщо $R(\sin x, \cos x)$ - неперервна функція від x, то інтеграл існує і його можна обчислити за допомогою лишків. $e^{-ix} = z$. Тоді

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z} \right); \qquad (10)$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) \qquad (10^*)$$

$$dz = ie^{ix}dx \qquad \text{або} \qquad dx = \frac{dz}{iz} \qquad (10^0)$$

Щоб встановити межі інтегрування по z, зауважимо, що коли x змінюється від 0 до 2π, то точка $z = e^{ix}$ описує одиничне коло l: $|z| = 1$ в додатному напрямку, оскільки $|z| = |e^{ix}| = |\cos x + i\sin x| = 1$. Отже ми отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \int_l R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2} \right)\frac{dz}{iz} = \int_l R_1(z)dz$$

де l є коло $|z| = 1$.

Застосовуючи основну теорему про лишки, отримаємо

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \int_l R_1(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\left[R_1(z), z = z_k \right] \qquad (10^{**})$$

Тут z_1, z_2, z_3, …, z_n є полюсами раціональної функції які належать кругу $|z| < 1$.

Зауважимо, *що* $R_1(z)$ *буде дробово-раціональною функцією і ні яких інших сингулярних точок, крім полюсів, вона мати не може.*

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 3x}{(5-4\cos x)^2}dx$

► Запишемо даний інтеграл у вигляді

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 6x}{(5-4\cos x)^2}dx$$

і розглянемо вираз $I+iK$, де

$$K=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{i\sin 6x}{(5-4\cos x)^2}dx$$

Так як підінтегральна функція інтеграла K непарна функція, то $K=0$ і

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 6x+i\sin 6x}{(5-4\cos x)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+e^{6xi}}{(5-4\cos x)^2}dx$$

Покладаючи $z=e^{ix}$, $dx=\frac{dz}{iz}$ отримаємо

$$I=\int_l\frac{1+z^6}{\left[5-2(z+z^{-1})\right]^2}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2i}\int_l\frac{z+z^7}{\left[2z^2-5z+2)\right]^2}dz=2\pi i\cdot\sigma$$

Де σ є сумою лишків відносно всіх сингулярних точок підінтегральної функції які знаходяться всередині контура l. Сингулярні точки $R(z)$ є нулями знаменника підінтегральної функції. Тобто, $z_1=1/2$ і $z_2=2$ корені рівняння $2z^2-5z+2=0$ і тільки перший з них лежить всередині l. оскільки він $z_1=1/2$ полюс другого порядку, то

$$\sigma=res\left[R(z),z=1/2\right]=\lim_{z\to 1/2}\frac{d}{dz}\left[\left(z-1/2\right)^2\cdot\frac{z+z^7}{4\left(z-1/2\right)^2\cdot(z-2)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{z\to 1/2}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+z^7}{(z-2)^2}\right]=\frac{1}{4}\lim_{z\to 1/2}\left[\frac{1+7z^6}{(z-2)^2}-\frac{2(z+z^7)}{(z-2)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{71}{16\cdot 9}+\frac{130}{16\cdot 27}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{343}{16\cdot 27}\right]=\frac{343}{1728}.$$ ◄

Приклад 2. *Обчислити* $I=\int\limits_0^{\pi}\sin^{2n}xdx$, *де* $n\in N$.

► Оскільки $\sin^{2n}x$ є парною функцією, тоді ми можемо записати:

$$\int\limits_0^{\pi}\sin^{2n}xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n}xdx$$

Виконуючи заміну $e^{ix}=z$, одержимо

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$$

Центр кола $|z|=1$ є полюс порядку $2n+1$ підінтегральної функції. Лишок функції дорівнюється коефіцієнту при $\frac{1}{z}$ у розкладі $\left(z-\frac{1}{z}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{z}$. Отже, необхідно знайти той біноміальний коефіцієнт розкладу $\left(z-\frac{1}{z}\right)^{2n}$, який не містить z. Згідно властивостям коефіцієнтів формули бінома Ньютона випливає, що це буде середній член. Підставляючи у формулу загального члена бінома Ньютона, тобто у формулу

$$T_{k+1}=(-1)^k C_{2n}^k z^k\cdot\frac{1}{z^{2n-k}}$$

замість k число n, знайдемо:

$$T_{n+1}=(-1)^n C_{2n}^n$$

Тоді

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1}\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{2^{2n+1}i(-1)^n}\int\limits_{|z|=1}\left(z-\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}=$$

$$=\frac{1}{2^{2n+1}i(-1)^n}\ 2\pi i(-1)^n C_{2n}^n=\frac{\pi}{2^{2n}}C_{2n}^n$$

$$\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot...(n+1)}{2^n\cdot 1\cdot 2\cdot...\cdot n}\pi=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!}\pi=$$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}\pi=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi.$$

Нехай $n=3$, тоді одержимо

$$\int_0^{\pi}\sin^6 xdx=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\pi=\frac{5}{16}\pi. \ ◄$$

Приклад 3. *Обчислити* $I=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\cos 2mxdx$, *де* m *і* n *цілі невід'ємні числа* .

► Користуючись парністю підінтегральної функції даний інтеграл можна записати у вигляді

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\cos 2mxdx.$$

Зауважимо, що $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\sin 2mxdx$ дорівнює нулю в силу непарності підінтегральної функції, то одержимо наступний інтеграл

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x(\cos 2mx+i\sin mx)dx\ \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{i2mx}\cos^{2n}xdx$$

Покладемо $e^{2xi}=z$, тоді

$$dx=\frac{dz}{2iz},\qquad \cos^{2n}x=\left(\frac{e^{2xi}+1}{2e^{ix}}\right)^{2n}=\frac{(z+1)^{2n}}{2^{2n}\cdot z^n},$$

$$I=\frac{1}{2^{2n+2}}\int_l z^{m-n-1}(z+1)^{2n}dz=\frac{1}{2^{2n+2}}\cdot 2\pi i\cdot\sigma. \qquad (1^*)$$

де σ - сума лишків підінтегральної функції у сингулярних точках, які розташовані всередині круга $|z|<1$.

Якщо $m > n$, тобто, якщо $m-n-1>0$, то підінтегральна функція є аналітичною функцією і за теоремою Коші $I=0$.

Якщо $m \le n$ тоді точка $z=0$ - полюс функції $f(z)=z^{m-n-1}(z+1)^{2n}$, який є єдиною сингулярною точкою функції всередині круга $|z|<1$. Із виразу $f(z)$ видно, що член $c_{-1}\cdot\frac{1}{z}$ у розвинені в ряд Лорана в околі точки $z=0$ можна одержати, помноживши z^{m-n-1} на той член бінома Ньютона $(1+z)^{2n}$ який має вид $C_{2n}^{n-m}z^{n-m}$, а це значить $\sigma = res\left[f(z); z=0\right] = C_{2m}^{n-m}$. Підставляючи σ у (1*) ми одержимо $I=\frac{\pi}{2^{2n+1}}\cdot C_{2n}^{n-m}$. ◄

Приклад 4. *Обчислити інтеграл*

$$I=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos nx \cos\sin x dx,$$

де $n-$ *ціле число.*

► Розглянемо інтеграл і складемо суму

$$I+iK=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos\sin x(\cos nx + i\sin nx)dx =$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos\sin x e^{inx}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\left(e^{i\sin x}-e^{-i\sin x}\right)e^{inx}dx. \qquad (2^*)$$

Якщо тепер перемножити перші два множника підінтегрального виразу і зробивши заміну $e^{ix}=z$, тоді, зауваживши, що $\cos x + i\sin x = z$, $\cos x - i\sin x = \frac{1}{z}$, $dx=\frac{dz}{iz}$, то рівність (2*) можна записати у наступному виді:

$$I+iK==\frac{1}{2}\int_l \left(e^z - e^{\frac{1}{z}}\right)z^n\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\int_l z^{n-1}\left(e^z-e^{\frac{1}{z}}\right)dz \qquad (3^*)$$

де $l-$коло $|z|=1$, яке проходимо у додатному напрямку. Але контурний інтеграл такого типу був обчислений у ***прикладі 6***. Якщо покласти у (3*) $m=n-1$ і, вважаючи $n\neq 0$, одержимо:

$$I+iK=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2\pi i}{|n|!}=\frac{\pi}{|n|!}, \qquad I=\frac{\pi}{|n|!}.$$

Якщо ж $n=0$, тоді $I=2\pi$. ◄

5.2.2. Обчислення інтеграла у межах від $-\infty$ до $+\infty$ від раціональних функцій

Розглянемо інтеграл

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \tag{11}$$

де $f(z)$ - дробово-раціональна функція.

З дійсного аналізу відомо, що *якщо степінь знаменника дробу $f(z)$ вище за степеня чисельника на дві або більш одиниць і знаменник не має дійсних коренів (це забезпечує неперервність $f(z)$), тоді інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$ збігається.*

Для застосування теорії лишків для обчислення інтегралів такого типу застосовують метод контурного інтеграла, тобто підінтегральну функцію не міняють і обчислюють від неї інтеграл вздовж замкненого контура L, який утворюється верхнім півколом C_R радіуса R з центром в точці $z=0$ і діаметром $(-R,R)$ (*Рис. 2*), Причому радіус R обирають настільки великим, щоб всі полюси дробу $f(z)$, які розташовані у верхній півплощині, належали б області обмеженої контуром L. Застосовуючи основну теорему Коші про лишки, отримаємо:

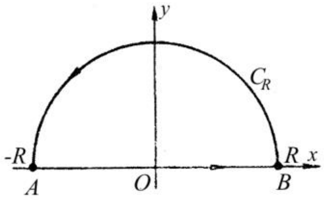


Рис. 2

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sigma, \qquad (12)$$

де σ - сума лишків функції $f(z)$ у всіх сингулярних точках, які розташовані в верхній півплощини. На діаметрі AB $z = x$, і тоді

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$$

Коли $R \to \infty$

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Залишилось довести, що

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz \to 0 \qquad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Перша лема. ***Якщо у верхній півплощині і на дійсній вісі функція*** $f(z)$ ***аналітична для всіх*** z***, достатньо великих за модулем, і якщо при*** $|z| \to \infty$ ***величина*** $z \cdot f(z) \to 0$ ***рівномірно відносно*** $\arg z$***, тоді*** $\int\limits_{C_R} f(z)dz \to 0$ ***при*** $R \to \infty$***, де*** C_R ***- верхнє півколо радіуса*** R ***з центром у початку координат.***

► Дійсно рівняння кола C_R має вид: $z = R \cdot e^{i\varphi}$. Отже,

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz = \int\limits_{0}^{\pi} f(R \cdot e^{i\varphi}) iR \cdot e^{i\varphi} d\varphi$$

Оцінимо цей інтеграл. Оскільки $\lim\limits_{z \to \infty} z \cdot f(z) = 0$, тоді для всякого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке N, що для $|z| > N$ справедлива нерівність $|zf(z)| < \varepsilon$. Це означає, що якщо $|z| = R > N$, то $\left| f(R \cdot e^{i\varphi}) iR \cdot e^{i\varphi} \right| < \varepsilon$, і тому

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)dz \right| \le \int\limits_{0}^{\pi} \left| f(R \cdot e^{i\varphi}) iR \cdot e^{i\varphi} \right| d\varphi < \varepsilon \int\limits_{0}^{\pi} d\varphi = \varepsilon\pi$$

Тобто, інтеграл $\int\limits_{C_R} f(z)dz$ може бути зроблений як завгодно малим при достатньо великому R, отже, інтеграл прямує до нуля при $R \to \infty$. ◄

За доведеною лемою, отримаємо

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{R} f(z)dz\right) = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz +$$

$$+\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} res\left[f(z), z = z_k \right] (12^*)$$

Приклад. *Обчислити інтеграл* $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx$.

► Функція $\frac{x^2}{x^4+1}$ є раціональною функцією, знаменник якої не має дійсних коренів і степінь знаменника на дві одиниці більший за степінь чисельника, отже інтеграл збігається. Знайдемо нулі знаменника:

$z^4+1=0$; $z^4=-1$; $z=\sqrt[4]{-1}$; $z=\sqrt[4]{e^{i\pi}}$; $z=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}=e^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i}$, при $k=0,1,2,3$.

Ми повинні взяти тільки ті z, уявна частина яких додатна. Тобто, $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ і $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Тепер знайдемо лишки. Оскільки полюси підінтегральної функції є простими полюсами, то застосовуючи ***зауваження 2*** (§ 5.1) і знайдемо лишки наступним чином

$$\sum_{k=1}^{2} res\left(\frac{z^2}{z^4+1}; z = z_k\right) = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_1} + \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{4z_1}+\frac{1}{4z_2}$$

Відповідно ,

$$\int\limits_{C_R}\frac{z^2}{z^4+1}dz + \int\limits_{-R}^{R}\frac{z^2}{z^4+1}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4z_1}+\frac{1}{4z_2}\right)$$

Застосуємо ***першу лему*** для першого інтеграла. Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot\dfrac{z^2}{z^4+1}=0$, тоді цей інтеграл прямує до нуля при $z\to\infty$. Відповідно, при обчисленні границі отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}+\frac{\sqrt{2}}{-1+i}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

В силу парності підінтегральної функції, випливає:

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \blacktriangleleft$$

5.2.3. *Обчислення інтеграла в межах від $-\infty$ до $+\infty$ від добутку раціонального дробу на синус або косинус кратного аргументу*

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx \ \text{ і } \ I_2=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx.$$

Для того щоб інтеграли збігались, то знаменник дробу не повинен мати дійсних нулів, а степінь чисельника повинна бути нижче степені знаменника хоча б на одну одиницю.

У прикладах цього типу розглядається не задана підінтегральна функція а $f(x)e^{imx}$ (можна покласти, що $m>0$). Контур інтегрування залишається той самий, що і в інтегралах попереднього типу (5.2.2). У цьому випадку треба довести, що $I=\int\limits_{C_R} f(x)e^{imx}dx$ прямує до нуля при $R\to\infty$. Для чого доведемо наступну лему.

Друга лема (лема Жордана). Якщо у верхній півплощині і на дійсній вісі функція $f(z)$ ***аналітична для всіх*** z***, достатньо великих за модулем, і якщо при*** $|z|\to\infty$ ***функція*** $f(z)\to 0$ ***рівномірно відносно*** $\arg z$***, то*** $\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz\to 0$ при $R\to\infty$***, де*** $m>0$ ***і*** C_R ***– верхнє півколо радіуса*** R ***з центром у початку координат.***

► Як і при доведені ***першої леми***, покладемо: $z = R \cdot e^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тоді

$$\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz = \int_0^{\pi} f(R \cdot e^{i\varphi}) \cdot e^{imR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} R \cdot e^{i\varphi} i d\varphi$$

Оскільки, при дійсному α $\left(\left|e^{i\alpha}\right| = \left|\cos\alpha + i\sin\alpha\right| = = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1\right)$, то у підінтегральному виразі $\left|e^{imR\cos\varphi}\right| = 1$, $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$. З іншого боку, оскільки $f(z) \to 0$ рівномірно відносно $\arg z$ при $z \to \infty$, тоді для всякого $\varepsilon > 0$ можна знайти N таке, що при $|z| = R > N$ виконується нерівність $|f(z)| < \varepsilon$. Вважаючи $R > N$, одержимо, що модуль підінтегральної функції не більше $\varepsilon R e^{-mR\sin\varphi}$. Отже

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| \le \int_0^{\pi} \left|f(R \cdot e^{i\varphi})\right| \left|e^{imR\cos\varphi}\right| e^{-mR\sin\varphi)} R \left|\cdot e^{i\varphi}\right| |i| d\varphi <$$

$$< \varepsilon R \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi} d\varphi$$

Оскільки $\sin\varphi$ в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$ і від $\frac{\pi}{2}$ до π приймає однакові значення, а довжини інтервалів від 0 до $\frac{\pi}{2}$ і від $\frac{\pi}{2}$ до π рівні, і тому інтервал від 0 до π дорівнює двом інтервалам від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Таким чином,

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| < 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi} d\varphi \qquad (13)$$

Підінтегральний вираз інтеграла справа досить складний, тому проінтегрувати в елементарних функціях його неможливо. Оцінімо його, спростивши підінтегральну функцію. Для цього необхідно скористатися наступною нерівністю: коли кут φ належить першому квадранту, то $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$, якщо $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Покажемо що це так. Функція $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ у першій чверті має від'ємну похідну:

$$\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2} = \frac{\cos\varphi(\varphi - \tan\varphi)}{\varphi^2} < 0,$$

тому що $\tan\varphi > \varphi$ для $0 < \varphi < \pi/2$

Отже, $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ у першому квадранті спадає і приймає найменше значення при найбільшому куті $\frac{\pi}{2}$, тобто $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geq \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}$. Звідси $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$.

Скористаємось цією нерівністю. Таким чином нерівність (13) можна підсилити

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| < 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-mR\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi$$

Тепер інтеграл справа можна обчислити. Отримаємо

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz\right| < 2\varepsilon R\left.\frac{e^{-mR\frac{2}{\pi}\varphi}}{-mR\frac{2}{\pi}}\right|_0^{\pi/2} = \left(1 - e^{-mR}\right) < \frac{\pi\varepsilon}{m}.$$

Оскільки ε - достатньо мале число, то інтеграл вздовж контура C_R прямує до нуля при $R \to \infty$, тобто

$$\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz \to 0 \blacktriangleleft$$

Застосовуючи доведену лему, одержимо

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R} f(z)e^{imz}dz+\int_{-R}^{R} f(z)e^{imz}dz\right)=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res\left[\,f(z)e^{imz},\,z=z_k\,\right]$$

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{imz}dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res\left[\,f(z)e^{imz},\,z=z_k\,\right]$$

Оскільки $I_0=I_1+iI_2$, тоді

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos mzdz=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res\left[\,f(z)e^{imz},\,z=z_k\,\right]\right\}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin mzdz=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res\left[\,f(z)e^{imz},\,z=z_k\,\right]\right\}$$

Зауваження 1. *Інтеграл виду* $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)dx$ *є перетворенням Фур'є функції* $R(x)$ *і його можна записати у вигляді*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)dx=2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,z_k>0} res\left[e^{i\alpha z}R(z);z=z_k\right] \qquad (1^*)$$

Зауваження 2. *Якщо* $\alpha<0$, *тоді контур* C_R *поміняємо на контур* $\overline{C_R}$ *який симетричний контуру* C_R *відносно дійсної вісі. Тоді одержимо формулу*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}R(x)dx=-2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\,z_k<0} res\left[e^{i\alpha z}R(z);z=z_k\right] \qquad (2^*)$$

Зауваження 3. *Якщо* $R(x)$ *- дійсна функція дійсної змінної* x *і* $\alpha>0$, *виділяючи дійсну і уявну частини у формулі (2*), одержимо:*

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha xdx=-2\pi\,\mathrm{Im}\left[\sum_{\mathrm{Im}\,z_k<0} res\left[e^{i\alpha z}R(z);z=z_k\right]\right] \quad (3^*)$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha xdx=2\pi\,\mathrm{Re}\left[\sum_{\mathrm{Im}\,z_k<0} res\left[e^{i\alpha z}R(z);z=z_k\right]\right] \quad (4^*)$$

Якщо у правих частинах (3) і (4*) відповідно* $R(x)$ *парна або непарна, тоді вони приймуть наступний вид*

$$\int_{0}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx = \pi i\sigma \qquad (3^{**})$$

$$\int_{0}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx = \pi\sigma \qquad (4^{**})$$

де

$$\sigma = \left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} res\left[e^{i\alpha z}R(z); z = z_k\right]\right]$$

Зауваження 4. *Можна довести, що висновок леми залишається справжнім і в тому випадку якщо під* C_R *вважати верхню дугу кругового сегмента* $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > -a$ *(Рис. 2*) а функцію* $f(z)$ *покладати аналітичною у верхній півплощині* $\operatorname{Im} z > -a$ *для всіх* z, *достатньо великих за модулем. Число* a *може бути як додатним, так і від'ємним, але* $|a| < R$.

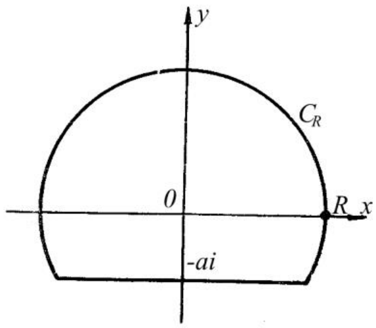


*Рис. 2**

Приклад 1. *Обчислити інтеграл* $I = \int_0^\infty \frac{x^3 \sin 2x}{x^6 + 1} dx$,

► Згідно викладеному раніше, вздовж замкненого контура $L = C_R \bigcup [-R; R]$ *(Рис. 2)* інтегруємо не задану функцію $\frac{x^3 \sin 2x}{x^6 + 1}$, а функцію $\frac{x^3 e^{2xi}}{x^6 + 1}$. Знаходимо її полюси: $z^6 + 1 = 0$; $z^6 = -1$; $z = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{6} i}$; $k = \overline{0,5}$. Полюси $z_1 = e^{\frac{\pi}{6} i}$;

$z_2 = e^{\frac{3\pi}{6}i}$; $z_3 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$ розташовані у верхній півплощині. Отже, згідно основні теоремі теорії лишків:

$$\int_{C_R} \frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1} dz + \int_{-R}^{R} \frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} res\left[\frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1}; z = z_k\right] \quad (14)$$

Знайдемо лишки:

$$res\left[\frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1}; z = z_1\right] = \left.\frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^3 e^{2zi}}{6z^5}\right|_{z=z_1} = \frac{e^{2iz_1}}{6z_1^2};$$

$$res\left[\frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1}; z = z_2\right] = \frac{e^{2iz_2}}{6z_2^2}; \; res\left[\frac{z^3 e^{2zi}}{z^6+1}; z = z_3\right] = \frac{e^{2iz_3}}{6z_3^2}.$$

З іншого боку згідно леми Жордана, з того , що $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^3}{z^6+1} = 0$ заключаємо, що інтеграл вздовж контура C_R у рівності (14) прямує до нуля при $R \to \infty$. Відповідно, переходячи у (14) до границі при $R \to \infty$, знайдемо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{2xi}}{x^6+1} dx = 2\pi i \left[\frac{e^{i2z_1}}{6z_1^2} + \frac{e^{i2z_2}}{6z_2^2} + \frac{e^{i2z_3}}{6z_3^2}\right]$$

Приймаючи до уваги $z_1^3 = i$; $z_2^3 = -i$; $z_3^3 = i$, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{2xi}}{x^6+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos 2x}{x^6+1} dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^6+1} dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[z_1 e^{i2z_1} - z_2 e^{i2z_2} + z_3 e^{i2z_3}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{\sqrt{3}+i}{2} e^{i(\sqrt{3}+i)} + ie^{-2} + \frac{-\sqrt{3}+i}{2} e^{i(-\sqrt{3}+i)}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} i\left[\frac{\sqrt{3}\sin\sqrt{3} + \cos\sqrt{3}}{e} + e^{-2}\right]$$

Застосовуючи властивість рівності комплексних виразів, одержимо:

$$I=\int\limits_0^\infty \frac{x^3\sin 2x}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{6}\left[\frac{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}+\cos\sqrt{3}}{e}+e^{-2}\right].$$ ◄

Приклад 2. *Обчислити інтеграл Діріхле* $I=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

► Цей інтеграл за формою такий самий як

$$\int\limits_0^\infty f(x)\sin mx dx=\pi\sigma$$

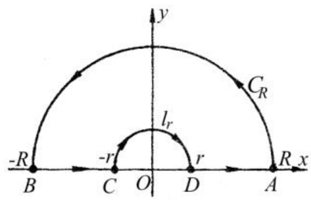


Рис. 3

Проте функція $f(z)=\frac{1}{z}$ має полюс $z=0$ на дійсній вісі, тому вказану формулу застосувати не можна. Але ж функція $f(z)=\frac{1}{z}$ задовольняє всім умовам леми Жордана, з іншого боку, $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, тоді замість даної підінтегральної функції треба взяти таку: $F(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ в області, яка обмежена дугою верхнього півкола з центром у початку координат. Не можна тільки використати діаметр цього кола, який лежить на дійсній вісі, як границю. Точку $z=0$ ізолюємо іншим півколом малого радіуса, концентричного з першим. (*Рис. 3*). Розглянемо інтеграл $\int\limits_L \frac{e^{iz}}{z}dz$, де L є складений замкнений контур $L=C_R\bigcup BC\bigcup l_r^-\bigcup DA$. Функція $F(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ - аналітична всередині вибраного контура, тому за теоремою Коші будемо мати:

$$\int\limits_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{BC}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{l_r^-}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int\limits_{DA}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

або

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{l_r^-} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

l_r^- - півколо яке пробігається у додатному напрямку.
Об'єднуючи другий і третій інтеграли, одержимо

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z} dz + \int_{\overline{l_r}} \frac{e^{iz}}{z} = 0$$

Знайдемо границі цих виразів, коли $R \to \infty$ і $r \to 0$. За лемою Жордана $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$, оскільки $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$. Щоб знайти границю третього інтегралу коли $r \to 0$, зробимо підстановку $z = re^{i\varphi}$. Тоді ми одержимо

$$\lim_{r\to 0} \int_{l_r^-} \frac{e^{iz} dz}{z} = \lim_{r\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)} ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} =$$

$$\lim_{r\to 0} i \int_{\pi}^{0} e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)} d\varphi = -\pi i .$$

Отже, ми маємо

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \pi i$$

Якщо поділити праву та ліву частини останньої рівності на $2i$, отримаємо $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$. ◄

Практичні заняття – 5.2

1. *Обчислити наступні інтеграли*

1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x + p^2},$	$(0 < p < 1)$
2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{1-2p\cos 2x + p^2},$	$(0 < p < 1)$
3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{1-2p\cos x + p^2},$	$(p > 1)$
4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1-2p\sin x + p^2},$	$(0 < p < 1)$
5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x},$	$(a > 1)$
6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{a + b\cos x},$	$(0 < b < a)$
7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x},$	$(0 < a < 1)$
8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2},$ $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x + p^2},$	$(0 < b < a)$ $(0 < p < 1)$
9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{1-2p\cos x + p^2},$	$(0 < p < 1)$
10. $\int\limits_0^{2\pi} \cos(x-a)dx,$	$(\operatorname{Im} a > 0)$

2. *Обчислити невласні інтеграли*

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$	2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$	4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$
5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+1)^2}$	6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2}$
7. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$	8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$
9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$	10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

4. *Обчислити наступні інтеграли*

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$	2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$
3. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$	4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+9}dx$
5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^4}dx$	6. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx, \quad (a>0)$
7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx, \quad (m>0, a>0)$	8. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2+x^4}dx$
9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx, \quad (\lambda>0)$	10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin ax}{1+x^4}dx, \quad (a>0)$
11. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$	12. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{3x^2-a^2}{\left(x^2+b^2\right)^2}\cos mx dx$

§ 5.3. Логарифмічний лишок.Принцип аргументу

Означення 1. ***Вираз*** $\left[Lnf(z)\right]'=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$***, де*** $Lnf(z)$ ***- деяка однозначна гилка логарифму, називається логарифмічною похідною функції*** $f(z)$***, а лишок логарифмічної похідної у точці*** $z=a$ ***називається логарифмічним лишком*** $f(z)$ ***у цій точці.***

Регулярна для функції $f(z)$ точка є регулярною і для $f'(z)$; якщо ця точка не нуль $f(z)$, то вона буде регулярною і для логарифмічної похідної. Це випливає з теореми про частку регулярних функцій. Що стосується нулів $f(z)$, то вони є полюсами для $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Покажемо, що це так.

Нехай $z=a$ - корінь порядку m функції $f(z)$. Це значить, що

$$f(z)=c_m(z-a)^m+c_{m-1}(z-a)^{m-1}+...,$$

$c_m\neq 0$. Тоді

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{mc_m(z-a)^{m-1}+(m+1)c_{m+1}(z-a)^m+...}{c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+...}=$$

$$=\frac{mc_m(z-a)^{m-1}}{c_m(z-a)^m}\frac{1+\dfrac{(m+1)}{m}\dfrac{c_{m+1}}{c_m}(z-a)+...}{1+\dfrac{c_{m+1}}{c_m}(z-a)+...}=\frac{m}{(z-a)}\varphi(z)$$

Зауважимо, що знаменник дробу є регулярною функцією, яка не обертається в нуль у достатньо малому околі точки $z=a$, оскільки чисельник там також регулярна функція, то $\varphi(z)$ є регулярна в указаному околі. Тому функція $\varphi(z)$ може бути розвинена в ряд Тейлора в околі точки $z=a$, і, якщо прийняти до уваги, $\varphi(a)=1$, то цей розклад буде мати вид:

$$\varphi(z) = 1 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots,$$

Отже

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{(z-a)}\varphi(z) = = \frac{m}{z-a}(1 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \ldots)$$

$$= \frac{m}{z-a} + b_1 + b_2(z-a) + b_3(z-a)^2 + \ldots$$

Звідси випливає, що *нуль функції є простим полюсом її логарифмічної похідної з логарифмічним лишком у нулі, який дорівнює порядку цього нуля.*

Якщо прийняти до уваги, що $Lnf(z) = -Ln\frac{1}{f(z)}$ і полюс деякого порядку функції $f(z)$ є нулем того ж порядку функції $\frac{1}{f(z)}$, то звідси випливає, що *полюс функції є простим полюсом її логарифмічної похідної з логарифмічним лишком у ньому, який дорівнює порядку цього полюса з протилежним знаком.*

Теорема 1. ***Якщо функція*** $f(z)$ ***регулярна у замкненій області*** $\overline{D}$***, яка обмежена контуром*** l***, крім скінченного числа точок області*** D***, які є її полюсами, і в області*** D ***має скінченне число нулів, а на контурі їх не має, то***

$$\oint_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(N-P)$$

де N ***- число нулів,*** P ***- число полюсів, які лежать у області*** D***.***

При цьому кожний нуль і кожний полюс рахуються стільки разів, скільки одиниць міститься у показнику їх кратності.

► Нехай $f(z)$ в області D має наступні нулі $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ а n_1, n_2, $n_3, \ldots,$ n_k відповідно їх кратності, а також вона має в області D полюси b, b_2, $b_3, \ldots,$ b_m і відповідні їх кратності $p_1,\ p_2,\ p_3,...,\ p_m$. Тоді функція $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ буде мати в D сингулярні точки лише $a_1, a_2, a_3,..., a_k$, $b, b_2, b_3,..., b_m$ які будуть для неї полюсами, і лишки функції $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ у цих полюсах дорівнюються, відповідно $n_1,\ n_2,\ n_3,...,\ n_k,\ -p_1,\ -p_2,\ -p_3,...,\ -p_m$. Отже на основі тереми про лишки будемо мати

$$\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\ (n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k - p_1 - p_2 - p_3 - ... - p_m) =$$

$$= 2\pi i\left(N - P\right),$$

де $N = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$; $P = p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_m$.

Доведену теорему можна сформулювати наступним чином:

Теорема 2. ***Різниця між числом нулів і полюсів функції*** $f(z)$ ***в середині контура*** l ***дорівнює логарифмічному лишку функції відносно цього контура.***

Наслідки. *Якщо функція* $f(z)$ *регулярна в замкненій області* $\overline{D}$, *яка обмежена контуром* l, *і не обертається у нуль на контурі* l, *то число* N *коренів функції* $f(z)$, *які лежать в області* D *дорівнюється* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

► Дійсно, у цьому випадку $P = 0$, тоді $N = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz$. ◄

5.3.1. Принцип аргументу

Теоремі 1, яка була доведена, можна надати зручне геометричне тлумачення. Нехай $f(z) = \left|f(z)\right|e^{i\Phi}$. Тоді

$$Lnf(z) = \ln\left|f(z)\right| + i(\Phi + 2k\pi)$$

і

$$dLnf(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}dz=d\ln\left|f(z\right|+id\Phi .$$

Тому

$$\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_l d\ln\left|f(z\right|+i\int_l d\Phi=2\pi i\left(N-P\right) \qquad (*)$$

Але функція $f(z)$ на контурі l є неперервною, однозначною і не обертається у нуль. Відповідно, функція $\ln\left|f(z)\right|$ - також неперервна і однозначна. Оскільки функція $\ln\left|f(z)\right|$ - однозначна, то вона повернеться після обходу замкненого контура l до свого попереднього значення. Це означає, що якщо $z=z_0$ була початковою точкою, то

$$\int_l d\ln\left|f(z)\right|=\ln\left|f(z_0)\right|-\ln\left|f(z_0)\right|=0$$

Величина $\Phi=\arg f(z)$ може при обході змінюватись. Це відбудеться у тому випадку, якщо обхід точки z вздовж замкненого контура l буде зводитись до обходу точкою $w=f(z)$ замкненого контуру l_1, який містить у середині точку $w=0$. Якщо зміну аргументу функції $f(z)$ при обході точкою z контуру l позначимо $\Delta_l \arg f(z)$, то

$$\int_l d\Phi=\int_l d\arg f(z)=\Delta_l \arg f(z)$$

Тепер рівність (*) прийме вид

$$\int_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz=i\Delta_l \arg f(z)$$

або

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_l \arg f(z)=N-P$$

Одержана рівність виражає наступну теорему

Теорема 2. (*Принцип аргументу*). *Якщо функція $f(z)$- аналітична в замкненій області $\overline{D}$, яка обмежена контуром l, за виключенням скінченного число полюсів, і не має на межі l області ні нулів , ні плюсів, то зміна аргументу функції $f(z)$ при проходженні контура l у додатному напрямку, поділеному на 2π, дає різницю між числом нулів і полюсів функції $f(z)$, які належать області D.*

Відмітимо ще одну геометричну інтерпретацію одержаного результату. При обході точкою z замкненої кривої l у додатному напрямку кінець вектора $w = f(z)$ описує деяку замкнену криву l'. Позначимо через ν кількість повних обертів навколо початку координат, які вектор w зробить при вказаному обході. Кожний оберт при цьому будемо зараховувати як $+1$, якщо він відбувається у додатному напрямку, і як -1, якщо він відбувається у від'ємному напрямку. Тоді для зміни $Argf(z)$ одержимо величину $2\pi\nu$, звідки випливає наступний принцип аргументу.

Різниця між кількістю нулів і полюсів однозначної функції $f(z)$, що знаходяться усередині замкненої кривої l, дорівнює числу повних обертів ν, які виконує навколо початку координат вектор, який зображає $f(z)$, в той час коли точка z описує контур l у додатному напрямку.

У випадку, коли $f(z)$ не має полюсів всередині l, отримаємо:

Кількість нулів функції $f(z)$, які містяться всередині замкнутої кривої l, дорівнює числу повних обертів навколо початку координат при однократному обході точкою z контура l у додатному напрямку

Теорема Руше. ***Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ - аналітичні у замкненій області $\overline{D}$, яка обмежена контуром L, і на***

контурі задовольняє умові $|\varphi(z)| < |f(z)|$, то функції $f(z)+\varphi(z)$ і $f(z)$ мають однакове число нулів у області D.

► Функція $f(z)+\varphi(z)$ аналітична в області як сума аналітичних функцій і на контурі L не дорівнює нулю, тому що $|f(z)+\varphi(z)| \ge |f(z)|-|\varphi(z)| > 0$. Отже, $f(z)+\varphi(z)$ задовольняє всім умовам принципу аргументу в області D вона не має сингулярних точок, то

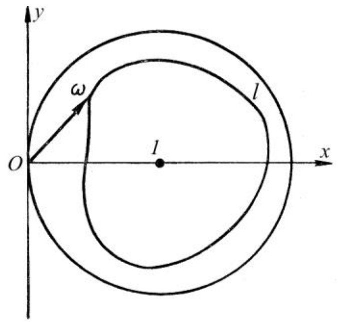


Рис. 4

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_l \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right],$$

де N - число нулів функції $f(z)+\varphi(z)$ у області D.

На контурі L за умовою $f(z) \ne 0$, тоді можна записати:

$$\Delta_L \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right] = \Delta_L \arg\left\{f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]\right\} =$$

$$= \Delta_L \arg f(z) + \Delta_L \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right].$$

Якщо точка z пробігає замкнений контур L, тоді точка $\omega = 1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ також описує деяку замкнену криву l (*Рис. 4*). Але ця крива не обходить точку $\omega = 0$, оскільки $\left|\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$ на L і на лінії l, яка описується точкою ω, знаходиться в середині круга радіуса 1 з центром у точці $\omega = 1$, оскільки $|\omega - 1| = \left|\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$. У такому випадку $\arg\left[1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$ не одержить приросту, тобто $\arg\left[1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right]=0$, і ми прийдемо до рівності

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg\left[f(z)+\varphi(z)\right]=\frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg f(z).\blacktriangleleft$$

Основна теорема алгебри. *Всякий многочлен степеня n має n коренів.*

При цьому кожний корінь рахується стільки разів, скільки одиниць міститься у показнику його кратності.

► Нехай ми маємо многочлен

$$F(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+a_3z^{n-3}+....+a_n$$

Позначимо $f(z)=a_0z^n$ і $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+....+a_n$. отже

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)}=\frac{a_1}{a_0z}+\frac{a_2}{a_0z^2}+...+\frac{a_n}{a_0z^n}$$

Тоді при достатньо великих $|z|$ буде виконуватись нерівність

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1 \qquad \text{або} \qquad |\varphi(z)|<|f(z)|$$

Отже, якщо взяти коло достатньо великого радіуса з центром у початку координат, то регулярні в середині такого круга функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ будуть на його границі задовольняти умові

$$0<|\varphi(z)|<|f(z)|$$

Отже, многочлен $F(z)=f(z)+\varphi(z)$ буде мати у такому кругу стільки ж коренів , скільки і функція $f(z)=a_0z^n$. Ця функція має n коренів. Так як $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=\infty$, то $|F(z)|>K>0$ для всяких достатньо великих $|z|$. Тому можна вважати, що всі корені многочлена знаходяться у побудованому крузі, тобто многочлен має рівно n коренів. ◄

Приклад 1. *Знайти лишки логарифмічної похідної функції* $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+1}$ *відносно її нулів і полюсів*

► Дана функція має нескінченну множину простих нулів $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ і один простий полюс $z = -1$. Звідси

$$res\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z = k\pi\right] = 1 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$res\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z = -1\right] = -1. \ ◄$$

Приклад 2. *Знайти логарифмічний лишок функції* $f(z) = \dfrac{\cosh z}{e^z - 1}$ *відносно контура* $C : |z| = 8$.

► Знаходимо нулі z_k функції $f(z)$. Для чого розв'яжемо рівняння $\cosh z = 0$ або $\dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = 0$. Запишемо останнє рівняння у вигляді $e^{2z} = -1$ і знайдемо, що $2z = Ln(-1) = (2k+1)\pi i$, отже $z_k = \dfrac{2k+1}{2}\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (всі нулі прості). Для знаходження полюсів функції $f(z)$ розв'яжемо рівняння $e^z - 1 = 0$ або $e^z = 1$. Одержимо $iz = Ln 1 = 2m\pi i$, $z_m = 2m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

У кругу $|z| = 8$ знаходяться наступні нулі

$$z_k = \frac{2k+1}{2}\pi i \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, -3$$

і прості полюси

$$z_m = 2m\pi \qquad m = 0, \pm 1$$

функції $f(z)$. Число нулів $N = 6$, число полюсів $P = 3$. Відповідно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=8} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 6 - 3 = 3. \ ◄$$

Приклад 3. *Знайти логарифмічний лишок функції* $f(z) = \dfrac{1+z^2}{(1-\cos 2\pi z)^2}$ *відносно кола* $|z| = \pi$.

► Покладаючи $1+z^2=0$ знаходимо двоє простих нулів функції $f(z)$, тобто, $a_1=-i, a_2=i$. Покладаючи $1-\cos 2\pi z=0$ знайдемо полюси $f(z)$: $z_n=n$, $n=1,\pm 2,\pm 3,\ldots$. Кратність полюсів $m=2$.

У крузі $|z|<\pi$ дана функція має два простих нуля $a_1=-i, a_2=i$ і сім двократних полюсів $z_1=-3$, $z_2=-2$, $z_3=-1$, $z_4=0$, $z_5=1$, $z_6=2$, $z_7=3$.

Отже, $N=2$ і $P=2\cdot 7=14$. В силу тереми про логарифмічні лишки одержуємо, що логарифмічний лишок даної функції $f(z)$ відносно кола $|z|=\pi$ буде дорівнювати

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2-14=-12. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Скільки коренів має рівняння* $z^{10}-5z^5+2z+1=0$ *в середині круга* $|z|<1$?

► Позначимо $f(z)=z^{10}-5z^5$ і $\varphi(z)=2z+1$. На контурі $|z|=1$ даного круга $|\varphi(z)|=|2z+1|\le|2z|+1=3$;

$$|f(z)|==|z^{10}-5z^5|=|z|^5|z^5-5|\ge 5-|z|^5=5-1=4.$$

Отже, на контурі області $|f(z)|>|\varphi(z)|$, і в області $|z|<1$ функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ регулярні. Тому, за теоремою Руше дане рівняння має у кругу $|z|<1$ стільки ж коренів, скільки і рівняння $z^{10}-5z^5=0$ або $z^5(z^5-5)=0$, тобто, п’ять коренів. ◄

Приклад 5. *Знайти число коренів рівняння* $P(z)=z^7-2z-5=0$ *у правій півплощині.*

► Виберемо контур C який складається з півкола $l_R:|z|=R,\ \ \operatorname{Re} z>0$, і діаметра на уявній вісі; радіус R

вважаємо настільки великим, що всі нулі многочлена $P(z)$, які знаходяться у правій півплощині, попадають всередину півкруга $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$. Тоді

$$P(z) = z^7\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)$$

Звідси

$$\arg P(z) = \arg z^7 + \arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) = 7\arg z + \arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)$$

Повна варіація аргументу $P(z)$ при обході у додатному напрямку півкола l_R буде дорівнювати

$$\Delta_{l_R} ArgP(z) = 7\Delta_{l_R} Argz + \Delta_{l_R} Arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)$$

Знайдемо границю цієї рівності при $R \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty}\Delta_{l_R} ArgP(z) = 7\lim_{z\to\infty}\Delta_{l_R} Argz + \Delta_{l_R}\lim_{z\to\infty} Arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right)$$

Обидва кореня у правій частині рівності існують і вони дорівнюються відповідно

$$\lim_{z\to\infty}\Delta_{l_R} Argz = \pi, \qquad \lim_{z\to\infty} Arg\left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7}\right) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{z\to\infty}\Delta_{l_R} ArgP(z) = 7\pi$$

Нехай тепер точка z рухається вздовж уявної вісі від $z = iR$ до $z = -iR$. Покладаємо $z = it$, $-R \le t \le R$. Тоді

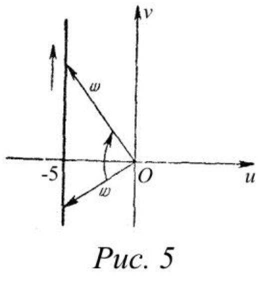


Рис. 5

$$P(it) = u(t) + iv(t) = -5 + i(-t^7 - 2t)$$

звідси

$$\begin{cases} u = -5, \\ v = -t(t^6 + 2) \end{cases}$$

Оскільки $u \neq 0$, тоді застосування принципу аргументу законне ($P(z)$ на уявній вісі не має нулів). Ця лінія - пряма

(*Рис. 5*). Вектор $\omega = P(z)$ робить поворот у від'ємному напрямку на π радіан. Отже,

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_C ArgP(z) = 7\pi - \pi = 6\pi$$

і

$$N = \frac{6\pi}{2\pi} = 3.$$

Тобто дане рівняння має три корені у правій півплощині. ◄

Приклад 6. *Знайти число коренів рівняння*

$$z^2 - ae^z = 0, \qquad \text{\textit{де}}\ 0 < a < e^{-1},$$

в одиничному крузі $|z| < 1$.

► Покладаємо $f(z) = z^2$ і $\varphi(z) = -ae^z$. На контурі кола $|z| = 1$ маємо

$$|f(z)| = |z|^2 = 1,$$

$$|\varphi(z)| = |-ae^z| = a|e^z| = a|e^{x+iy}| = ae^x \le a \cdot e < 1$$

в силу умов $-1 \le x \le 1$ і $0 < a < e^{-1}$.

Отже $|f(z)| > |\varphi(z)|$, якщо $|z| = 1$. Функція $f(z) = z^2$ у крузі $|z| < 1$ має двократний корінь у початку координат. Тому, за теоремою Руше дане рівняння у крузі $|z| < 1$ має два кореня. ◄

Зауваження. Розглянемо дійсну функцію $F(x) = x^2 - ae^x$. Ця функція на відрізку $-1 \le x \le 1$ є неперервною. Крім того,

$F(-1) = 1 - ae^{-1} > 0$, оскільки $0 < ae^{-1} < e^{-2} < 1$,

$F(0) = -a < 0$,

$f(1) = 1 - ae > 0$, оскільки $a < e^{-1}$.

Таким чином, на кінцях відрізків $-1 \le x \le 0$, $0 \le x \le 1$ функція $F(x)$ приймає значення різних знаків. Звідси випливає, що дане рівняння у крузі $|z| < 1$ має два дійсних кореня різних знаків.

Приклад 7. *Знайти число коренів рівняння*

$$\lambda - z - e^{-z} = 0, \qquad \lambda > 1,$$

в правій півплощині $\operatorname{Re} z > 0$.

► Розглянемо контур, який складається з відрізка $[-iR;iR]$ і правого півкола $|z| = R$. Покладемо $f(z) = \lambda - z$ і $\varphi(z) = e^{-z}$. На відрізку $[-iR;iR]$, де $z = iy$, маємо

$$|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{y^2 + \lambda^2} \ge \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-iy}| = 1$$

і відповідно, $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

На півколі $|z| = R$, де $\operatorname{Re} z = x$ при достатньо великому R ($R > \lambda + 1$). маємо $|f(z)| > |\varphi(z)|$, оскільки

$$|f(z)| = |\lambda - z| \ge |z| - \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-x+iy}| = e^x |e^{iy}| = e^{-x} \le 1 \ (x > 0).$$

За теоремою Руше всередині вказаного контура скільки завгодно великого радіуса R дане рівняння має стільки ж коренів, скільки їх має рівняння $f(z) = \lambda - z = 0$, тобто один корінь. Отже, і в усій правій півплощині дане рівняння має єдиний корінь. ◄

Практичні заняття – 5.3

1. *Знайти лишки логарифмічної похідної наступних функцій*

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$	2. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$
3. $f(z) = \cos^2 z$	4. $f(z) = \sin z$

2. *Знайти логарифмічні лишки даних функцій відносно вказаних контурів*

1. $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, $C: \lvert z\rvert = 2$	2. $f(z) = \cos z + \sin z$, $C: \lvert z\rvert = 2$

3. $f(z)=(e^z-2)^2$, $C:\lvert z\rvert=2$	4. $f(z)=\tanh z$, $C:\lvert z\rvert=2$
5. $f(z)=\tan^3 z$, $C:\lvert z\rvert=2$	6. $f(z)=1-\tanh^2 z$, $C:\lvert z\rvert=2$

3. *Для наступних рівнянь визначити число коренів у правій півплощині*

1. $z^4+2z^3+3z^2+z+2=0$	2. $z^3-2z-5=0$
3. $z^3-4z^2+5=0$	4. $2z^3-z^2-7z+5=0$
5. $z^5+5z^4-5=0$	6. $z^{12}-z+1=0$

4. *Користуючись теоремою Руше , знайти число коренів в указаних областях*

1. $z^4-3z^3-1=0$, $\lvert z\rvert<2$	2. $z^3+z+1=0$, $\lvert z\rvert<1/2$
3. $z^5+z^2+1=0$, $\lvert z\rvert<2$	4. $z^8+6z+10=0$, $\lvert z\rvert<1$
5. $27z^{11}-18z+10=0$, $\lvert z\rvert<1$	6. $z^8-6z^6-z^3+2=0$, $\lvert z\rvert<2$
7. $z^4-5z+1=0$, $1<\lvert z\rvert<2$	8. $4z^4 29z^3+25=0$, $2<\lvert z\rvert<3$
9. $z^7-5z^4+z^2-2=0$, $1<\lvert z\rvert<2$	10. $z^6-8z+10=0$, $1<\lvert z\rvert<3$

5. *У наступних задачах визначити число коренів даних рівнянь в указаних областях*

1. $e^{z-\lambda}=z$, $(\lambda>1)$, $\lvert z\rvert<1$	2. $z^2-\cos z=0$, $\lvert z\rvert<2$.
3. $z^4-\sin z=0$, $\lvert z\rvert<\pi$	4. $z^2-\cosh iz=0$, $\lvert z\rvert<0.5$
5. $\cosh z=z^2-4z$, $\lvert z\rvert<1$	6. $2^z=4z$, $\lvert z\rvert<1$
7. $e^z=az^n$, де $n\in N$, $a>\dfrac{e^R}{R^n}$, $\lvert z\rvert<R$	

Індивідуальні домашні завдання – 3

Обчислити інтеграли

I

1.1 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$	1.2 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1-i\rvert=5/4}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$
1.3 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-i\rvert=3/2}\frac{dz}{z(z^2+4)}$	1.4 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$
1.5 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-3\rvert=1/2}\frac{e^z dz}{\sin z}$	1.6 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2}\frac{z(\sin z+2)dz}{\sin z}$
1.7 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\frac{ze^z dz}{\sin z}$	1.8 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2}\frac{2z(z-1)dz}{\sin z}$
1.9 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1/4\rvert=1/3}\frac{z(z+1)^2 dz}{\sin 2\pi z}$	1.10 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1/2\rvert=1}\frac{iz(z-i)dz}{\sin \pi z}$
1.11 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-3\rvert=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$	1.12 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1/2\rvert=1}\frac{e^z+1}{z(z-1)}dz$
1.13 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{e^z+2}{\sin 3\pi z}dz$	1.14 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-2\rvert=3}\frac{\cos^2 z+3}{z^2+\pi^2}dz$
1.15 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1\rvert=1/2}\frac{\ln(z+2)}{\sin z}dz$	1.16 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-6\rvert=1}\frac{\sin^2 z+2}{z^2-4\pi^2}dz$
1.17 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+1\rvert=1/2}\frac{\tan z+2}{4z^2+z\pi}dz$	1.18 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+3/2\rvert=1}\frac{\cos^2 z+3}{z^2-\pi^2}dz$
1.19 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+1\rvert=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$	1.20 $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1/4}\frac{\ln(e+z)dz}{z\sin(z+\pi/4)}$

1.21 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=\pi/2} \frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}dz$	1.22 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1} \frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz$
1.23 $\displaystyle\int\limits_{\|z-1\|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz$	1.24 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2} \frac{z^2+\sin z+2}{z^2+z\pi}dz$
1.25 $\displaystyle\int\limits_{\|z-3\|=1/2} \frac{z(z+\pi)}{\sin z(z-\pi)}dz$	1.26 $\displaystyle\int\limits_{\|z-3/2\|=2} \frac{\sin z dz}{z(z-\pi)(z+\pi/3)}$
1.27 $\displaystyle\int\limits_{\|z-\pi\|=2} \frac{(z^2+\pi^2)^2}{i\sin z}dz$	1.28 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1/2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$
1.29 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1/2} \frac{\cos^2 z dz}{z\sin z}$	1.30 $\displaystyle\int\limits_{\|z-3/2\|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{(z-\pi)\sin(z/2)}dz$

2

2.1 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^2}dz$	2.2 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$
2.3 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}dz$	2.4 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz$
2.5 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz$	2.6 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz$
2.7 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1} \frac{5-2z^3+3z^4}{z^4}dz$	2.8 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=3} \frac{1-\sin(1/z)}{z}dz$
2.9 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3}dz$	2.10 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1/2} \frac{3-2z+z^4}{z^3}dz$
2.11 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz$	2.12 $\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1} \frac{1-3z^2+z^3}{2z^4}dz$

2.13 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{1-3z^3+4z^5}{z^6}\,dz$	2.14 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}\,dz$
2.15 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos iz-1}{z^3}\,dz$	2.16 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{z^2e^{1/z}-1}{z}\,dz$
2.17 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}\,dz$	2.18 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=3} \frac{z^2+\cos z}{z^3}\,dz$
2.19 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{5z-3z^3+z^5}{z^4}\,dz$	2.20 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=2} \frac{z-\sin z}{z^4}\,dz$
2.21 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos z^2-1}{z^4}\,dz$	2.22 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}\,dz$
2.23 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3}\,dz$	2.24 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=2} z^2\sin\frac{i}{z^2}\,dz$
2.25 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}\,dz$	2.26 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}\,dz$
2.27 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}\,dz$	2.28 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=2} z^3\cos\frac{2i}{z}\,dz$
2.29 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{e^z-\sin z}{z^2}\,dz$	2.30 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}\,dz$

3

3.1 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=0.2} \frac{3\pi zd-\sin 3\pi z}{z^2-\sinh^2\pi^2 z}\,dz$	3.2 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos 3z-1+9z^2/2}{z^2(z-1)}\,dz$
3.3 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=0.5} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\sinh^2 4iz}\,dz$	3.4 $\displaystyle\oint_{\lvert z\rvert=2} \frac{\cosh 3z-1-9z^2/2}{z^4\sin(9z/8)}\,dz$

3.5 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{\sinh 2\pi z-2\pi z}{z^2\sin^2\left(\pi^2 z/3\right)}dz$	3.6 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.4} \frac{e^{4z}-\cos 7z}{z\sinh 2\pi z}dz$
3.7 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.2} \frac{e^{8z}\cosh 4z}{z\sin 4\pi z}dz$	3.8 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.2} \frac{e^{iz}-1-\sin 4z}{z^3\sinh 16\pi z}dz$
3.9 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=1} \frac{\sinh 3z-\sin 3z}{z^3\sinh 2z}dz$	3.10 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.05} \frac{\cosh z-\cos 3z}{z^2\sin 5\pi z}dz$
3.11 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2\sin^2 2z}dz$	3.12 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=2} \frac{\cos 4z-1+8z^2}{z^4\sinh\left(4z/3\right)}dz$
3.13 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=6} \frac{\sin\pi z-\pi z}{z^2\sin^2\left(\pi z/6\right)}dz$	3.14 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cosh z-8z^2-1}{z^4\sin\left(8z/3\right)}dz$
3.15 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^{2z}-\cosh 5z}{z\sin i2z}dz$	3.16 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.5} \frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\sinh 4z}dz$
3.17 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.9} \frac{e^{3z}-1-3z}{\sinh^2\pi z}dz$	3.18 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.5} \frac{\cosh 3z-\cos 4iz}{z^2\sin 5z}dz$
3.19 $\displaystyle\int_{\lvert z+1\rvert=2} \frac{\sinh 3z-3}{z^3\sinh iz}dz$	3.20 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.5} \frac{e^{5z}-1-\sin 5z}{z^2\sinh 5z}dz$
3.21 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=2} \frac{\sin 3z-3z}{z^2\sinh^2 iz}dz$	3.22 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=2} \frac{\cos 2z-1+2z^2}{z^2-\sinh^2\pi^2 z}dz$
3.23 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=5} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2\sin^2\left(z/3\right)}dz$	3.24 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=2} \frac{\cos 2z-1-2z^2}{z^4\sinh\left(\pi z/3\right)}dz$
3.25 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.6} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\sinh^2 2\pi z}dz$	3.26 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\sinh 8iz}dz$
3.27 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.5} \frac{e^{5z}-\cosh 6z}{z\sin\pi z}dz$	3.28 $\displaystyle\int_{\lvert z\rvert=0.2} \frac{\cosh 2z-\cos 2z}{z^2\sinh 8z}dz$

3.29 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0.2} \dfrac{\sinh iz-\sin iz}{z^3\sinh\left(z/3\right)}dz$	3.30 $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0.2} \dfrac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2\sinh 3\pi z}dz$

4

4.1	$\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=1}\left(\dfrac{4\sin\left(\pi z/(4-2i)\right)}{(z-2+i)^2(z-4+i)}+\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$
4.2	$\oint\limits_{\lvert z+6\rvert=2}\left(\dfrac{2\cos\left(\pi z/5\right)}{(z+5)^2(z+3)}+z\cdot e^{1/(z+6)}\right)dz$
4.3	$\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3}\left(\dfrac{4\sin\left(\pi iz/(4+2i)\right)}{(z-2-i)^2(z-4-i)}+\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz$
4.4	$\oint\limits_{\lvert z+i\rvert=3}\left(z\cosh\left(1/(z+2)\right)-\dfrac{2\sin\left(\pi z/2\right)}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz$
4.5	$\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=2}\left(\dfrac{2\cos\left(\pi z/(2+2i)\right)}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$
4.6	$\oint\limits_{\lvert z+3\rvert=2}\left(z\sinh\left(i/(z+3)\right)+\dfrac{4\sinh\left(\pi iz/4\right)}{(z+2)^2z}\right)dz$
4.7	$\oint\limits_{\lvert z+5i\rvert=2}\left(\dfrac{8\cosh\left(\pi iz/(1-5i)\right)}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}+\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$
4.8	$\oint\limits_{\lvert z+4\rvert=2}\left(z\cos\left(1/(z+4)\right)+\dfrac{4\sin\left(\pi z/6\right)}{(z+3)^2(z+i)}\right)dz$
4.9	$\oint\limits_{\lvert z-7i\rvert=2}\left(\dfrac{2\sin\left(\pi iz/(2+14i)\right)}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$
4.10	$\oint\limits_{\lvert z+5\rvert=2}\left(z\sin\left(1/(z+5)\right)+\dfrac{2\cosh\left(\pi iz/4\right)}{(z+4)^2(z+2i)}\right)dz$

4.11	$\displaystyle\oint_{\lvert z-3i\rvert=2}\left(\frac{2\cos\left(\pi z/(1+3i)\right)}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$
4.12	$\displaystyle\oint_{\lvert z-1\rvert=2}\left(\frac{2\cos\left(\pi z/2\right)}{(z-2)^2(z-4)}+z\cdot e^{2/(z-1)}\right)dz$
4.13	$\displaystyle\oint_{\lvert z+i\rvert=2}\left(\frac{2\sin\left(\pi z/(2-2i)\right)}{(z-1+i)^2(z-3+i)}+\frac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz$
4.14	$\displaystyle\oint_{\lvert z-2\rvert=2}\left(z\cosh\left(3/(3-2)\right)+\frac{2\cos\left(\pi z/3)\right)}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz$
4.15	$\displaystyle\oint_{\lvert z+7i\rvert=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\frac{8\cosh\left(\pi iz/(1-7i)\right)}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz$
4.16	$\displaystyle\oint_{\lvert z-3\rvert=2}\left(z\sinh\left(1/(z-3)\right)-\frac{2\sin\left(\pi z/8\right)}{(z-4)^2(z-6)}\right)dz$
4.17	$\displaystyle\oint_{\lvert z+3i\rvert=2}\left(\frac{4\sinh\left(\pi iz/(2-6i)\right)}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz$
4.18	$\displaystyle\oint_{\lvert z-4\rvert=2}\left(z\cos\left(1/(z-4)\right)+\frac{10\cosh\left(\pi iz/5\right)}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz$
4.19	$\displaystyle\oint_{\lvert z-5i\rvert=2}\left(\frac{2\cos\left(\pi z/(1+5i)\right)}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz$
4.20	$\displaystyle\oint_{\lvert z-5\rvert=2}\left(z\sin\left(i/(z-5)\right)+\frac{2\sinh\left(\pi iz/12\right)}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz$
4.21	$\displaystyle\oint_{\lvert z-i\rvert=2}\left(\frac{4\sin\left(\pi z/(2+2i)\right)}{(z-1-i)^2(z-3-i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz$
4.22	$\displaystyle\oint_{\lvert z-6\rvert=2}\left(z\cdot e^{1/(z-6)}-\frac{2\cosh\left(\pi iz/5\right)}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz$

4.23	$\displaystyle\oint_{\|z-6i\|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}-\frac{2\cosh\left(\pi iz/(1+6i)\right)}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz$
4.24	$\displaystyle\oint_{\|z-5\|=2}\left(z\cosh\left(2/(z-5)\right)+\frac{4\cos\left(\pi z/4\right)}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz$
4.25	$\displaystyle\oint_{\|z+6i\|=2}\left(\frac{2\sinh\left(\pi iz/(2-12i)\right)}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$
4.26	$\displaystyle\oint_{\|z-4\|=2}\left(z\sinh\left(1/(z-4)\right)+\frac{2\sin\left(\pi z/6\right)}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz$
4.27	$\displaystyle\oint_{\|z+2i\|=2}\left(\frac{4\cos\left(\pi z/(1-2i)\right)}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$
4.28	$\displaystyle\oint_{\|z-3\|=2}\left(z\cos\left(1/(z-3)\right)+\frac{4\cosh\left(\pi iz/2\right)}{z(z-2)^2}\right)dz$
4.29	$\displaystyle\oint_{\|z-2i\|=2}\left(\frac{2\sin\left(\pi z/(2+4i)\right)}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}-\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$
4.30	$\displaystyle\oint_{\|z+2i\|=3}\left(\frac{6\cosh\left(\pi iz/(2-2i)\right)}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz$
4.31	$\displaystyle\oint_{\|z-2\|=2}\left(z\sin\left(1/(z-2)\right)-\frac{2\sinh\left(\pi iz/2\right)}{(z+1)(z-1)^2}\right)dz$

Індивідуальні домашні завдання – 4

Обчислити визначені інтеграли

1

1.1 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$

1.2 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}$

1.3 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$

1.4 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}$

1.5 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$

1.6 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-4\sin t}$

1.7 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$

1.8 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}$

1.9 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$

1.10 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$

1.11 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$

1.12 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$

1.13 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$

1.14 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$

1.15 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$

1.16 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$

1.17 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}$

1.18 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$

1.19 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}$

1.20 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}$

1.21 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$

1.22 $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{4\sin t+5}$

1.23 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\sin t}$

1.24 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{8+3\sqrt{7}\sin t}$

1.25 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{9+4\sqrt{5}\sin t}$

1.26 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sqrt{7}\sin t}$

1.27 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sqrt{5}\sin t}$

1.28 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sqrt{2}\sin t}$

1.29 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+2\sqrt{3}\sin t}$

1.30 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+\sqrt{21}\sin t}$

2

2.1 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{10/11}\cos t\right)^2}$

2.2 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\cos t\right)^2}$

2.3 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{6/7}\sin t\right)^2}$

2.4 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t\right)^2}$

2.5 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2}$

2.6. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(4+\cos t\right)^2}$

2.7 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(4+3\cos t\right)^2}$

2.8 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(4+\sqrt{7}\cos t\right)^2}$

2.9 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$

2.10 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+2\cos t\right)^2}$

2.11 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$

2.12 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+2\sqrt{2}\cos t\right)^2}$

2.13 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t\right)^2}$

2.14. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{6}+\cos t\right)^2}$

2.15 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$

2.16 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$

2.17 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{2}+\cos t\right)^2}$

2.18 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+2\cos t\right)^2}$

2.19 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+\cos t\right)^2}$

2.20 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$

2.21 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{3}+\cos t\right)^2}$

2.22 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$

2.23 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2}$

2.24 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\cos t\right)^2}$

2.25 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{10}+3\cos t\right)^2}$

2.26 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$

2.27 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$

2.28 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\cos t\right)^2}$

2.29 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$

2.30 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+2\cos t\right)^2}$

Обчислити невласні інтеграли
3

3.1 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$

3.2 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2}\,dx$

3.3 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

3.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$

3.5 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$

3.6 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$

3.7 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$

3.8 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

3.9 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2}$

3.10 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$

3.11 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$

3.12 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

3.13 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

3.14 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx$

3.15 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$

3.16 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx$

3.17 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

3.18 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2} dx$

3.19 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$

3.20 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$

3.21 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$

3.22 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$

3.23 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$

3.24 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2} dx$

3.25 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx$

3.26 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

3.27 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$

3.28 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12} dx$

3.29 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$

3.30 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx$

4

4.1 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2+4)^2} dx$

4.2 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2} dx$

4.3 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$

4.4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$

4.5 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6} dx$

4.6 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-2)\cos \frac{x}{2}}{(x^2+1)^2} dx$

4.7 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2} dx$

4.8 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$

4.9 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20} dx$

4.10 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+17} dx$

4.11 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2} dx$

4.12 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$

4.13 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$

4.14 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2} dx$

4.15 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx$

4.16 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+1/4\right)^2} dx$

4.17 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

4.18 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)} dx$

4.19 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx$

4.20 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^{42}-2x^2+10} dx$

4.21 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2+4} dx$

4.22 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$

4.23 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$

4.24 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9} dx$

4.25 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ 4.26 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

4.27 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)\sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$ 4.28 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$

4.29 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$ 4.30 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$

Частина VI. Простіші конформні відображення

§ 6.1 Означення конформного відображення

При вивченні геометричного змісту модуля й аргументу похідної функції у **частині 2** ввели поняття конформного відображення. Було показано, що якщо функція $f(z)$ є однозначною й аналітичною в околі деякої точки z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, тоді відображення, яке відбувається даною функцією, в точці z_0 має властивості збереження кутів і сталості розтягу. Тобто, кути між всякими гладкими кривими, які перетинаються в точці z_0, дорівнюють за абсолютною величиною і за напрямком куту між їх образами на площині w в точці $w_0 = f(z_0)$, а нескінченно малі лінійні елементи, які виходять з точки z_0 перетворюються подібним чином. Це означає, що при відображенні, яке розглядається, деякий нескінченно малий трикутник з вершиною в точці z_0 перетворюється у подібний йому нескінченно малий трикутник із вершиною в точці w_0. Відмітимо, що в силу загальних властивостей аналітичних функцій в околі точки w_0 визначена аналітична функція $z = \varphi(w)$. Тим самим між околами точок z_0 і w_0 встановлено взаємно-однозначну відповідність. Введемо наступне фундаментальне означення.

Означення. ***Взаємно-однозначне відображення області*** D ***комплексної змінної*** z ***на область*** G ***комплексної площини*** w ***називається конформним, якщо це відображення в усіх точках*** $z \in D$ ***має властивості збереження кутів і сталості розтягування***

З'ясуємо, які властивості повинна мати функція комплексної змінної для того, щоб відображення, яке відбувається за допомогою цієї функції, було конформним.

Теорема 1. ***Нехай*** $f(z)$ ***є однозначною і однолистою аналітичною функцією в області*** D ***і*** $f'(z) \neq 0$ ***при*** $z \in D$**.**

Тоді функція $f(z)$ ***здійснює конформне відображення області*** D ***в область*** G ***комплексної площини*** w***, яка зображає собою область значень функції*** $w = f(z)$ ***при*** $z \in D$***.***

► Дійсно, приймаючи до уваги $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$, відображення, яке здійснюється функцією $f(z)$, в усіх точках області D має властивості збереження кутів і сталості розтягу, що і доводить терему. ◄

Отже, умови аналітичності, однолистості та відмінність від нуля похідної функції комплексної змінної є достатні умови, щоб відображення було конформним, яке виконується цією функцією. Щоб показати, що ці умови є необхідними, доведемо наступну терему.

Теорема 2. ***Нехай функція*** $f(z)$ ***виконує конформне відображення області*** D ***комплексної площини*** z ***на область*** G ***комплексної площини*** w ***і обмежена в*** G***. Тоді функція*** $f(z)$ ***є однолистою й аналітичною в області*** D***, причому*** $f'(z) \neq 0$ ***при*** $z \in D$***.***

► Оскільки відображення, що здійснюється функцією $f(z)$, є конформним, то воно є взаємно-однозначним, і у всякій точці $z_0 \in D$ виконуються умови збереження кутів і постійності розтягування. Отже, для всяких точок z_1 і z_2, які належать околу точки z_0, з точністю до нескінченно малих величин виконуються співвідношення

$$\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1 \qquad (1)$$

і

$$\frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = \frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = k \neq 0 \qquad (2)$$

де $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ і $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ - нескінченно малі лінійні елементи, що виходять з точки z_0, а Δw_2 і Δw_1 - їх образи (*Рис. 1**)

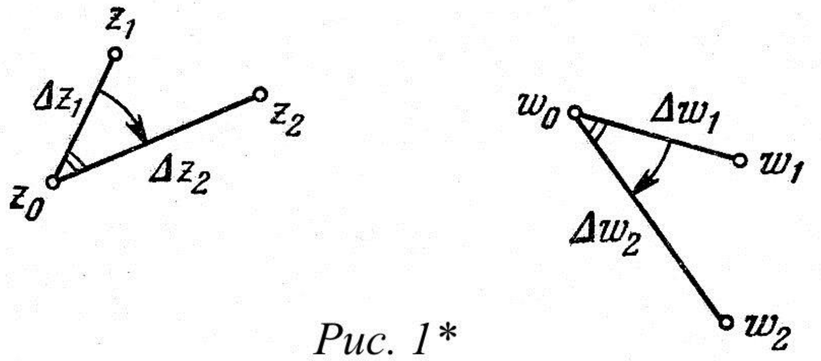


*Рис. 1**

Зауважимо, що в силу (1) відповідні кути в точках z_0 і w_0 рівні не тільки за абсолютною величиною, але і за направленням. Позначимо $\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}$ через α, із (1) покажемо, що і $\arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=\alpha$. Дійсно,

$$\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}=\arg\Delta w_2-\arg\Delta z_2=\arg\Delta w_1-\arg\Delta z_1=\arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=\alpha \quad (3)$$

За формулами (2) і (3) випливає, що з точністю до нескінченно малих величин має місце співвідношення

$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}=\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=ke^{i\alpha} \quad (4)$$

Оскільки точки z_1 і z_2 вибрані довільно в околі точки z_0 співвідношення (4) означає, що існує границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z\to 0$. Ця границя за означенням є похідною функції $f(z)$ в точці z_0. Оскільки $k\neq 0$, то ця похідна відмінна від нуля:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0)\neq 0 \quad (5)$$

Точка z_0 - довільна точка області D, тому із (5) випливає, що функція $f(z)$ є аналітичною в області D і $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$. Функція $f(z)$ однолиста, бо відображення взаємно однозначне. Теорема доведена. ◄

Отже, *конформне відображення області* D *комплексної площини* z *на область* G *комплексної площини* w *відбувається тільки однолистими аналітичними функціями комплексної змінної з похідною, яка відмінна в усіх точках області* G.

Відмітимо, що умова $f'(z) \neq 0$ всюди в області D є необхідною, але не достатньою умовою конформності відображення області D в область G, яке відбувається функцією $f(z)$. Очевидно, що якщо функція $f(z)$ є аналітичною у області D і $f'(z) \neq 0$ всюди в D, але функція не є однолистою у D, тоді відображення яке відбувається цією функцією, не буде взаємно однозначним, а тим самим не буде конформним

Наприклад функція $w = z^4$ задана у півкільці $1 \leq |z| \leq 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$. Ця функція аналітична у даній області, і $w' = 4z^3 \neq 0$ всюди у даному півкільці. Однак, ця функція відображає дане півкільце в область $1 \leq |w| \leq 16$, $0 \leq \arg w \leq 4\pi$, тобто область, двічі покриваюча відповідне кільце на площині w, що порушує взаємно однозначну відповідність.

Отже, *однолистость однозначної аналітичної функції в області* D *є важливою умовою конформного відображення*

У деяких випадках доводиться розглядати відображення околу точки z_0 в окіл точки $w = \infty$ (або навпаки). При цьому будемо називати дане відображення конформним, якщо окіл точки z_0 конформно відображується на окіл точки $\zeta = 0$, де

$\zeta=\dfrac{1}{w}$. Аналогічно визначається конформне відображення окіла точки $z=\infty$ на окіл точки $w=\infty$.

§ 6.2. Лінійне відображення

Означення 1. ***Відображення*** $w=f(z)=az+b$, ***(*** $a\neq 0$ ***і*** b ***- довільні комплексні числа) виконує конформне відображення повної комплексної площини*** z ***на повну площину*** w.

Дійсно, ця функція однолиста та її похідна $f'(z)=a$ відмінна від нуля у всіх точках площини z. Щоб переконатися в тому, що при лінійному відображенні окіл точки $z=\infty$ конформно відображається в окіл точки $w=\infty$, покладемо $t=\dfrac{1}{z}$ і $\zeta=\dfrac{1}{w}$. Функція $w=az+b$ перейде у функцію $\zeta=\dfrac{t}{a+bt}$, яка конформно відображує окіл точки $t=0$ в окіл точки $\zeta=0$ (точка $t=0$ є правильною точкою цієї функції, і $\zeta'\big|_{t=0}=\dfrac{1}{a}\neq 0$).

Наведемо окремі випадки лінійного відображень

6.2.1 Відображення $w=z+c$.

Оскільки додавання комплексних чисел геометрично виконується за правилом паралелограма, тоді при відображенні $w=z+c$, *кожна точка* z *зміщується на вектор* c. Очевидно, при цьому на вектор c зміщується і всяка крива, і всяка площина.

Наприклад: 1) $w=z-5$ є перенос на п’ять одиниць вліво паралельно вісі $x-$ів; 2) $w=z+3i$ - перенос на три одиниці паралельно вісі $y-$ів; 3) $w=z-2+3i$ - перенос на вектор $c=-2+3i$.

6.2.2. Відображення обертання $w = e^{i\alpha} z$.

Покладаючи $z = |z| e^{i\varphi}$ в рівності $w = e^{i\alpha} z$ ($\alpha -$ дійсне число), знайдемо $w = |z| e^{i(\varphi+\alpha)}$. Отже, $|w| = |z|$, $\arg w = \varphi + \alpha =$ $= \arg z + \alpha$. Таким чином, *при переході від* z *до* w *модуль не міняється, а аргумент збільшується на кут* α. Якщо обидві площини, тобто площину аргументів z і площину функцій w накласти одну на одну таким чином, щоб вісі координати співпали, то прийдемо до висновку, що точка w одержується поворотом точки z навколо початку координат на кут α. Якщо зробити такі відображення з кожною точкою кривої або площини, то побачимо, що вони повернуться навколо початку координат на кут α.

6.2.3. Відображення подібності

Покладаючи $z = |z| e^{i \arg z}$ в $w = kz$, $k > 0$, одержимо $w = k|z| e^{i \arg z}$, тобто $|w| = k|z|$, $\arg w = \arg z$. Звідси випливає, що *модуль збільшився в* k *раз, а аргумент не змінився*, тобто точка w одержується переміщенням точки z вздовж променя, який з'єднує її з початком координат, так що відстань від початку координат зміниться в k разів. Якщо виконати таке відображення з кожною точкою кривої або області, тоді побачимо, що вони перейдуть у подібну криву або у подібну область, точка $z = 0$ називається *центром подібності*, а число $k -$ *коефіцієнтом подібності*.

6.2.4. Загальний випадок

Покладаючи $a = |a| e^{i\alpha} = k e^{i\alpha}$ у загальному лінійному відображенні $w = az + b$, , одержимо: $w = k e^{i\alpha} z + b$. Очевидно, що точку w можна одержати виконуючи три відображення:

1^0. Точку $w_1 = z e^{i\alpha}$ одержимо, *якщо виконаємо поворот точки* z *навколо точки* $z = 0$ *на кут* α;

2^0. Точку $w_2 = kw_1$ знайдемо, *якщо виконаємо подібне відображення точки* w_1 *з центром подібності у початку координат і коефіцієнтом подібності* k;

3^0. Нарешті, знаходимо шукану точку w, *якщо перенесемо точку* w_2 *на вектор* b.

Приклад. *Нехай задана деяка крива в першому квадранті. Побудувати криву яку одержимо при лінійному відображенні* $w = 2 - 3iz$.

► Представимо задану лінійну функцію у наступному вигляді $w = 3e^{\frac{3\pi}{2}i} z + 2$. Бачимо, що воно розпадається на:

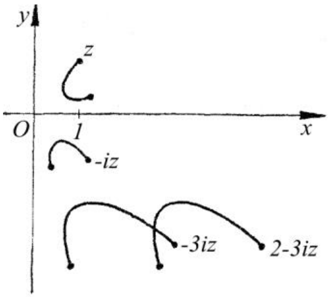


Рис. 1

1) відображення повороту заданої кривої на кут $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ навколо точки $z = 0$, $w_1 = e^{i\frac{3\pi}{2}} z$;

2) відображення подібності відносно початку координат з коефіцієнтом подібності $k = 3$ точок кривої які одержані, $w_2 = kw_1$;

3) нарешті, відображення переносу, одержаної кривої паралельно вісі $x-$ів вправо на дві одиниці, $w = w_2 + 2$.◄

Отже, ***всяке лінійне відображення можна розкласти на відображення переносу, подібності і повороту.***

§ 6.3. Відображення функцією $w=\dfrac{1}{z}$

Функція $w=\dfrac{1}{z}$ визначена і однозначна для всіх скінченних $z\neq 0$. В точці $z=0$ вона має полюс першого поряду, а в точці $z=\infty$ має нуль того ж порядку.

Функція $w=\dfrac{1}{z}$ *однозначно відображає повну площину комплексної змінної* z *на повну площину* w. При цьому точка $z=0$ переходить у точку $w=\infty$ а точка $z=\infty$ - у точку $w=0$.

Оскільки обернена їй функція $z=\dfrac{1}{w}$ має такий самий вид, то відображення за допомогою функції, яку розглядаємо, взаємно однозначне, або однолисте. З'ясуємо, чи буде це відображення конформним. Відомо, що функція $w=\dfrac{1}{z}$ аналітична для $z\neq 0$ і її похідна $w'=-\dfrac{1}{z^2}\neq 0$.Тоді на всій відкритій площині, крім точки $z=0$, це відображення конформне. Що стосується точок $z=0$ і $z=\infty$, то консерватизм кутів має місце і в них. Для доведення цього

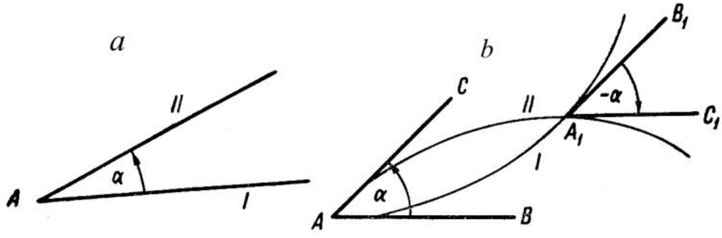


*Рис. 2**

твердження необхідно ввести поняття кута між двома лініями у нескінченно віддаленій точці. При цьому достатньо обмежитись кутом між прямими.

На прямі ми дивимось як на кола, які проходять через нескінченно віддалену точку. Тому точки **I** і **II** (*Рис. 2*, a*), які перетинаються у скінченій точці A, вважають, що вони перетинаються і у нескінченно віддаленій точці. Зобразимо тепер два кола **I** і **II** (*Рис. 2*, b*), які перетинаються у точках A і A_1. Якщо брати кути між колами **I** і **II** найменшими за абсолютною величиною, тоді позначивши кут у точці A через α, ми повинні будемо вважати кут у точці A_1 через $(-\alpha)$. Це повинно виконуватись завжди, як би точка A_1 не віддалялася від точки A. Отже, випливає наступне **означення**:

Кут між двома прямими у нескінченно віддаленій точці називається кут між ними у скінченній точці їх перетину, взятий з протилежним знаком.

Якщо прямі паралельні, то кут між ними у нескінченно віддаленій точці вважається рівним нулю.

Повернемося до функції $w = \dfrac{1}{z}$.

Якщо із точки $z = 0$ провести дві лінії, отже, тому що

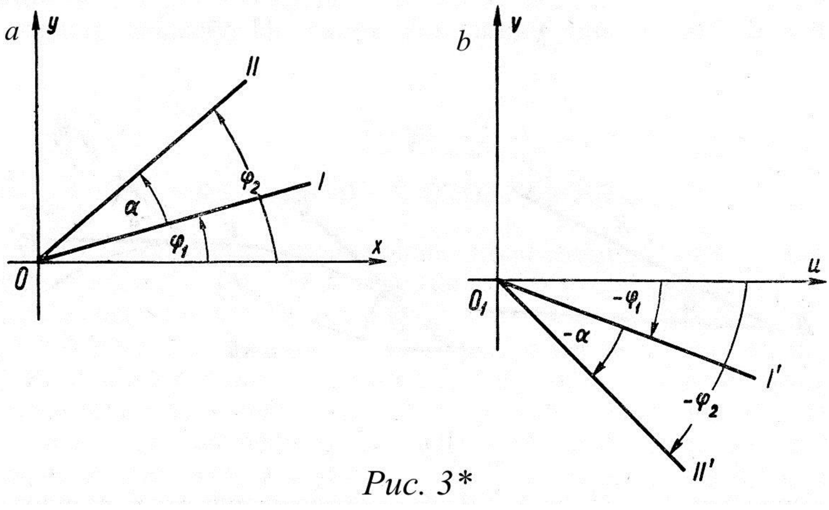


*Рис. 3**

кут між двома лініями є кут між двома дотичними у точці перетину, ми будемо вважати, що проведені прямі **I** і **II**

(*Рис. 3*, a*), які утворюють кут α. При відображенні $w=\dfrac{1}{z}$, лінія **I,** де $\arg z=\varphi_1$, переходить у лінію **I'** (Рис. 3* b), тут $\arg w=-\varphi_1$, а лінія **II** – у лінію **II'.** Але точка $z=0$ переходить у точку $w=\infty$. В точці $w=\infty$ кут між перетвореними лініями **I' і II'** буде $(-(-\alpha))=\alpha$, що і треба було довести.

Для доведення збереження кутів у точці $z=\infty$ достатньо провести ці ж самі міркування для функції $z=\dfrac{1}{w}$.

Розглянемо геометричний спосіб побудови точки $w=\dfrac{R^2}{z}$ за даною точкою z

6.3.1. Відображення функцією $w=\dfrac{R^2}{z}$

.

Покладаємо: $z=|z|e^{i\arg z}$. Тоді $w=\dfrac{R^2}{|z|}e^{-i\arg z}$. Звідси $|w|=\dfrac{R^2}{|z|}$, $\arg w=-\arg z$. Таким чином, аргумент змінює знак на протилежний, а $|w|\cdot|z|=R^2$, тобто добуток відстаней точок z і w від початку координат дорівнюється квадрату радіуса кола $|z|=R$.

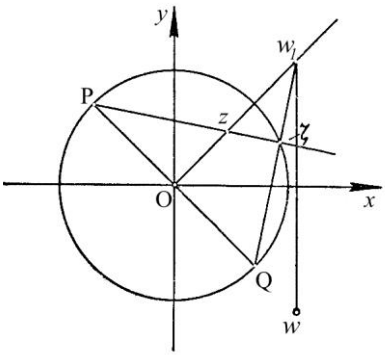


Рис.2

Точку w за заданою точкою z, яка лежить всередині або за колом $|z|=R$, можна побудувати наступним чином. Проводимо промінь Oz і діаметр $PQ\perp Oz$ (Рис. 2). Нехай ζ є точкою перетину кола з прямою Pz, а w_1 - точка перетину прямих $Q\zeta$ і Oz. Шукана точна w - симетрична w_1 відносно дійсної вісі. Дійсно, ΔOPz ~ ΔOw_1Q, так як $\angle OPz = \angle Ow_1Q$, як кути із взаємно перпендикулярними сторонами. Отже, $\dfrac{Oz}{OQ} = \dfrac{OP}{Ow_1}$, звідси $Oz \cdot Ow_1 = R^2$, тобто $|w_1| \cdot |z| = R^2$. Зауважимо, що у точки w аргумент протилежний аргументу z. Точка w - симетрична точці w_1 відносно дійсної вісі, оскільки точка $w_1 = |w_1| e^{i \arg z}$ і $|w| = |w_1|$. Таким чином, w - шукана точка. Якщо точка z лежить на колі, то $z = R \cdot e^{i \arg z}$, отже, $w = R \cdot e^{-i \arg z} = \bar{z}$, тобто w симетрична z відносно дійсної вісі.

Як відомо з геометрії, *інверсією відносно кола L радіуса R з центром у точці C називають перетворенням площини в себе, при якому кожна точка M площини переводиться у таку точку M', яка лежить на промені CM, і добуток відстанів точок M і M' від центра C дорівнює квадрату радіуса кола: $CM \cdot CM' = R^2$.*

З попереднього видно, що ***відображення*** $w = \dfrac{R^2}{z}$ ***рівносильне інверсії у колі*** $|z| = R$ ***з наступним дзеркальним відображенням в дійсній вісі.*** ◄

6.3.2. Кругові властивості функції $w = \dfrac{R^2}{z}$

Означення. *Колом у широкому розумінні називається крива, яка визначена рівнянням*

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (*)$$

при $A \neq 0$ *- це коло , а при* $A = 0$ *- пряма.*

Теорема. ***(Кругова властивість.) Функція*** $w=\frac{R^2}{z}$ ***перетворює будь яке коло розширеної площини*** z ***у коло розширеної площини*** w**.**

► Щоб відділити дійсну частину від уявної у $w=\frac{R^2}{z}$ покладаємо: $z=x+iy$ і $w=u+iv$ і знайдемо

$$x+iy=\frac{R^2}{u+iv}=\frac{R^2(u-iv)}{u^2+v^2}$$

Звідси

$$x=\frac{R^2u}{u^2+v^2}, \qquad y=-\frac{R^2v}{u^2+v^2}$$

Підставляючи ці вирази у рівняння кола (*), одержимо

$$D(u^2+v^2)+BR^2u-CR^2v+AR^2=0 \qquad (**)$$

Отримали коло у широкому розумінні у площині w; при $D=0$ - пряма, при $D\neq 0$ - коло. ◄

Висновок. *Зіставляючи рівняння (*) і (**) випливає,що:*

1) при $A\neq 0$ і $D\neq 0$ коло переходе у коло;

2) при $A=0$ і $D\neq 0$ пряма переходе у коло;

3) при $A\neq 0$ і $D=0$ коло переходить у пряму;

4) при $A=0$ і $D=0$ то пряма переходить у пряму.

Зауваження. *Оскільки числа* $\frac{1}{z}$ *і* $\frac{1}{\bar{z}}$ *- спряжені , звідси зрозуміло, що, якщо точка* $w=\frac{1}{z}$ *описує коло, тоді й точка* $\omega=\frac{1}{\bar{z}}$ *описує коло, причому ці кола будуть симетричними фігурами відносно дійсної вісі . Отже, перетворення інверсії також має кругову властивість.*

Приклад 1. ***Знайти відображення півплощини*** $\operatorname{Re} z>1,\ -\infty<\operatorname{Im} z<+\infty$ ***в коло*** $|z|=1$**.**

► Візьмемо довільну точку $M(\rho,\varphi)$ у даній півплощині (*Рис. 4**), і нехай її відображенням буде точка $M_1(r,\theta)$. Відображення у коло $|z|=1$ відбувається функцією $w=\dfrac{1}{z}$. Тому $r=\dfrac{1}{\rho}$ і $\theta=\varphi$. Але для точки M: $\rho=OM=\dfrac{OB}{\cos\varphi}>$ $>\dfrac{OA}{\cos\varphi}=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. Звідси одержимо, що $r=\dfrac{1}{\rho}<\cos\varphi$ або $r<\cos\varphi$. Очевидно, що для всіх точок прямої AP має місце рівність $r=\cos\varphi$, яка представляє собою полярне рівняння кола, що проходить через початок координат, центр якого лежить на полярній вісі, а діаметр дорівнює одиниці. Дійсно, якщо обидві частини полярного рівняння кола помножимо r одержимо $r^2=r\cos\varphi$, то приймаючи до уваги, що $r=\sqrt{x^2+y^2}$ і $x=r\cos\varphi$, одержимо рівняння кола у Декартовій системі координат $x^2+y^2-x=0$. Виділяючи повний квадрат, останній вираз прийме вид $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$, тобто це рівняння кола радіуса $\dfrac{1}{2}$ з центром у точці $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. Із нерівності $r<\cos\varphi$ видно, що відображені точки заповняють круг $\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$, який обмежений вказаним раніше колом. ◄

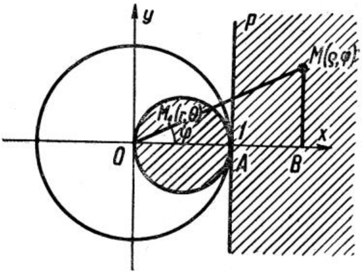


*Рис. 4**

Приклад 2. *Знайти конформно-еквівалентну декартову координатну сітку для функції* $w=\dfrac{1}{z}$.

► Покладаючи $z = x + iy$, $w = u + iv$, одержимо:

$$w = u + iv = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Звідси $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$. Прямим $u = c_1$ і $v = c_2$ у площині w (*Рис. 5**) будуть відповідати на площині z криві

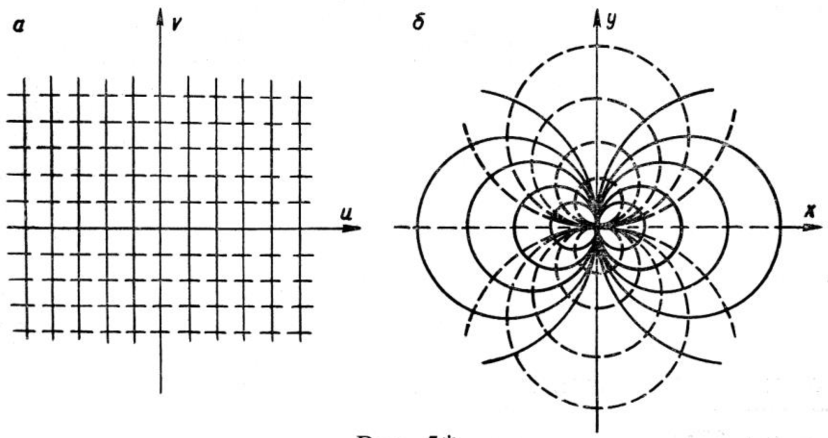


*Рис. 5**

$\dfrac{x}{x^2+y^2} = c_1$ і $\dfrac{-y}{x^2+y^2} = c_2$. Останні рівняння при $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$ можна представити у вигляді $x^2 + y^2 - \dfrac{x}{c_1} = 0$ і $x^2 + y^2 + \dfrac{y}{c_2} = 0$. Звідси видно, що першому рівнянню відповідає сім'я кіл, кожна з яких має центр на вісі Ox і дотикається вісі Oy, другому – сім'я кіл, які дотикаються вісі Ox і мають центри на вісі Oy. При $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$ одержимо вісі координат.

§ 6.4. Дробово-лінійна функція

Означення. ***Відображення функцією*** $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ***називається дробово-лінійним.***

Будемо вважати $c \neq 0$ і $ad - bc \neq 0$. При $c = 0$ (і $d \neq 0$) одержимо лінійну функцію, яка була розглянута у § 6.2, а при $ad - bc = 0$ дріб $\dfrac{az+b}{cz+d}$ буде постійною, тому що числа a, b і c, d будуть пропорційними.

6.4.1. Властивості дробово-лінійного відображення

Теорема 1. ***Дробово-лінійна функція взаємно-однозначно і конформно відображує повну площину комплексної змінної*** z ***на повну площину*** w**.**

► Дробово-лінійна функція визначена й однозначна для всіх скінченних $z \neq -\dfrac{d}{c}$. В точці $z = -\dfrac{d}{c}$ вона має простий полюс, а в точці $z = \infty$ функція регулярна та її значення там $w = \dfrac{a}{c}$ $\left(\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az+b}{cz+d} \right)$. Таким чином, якщо вважати, що точка $z = -\dfrac{d}{c}$ переходить у точку $w = \infty$, а точка $z = \infty$ переходить у точку $w = \dfrac{a}{c}$, то можна сказати, що дробово-лінійна функція однозначно відображає повну площину комплексної площини z на повну площину w. Якщо обернена функція $z = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$ також дробово-лінійна, то відображення яке розглядаємо буде взаємно однозначним або однолистим.

З'ясуємо, чи буде дробово-лінійне перетворення конформним? Функція $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ - аналітична у всіх точках, за виключенням точки, $z=-\frac{d}{c}$, її похідна у цих точках $w'=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$. Отже, на всій відкритій площині, крім точки $z=-\frac{d}{c}$ дробово-лінійне відображення є конформним. У точках $z=-\frac{d}{c}$ і $z=\infty$ має місце консерватизм кутів. Щоб впевнитись в цьому, зробимо наступні алгебраїчні перетворення:

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}=A+\frac{B}{cz+d}$$

З одержаного виразу бачимо, що w є результатом суперпозиції трьох функцій:

I. $w_1=cz+d$, II. $w_2=\frac{1}{w_1}$ III. $w=A+Bw_2$.

Для кожного з цих відображень консерватизм кутів має місце у всіх точках розширеної площини, тому він буде і в точках $z=-\frac{d}{c}$, $z=\infty$ для дробово-лінійного відображення.

Крім того, так як відображення I, II і III мають кругові властивості, тоді ***дробово-лінійне відображення*** $w=\frac{az+b}{cz+d}$ ***перетворює будь-яке коло розширеної площини*** z ***у коло розширеної площини*** w. ◄

Означення 2. ***Подвійним відношенням чотирьох точок*** $(a,b;c,d)$ ***називається вираз***

$$(a,b;c,d)=\frac{a-c}{b-c}:\frac{a-d}{b-d} \qquad (1)$$

Теорема 2. ***При дробово-лінійному відображенні подвійне відношення чотирьох точок не змінюється.***

► Для доведення розглянемо на площині z чотири точки z_1, z_2, z_3, z_4. При відображення функцією $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, одержимо чотири точки $w_k = \dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$, ($k = 1, 2, 3, 4$) на площині w. Необхідно довести:

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (w_1, w_2; w_3, w_4) \qquad (2)$$

У справедливості цієї рівності легко переконатися, якщо виписати розгорнуті вирази обох її частин, згідно означенню (1), у праву частину підставити вирази для різниць

$$w_k - w_j = \frac{(ad-bc)(z_k - z_j)}{(cz_k+d)(cz_j+d)} \qquad j, k = 1, 2, 3, 4$$

і виконати нескладні алгебраїчні перетворення. ◄

Висновок. ***Дробово-лінійним відображенням можна одну площину конформно відобразити у іншу так, щоб довільно задані три різні точки першої площини перейшли у довільно задані три точки другої.***

► Дійсно, візьмемо в площині z довільні три точки z_1, z_2, z_3, в площині w - три точки w_1, w_2, w_3. Необхідно знайти дробово-лінійне відображення, яке переводить z_1 у w_1; z_2 у w_2; z_3 у w_3. Для цього покладаємо, що довільна точка z при цьому відображенні переходить у w. Згідно теореми маємо

$$(z_1, z_2; z_3, z) = (w_1, w_2; w_3, w) \qquad (3)$$

Виписавши, за означенням (1), розгорнуті вирази подвійних відношень, легко, після цього, виразити w через z. Отже, якщо ліва частина рівності (3) – дробово-раціональна функція від z, а права - дробово-раціональна функція від w, тоді і w можна виразити через z у вигляді дробово-лінійної функції. Таким чином, задача завжди має розв’язок, притому єдиний. ◄

Цей розв’язок можна знайти, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів, оскільки наперед відомо, що одержана для їх визначення система лінійних рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Отже, підставляючи у рівність $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ значення z і w, які відповідають один одному, одержимо три рівняння для визначення чотирьох невідомих коефіцієнтів a,b,c,d :

$$w_1=\frac{az_1+b}{cz_1+d},\ w_2=\frac{az_2+b}{cz_2+d},\ w_3=\frac{az_3+b}{cz_3+d}.$$

У цій системі можна три невідомих виразити через четверту, наприклад b,c,d через a:

$$b=ma,\ c=na,\ d=pa.$$

Підставивши їх у

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

знайдемо після скорочення на a:

$$w=\frac{z+m}{nz+p}$$

Приклад 1. *Знайти дробово-лінійне відображення яке переводить точки* $z_1=-1$, $z_2=1$, $z_3=\infty$ *у точки* $w_1=0$, $w_2=1$, $w_3=-1$.

► *Перший спосіб.* Для визначення коефіцієнтів відображення одержимо систему:

$$0=\frac{-a+b}{-c+d},\qquad 1=\frac{a+b}{c+d},\qquad -1=\frac{a}{c}$$

(останнє рівняння одержимо в розумінні граничного переходу). З першого рівняння одержимо $b=a$, з третього $c=-a$, з другого $d=3a$. Отже шукане відображення має вид $w=\dfrac{z+1}{-z+3}$.

Другий спосіб. Застосовуючи властивість (3) постійності подвійного відношення, наприклад, можна розв'язати так: $(-1,1;\infty,z)=(0,1;1,w)$, або

$$\frac{-1-\infty}{1-\infty}:\frac{-1-z}{1-z}=\frac{0-1}{1+1}:\frac{0-w}{1-w}\ \text{або}\ \frac{z-1}{z+1}=\frac{w-1}{2w}.$$

Звідси $w = \dfrac{z+1}{-z+3}$. ◄

Теорема 3 (***принцип відображення границі***). ***Якщо при дробово-лінійному відображенні коло C перетворюється у коло Γ, тоді або область, яка лежить у середині C, перейде в область, яка лежить в середині області Γ (тоді зовнішність C перейде у зовнішність Γ); або область у середині C переходить у зовнішність Γ (тоді зовнішність C переходить у область, яка лежить у внутрішності Γ).***

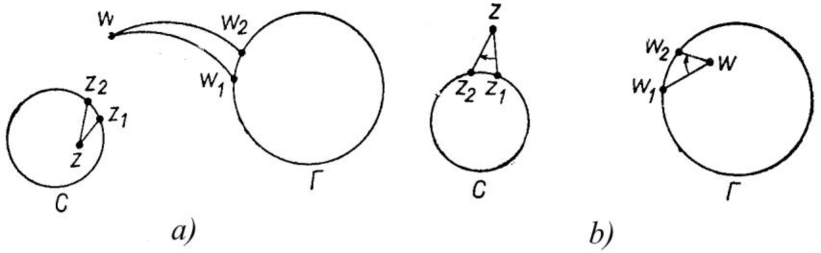


Рис. 3

Приклад 2. *Визначити у яку область G функція $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ відображає півплощину D, яка обмежена прямою $y = x$ і містить точку $z = i$.*

► За круговою властивістю пряма $y = x$ перетворюється у коло C (або пряму). Щоб знайти її, на прямій $y = x$ фіксуємо три точки $z_1 = -1-i,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1+i$. Обчисливши знаходимо: $w_1 = 1-2i,\ w_2 = -1,\ w_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5}i$. Якщо переміщуватися вздовж прямій $y = x$ в напрямку $z_1 \to z_2 \to z_3$, то задана півплощина лежить зліва. Якщо переміщуватися у напрямку $w_1 \to w_2 \to w_3$, вздовж кола C і проходимо через точки w_1, w_2, w_3, то зліва лежить зовнішність

G кола. Отже, півплощина D відображається функцією $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ у область G, яка лежить у зовнішності кола C. ◄

Теорема 4. *(Симетрія відносно кола)* ***Дві точки симетричні відносно прямої тоді і тільки тоді, коли всяке коло яке проходить через них ортогональне до прямої.***

► Дійсно, якщо дві точка A і B симетричні відносно прямої MN (*Рис.5**), то всяке коло, яке проходить через них, має центр O на MN, і тому перпендикуляр CD до MN в точці перетину прямої і кола являється дотичною до кола. Отже, пряма і коло ортогональні.

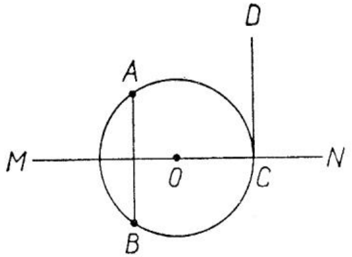


*Рис. 5**

Навпаки, якщо всяке коло проходить через точки A і B, ортогональна до прямої MN, то точки A і B - симетричні відносно MN. Дійсно, пряма $AB \perp MN$ (як коло у широкому розумінні, яке проходить через A і B), і центр O лежить на MN, у протилежному випадку коло не було б ортогональне до MN. Звідси робимо висновок, що $OA = OB$, тобто точки A і B симетричні відносно MN. ◄

Означення 3. ***Дві точки називаються симетричними відносно кола K, якщо всяке коло, яке проходить через них, ортогональне до кола K***

Теорема 5. ***Дві точки A і B симетричні відносно кола K тоді і тільки тоді, коли кожна є інверсією іншою точкою відносно кола K.***

► Дійсно, нехай A і B симетричні. Пряма, яка проходить через них, ортогональна до K і тому проходить через центр кола K *(Рис.6*)*. Залишилося довести, що $OA \cdot OB = R^2$, де R - радіус кола K. Для цього проведемо через A і B довільне коло Γ з центром O_1, і нехай воно перетинає коло K в точці C. Проведемо $CD \perp OC$ і

$CE \perp O_1C$. Очевидно, CD і CE - дотичні і в силу ортогональності K і Γ кут $\angle DCE = \frac{\pi}{2}$. Оскільки $\angle OCD = \angle O_1CE = \frac{\pi}{2}$, тоді $\angle OCO_1 = \frac{\pi}{2}$ і тому OC є дотичною до кола Γ і $OA \cdot OB = R^2$.

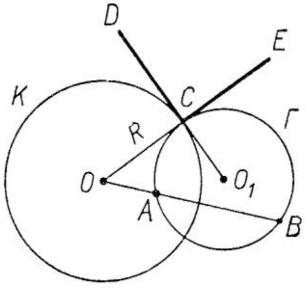


*Рис. 6**

Доведемо протилежне, тобто, що, якщо кожна з точок A і B є інверсною іншій, то вони симетричні. Проведемо через A і B довільне коло Γ з центром у точці O_1 і позначимо через C точку перетину K і Γ. З'єднаємо центр O з C і доведемо, що OC є дотичною до Γ. Припустимо, що OC перетинає Γ у другій точці C'. Тоді $OC \cdot OC' = OA \cdot OB = R^2$, але $OC = R$, значить, $OC' = R$, точки C і C' співпадають, і OC - дотична. Тому $OC \perp O_1C$ і, отже, O_1C є дотичною до K. Кут між дотичними OC і O_1C - прямий, отже, кола ортогональні, а тому точки A і B симетричні.

Теорема 6. ***Якщо дробово-лінійне відображення переводить одне коло в широкому розумінні у друге, то точки, симетричні відносно першого, воно переводить у точки симетричні відносно другого.***

Нехай при відображенні коло K (у широкому розумінні) переходе у коло K_1 (у широкому розумінні), а точки A і B, які симетричні відносно K, переходять у точки A_1 і B_1 (*Рис. 7**). Для того щоб довести, що вони симетричні відносно K_1, проведемо через них довільне коло Γ_1. Обернене відображення переводить Γ_1 у Γ (за круговою властивістю), яке проходить через A і B. Оскільки ці точки симетричні відносно K, тоді Γ ортогональне до K. Звідси в силу того, що дробово-лінійне відображення конформне, Γ_1

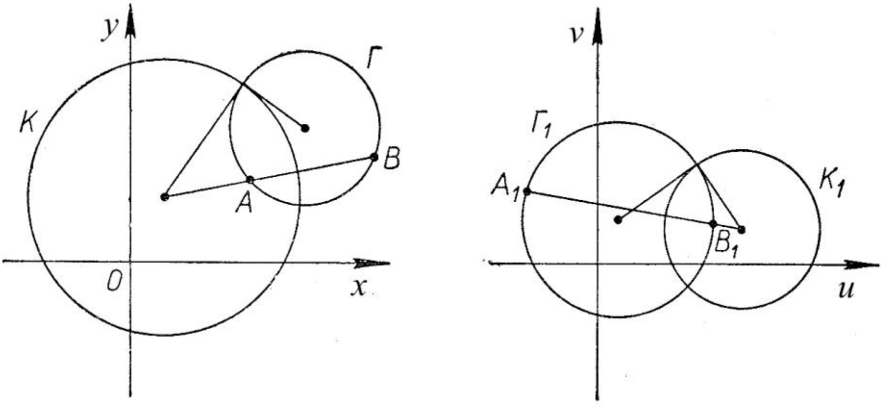


*Рис. 7**

ортогональне K_1. Таким чином, всяке коло Γ_1, яке проходить через A_1 і B_1, ортогональне K_1, отже A_1 і B_1 симетричні відносно K_1. ◄

Приклад 3. *Відобразити конформно площину z на площину w так, щоб точки $z_1=-1, z_2=i, z_3=1$ перейшли у точки $w_1=-1, w_2=0, w_3=1$.*

► Покладаємо $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$. За умовою при $z=-1$ повинно бути $w=-1$, отже, отримаємо $-1=\dfrac{-a+b}{-c+d}$. Аналогічно, поступимо з іншими точками, отримаємо $0=\dfrac{ai+b}{ci+d}$; $1=\dfrac{a+b}{c+d}$. Для визначення невідомих коефіцієнтів a, b, c, d отримали три рівняння. З другого знаходимо $b=-ai$, підставляючи це значення у перше і у третє рівняння, знайдемо $c-d=-(1+i)a$, $c+d=(1-i)a$. Звідси $c=-ai$,

$d=a$. Отже, $w=\dfrac{az-ia}{-iaz+a}$ або $w=\dfrac{z-i}{-iz+1}$. Останній вираз можна записати так $w=i\dfrac{z-i}{z+i}$. ◄

Приклад 4. *Верхній півкруг* $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ *(Рис.4) конформно відобразити у перший квадрант* $\operatorname{Re} w>0$, $\operatorname{Im} w>0$ *(Рис.5).*

► Границя півкруга складається з прямої $\operatorname{Im} z=0$ і кола $|z|=1$. Для того щоб півкруг відобразити у перший квадрант, необхідно пряму $\operatorname{Im} z=0$ і коло $|z|=1$ відобразити у прямі $\operatorname{Re} w=0$ і $\operatorname{Im} w=0$. Знаємо, що дробово-лінійне відображення коло переводить у пряму, якщо воно будь яку точку кола переводить у нескінченність. Візьмемо, наприклад, на межі півкруга точку $z=1$ і переводимо її у нескінченність $w=\infty$.

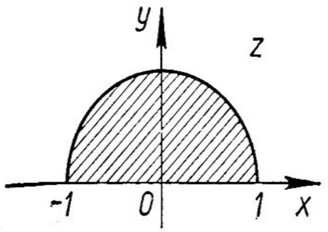


Рис.4

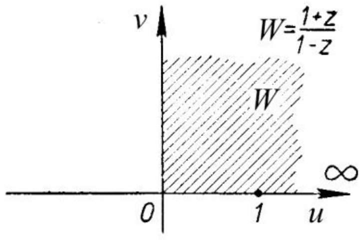


Рис. 5

Тоді вісь $x-$ів і коло $|z|=1$, за круговою властивістю, відобразяться у кола, які проходять через точку $w=\infty$, тобто відобразяться у прямі. За **теоремою 2,** дробово-лінійне відображення визначається, якщо на площині z задані три довільні точки z_1, z_2, z_3 і вказані довільні точки w_1, w_2, w_3 площини w, в які вони переходять. З іншого боку, згідно принципу відображення границі, граничні точки переходять у граничні. На границі півкруга ми вже взяли одну точку $z_1=1$ і поставили у відповідність точку $w_1 = \infty$, яка лежить на границі квадранта. Візьмемо ще дві пари точок, які відповідають один одному граничних точок півкруга, наприклад, нехай $z_2 = 0$ і $w_2 = 1$, а $z_3 = -1$ і $w_3 = 0$. Підставляючи відповідні значення у рівність $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, отримаємо систему: $\infty = \dfrac{a+b}{c+d}$, $0 = \dfrac{-a+b}{-c+d}$, $1 = \dfrac{b}{d}$. Звідси $b = a$, $d = a$, $c = -a$. Отже, $w = \dfrac{1+z}{1-z}$. Очевидно, ми знайшли один із можливих розв'язків задачі. ◄

Приклад 5. *Область, яка лежить між колами* $|z| = 1$ *і* $\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, *конформно відобразити у смугу* $G(-1 < \operatorname{Re} w < 1)$ *(Рис. 6).*

► Нам потрібно межу області D відобразити у межу смуги G, тобто обидва кола, які проходять через точку $z = i$ необхідно відобразити у прямі. Переведемо точку $z = i$ у нескінченність виконавши, перетворення $w_1 = \dfrac{1}{z-i}$. Тоді кола перейдуть у прямі. Оскільки кола дотикаються, тобто мають одну спільну точку $z = i$, то прямі мають тільки одну спільну точку $w_1 = \infty$, тобто прямі паралельні. Щоб знайти зображення кола $|z| = 1$, візьмемо дві точки які належать йому: $z_1 = 1$ і $z_2 = -1$; вони перейдуть у точки $w_{11} = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ і $w_{12} = \dfrac{1}{-1-i} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. Отже коло $|z| = 1$ перейде у пряму, що проходить через точки $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ і $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$. Зображення кола

$\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ можна знайти за образом однієї її точки, наприклад $z=0$ - знаходимо $w_{13}=\frac{1}{-i}=i$. Отже, коло $\left|z-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ переходить у пряму, яка проходить через точку $w_1=i$ паралельно першій прямій. Виникає питання, чи відобразиться область D у смугу G_1, яка лежить між прямими, чи у зовнішність? Для цього візьмемо на площині z

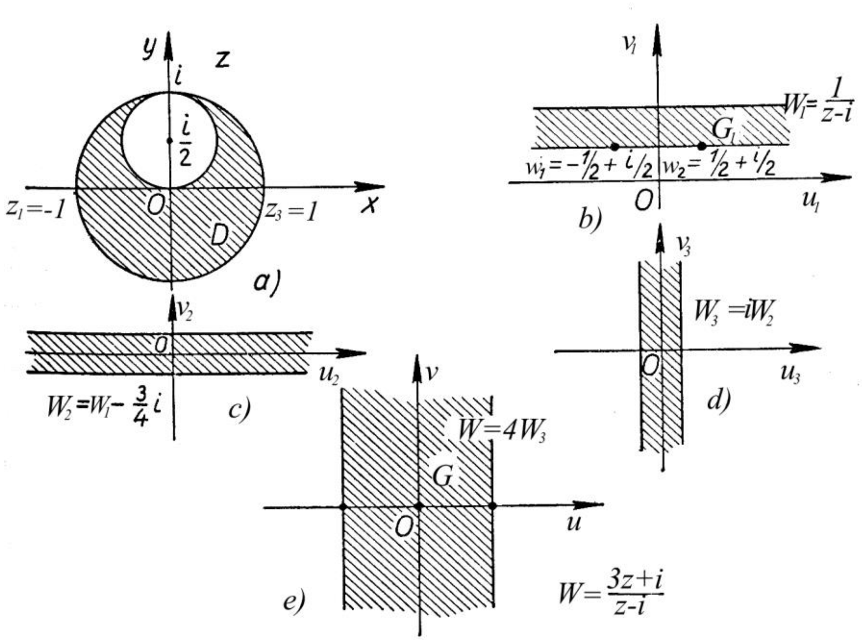


Рис. 6

деяку довільну точку, наприклад $z=\infty$, вона переходить у точку $w_1=0$. Точка $z=\infty$ лежить у зовнішності області D, отже її образ $w_1=0$ повинен лежати у зовнішності образу області D. Отже, область D відображається у смугу G_1 між прямими. Очевидно, щоб розв'язати задачу, необхідно смугу

G_1 відобразити у смугу G. Для цього треба G_1 опустити на $\frac{3}{4}$ одиниці вниз, тобто покласти $w_2 = w_1 - \frac{3}{4}i$; після чого повернути на 90^0, тобто покласти $w_3 = w_2 e^{\frac{\pi}{2}i} = iw_2$, і нарешті розширити смугу у чотири рази, тобто покласти $w = 4w_3$. Остаточно, $w = 4w_3 = 4iw_2 = 4i\left(w_1 - \frac{3}{4}i\right) = 4i\left(\frac{1}{z-i} - \frac{3}{4}i\right)$. Або, нарешті, $w = \frac{3z+i}{z-i}$. Перевіримо, чи відповідає поставленій задачі одержаний розв'язок? Для цього беремо на межі області D декілька точок і дивимось чи перейдуть вони у межові точки смуги G. Наприклад, точка $z=0$ переходить у точку $w=-1$; точка $z=-1$ - у точку $w=1-2i$; точка $z=1$ - у точку $w=1+2i$; точка $z=i$ - у точку $w=\infty$. Перевірка показує, що за круговою властивістю дробово-лінійного відображення випливає, що одержана відповідь правильна. ◄

§ 6.5. Степеневе відображення

Означення ***Відображення виду $w = z^\alpha$ називається степеневим відображенням.***

Функція $w = z^\alpha$ аналітична для будь-якого скінченного z, причому $w' = \alpha z^{\alpha-1} \neq 0$, якщо $z \neq 0$. Отже, у всіх скінченних точках $z \neq 0$ відображення за допомогою функції $w = z^\alpha$ - конформно. Щоб з'ясувати характер відображення при $z=0$, покладаємо $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\theta}$ і тоді одержимо $|w|e^{i\theta} = |z|^\alpha e^{i\alpha\varphi}$. Звідси випливає $|w| = |z|^\alpha$ і $\theta = \alpha\varphi$. Одержані рівності показують, що у точці $z=0$ дане відображення збільшує кути φ в $\alpha-$ разів. З'ясуємо, коли відображення за допомогою функції $w = z^\alpha$ буде взаємно-однозначним. Оскільки функція $w = z^\alpha$ однозначна на площині z, то для взаємно-однозначності необхідно і достатньо, щоб при $z_1 \neq z_2$ виконувалась рівність $z_1^\alpha \neq z_2^\alpha$. Але при $z_1 \neq z_2$ можливо $z_1^\alpha = z_2^\alpha$ тоді і тільки тоді, коли $|z_1| = |z_2|$, а $\arg z_1$ відрізняється від $\arg z_2$ на величину кратну $\dfrac{2\pi}{\alpha}$. Звідси випливає, що відображення за допомогою функції $w = z^\alpha$ буде взаємно-однозначним тільки в області, яка не буде містити точки z_1 і z_2, модулі і аргументи яких пов'язані вказаними вище співвідношеннями. Зокрема, такою областю буде частина квадранту $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{\alpha}$. Вона відображається функцією $w = z^\alpha$ на всю площину w з розрізом вздовж дійсної вісі від точки $w = 0$ до точки $w = \infty$.

Нехай на площині z заданий промінь OC, який виходить з початку координат під кутом λ. Якщо застосувати

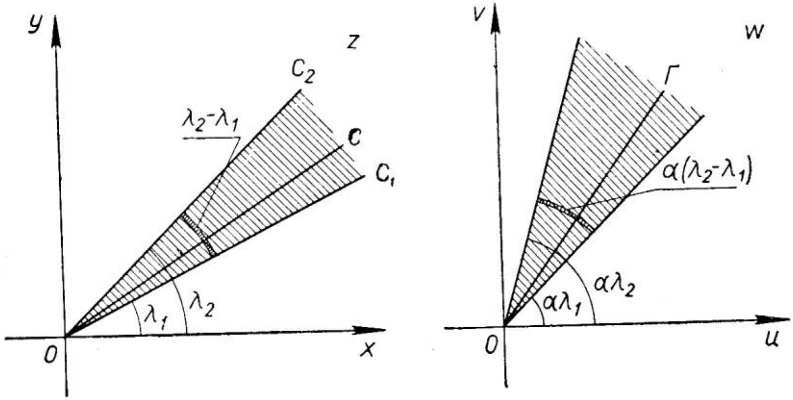


Рис. 7

відображення $w = z^\alpha$ до точок даного проміня, ми одержимо наступні співвідношення:

$$w = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} \qquad \text{або} \qquad |w| e^{i \arg w} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$$

звідси

$$|w| = |z|^{\alpha}, \qquad \arg w = \alpha \arg z = \alpha\lambda$$

Отже, *точки променя* OC*, які виходять із початку координат під кутом* λ *на площині* z*, взаємно-однозначно відображаються у точки променя* $O\Gamma$*, які виходять із початку координат під кутом* $\alpha\lambda$ *на площині* w.

Візьмемо на площині кут $\angle C_1OC_2$ з вершиною у початку координат, сторони якого утворюють з додатнім напрямком дійсної вісі кути λ_1 і λ_2 (*Рис. 7*). Будемо розглядати цей кут як область, яка замітається промінєм OC, коли кут нахилу його λ змінюється від λ_1 і λ_2. Промінь OC відображається у промінь $O\Gamma$ площини w, який утворює з дійсною віссю кут $\alpha\lambda$, і коли кут нахилу променя OC змінюється від λ_1 до λ_2, то кут нахилу променя $O\Gamma$ змінюється від $\alpha\lambda_1$ до $\alpha\lambda_2$. Отже, на площині w одержимо кут величиною $\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)$, при умові $(\lambda_2 - \lambda_1)\cdot\alpha \le 2\pi$. Отже, *перетворення* $w = z^{\alpha}$ *взаємно-однозначно і конформно відображає кут з вершиною у початку координат площини* z *у кут з вершиною у початку координат площини* w*, величиною в* α *раз більшого попередній якщо тільки ця величина не перевищує* 2π.

Наприклад, функція $w = z^2$ конформно відображає перший квадрант у верхню півплощину, верхню площину - у площину з розрізом вздовж додатної частини дійсної півосі. Функція $w = \sqrt{z}$ площину з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної вісі конформно відображає у праву півплощину.

Приклад. *Верхній півкруг* $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ *конформно відобразити на верхню півплощину так, щоб точки* $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1$ *перейшли у точки* $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1.$

► У **прикладі 4** ми бачили, що функція $w_1 = \dfrac{1+z}{1-z}$ конформно відображає верхній півкруг на перший квадрант площини w_1. З іншого боку, функція $w_2 = w_1^2$ перший квадрант площини w_1 перетворює у верхню півплощину w_2.(*Рис. 8*).

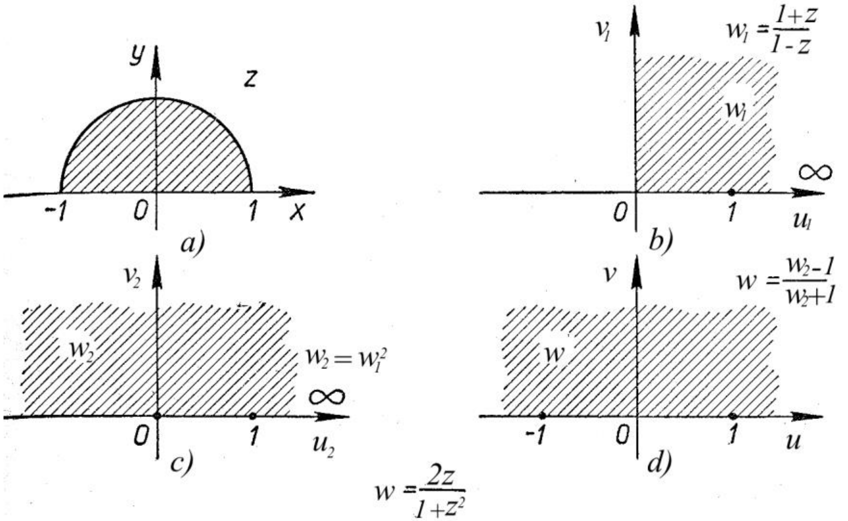


Рис. 8

Отже, $w_2 = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ конформно відображає верхній півкруг у верхню півплощину, але при цьому точки $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ перейдуть у точки $w_{21} = 0, w_{22} = 1, w_{23} = \infty$, а нам необхідно перевести їх у точки $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$. Отже, необхідно ще верхню півплощину w_2 перевести у верхню півплощину w так, щоб точки $w_{21} = 0, w_{22} = 1, w_{23} = \infty$

перейшли у точки $w_1=-1, w_2=0, w_3=1$. Це можна зробити за допомогою функції $w=\frac{w_2-1}{w_2+1}$. Нарешті

$$w=\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]:\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2+1\right], \text{ або } w=\frac{2z}{1+z^2}. \blacktriangleleft$$

§ 6.6. Показникова функція

Показникова функція аналітична у всіх скінченних точках z, і $w'=e^z\neq 0$, тому відображення за її допомогою конформно у всіх точках. Доведемо, що *функція $w=e^z$ точки прямої $y=h$, яка паралельна вісі $x-$ів, взаємно-однозначно відображає у точки променя, який виходить з початку координат під кутом h до додатного напрямку дійсної вісі.*

Дійсно, якщо $y=h$, *то* $z=x+ih$, причому вздовж прямої $y=h$ абсциса x змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, $w=e^{x+ih}=e^x\left(\cos(h)+i\sin(h)\right)$. Звідси робимо висновок, що

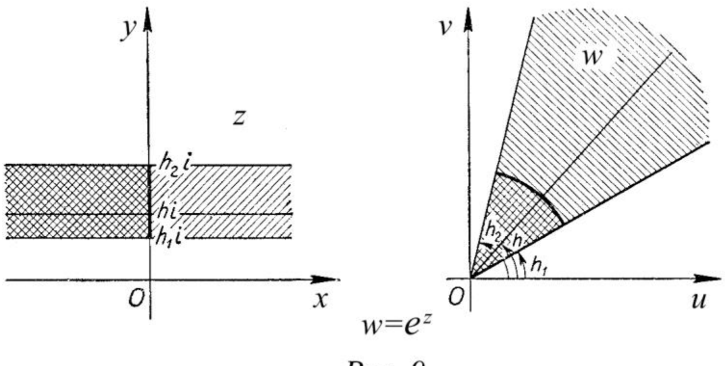


Рис. 9

$\arg w=h$ залишається постійним, а $|w|=e^x$ змінюється від $e^{-\infty}$ до $e^{+\infty}$, тобто від 0 до ∞. Таким чином, коли $z=x+ih$ описує приму $y=h$, то w описує промінь $\arg w=h$.

Візьмемо на площині z смугу, яка паралельна вісі $x-$ів, від прямої $y=h_1$ до $y=h_2$. Будемо вважати її, як область, яку „замітає ” пряма $y=h$, коли h змінюється від h_1 до h_2. Як було показано, пряма $y=h$ перетворюється у промінь $\arg w=h$, і при зміні h від h_1 до h_2, то промінь „замітає ” кут з вершиною у початку координат $h_1<\arg w<h_2$ (покладаючи, що $h_2-h_1\le 2\pi$), Остаточно приходимо до висновку: *функція $w=e^z$ смугу, яка паралельна вісі $x-$ів шириною $\Delta h=h_2-h_1$ не більше 2π, конформно відображає у кут з вершиною у початку координат розчином Δh.*

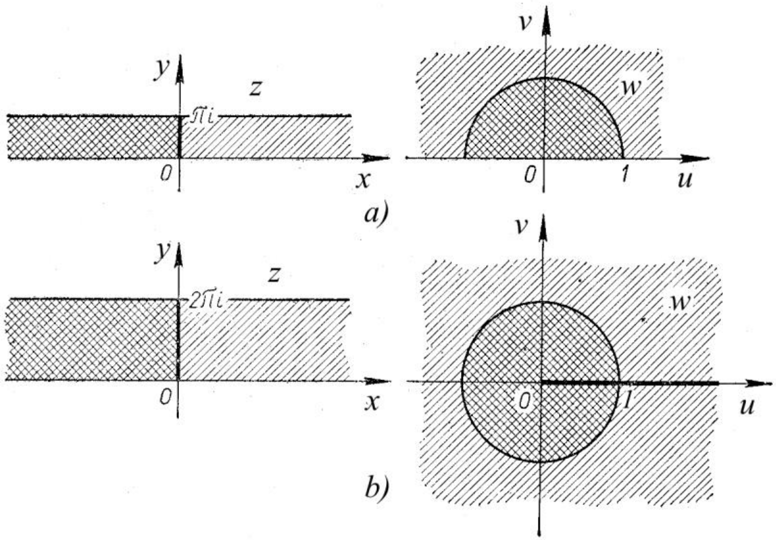


Рис. 10

Розглянемо, окремий випадок. Смуга шириною π відображається у півплощину $0<\arg w<\pi$ $(Fig.10,a))$, а смуга шириною 2π - у площину w $(Fig.10,b))$ з розрізом вздовж променя $\arg w=0$.

Зауважимо, що якщо ми візьмемо не всю пряму $y=h$, а тільки півпряму $y=h$, $x<0$, де абсциса x змінюється від

$-\infty$ до 0, відповідно , модуль $|w| = e^x$ зміниться від $e^{-\infty}$ до e^0, тобто, від 0 до 1. Отже півпряма $y = h$, $x < 0$ відображається у відрізок проміня $\arg w = h$ від початку координат до точки , яка знаходиться на відстані, і яка дорівнює одиниці.

Звідси випливає, *що ліва півсмуга* $x < 0$, $h_1 < y < h_2$ *конформно відобразиться у сектор одиничного круга* $|w| < 1$, $h_1 < \arg w < h_2$ *(Рис. 9).*

У окремому випадку, півполоса шириною π ($x < 0$, $0 < y < \pi$) конфрмно відображається у верхній півкруг ($|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$ (*Рис. 10a*)); півполоса шириною 2π ($x < 0$, $0 < y < 2\pi$) конфрмно відображається у круг $|w| < 1$ з розрізом вздовж дійсної вісі від точки $w = 0$ до точки $w = 1$ (*Рис. 10b*).

Приклад 1. *Півсмугу* $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$ *конформно відобразити у верхню півплощину так, щоб точки* $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $z_2 = 0$; $z_3 = \dfrac{\pi}{2}$ *перейшли у точки* $w_1 = -1$; $w_2 = 0$; $w_3 = 1$.

► Оскільки за допомогою функції $w = e^z$ ми можемо відображати півсмуги, які паралельні вісі $x-$ів, то перш за все задану півсмугу повернемо на 90^0 у додатному напрямку, тобто зробимо перетворення $w_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} z = iz$. У площині w_1, ми одержимо півсмугу $\operatorname{Re} w_1 < 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w_1 < \dfrac{\pi}{2}$. Функція $w_3 = e^{w_2}$ відображає її у сектор одиничного круга $|w_3| < 1$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg w_3 < \dfrac{\pi}{2}$, тобто у правий півкруг. Поворотом $w_4 = i w_3$

одержимо верхній півкруг. Функція $w_5 = \left(\dfrac{1+w_4}{1-w_4}\right)^2$ відображає цей півкруг у верхню півплощину. Отже задана півсмуга відобразилась у верхню півплощину за допомогою функції $w_5 = \left(\dfrac{1+w_4}{1-w_4}\right)^2 = \left(\dfrac{1+iw_3}{1-iw_3}\right)^2 = \left(\dfrac{1+ie^{w_2}}{1-ie^{w_2}}\right)^2 = \left(\dfrac{1+ie^{iz}}{1-ie^{iz}}\right)^2$. При цьому точки $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $z_2 = 0$; $z_3 = \dfrac{\pi}{2}$ перейдуть у точки $w_{51} = \infty$; $w_{52} = -1$; $w_{53} = 0$. Залишається відобразити верхню півплощину w_5 відобразити у верхню площину w так, щоб точки $w_{51} = \infty$; $w_{52} = -1$; $w_{53} = 0$ перейшли у точки $w_1 = -1$; $w_2 = 0$; $w_3 = 1$. Покладаємо: $w = \dfrac{aw_5 + b}{cw_5 + d}$. Коефіцієнти визначаємо із системи $-1 = \dfrac{a}{c}$; $0 = \dfrac{-a+b}{-c+d}$; $1 = \dfrac{b}{d}$. Звідси $b = a$, $c = -a$, $d = a$. Отже, $w = \dfrac{w_5 + 1}{-w_5 + 1}$. Підставляючи сюди вираз для w_5, після простих обчислень знайдемо:

$$w = \frac{1-e^{2iz}}{-2ie^{iz}} = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Отже шукане відображення є функція $w = \sin z$. ◄

Приклад 2. *Знайти конформне відображення смуги* $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ *на перший квадрант* $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$.

► Повернемо смугу $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ (*Рис. 1*, а*)) на кут $\dfrac{\pi}{2}$, для чого застосуємо перетворення $w_1 = z \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = iz$. Збільшимо ширину смуги $0 < \operatorname{Im} w_1 < \dfrac{\pi}{4}$ (*Рис. 1*, б*)) у два рази. Таке збільшення досягається за допомогою відображення $w_2 = 2w_1$. Смугу, яку отримали, $0 < \operatorname{Im} w_2 < \dfrac{\pi}{2}$ (*Рис. 1*, в*)) показникова

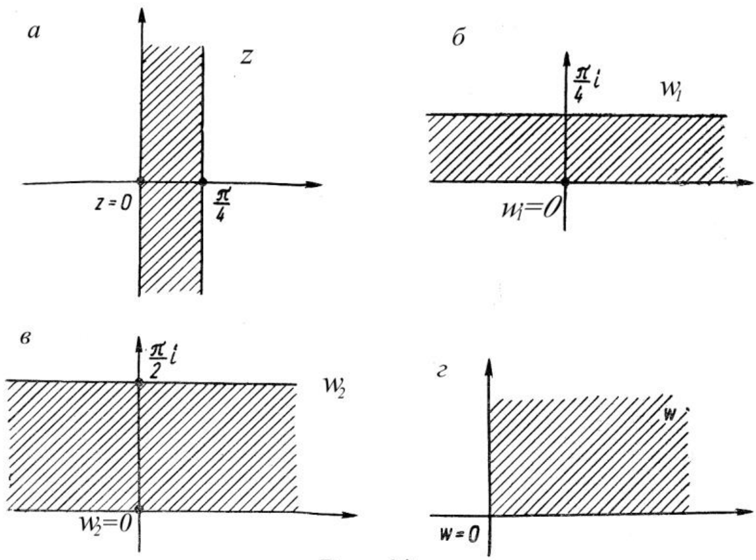


*Рис. 1**

функція $w = e^{w_2}$ відображає на перший квадрант $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$ (*Рис. 1*,г*)). Отже, функція $w = e^{w_2} = e^{2w_1} = e^{2iz}$ розв'язує поставлену задачу. ◄

§ 6.7. Функція Жуковського

Функцію $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, називають функцією Жуковського, яка є аналітичною у всіх точках $z \neq 0$. Її похідна $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ у всіх точках, крім точок $z = \pm 1$. Отже, відображення за допомогою функції $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно у всіх точках за виключення точок $z = 0; +1; -1$. З'ясуємо умови взаємно-однозначності даного відображення. Нехай, $z_1 \neq z_2$, але $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$. Останню рівність можна переписати у вигляді $(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$. Звідки одержимо, що $z_1 \cdot z_2 = 1$. Отже, відображення за допомогою функції $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ буде взаємно-однозначним тільки у тій області, що не містить точок z_1 і z_2, які пов'язані співвідношенням $z_1 \cdot z_2 = 1$. Такими областями будуть, зокрема, одиничний круг $|z| < 1$ і зовнішність одиничного кругу.

Розглянемо детальніше характер відображення $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Перш за все знайдемо, в яку криву воно відображає коло $|z| = r$ (*Рис. 11*). Параметричне рівняння цього кола запишемо так: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, або $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тобто $z = re^{i\varphi}$. Відповідно,

$$w=\frac{1}{2}\left(re^{i\varphi}+\frac{1}{re^{i\varphi}}\right)$$

або

$$w=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi+i\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

Покладаючи $w=u+iv$ і, якщо відокремити дійсну частину від уявної, знайдемо:

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi;\quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \qquad (1^*)$$

Щоб одержати рівняння у Декартовій системі координат необхідно виключити параметр φ. Одержимо:

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2}=1$$

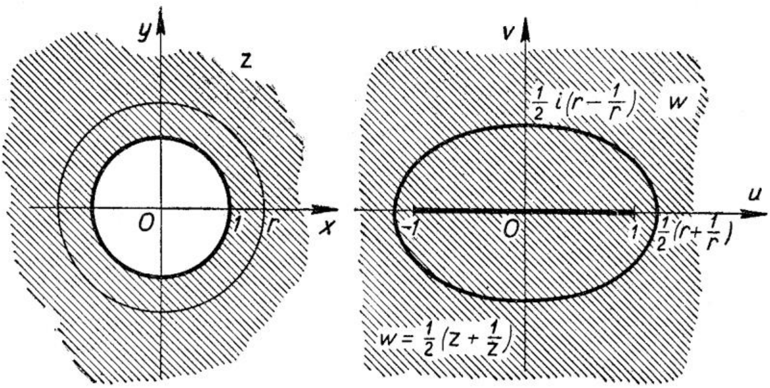


Рис. 11

Це рівняння еліпса. Отже, функція $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ взаємно-однозначно відображає точки кола $|z|=r$ у точки еліпса, які мають піввісі $a_r=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$, $b_r=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}-r\right)$ з півфокусною відстанню

$$c_r=\sqrt{a_r^2-b_r^2}=\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\right]^2}=1.$$

Відповідно, фокуси еліпса знаходяться у точках $F_1=(-1,0)$ і $F_2=(1,0)$, положення яких не залежить від радіуса r кола, яке ми розглядаємо.

Розглянемо дві області на площині z: а) $|z|<1$ і б) $|z|>1$.

а) В області $|z|<1$ візьмемо коло $r=\rho<1$. Якщо точка кола $r=\rho$ рухається у додатному напрямку, то точка відповідного еліпса буде рухатись у від'ємному напрямку. Це видно з рівняння $v=\dfrac{1}{2}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\varphi$, де $\rho-\dfrac{1}{\rho}<0$. Різним колам, очевидно, відповідають різні, але софокусні еліпси. Якщо $\rho\to 1$, то $u\to\cos\varphi$, $v\to 0$, $a_\rho\to 1$, $b_\rho\to 0$. Це значить, що еліпси необмежено стискаються у направленні уявної вісі, їх межовим положенням, які відповідають колу $\rho=1$, буде подвійний відрізок $[-1,1]$. Як випливає із відповідності обходів кола і еліпса, верхнє півколо $\rho=1$, переходить у нижній беріг подвійного відрізка $[-1,1]$, а нижнє – у верхній беріг. Якщо $\rho\to 0$, то

$$a_\rho=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\to\infty,\qquad b_\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)\to\infty$$

причому

$$a_\rho-b_\rho=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)=\rho\to 0$$

Це означає, що еліпси збільшуються і заокруглюються, при неперервному зменшенні ρ від 1 до 0, тобто, еліпси будуть неперервно розширятися, заповнюючи всю площину

w. Таким чином, *функція* $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ *взаємно-однозначно, відображає одиничний круг* $|z|<1$ *на всю площину* w *з розрізом вздовж відрізка дійсної вісі від точки* $w=-1$ *до точки* $w=1$. При цьому, верхньому півкругу $|z|<1$ відповідає нижня півплощина $\operatorname{Im} w<0$, а нижньому півкругу - верхня півплощина $\operatorname{Re} w>0$

б) В області $|z|>1$ візьмемо коло $r=\delta>1$. Функція $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ перетворює дане коло у лінію на площині w, параметричне рівняння якої має вид

$$u=\frac{1}{2}\left(\delta+\frac{1}{\delta}\right)\cos\varphi;\quad v=\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{\delta}\right)\sin\varphi \qquad (2^*)$$

Таке само, як і в попередньому випадку, виключаємо параметр φ і переконаємося, що цим рівнянням відповідає еліпс з піввісями $a_\delta=\frac{1}{2}\left(\delta+\frac{1}{\delta}\right)$, $b_\delta=\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{\delta}\right)$, фокуси якого знаходяться у точках $F_1=(-1,0)$ і $F_2=(1,0)$. Розташування фокусів не залежить від радіуса кола, яке розглядаємо. Якщо точка кола $r=\delta$ рухається у додатному напрямку, то точка відповідного еліпса теж буде рухатись у додатному напрямку. Це видно з рівняння $v=\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{1}{\delta}\right)\sin\varphi$, де, на відміну від попереднього випадку, $\delta-\frac{1}{\delta}>0$. Різним значенням δ будуть відповідати, різні, але софокусні еліпси. Якщо $\delta\to1$, то $u\to\cos\varphi$, $v\to0$, $a_\delta\to1$, $b_\delta\to0$. Це означає, що еліпси необмежено стискаються у напрямку уявної вісі , їх граничне положення, яке відповідає колу $\delta=1$, буде подвійним відрізком $[-1,1]$, причому верхньому півколу $\delta=1$ буде відповідати верхній беріг подвійного відрізка $[-1,1]$, а нижньому півколу – нижній беріг. Якщо $\delta \to \infty$,то

$$a_\delta = \frac{1}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) \to \infty, \qquad b_\delta = \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\rho}\right) \to \infty$$

$$a_\delta - b_\delta = \frac{1}{2}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\delta} \to 0$$

Отже еліпси збільшуються та заокруглюються. При неперервному зростанні δ від 1 до $+\infty$ еліпси, неперервно розширюючись, заповнюють площину. Таким чином, *функція* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ *взаємно-однозначно відображає зовнішність одиничного кругу* $|z| < 1$ *на всю площину* w *з розрізом вздовж відрізка дійсної вісі від точки* $w = -1$ *до точки* $w = 1$. При цьому, верхній зовнішності півкруга $|z| < 1$ відповідає верхня півплощина $\operatorname{Im} w > 0$, а нижньому півкругу – нижня півплощина $\operatorname{Re} w > 0$

6.7.1. Відображення проміня функцією Жуковського

Візьмемо на площині z промінь $\varphi = \alpha$, тоді йому на площині w буде відповідати лінія параметричне рівняння якої одержимо із системи (1*) , якщо у ній замінити φ на α. Вони мають вид:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha; \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha. \end{cases}$$

Виключаючи параметр r, одержимо рівняння

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Це рівняння гіперболи з півосями $a_r = |\cos\alpha|$, $b_r = |\sin\alpha|$ і півфокусною відстанню $c_r = \sqrt{a_r^2 + b_r^2} = 1$. Звідси випливає, що фокуси гіперболи знаходяться у точках $F_1 = (-1, 0)$ і $F_2 = (1, 0)$ і тому вона софокусна з раніше одержаними еліпсами. Більш детальне дослідження параметричних рівнянь гіперболи показує, що променю $\varphi = \alpha$ відповідає не вся гіпербола, а лише тільки одна її гілка (права, якщо $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, і ліва, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$). Прямій, яка проходить через початок координат, буде відповідати повна гіпербола. Легко бачити, що прямим, які проходять через початок координат і нахилені до дійсної вісі під кутом α і $\pi - \alpha$ буде відповідати одна і та ж сама гіпербола. Таким чином

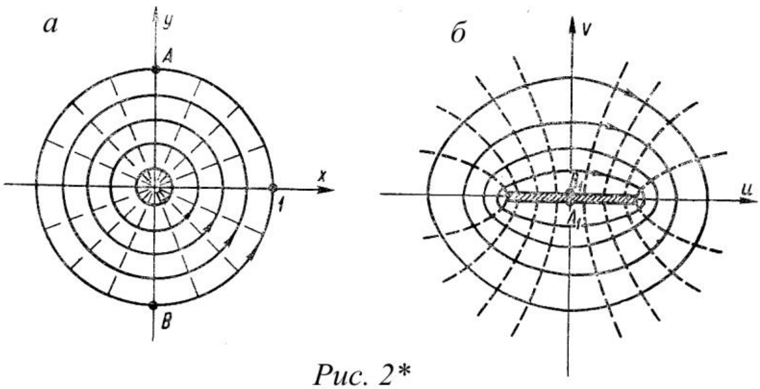


*Рис. 2**

гіперболи будуть подвійними. Гіперболи, які відповідають $\alpha = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (вісі координат площини z), відображаються у піввісі уявної вісі і в відрізки $(-\infty, -1)$ і $(1, +\infty)$ дійсної вісі площини w.

Полярна конформно-еквівалентна координатна сітка функції $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, яка є оберненою до функції $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, складається з софокусних еліпсів і гіпербол з фокусами у точках $F_1 = (-1, 0)$ і $F_2 = (1, 0)$ (*Рис. 2*. а),б))*

Зауваження. *За допомогою функції* $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ *і раніше розглянутих функцій можна вивчити зображення, які здійснюються функціями* $w = \cos z$ *і* $w = \sin z$. *Для чого зауважимо, що відображення* $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ *можна розглядати як суперпозицію відображень:*

I. $w_1 = iz;$ **II.** $w_2 = e^{w_1};$ **III.** $w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$

Аналогічно, відображення $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ є суперпозицією наступних відображень:

I. $w_1 = iz;$ **II.** $w_2 = e^{w_1};$ **III.** $w_3 = -iw_2;$ **IV.** $w = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$

Приклад 1. *Знайти зображення області* $0 < |z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ *використовуючи функцію Жуковського*

► Підставляючи $z = re^{i\varphi}$ у вираз функції Жуковського то відокремлюючи дійсну та уявну частини, отримаємо

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi; \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

Обходячи контур сектора у додатному напрямку *OABO* (*Рис.12*), одержимо: відрізок *OA* перейде у нескінченний відрізок дійсної вісі, який пробігає від $u = +\infty$ до $u = 1$ (*Рис.*

13). Дуга AB кола $|z|=1$ перейде у відрізок дійсної вісі $A'B'$, а відрізок BD перейде у криву

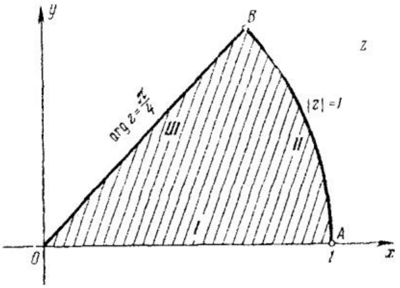


Рис. 12

$$u=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi;$$

$$v=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

або $u^2-v^2=\frac{1}{2}$ (гіпербола)

Згідно принципу взаємно-однозначної відповідності границь одержимо, що заданий сектор переводиться функцією Жуковського в область

$$u^2-v^2>\frac{1}{2}, \qquad u>\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$v<0$. ◄

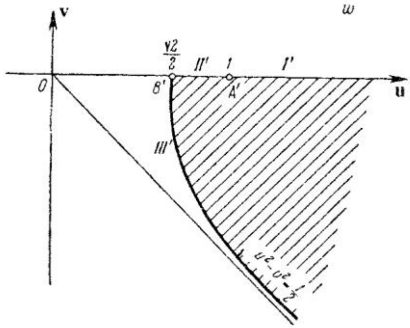


Рис. 13

Приклад 2. *Знайти область на площині w, на яку функція*

$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ *конформно відображає область*

$\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2}{3}\pi$, $|z|>2$ *(Рис. 14).*

► Функція $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ перетворює промені $\arg z=\frac{\pi}{3}$ і

$\arg z=\frac{2\pi}{3}$ відповідно у ліву та праву гілки гіперболи

$$\frac{u^2}{\cos^2\frac{\pi}{3}}-\frac{v^2}{\sin^2\frac{\pi}{3}}=1,$$

А дугу кола $|z|=2$ і її зовнішність – на дугу еліпса $u=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)\cos\varphi$ $v=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\sin\varphi$, та його зовнішність. Оскільки $\varphi=\arg z$ міняється у проміжку $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$, то з

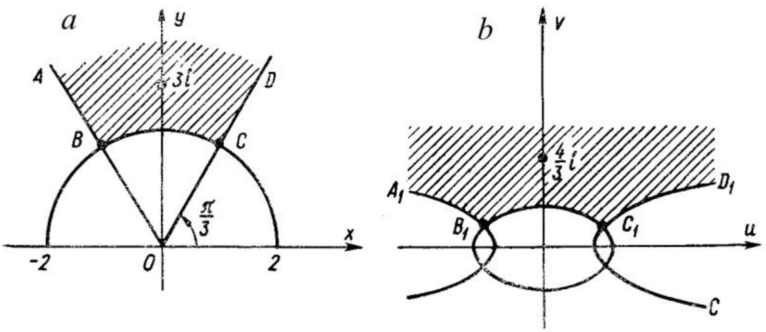


Рис. 14

рівняння $v=\frac{3}{4}\sin\varphi$ робимо висновок, що ця дуга еліпса лежить у верхній півплощини w. Отже, контур $ABCD$ (*Рис.14a*) у даній області перейде у контур $A'B'C'D'$ (*Рис.14b*), яка складається зі знайдених дуг еліпса та гіперболи. З'ясуємо, яка частина площини w, що обмежена контуром $A'B'C'D'$, є відображенням заданої області. Це можна встановити за допомогою відповідності обходу меж $ABCD$ і $A'B'C'D'$ або, якщо показати куди переходить деяка внутрішня точка даної області. Візьмемо, наприклад, точку $z_1=3i$. На площині w їй відповідає точка $w_1=\frac{1}{2}\left(3i+\frac{1}{3i}\right)=\frac{4}{3}i$. Отже, область, яка відобразилась, буде область яка заштрихована на *Рис. 14b*. ◄

Приклад 3. *В яку область площини* w *функція* $w=\cos z$ *конформно перетворює півсмугу* $0<\operatorname{Re} z<\pi,\ \operatorname{Im} z>0$ *?*

► Відображення $w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ можна розглядати, як суперпозицію відображень:

$$\textbf{I. } w_1 = iz; \ \textbf{II. } w_2 = e^{w_1}; \ \textbf{III. } w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right).$$

Перетворення **I** означає поворот даної півсмуги на кут $\frac{\pi}{2}$ (*Рис 3* б*). Перетворення **II** переводить одержану півсмугу $0 < \operatorname{Im} w_1 < \pi, \ \operatorname{Re} w_1 < 0$ у верхній півкруг $|w_1| < 1$ (*Рис. 3* в*). Нарешті, функція $w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$ перетворює цей півкруг на нижню півплощину $\operatorname{Im} w < 0$ (*Рис. 3* г*). Оскільки

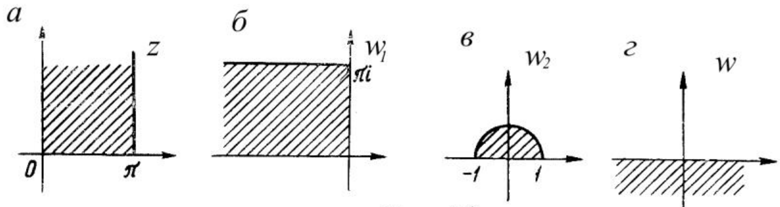


*Рис. 3**

перетворення **I, II, III** взаємно-однозначні та конформні у відповідних областях, то функція $w = \cos z$ перетворює дану півсмугу взаємно-однозначно і конформно.◄

Приклад 4. *В яку область площини w функція $w = \sin z$ конформно перетворює півсмугу $0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Im} z > 0$ (Рис4*)?*

► Перетворення $w = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ можна розглядати, як суперпозицію перетворень:

$$\textbf{I. } w_1 = iz; \ \textbf{II. } w_2 = e^{w_1}; \ \textbf{III. } w_3 = -iw_2; \ \textbf{IV. } w = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right).$$

Перетворення **I** повертає півсмугу на кут $\frac{\pi}{2}$, після чого вона перейде у півсмугу $0 < \operatorname{Im} w_1 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} w_1 < 0$ (*Рис. 4* б*). Перетворення **II** перетворює нову півсмугу у чверть круга $|w_2| < 1$ (Рис. 4* *в*). За допомогою функції $w_3 = \frac{w_2}{i} = -iw_2$ чверть круга з першого квадранта перейде у четвертий (*Рис.*

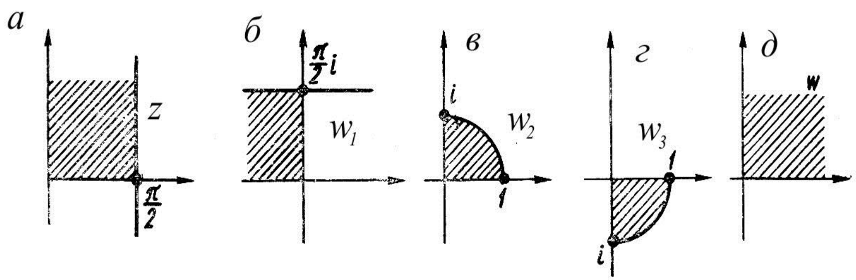


*Рис. 4**

4 г*) повертаючи на кут $-\frac{\pi}{2}$. Перетворення **IV,** одержану чверть кола переводить в перший квадрант (*Рис. 4* д*). Перетворення **I, II, III, IV** взаємно-однозначні і конформні у відповідних областях, тому $w = \sin z$ перетворює дану півсмугу на перший квадрант взаємно-однозначно і конформно. ◄

Практичні заняття – 6.1

1. *Знайти загальну форму цілої лінійної функції, яка переводить:*

а) верхню півплощину на себе;

б) верхню півплощину на нижню півплощину;

в) верхню півплощину на праву півплощину;

г) праву півплощину на себе.

2. *Для вказаних перетворень знайти скінченну нерухому точку* z_0 *(якщо вона існує), кут повороту навколо неї* φ *і коефіцієнт деформації* k. *Привести це перетворення до канонічного виду* $w - w_0 = \lambda(z - z_0)$.

а) $w = 2z + 1 - 3i$; б) $w = iz + 4$; в) $w = z + 1 - 2i$;
г) $w - w_1 = a(z - z_1), (a \neq 0)$; д) $w = az + b, (a \neq 0)$.

3. *Знайти цілу лінійну функцію* $w(z)$, *яка відображає смугу між даними прямими, на смугу* $0 < u < 1$ *при вказаному нормуванні:*

а) $x = a, \quad x = a + h$, $w(a) = 0$;

б) $x = a, \ x = a + h$, $w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$;

в) $y = kx$; $y = kx + b$; $w(0) = 0$;

г) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, $w(ib_1) = 0$.

4. *Для функції* $w = \dfrac{1}{z}$ *знайти відображення наступних ліній:*

а) *сім'ю кіл* $x^2 + y^2 = ax$;

б) сім'ю кіл $x^2 + y^2 = by$;

в) в'язку паралельних ліній $y = x + b$;

г) в'язку прямих $y = kx$;

д) в'язку прямих, які проходять через задану точку $z_0 \neq 0$;

є) параболи $y = x^2$.

5. *Знайти дробово-лінійні функції, які переводять точку* $(z = -1; i; 1 + i)$ *у відповідні точки:*

а) $(w = 0; 2i; 1 - i)$, *b)* $(w = i; \infty; 1)$.

6. *Знайти дробово-лінійне перетворення яке відображає точки* $(z = -1; \infty; i)$ *у відповідні точки:*

а) $(w = \infty; i; 1)$, *b)* $(w = 0; \infty; 1)$.

7. *Знайти точки симетричні точці* $z = 2 + i$ *відносно наступних кіл:*

a) $|z| = 1$*; b)* $|z - i| = 3$.

8. *Знайти симетричні зображення відносно одиничного кола наступних ліній:*

a) $|z| = \frac{1}{2}$*; b)* $|z - i| = 1$*;* c) $y = 2$; d) $x^2 - y^2 = 1$.

Практичні заняття – 6.2

1.*Знайти функцію, яка відражає область* $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ *у область* $0 < \arg w < \frac{\pi}{4}$.

2. *Відобразити на верхню півплощину одиничне коло з розрізом, який проходить від центра вздовж дійсної вісі.*

3. *У наступних задачах знайти область* G *площини* w*, на яку функція* $f(z)$ *відображає дану область* D *площини* z*:*

1) $f(z) = z^2 + 1$*;* D*: чверть круга* $|z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

2) $f(z) = e^{2z}$*;* D*: півсмуга* $\mathrm{Re}\, z < 0$*;* $0 < \mathrm{Im}\, z < \frac{\pi}{4}$.*;*

3) $f(z) = e^z$*;* D*: a) прямокутна сітка* $x = C$, $y = C$*;*
б) прямі $y = kx + b$*; в) смуга* $\alpha < y < \beta$ $(0 \le \alpha < \beta \le 2\pi)$*;*
г) півсмуга $x < 0$, $0 < y < \alpha \le 2\pi$*; д) смуга між прямими* $y = x$, $y = x + 2\pi$*; є) прямокутник* $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ $(\delta - \gamma \le 2\pi)$.

4. *Знайти області, на які функція Жуковського відображає наступні області: 1)* $|z| < R < 1$*; 2)* $|z| > R > 1$*; 3)*$|z| < 1$*; 4)* $|z| > 1$*; 5) півплощина* $\mathrm{Im}\, z > 0$*; 6) півплощина* $\mathrm{Im}\, z < 0$*; 7) півкруг* $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$*; 8) півкруг* $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\, z < 0$*; 9) область* $|z| > 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$*; 10) область* $0 < |z| < R$, $\mathrm{Im}\, z > 0$*;*

11) область $R<|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; 12) область $\frac{1}{R}<|z|<R$, $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Re} z>0$.

5. *Знайти функцію, яка відображає область*

$$D:\ \left\{|z|<2,\quad \frac{3\pi}{4}<\arg z<\pi\right\}$$

у праву півплощину

$$G:\{\operatorname{Re} w>0,\quad -\infty<\operatorname{Im} w<+\infty\}.$$

6. *Знайти функцію, яка відображає область*

$$D:|z|<4;\ |z+2|>2$$

у смугу

$$G:-2<\operatorname{Re} w<2, -\infty<\operatorname{Im} w<+\infty$$

Індивідуальні домашні завдання - 5

1. Знайти функцію, яка конформно відображає область D у область G

1.1. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z-\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.2. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<0\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.3. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}1<\operatorname{Re}w<3,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.4. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z+\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-3<\operatorname{Re}w<-1,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.5. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z-i|>1.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-1<\operatorname{Re}w<1,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.6. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z-1|>1.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<4,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.7. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z+1|>1.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-4<\operatorname{Re}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.8. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z+i|>1.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}1<\operatorname{Re}w<3,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.9. $D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z-2i|>2.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

$$1.10.\ D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z-2|>2.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<4,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.11.\ D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z+2|>2.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.12.\ D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z+2i|>2.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-4<\operatorname{Re}w<-2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.13.\ D:\begin{cases}|z|<\dfrac{1}{2},\\ \left|z-\dfrac{i}{4}\right|>\dfrac{1}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-1<\operatorname{Re}w<1,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.14.\ D:\begin{cases}|z|<\dfrac{1}{2},\\ \left|z+\dfrac{1}{4}\right|>\dfrac{1}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.15.\ D:\begin{cases}|z|<\dfrac{1}{2},\\ \left|z-\dfrac{1}{4}\right|>\dfrac{1}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.16.\ D:\begin{cases}|z|<\dfrac{1}{2},\\ \left|z+\dfrac{i}{4}\right|>\dfrac{1}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

$$1.17.\ D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<2.\end{cases}$$

$$1.18.\ D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z+1|>!.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-1<\operatorname{Re}w<1,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$$

1.19. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z+\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Im}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Re}w<+\infty.\end{cases}$

1.20. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Im}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Re}w<+\infty.\end{cases}$

1.21. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z-1|>1.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<4,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.22. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z+i|>1.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}1<\operatorname{Re}w<3,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.23. $D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z-2i|>2.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.24. $D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z-2|>2.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.25. $D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z+2|>2.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.26. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Im}w<4,\\ -\infty<\operatorname{Re}w<+\infty.\end{cases}$

1.27. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z+1|>1.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.28. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ |z-i|>1.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-1<\operatorname{Re}w<1,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.29. $D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z-2i|>2.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-2<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

1.30. $D:\begin{cases}|z|<4,\\ |z+2|>2.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}1<\operatorname{Re}w<2,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2. *Знайти функцію, яка конформно відображає область* D *у область* G

2.1. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.2. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ -\pi<\arg z<-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.3. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Im}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Re}w<+\infty.\end{cases}$

2.4. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.5. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.6. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ 0<\arg z<\pi.\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.7. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<0.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re} w<0,\\ 0<\operatorname{Im} w<+\infty.\end{cases}$

2.8. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\pi<\arg z<-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re} w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<0.\end{cases}$

2.9. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re} w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im} w<+\infty.\end{cases}$

2.10. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}0<\operatorname{Re} w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<0.\end{cases}$

2.11. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re} w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<0.\end{cases}$

2.12. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \pi<\arg z<2\pi.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re} w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<+\infty.\end{cases}$

2.13. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re} w<0,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<+\infty.\end{cases}$

2.14. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}0<\operatorname{Re} w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<+\infty.\end{cases}$

2.15. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<0.\end{cases} \Leftrightarrow G:\begin{cases}0<\operatorname{Re} w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im} w<+\infty.\end{cases}$

2.16. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.17. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ \pi<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.18. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Im}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Re}w<+\infty.\end{cases}$

2.19. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.20. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.21. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ 0<\arg z<\pi.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Im}w<0,\\ -\infty<\operatorname{Re}w<0.\end{cases}$

2.22. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ -\pi<\arg z<-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.23. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.24. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.25. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<0.\end{cases}$

2.26. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<0.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.27. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{4}<\arg z<0.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.28. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ -\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}0<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ -\infty<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.29. $D:\begin{cases}|z|<2,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<0.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

2.30. $D:\begin{cases}|z|<1,\\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \Leftrightarrow \quad G:\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}w<+\infty,\\ 0<\operatorname{Im}w<+\infty.\end{cases}$

3. *За допомогою функції* $w=e^z$ *знайти образи наступних областей*

3.1. $D\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}z<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $\qquad w=e^z$

3.2. $D\begin{cases}<\operatorname{Re}z<+\infty,\\ -\pi<\operatorname{Im}z<-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $\qquad w=e^z$

3.3. $D\begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < 0, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi. \end{cases}$ $w = e^z$

3.4. $D\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < +\infty, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.5. $D\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 5, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi. \end{cases}$ $w = e^z$

3.6. $D\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 3, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.7. $D\begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < \ln 2, \\ -\pi < \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$ $w = e^z$

3.8. $D\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 10, \\ -\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.9. $D\begin{cases} 1 < \operatorname{Re} z < \ln 5, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.10. $D\begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.11. $D\begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < 0, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.12. $D\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < +\infty, \\ -\pi < \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$ $w = e^z$

3.13. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 3, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.14. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < +\infty, \\ -\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.15. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 5, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi. \end{cases}$ $w = e^z$

3.16. $D \begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < \ln 3, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.17. $D \begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < 0, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.18. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 1, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.19. $D \begin{cases} -1 < \operatorname{Re} z < 0, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.20. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 2, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.21. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 3, \\ -\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$ $w = e^z$

3.22. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 10, \\ -\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.23. $D \begin{cases} 1 < \operatorname{Re} z < \ln 5, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.24. $D \begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.25. $D \begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < 0, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.26. $D \begin{cases} -\infty < \operatorname{Re} z < 0, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.27. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 1, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$ $w = e^z$

3.28. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 5, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.29. $D \begin{cases} -1 < \operatorname{Re} z < 0, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $w = e^z$

3.30. $D \begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \ln 3 \\ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ $w = e^z$

4. ***Для функції*** $w=\frac{1}{z}$ ***знайти образи наступних ліній***

4.1. $l:\quad x^2+y^2+4x-4=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.2. $l:\quad x^2+y^2-2x+3y-4=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.3. $l:\quad x^2+y^2-5x+1=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.4. $l:\quad x^2+y^2+2x+4y-1=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.5. $l:\quad x^2+y^2+2x-3=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.6. $l:\quad x^2+y^2+2y-1=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.7. $l:\quad x^2+y^2+2x+2y+1=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.8. $l:\quad x^2+y^2-2x-4y-4=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.9. $l:\quad x^2+y^2+2x-3=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.10. $l:\quad x^2+y^2-2y-1=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.11. $l:\quad x^2+y^2-5x-2=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.12. $l:\quad x^2+y^2+2y+x-3=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.13. $l:\quad x^2+y^2-3x-3y=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.14. $l:\quad x^2+y^2+2x-y-1=0 \qquad w=\frac{1}{z}.$

4.15. $l: \quad x^2 + y^2 - 2x = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.16. $l: \quad x^2 + y^2 + 2y = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.17. $l: \quad x^2 + y^2 + 4x = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.18. $l: \quad x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.19. $l: \quad x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.20. $l: \quad x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.21. $l: \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.22. $l: \quad x^2 + y^2 + 3x + 2y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.23. $l: \quad x^2 + y^2 + -x + 2y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.24. $l: \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.25. $l: \quad x^2 + y^2 - 5x - 3y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.26. $l: \quad x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.27. $l: \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.28. $l: \quad x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.29. $l: \quad x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

4.30. $l: \quad x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0 \qquad w = \dfrac{1}{z}.$

Частина VII. Операційне числення

§ 7.1. *Зображення та оригінал*

Нехай функція $f(t)$ дійсної змінної t така, що існує інтеграл

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,,$$

де $p = s + i\sigma$.

Цей інтеграл є функцією параметра p. Позначимо нову функцію через $F(p)$ і отримаємо

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1)$$

Інтеграл, що стоїть у правій частині рівності називають ***інтегралом Лапласа*** функції $f(t)$, а функцію $F(p)$ ***перетвореною за Лапласом*** для функції $f(t)$. Інакше, функцію $F(p)$ називають ***зображенням*** функції $f(t)$, а $f(t)$ - ***оригіналом*** для функції $F(p)$.

Операцію переходу від оригінала до зображення називають ***перетворенням Лапласа.***

Оскільки $f(t)$ і $F(p)$ відносяться один до одного як оригінал та зображення, то прийнята наступна форма запису: $f(t) \div F(p)$ або $F(p) \div f(t)$ і називають ***операційною*** (***операторною***) рівністю. Застосовують також інші позначення, наприклад: $F(p) \to f(t)$; $F(p) = Lf(t)$; $f(t) = L^{-1}F(p)$.

Перетворення Лапласа ставить у відповідність функцію від дійсної змінної $f(t)$ функцію $F(p)$ від комплексної змінної p застосовуючи співвідношення (1). Можно навести приклади функцій для яких інтеграл Лапласа не існує.

В операційному численні звичайно розглядають такі функції $f(t)$, які задовольняють наступним умовам:

1^0. Для всіх $t > 0$ функція $f(t)$ - неперервна або має розриви першого роду, причому число точок розриву на кожному скінченному інтервалі вісі t може бути скінченним;

2^0. $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3^0. Існують такі числа $M > 0$ і $s_0 \geq 0$, що для всіх значень t, які належать інтервалу $0 \leq t < \infty$, виконується наступна умова:

$$\left| f(t) \right| \leq Me^{s_0 t} \qquad (2)$$

Остання умова означає, що функція $f(t)$ може бути як обмеженою ($s_0 = 0$), так і необмеженою ($s_0 > 0$). Однак в останньому випадку її модуль при будь якому t не може бути більшим за деяку показникову функцію $Me^{s_0 t}$ при тому ж значенні t. *Точна нижня межа множини значень s_0, для яких справедлива нерівність (2), називається* ***показником росту*** *функції $f(t)$*.

З точки зору фізичних застосувань умови 1^0 і 3^0 то вони виконуються для більшості функцій $f(t)$, які описують фізичні процеси. Умова 2^0 на перший погляд вважається штучною. Однак слід мати на увазі, що операційний метод застосовується до задач, які приводять до розв'язання диференціальних рівнянь із заданими початковими умовами. І для фізики абсолютно все одно, як вели себе функції, які необхідно знайти, до початкового моменту, який можна прийняти за момент $t = 0$. Таким чином, умова 2^0, з фізичної точки зору цілком природня.

Означення. ***Перетворенням Лапласа заданої функції $f(t)$ дійсної змінної t називають перетворення, яке ставить у відповідність функції $f(t)$ функцію $F(p)$ комплексної змінної p яка визначається за допомогою інтеграла***

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (3)$$

Зауважимо, що інтеграл (3) є невласним інтегралом, який залежить від змінної p, як від параметра. Очевидно, взагалі кажучи, цей інтеграл збігається при всіх параметрах p. Дійсно, якщо функція $f(t)$ прямує до відмінної від нуля границі при $t\to\infty$, а $\operatorname{Re} p<0$, то інтеграл явно розбіжний. Отже, природньо поставити питання про область збіжності інтеграла (3), тим самим і про область визначення функції $F(p)$.

Теорема 1. ***Інтеграл (3) збігається в області*** $\operatorname{Re} p>s_0$, ***де*** s_0 ***є показником степені зростання функції*** $f(t)$***, причому в області*** $\operatorname{Re} p\ge s_1>s_0$ ***цей інтеграл збігається рівномірно.***

► Дійсно, при $\operatorname{Re} p>s_0$ і $p=s+i\sigma$, застосовуючи ознаку порівняння збіжності невласних інтегралів, одержимо:

$$|F(p)|=\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right|\le M\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{s_0t}dt=\frac{M}{s-s_0}, \quad s>s_0 \qquad (4)$$

що дає підстави зробити висновок про збіжність інтеграла (3) при $s>s_0$. Якщо $s\ge s_1>s_0$, то аналогічна оцінка дає

$$|F(p)|\le M\int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t}dt=\frac{M}{s_1-s_0}, \qquad (5)$$

що і доводить рівномірну збіжність інтеграла (3) за параметром p в області $\operatorname{Re} p\ge s_1>s_0$, за ознакою Вейєрштрасса. ◄

Теорема 2. ***Зображення Лапласа (3) функції*** $f(t)$ ***є аналітичною функцією комплексної змінної*** p ***в області*** $\operatorname{Re} p>s_0$, ***де*** s_0 ***є показником стені зростання функції*** $f(t)$.

► Доведемо, що для будь якої точки p комплексної площини $\operatorname{Re} p>s_0$ функція $F(p)$ має похідну. Оскільки інтеграл (3) при $\operatorname{Re} p \ge s_1 > s_0$ збігається абсолютно і рівномірно, то диференціювання під знаком інтеграла за параметром p обґрунтовано. Покажемо, що інтеграл

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} f(t) t e^{-pt} dt , \qquad (6)$$

який одержали після диференціювання, збігається рівномірно у півплощині $\operatorname{Re} p \ge s_1 > s_0$ відносно параметра p . Дійсно,

$$|F'(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) t e^{-pt} dt \right| \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} |f(t)| t |e^{-pt}| dt | \ | \le M \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-(s_1 - s_0)t} dt = \frac{M}{(s_1 - s_0)^2} .$$

Звідси випливає, що інтеграл (5) збігається рівномірно відносно p , якщо $\operatorname{Re} p \ge s_1 > s_0$, що і доводить існування похідної функції $F(p)$ у будь якій півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$. ◄

§ 7.2. *Формула обертання*

Розглянемо інтеграл

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp \qquad (7)$$

який обчислюється вздовж прямої $\operatorname{Re} p = a > 0$.

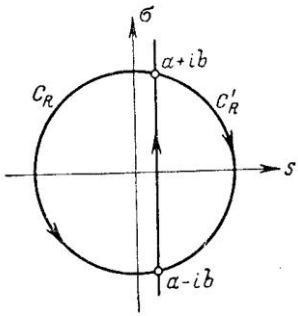


Рис. 1

Позначимо через C_R і C'_R частини кола $|p| = R$, які лежать відповідно ліворуч і праворуч від прямої $\operatorname{Re} p = a$, а через $a - ib$ і $a + ib$ - кінці C_R і C'_R (*Рис. 1*).

Інтеграл (7) будемо обчислювати у розумінні головного значення Коші, тобто

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp \qquad (8)$$

Нехай $t > 0$; оскільки $R \to \infty$ рівномірно відносно $\arg p$, то за лемою Жордана маємо:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \qquad (9)$$

Оскільки функція $\dfrac{1}{p}$ аналітична всюди, крім початку координат (початок координат простий полюс) то, за основною теоремою Коші про лишки, згідно якої

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \cdot res \left. \frac{e^{pt}}{p} \right|_{p=0} = 2\pi i$$

Якщо перейти до границі при $b \to \infty$ (відповідно $R \to \infty$) і враховуючи (9) одержимо:

$$\eta(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1 \quad (t > 0). \qquad (10)$$

Покладаємо тепер $t < 0$. У цьому випадку розглянемо дугу C'_R. За лемою Жордана маємо

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0, \qquad (11)$$

Отже праворуч від прямої $\operatorname{Re} p = a$ підінтегральна функція всюди аналітична, то за основною теоремою Коші

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

Якщо перейти до границі при $b \to \infty$ (відповідно $R \to \infty$) і враховуючи (11), одержимо

$$\eta(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \quad (t < 0) \qquad (12)$$

Об'єднуючи формули (10) і (12) отримаємо:

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases} \qquad (13)$$

Функцію $\eta(t)$ ***називають одиничною функцією***.

При $t=0$ одержимо

$$\eta(0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{dp}{p}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{a+ib}{a-ib}=\frac{1}{2\pi i}\ln(-1)=\frac{1}{2}$$

Властивості одиничної функції:

1^0. *Якщо* $f(t)$ *задовольняє першій і третій умовам оригінала, тоді добуток*

$$f(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}f(t), & t>0,\\ 0 & t<0.\end{cases}$$

буде задовольняти другій умові оригінала.

Всюду, далі, щоб записати оригінал $f(t)$, будемо вважати його вже помноженим на одиничну функцію, тобто щоб скоротити запис множник $\eta(t)$ будемо опускати. Наприклад, запис $f(t)=\sin t$ фактично означає:

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

2^0. *Якщо* t *поміняти на* $t-\tau$ *у формулі (13), де* τ *є фіксованим числом, то*

$$\eta(t-\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p(t-\tau)}}{p}dp=\begin{cases}1, & t>\tau,\\ 0, & t<\tau\end{cases} \qquad (14)$$

3^0. *Якщо покласти* $\tau=\tau_1$, *а після чого* $\tau=\tau_2$ *у формулі (14), то одержимо функції* $\eta(t-\tau_1)$ *і* $\eta(t-\tau_2)$.

Розглянемо різницю одержаних одиничних функцій

$$\eta(t-\tau_1)-\eta(t-\tau_2)$$

де $\tau_1<\tau_2$. Ця різниця дає ступеневу функцію. Дійсно:

$$\eta(t-\tau_1)-\eta(t-\tau_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\,\frac{e^{-p\tau_2}-e^{-p\tau_1}}{p}dp=\begin{cases}0, & t<\tau_1,\\ 1, & \tau_1<\tau<\tau_2,\\ 0, & \tau>\tau_2.\end{cases}$$

7.2.1 Вивід формули обертання

Розглянемо оригінал $f(t)$. Зобразимо його ступеневою функцією. Для чого інтервал $[0,T]$ поділимо довільним чином на n частин і складаємо суму (*Рис. 2*)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\sum_{k=1}^{n-1} f(\tau_k)\frac{e^{-p\tau_k}-e^{-p\tau_{k+1}}}{p}dp =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k\right\}dp \qquad (15)$$

Одержану суму позначимо через $f_1(t)$:

$$f_1(t)=f(t_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left[e^{-p\tau_0}-e^{-p\tau_1}\right]dp+$$

$$+f(\tau_1)\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left[e^{-p\tau_1}-e^{-p\tau_2}\right]dp+$$

$$+f(\tau_2)\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left[e^{-p\tau_2}-e^{-p\tau_3}\right]dp+\dots$$

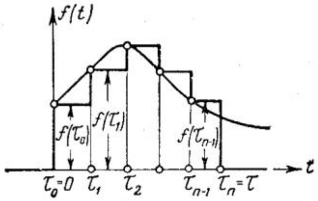


Рис. 2

Перший інтеграл у правій частині дорівнюється нулю, якщо $t<\tau_0$, дорівнює одиниці якщо $\tau<\tau_1$, і дорівнює нулю, якщо $t>\tau_1$; другий інтеграл дорівнює нулю, якщо $t<\tau_1$, дорівнює одиниці, якщо $\tau<\tau_2$, і дорівнює нулю, якщо $t>\tau_2$ і т.д. Отже, функція $f_1(t)$ ступенева. Якщо збільшити число поділок n так, щоб $\max\Delta\tau_k$ $(\Delta\tau_k=\tau_{k+1}-\tau_k)$ прямувало до нуля, то функція $f_1(t)$ буде прямувати до $f(t)$. Отже

$$e^{-p\tau_k}-e^{-p\tau_{k+1}}=e^{-p\tau_k}[1-e^{-p(\tau_{k+1}-\tau_k)}]=e^{-p\tau_k}[1-e^{-p\Delta\tau_k}]=$$

$$=e^{-p\tau_k}\left[p\Delta\tau_k-p^2\frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!}+p^3\frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!}-\dots\right]=e^{-p\tau_k}\;p\Delta'\tau_k$$

де

$$\Delta'\tau_k = \frac{1-e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \frac{\left(\Delta\tau_k\right)^2}{2!} + \frac{\left(\Delta\tau_k\right)^3}{3!} - \frac{\left(\Delta\tau_k\right)^4}{4!} + \dots$$

Таким чином

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k\right\}dp$$

Якщо перейти до границі при $n \to \infty$ то сума

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k \qquad (16)$$

перейде до інтеграла від функції $f(t)e^{-pt}$ від нуля до T. Таким чином сума (16) дасть інтегральне представлення оригінала $f(t)$ на інтервалі $\left[0,T\right]$, тобто

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\int_0^T f(\tau_1)e^{-p\tau_1}d\tau_1\right\}dp$$

Тепер, якщо $T \to \infty$, то внутрішній інтеграл можна позначити так

$$F(p) = \int_0^\infty f(\tau_1)e^{-p\tau_1}d\tau_1 \qquad (16)$$

який представляє собою перетворення Лапласа функції $f(t)$. Отже ми одержимо наступну формулу

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (17)$$

Формули (16) і (17) ***називаються формулами обертання.***

Слід зауважити, що формула обертання (17) була одержана не строго, оскільки переходили під знаком інтеграла без строгого обґрунтування.

Наступна теорема дає точний результат.

Теорема 3. ***Якщо функція*** $f(t)$ ***є оригіналом, тобто задовольняє умовам*** $1^0, 2^0, 3^0$***, і*** $F(p)$ ***є її зображенням, то у***

будь якій точці своєї неперервності функція $f(t)$ ***дорівнюється***

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (18)$$

де інтеграл береться вздовж деякої прямої $\operatorname{Re} p = a > s_0$ ***і вважається у розумінні головного значення***

► Дійсно, розглянемо інтеграл

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left\{\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right\}dp$$

Оскільки у півплощині $\operatorname{Re} p \ge a$ інтеграл $\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau$ збігається рівномірно відносно p, то можна змінити порядок інтегрування, і ми отримаємо:

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f(\tau)d\tau\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}dp=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{at}\int\limits_{-t}^\infty f(\xi+t)e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}d\xi$$

(ми замінили $\tau - t = \xi$). Позначимо $g(t)=f(t)e^{-at}$ і замінюючи в останньому інтегралі $b\xi=\eta$ і отримаємо:

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int\limits_{-bt}^\infty g\left(t+\frac{\eta}{b}\right)\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta$$

Оскільки t - точка непевності функції $f(t)$, то при фіксованому η існує $\lim\limits_{b\to\infty} g\left(t+\frac{\eta}{b}\right)=g(t)$; отримаємо:

$$f_b(t)=\int\limits_{-bt}^\infty \left\{g\left(t+\frac{\eta}{b}\right)-g(t)\right\}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta+\frac{1}{\pi}f(t)\int\limits_{-bt}^{+\infty}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta \qquad (19)$$

Приймаючи до уваги значення інтеграла Ейлера, $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi\right)$ то очевидно, що другий доданок в формулі (19) прямує до $f(t)$ при $b \to \infty$. Інтеграл першого доданка розбиваємо на три, які відповідають відрізкам $(-bt, -b_0 t)$, $(-b_0 t, B)$, (B, ∞). В силу збіжності інтеграла Ейлера і обмеженості функції $g(t)$ можна вибрати постійні b_0 і B настільки великими, що інтеграли на відрізках $(-bt, -b_0 t)$, де $b > b_0$ взяті довільно, і (B, ∞) менше будь якого наперед заданого числа $\frac{\varepsilon}{3}$. Фіксуючи ці постійні і збільшуючи b, ми досягнемо того, що інтеграл за відрізком $(-b_0 t, B)$ буде менше $\frac{\varepsilon}{3}$. Отже, перший доданок формули (19) прямує до нуля при $b \to \infty$ і, відповідно, $\lim\limits_{b \to \infty} f_b(t) = f(t)$, що і треба було довести. ◄

7.2.2. Умови, при яких $F(p)$ представляє собою зображення

Покажемо, що, якщо $F(p)$ є зображенням, то $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to \infty$. Оцінюючи модуль $F(p)$, одержимо:

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \le \frac{M}{s - s_0},$$

де $s = \operatorname{Re} p$ і s_0 - показник зростання функції $f(t)$. Звідси випливає, що якщо $s \to \infty$, то $F(p) \to 0$.

Отже, *умова* $F(p) \to 0$ *при* $\operatorname{Re} p \to \infty$ *є необхідною для того, щоб функція* $F(p)$ *була зображенням оригінала* $f(t)$.

Розглянемо теорему, яка встановлює достатні умови, щоб функція комплексної змінної $F(p)$ була зображенням деякого оригінала.

Теорема 4. 1^0. ***Функція*** $F(p)$ ***аналітична у півплощині*** $\operatorname{Re} p > s_0$***;***

2^0. $F(p)$ ***прямує до нуля при*** $|p| \to \infty$ ***рівномірно відносно*** $\arg p$ ***у будь якій півплощині*** $\operatorname{Re} p \ge a > s_0$***;***

3^0.***Інтеграл***

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp, \qquad a > s_0$$

абсолютно збігається, тоді $F(p)$ ***є зображенням функції***

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)dp \tag{20}$$

► Дійсно, зафіксуємо деяке число p_1, $\operatorname{Re} p_1 > a$, отже формулу (16) запишемо у вигляді:

$$\int_0^\infty e^{-p_1 t} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-p_1 t} \left\{ \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)dp \right\} dt \tag{21}$$

Оскільки у внутрішньому інтегралі $p = a + i\sigma$, $dp = id\sigma$, то можна винести за його знак множник e^{at}, а інтеграл, який залишився можна оцінити

$$\left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{i\sigma t} F(p)dp \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)| d\sigma$$

Звідси видно, що цей інтеграл збігається рівномірно відносно t. Отже у формулі (21) можна поміняти порядок інтегрування. Ми отримаємо:

$$\int_0^\infty e^{-p_1 t} f(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp \int_0^\infty e^{(p-p_1)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p - p_1} dp \tag{22}$$

Оскільки $\operatorname{Re}(p - p_1) < 0$ і $t > 0$ внутрішній інтеграл збігається і дорівнюється $-\dfrac{1}{p - p_1}$. Далі, за умовою теореми, на дузі кола

$C'_R : |p| = R,$ $\operatorname{Re} p > a$, маємо $\max|F(p)| = \alpha_R \to 0$ якщо $R \to \infty$. Отже, $\left| \int\limits_{C_R} \frac{F(p)}{p - p_1} dp \right| \le \frac{\alpha_R}{R - |p_1|} \pi R$

і цей інтеграл прямує до нуля при $R \to \infty$. Звідси випливає, що пряму інтегрування в (22) можна замінити замкненим контуром C_R, який складається з C_R то інтервалу $(a + ib, a - ib)$ рухаючись з верху до низу:

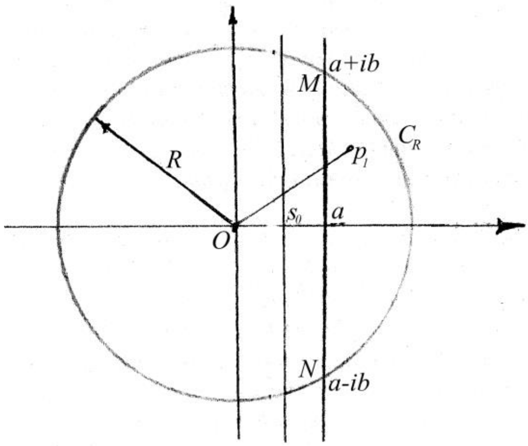


*Рис. 4**

$$\int\limits_0^\infty e^{-p_1 t} f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{F(p)}{p - p_1} dp$$

(якщо змінити напрямок обходу прямої то звільнимось від знаку „ - ”). Але в середині контура C_R аналітична функція $\frac{F(p)}{p - p_1}$ має лише одну сингулярну точку $p = p_1$ - полюс першого порядку з лишком $F(p_1)$; отже

$$\int\limits_0^\infty e^{-p_1 t} f(t) dt = F(p_1),$$

що і треба було довести. ◄

Зауваження. *Якщо* $t < 0$, *то за лемою Жордана*

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C'_R} e^{pt} F(p) dp = 0$$

Отже, пряму інтегрування у формулі (18) можна замінити тим же контуром C_R, що і вище. При $t<0$ одержимо

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{pt}F(p)dp=0$$

Оскільки підінтегральна функція аналітична в середині C_R, то умова 2^0 для оригінала виконується. Далі, з (18)

$$|f(t)|<\frac{1}{2\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(a+i\sigma)|d\sigma=Me^{at},$$

Отже, і умова 3^0 також виконується.

Приклади.

1^0. *Знайдемо зображення одиничної функції Хевісайда*

$$\eta_0(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

► За означенням перетворення Лапласа, отримаємо:

$$\eta_0(t)\div F(p)=\int_0^{\infty}e^{pt}dt=\frac{1}{p}.$$

Очевидно, функція $F(p)$ визначена у області $\operatorname{Re}p>0$. Отже

$$\eta_0(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}\div\frac{1}{p}.◄ \tag{23}$$

2^0. *Знайти зображення показникової функції* $f(t)=e^{at}$.

► $f(t)=e^{at}\div f(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}e^{at}dt=\dfrac{1}{p-a},\quad \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a,$

$$e^{at}\div\frac{1}{p-a},\quad \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a.◄ \tag{24}$$

3^0. *Знайти перетворення Лапласа функції*

$$f(t)=t^{\nu},\quad \nu>-1$$

► В цьому випадку, застосовуючи перетворення Лапласа ми одержимо:

$$f(t) = t^{\nu} \div F(p) = \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-pt} dt\,, \quad \operatorname{Re} p > 0 \qquad (25)$$

Інтеграл (25) збігається, якщо $\operatorname{Re} p > 0$ і $\nu > -1$. Тому зображення Лапласа цієї функції в області $\operatorname{Re} p > 0$ існує і визначається формулою (25) якщо $-1 < \nu < \infty$.

Обчислимо інтеграл (17). Розглянемо випадок коли p приймає дійсні значення $p = x > 0$. Виконуючи підстановку $s = xt$, ми отримаємо

$$F(x) = \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-st} dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}. \qquad (26^0)$$

де $\Gamma(\nu+1)$ - гама-функція Ейлера. Оскільки $F(p)$ визначається формулою (25) і аналітична в області $\operatorname{Re} p > 0$, і приймає значення (26^0) в додатній частині дійсної вісі $x > 0$. Оскільки функція $F(p)$ має єдине аналітичне продовження на область $\operatorname{Re} p > 0$, то отримаємо

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}.$$

тобто,

$$t^{\nu} \div \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \ \operatorname{Re} p > 0 \qquad (26)$$

Для цілих $\nu = n$ співвідношення (26) прийме вид

$$t^{n} \div \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \ \operatorname{Re} p > 0. \text{ ◄} \qquad (27)$$

§ 7.3. *Головні властивості перетворення Лапласа*

1^0. *Лінійна властивість.* *Якщо* $F_k(p) \div f_k(t)$ *при* $\operatorname{Re} p > s_k$ *(*s_k *- показник зростання функції* $f_k(t)$*), отже для будь якої постійної (дійсної або комплексної)* c_k $(k = \overline{1, n})$

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p) \div \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \qquad \operatorname{Re} p > \max s_k = s_0 . \ (28)$$

► Дійсно, за означенням перетворення Лапласа ми маємо

$$F_k(p) = \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt$$

Помножимо обидві частини даної рівності на c_k і, якщо знайдемо суму за індексом k обидві частини рівності, тоді отримаємо:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} \left(c_k f_k(t) \right) e^{-pt} dt$$

Звідси випливає (28) ◄

Приклади. *Знайти зображення тригонометричних і гіперболічних функцій*

а) $f(t) = \cos \omega t$ *; б)* $f(t) = \sin \omega t$ *;*

в) $f(t) = \cosh \omega t$ *;г)* $f(t) = \sinh \omega t$.

► *а)* Приймаючи до уваги показникову формою тригонометричних та гіперболічних функцій, тобто $f(t) = \cos \omega t = \dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ і застосовуючи формулу знаходження зображення, отримаємо:

$$F(p) = = \frac{1}{2} \int_o^{\infty} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_o^{\infty} \left(e^{(p-i\omega)t} + e^{-(p+i\omega)t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Отже, ми маємо

$$\cos\omega t \div \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

б) Оскільки $f(t)=\sinh\omega t = \dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$, тоді

$$F(p)=\frac{1}{2}\int_o^\infty\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right)e^{-pt}dt = \frac{1}{2}\int_o^\infty\left(e^{(p-i\omega)t}+e^{-(p+\omega)t}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

Звідси випливає

$$\sinh\omega t \div \frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

Аналогічно, оскільки

$$f(t)=\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \text{ і } f(t)=\cosh\omega t = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$$

То ми одержимо наступні зображення цих функцій

$$\sin\omega t \div \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \text{ і } \cosh\omega t \div \frac{p}{p^2-\omega^2}. \ ◄$$

2^0. *Теорема подібності.* *Якщо* $F(p)\div f(t)$ *при* $\operatorname{Re} p > s_0$ *і* $\lambda > 0$*, то*

$$f(\lambda t)\div\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \quad \operatorname{Re} p > s_0 \tag{29}$$

Тобто, множення аргумента оригінала на додатне число приводить до ділення зображення і аргумента зображення на це число

Дійсно, виконуючи підстановку $\lambda t=\tau$, $dt=\dfrac{1}{\lambda}d\tau$, ми маємо:

$$\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Отже, ми одержали формулу (29). ◄

Приклад. Нехай $f(t) = \sin t \div \dfrac{1}{p^2+1}$, тоді, застосовуючи формулу (29), одержимо:

$$► \ f(\lambda t) = \sin \lambda t \div \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)^2 + 1} = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}.$$

Ця формула, співпадає з формулою яку отримали за формулою визначення зображення. ◄

3⁰. *Диференціювання оригіналу.* *Якщо функція* $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ *і* $f'(t)$ *або в загалі* $f^{(n)}(t)$ *є оригінал, то*

$$f'(t) \div pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > s_0 \qquad (30)$$

або

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \operatorname{Re} p > s_0 \qquad (31)$$

де $f^{(k)}(0)$ *є правостороння границя* $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$

► Дійсно, за означенням зображення і інтегруючи за частинами, маємо:

$$f'(t) \div \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \left[f(t) e^{-pt} \right]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

Оскільки $\operatorname{Re} p = s > s_0$, маємо $\left| f(t) e^{-pt} \right| \le M e^{(s - s_0)t}$. Підставляючи $t = \infty$ у перший член одержимо нуль, а підстановка $t = 0$ очевидно дає, $-f(0)$; а другий член дорівнюється $pF(p)$ і формула (30) доведена.

Якщо $f''(t)$ існує і є оригіналом, тоді, використовуючи результат, який отримали для першої похідної маємо

$$f''(t) = \left[f'(t) \right]' \div p\left[pF(p) - f(0) \right] - f'(0) =$$

$$= p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

і т.д.

Застосовуючи метод повної математичної індукції отримаємо загальну формулу (31)

В окремому випадку, якщо початкові умови функції $f(t)$ дорівнюють нулю, тобто

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots f^{(n-1)}(0) = 0,$$

тоді формули (30) і (31) приймуть вид:

$$f'(t) \div pF(p) \tag{30*}$$

і

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) \ ◄ \tag{31*}$$

Тобто, в цьому випадку *диференціювання оригінала приводить до множення зображення на величину* p^n.

Зауваження. *Дослідимо формулу похідної* $f'(t)$, *якщо функція* $f(t)$ *має неперервність першого роду у точці* $t = t_0$. *У цьому випадку ми повинні інтегрувати наступним чином*

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int_0^{t_0} f'(t)e^{-pt}dt + \int_{t_0}^\infty f'(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \left[f(t)e^{-pt} \right]\Big|_0^{t_0} + p\int_0^{t_0} f(t)e^{-pt}dt + \left[f(t)e^{-pt} \right]\Big|_{t_0}^{\infty} + p\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= f(t-0)e^{-pt_0} - f(0) - f(t+0)e^{-pt_0} + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Звідси випливає:

$$f'(t) = pF(p) - f(0) + e^{-pt_0}\left[f(t-0) - f(t+0) \right].$$

Приклад. *Використовуючи зображення функції* $f(z) = \sin\omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ *знайти зображення* $f(z) = \cos\omega t$.

► Оскільки $(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$ і $\sin 0 = 0$, і за правилом диференціювання оригінала, отримаємо:

$$\omega\cos\omega t \div p \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \sin 0 = \omega \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

або

$$\cos\omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}. ◄$$

4^0. *Диференціювання зображення.* *Якщо,*

$$F(p) \div f(t), \qquad \operatorname{Re} p > s_0,$$

то

$$F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t). \tag{32}$$

Тобто, диференціювання зображення приводить до множення оригінала на $(-t)$.

► Дійсно, оскільки зображення $F(p)$ у півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ є аналітичною функцією, тоді можна диференціювати за параметром p, і ми одержимо:

$$F'(p) = \int_0^\infty (-t) f(t) e^{-pt} dt, \ F'(p) \div (-t) f(t)$$

$$F''(p) = \int_0^\infty (-t)^2 f(t) e^{-pt} dt, \ F''(p) \div (-t)^2 f(t)$$

В загальному випадку маємо:

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-pt} dt, \ F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t).$$

Ми отримали формулу (32). ◄

Приклади. *Знайти зображення функцій*

a) $f(t) = t \sin \omega t$, *b)* $f(t) = t \cos \omega t$, *c)* $t^n e^{at}$

► *a)* Оскільки $\sin \omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ і використовуючи правило диференціювання зображення, отримаємо

$$-t \sin \omega t \div \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)' = -\frac{2p\omega}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}, \ t \sin \omega t \div \frac{2p\omega}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}$$

b) За формулою $\cos \omega t \div \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$ і виконуючи ті ж самі операції знайдемо

$$-t \cos \omega t \div \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)' = \frac{p^2 + \omega^2 - 2p^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}, \ t \cos \omega t \div \frac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}.$$

c) За зображенням функції $e^{at} \div \dfrac{1}{p-a}$ і застосовуючи правило диференціювання зображення, маємо:

$$(-t)^n e^{at} \div \left(\frac{1}{p-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(t-a)^{n+1}}.$$

звідси

$$t^n e^{at} \div = \frac{n!}{(t-a)^{n+1}}. \blacktriangleleft$$

5⁰. *Інтегрування оригінала.* *Якщо* $F(p) \div f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. *Тоді*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p} \qquad \operatorname{Re} p > s_0 \qquad (33)$$

тобто, інтегрування оригінала приводить до ділення зображення на p.

► Покажемо, що, якщо функція $f(t)$ є оригіналом, то й функція $\varphi(t)$ є також оригіналом. Щоб довести, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умові 3^0 необхідно оцінити її, тобто

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f(\tau)|d\tau \le M\int_0^t e^{s_0\tau}d\tau = \frac{M}{s_0}\left(e^{s_0 t} - 1\right) \le M_1 e^{s_1 t},$$

де $s_0 \ne 0$, $s_0 \le s_1$, $s_1 > 0$. Якщо $s_0 = 0$, то $|\varphi(t)| \le Mt < Me^t$. Звідси випливає, що функція $\varphi(t)$ є оригінал. Тоді $\varphi(t)$ має зображення, яку позначимо $\Phi(p)$. Оскільки

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(\tau)d\tau = 0,$$

то, користуючись правилом диференціювання оригінала і приймаючи до уваги рівність

$$\varphi(t) \div \Phi(p)$$

Одержимо:

$$\varphi'(t) \div p\Phi(p).$$

Але

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau)d\tau \right)' = f(t),$$

тоді $f(t) \div p\Phi(p)$. За умовою теореми $f(t) \div F(p)$. Отже отримаємо:

$$p\Phi(p) = F(p), \qquad \Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

або

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}. \blacktriangleleft$$

Зауваження. *Нехай* $f(t) \div F(p)$, $\mathrm{Re}\, p > s_0$, *тоді:*

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n d\tau \div \frac{1}{p^n} F(p).$$

Приклад. *Знайти зображення степеневої функції* $f(t) = t^n$, *де* n *належить множині натуральних чисел.*

► Оскільки $1 \div \dfrac{1}{p}$ і, використовуючи правило інтегрування оригінала, одержимо:

$$\int_0^t 1d\tau \div \frac{1}{p^2}, \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2!} \div \frac{1}{p^3}, \ \ldots, \ \int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\tau = \frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Звідси випливає $f(t) = t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$. ◄

6⁰. ***Інтегрування зображення.*** *Якщо* $F(p) \div f(t)$, $R\mathrm{e}\, p > s_0$, *і функція* $\dfrac{f(t)}{t}$ *задовольняє умовам існування оригінала, і* $\int_p^\infty F(q)dq$ *збігається, тоді*

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = \int_p^\infty F(q)dq \qquad (34)$$

Причому, шлях інтегрування лежить у півплощині $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$, *де* s_0 *- показник зростання оригінала* $f(t)$, *тобто інтегрування зображення приводить до ділення оригінала на величину* t.

► Позначимо

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \qquad (35)$$

Функція $I(p)$ є аналітичною функцією в області $\operatorname{Re} p > s_0$ і $I(\infty) = 0$. Знайдемо похідну функції $I(p)$, диференціюючи за параметром p

$$I'(p) = -\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -F(p)$$

Звідси, враховуючи умову $I(\infty) = 0$, одержимо

$$I(\infty) - I(p) = -\int_p^\infty F(q) dq$$

Отже, одержана рівність доводить справедливість формули (34). ◄

Приклад. *Знайти зображення функції* $f(t) = \dfrac{\sin \omega t}{t}$.

► Використовуючи зображення функції $\sin \omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ і правило інтегрування зображення, одержимо:

$$\frac{\sin \omega t}{t} \div \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{p}{\omega} = \cot^{-1} \frac{p}{\omega}.$$

$$\frac{\sin \omega t}{t} \div \cot^{-1} \frac{p}{\omega}. \qquad (36)$$

Використовуючи властивість $\mathbf{5^0}$ ми одержимо зображення функції $f(t) = si\, t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ яку називають *інтегральним синусом , тобто*

$$si\,t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \div \frac{1}{p}\cot^{-1} p\,.◄ \qquad (37)$$

7⁰. *Теорема зміщення.* *Якщо* $F(p) \div f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, *і тоді для будь якого комплексного значення* p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \div F(p - p_0) \qquad (38)$$

тобто, зміщення аргументу зображення на величину p_0 *приводить до множення оригінала на величину* $e^{p_0 t}$.

► Дійсно, нехай $p_0 = s_1 + i\sigma_1$, тоді

$$\left|e^{p_0 t} f(t)\right| \le e^{s_1 t}\left|f(t)\right| \le Me^{(s_0+s_1)t}$$

Звідси, степінь зростання функції $e^{p_1 t} f(t)$ буде $s_0 + s_1$, тоді при $\operatorname{Re} p > s_0 + s_1$ існує зображення функції, тобто

$$e^{p_0 t} f(t) \div \int_0^\infty e^{p_0 t} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} f(t)dt = F(p - p_0)\,.$$

Остання формула доводить справедливість формули (38). ◄

Приклади. *Використовуючи теорему зміщення і відповідні зображення деяких елементарних функцій, можна знайти, що*

$$te^{p_0 t} \div \frac{1}{(p-p_0)^2}\,, \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$$

$$t^n e^{p_0 t} \div \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}} \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$$

$$e^{p_0 t}\sin\omega t \div \frac{\omega}{(p-p_0)^2 + \omega^2} \qquad \operatorname{Re} p > \left|\operatorname{Im}\omega\right| - \operatorname{Re} p_0$$

$$e^{p_0 t}\cos\omega t \div \frac{p-p_0}{(p-p_0)^2 + \omega^2} \qquad \operatorname{Re} p > \left|\operatorname{Im}\omega\right| - \operatorname{Re} p_0$$

8⁰. *Теорема запізнення.* *Якщо* $F(p) \div f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ *і* $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p) \qquad (39)$$

Тобто запізнення аргументу оригінала на додатну величину τ приводить до множення зображення на величину $e^{-p\tau}$.

► Нехай задана функція

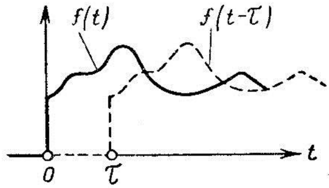


Рис. 3

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0, & if\ \tau>t,\\ f(t-\tau), & if\ t\geq\tau\end{cases}\ \textit{(Рис. 3)}$$

Оскільки $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$, тоді, вводячи нову змінну $t-\tau=t_1$, одержимо

$$f(t-\tau)\div\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1=e^{-p\tau}F(p).$$

Отже, ми отримали формулу (31). ◄

Приклад 1. *Знайти зображення функції Хевісайда*

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, & if\ t\leq\tau,\\ 1, & if\ t>\tau\end{cases}$$

► Ми знаємо, що $\eta(t)\div\frac{1}{p}$, тоді за теоремою запізнення, отримаємо $\eta(t-\tau)\div\frac{e^{-p\tau}}{p}$. ◄

Приклад 2. *Знайти зображення ступеневої функції графік якої заданий на (Рис. 4) при умові, що $A=f_0$.*

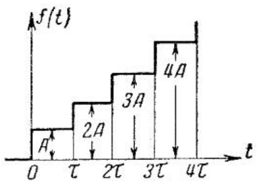


Рис. 4

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ nf_0, & n\tau\leq t<(n+1)\tau,\ n=1,2,...\end{cases}$$

► За допомогою функції Хевісайда функцію $f(t)$ можна записати у вигляді

$$f(t)=f_0(\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\eta(t-3\tau)+...+\eta(t-\tau)+...)$$

За теоремою запізнення, одержимо:

$$f(t)\div\frac{f_0}{p}\left(e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau}+...\right)$$

Праворуч, отримаємо співвідношення, яке представляє нескінченно спадну геометричну прогресію, тому що $\left|e^{-p\tau}\right| = e^{-p\tau} < 1$, отже $f(t) \div \frac{f_0}{p} \cdot \frac{e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}}$ ◄

9^0. *Зображення періодичного оригінала.* *Якщо* $f(t)$ *оригінал з періодом* $\omega > 0$*, то його зображення приме вид*

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{1-e^{-\omega p}} \qquad (41)$$

де

$$\varphi(p) = \int_0^\omega f(t)e^{-pt}dt$$

► $$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\omega f(t)e^{-pt}dt + \int_\omega^\infty f(t)e^{-pt}dt = \varphi(p) +$$

$$+\int_\omega^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

В останньому інтегралі замінюємо змінну t на змінну τ за формулою $t = \tau + \omega$ і користуючись рівністю $f(\tau+\omega) = f(\tau)$, одержимо:

$$F(p) = \varphi(p) + e^{-\omega p}\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \varphi(p) + e^{-\omega p}F(p)$$

Нарешті, $F(p) = \frac{\varphi(p)}{1-e^{-\omega p}}$. ◄

Приклад 1. *Знайти зображення функції* $f(t) = |\sin t|$.

► Оскільки $f(t) = |\sin t|$ - функція періодична з періодом $\omega = \pi$, то її зображення $F(p) = \frac{\varphi(p)}{1-e^{-\pi p}}$,

де

$$\varphi(p) = \int_0^\pi e^{-pt}|\sin t|dt = \int_0^\pi e^{-pt}\sin t dt$$

Після інтегрування за частинами, отримаємо:

$$\varphi(p) = -e^{-pt}\frac{\cos t + p\sin t}{p^2+1}\bigg|_0^{\pi} = \frac{e^{-\pi p}+1}{p^2+1}.$$

Отже,

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{e^{-\pi p}+1}{1-e^{-\pi p}} = \frac{1}{p^2+1}\cdot\coth\frac{\pi p}{2}. \blacktriangleleft$$

10^0. *Теорема множення (теорема Бореля).* *Якщо* $F(p)$ *і* $G(p)$ *- зображення функцій* $f(t)$ *і* $g(t)$, *тобто,* $F(p) \div f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_{01}$ *і* $G(p) \div g(t)$, $\operatorname{Re} p > s_{02}$, *то добуток двох зображень* $F(p)$ *і* $G(p)$ *також є зображенням, і*

$$F(p)\,G(p) \div \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \ \operatorname{Re} p > \max\left(s_{01}, s_{02}\right) \quad (42)$$

Зауважимо, що $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ *називають згорткою функцій* $f(t)$ і $g(t)$. Тому теорему множення можна сформулювати так: *множення зображень приводить до згортки оригіналів*

► Спочатку доведемо, що згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$ є оригінал. Нехай s_{01} є показник росту функції $f(t)$, а s_{02} - показник росту $g(t)$. Позначимо $s_0 = \max\left\{s_{01}, s_{02}\right\}$. Тоді

$$\left|f(\tau)g(t-\tau)\right| \le M_1 e^{s_{01}\tau}\cdot M_2 e^{s_{02}(t-\tau)} \le Me^{s_0\tau}\cdot e^{s_0(t-\tau)} = Me^{s_0 t}$$

Звідси випливає, що

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right| \le M\int_0^t e^{s_0\tau}d\tau = \frac{M}{s_0}\left(e^{s_0 t}-1\right) \le M_0 e^{s_0 t},$$

тобто, дійсно, згортка є оригіналом. Покладаємо $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ Для доведення тереми запишемо формулу Діріхле

$$\int_0^\infty dt\int_0^t \phi(\tau,t)d\tau = \int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty \phi(\tau,t)dt$$

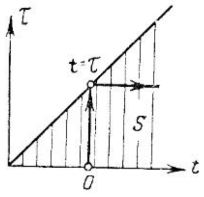


Рис. 4

При використанні цієї формули (*Рис. 4*), одержимо:

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau\left(\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt\right)$$

Підстановка $t-\tau = t_1$ у внутрішньому інтегралі приводить до виду

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \div \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty g(t_1)e^{-pt_1}dt_1 = F(p)\cdot G(p),$$

що і треба було довести. ◄

Приклад. *Знайти оригінал* $\varphi(t)$ *за його зображенням*

$$\Phi(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}$$

► Через те що $\dfrac{p}{p^2+1} \div \cos t$, то покладаючи у теоремі множення $F(p) = G(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ і $f(t) = g(t)$, одержимо

$$\varphi(t) = \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos t + \cos(2\tau - t)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tau\cos t + \frac{1}{2}\sin(2\tau - t)\right]\Bigg|_0^t = \frac{1}{2}\left(t\cos t + \sin t\right).◄$$

Зауваження. *Якщо звернути увагу на те, що функція* $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ *обертається у нуль при* $t = 0$*, то при застосуванні правило диференціювання оригінала, теорему множення можна записати наступним чином*

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)\div\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (*)$$

Вираз, який стоїть праворуч останньої рівності називають ***інтегралом Дюамеля***. Якщо виконати диференціювання у інтегралі Дюамеля, то теорема множення прийме вид

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)=f(0)G(p)+\left[pF(p)-f(0)\right]G(p)\div$$

$$\div f(0)g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (43)$$

Приймаючи до уваги властивість симетричності згортки, інтеграл можна записати у вигляді

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)\div f(0)g(t)+\int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau \qquad (44)$$

Якщо поміняти місцями функції $F(p)$ і $G(p)$, одержимо наступні формули

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)\div g(0)f(t)+\int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau=$$

$$=g(0)f(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \qquad 45)$$

11^0. *Теорема подвійності теоремі множення.*

Нехай задані два оригінали $f(t)$ і $g(t)$ з показниками зростання s_1 і s_2. Їх добуток також є оригіналом, причому

$$f(t)\cdot g(t)\div\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)G(p-q)dq \qquad (46)$$

де $a>s_1$ і $\operatorname{Re}p>s_2+a$.

► Дійсно, добуток $f(t)\cdot g(t)$, очевидно, задовольняє умовам 1^0-3^0 для оригіналів. Його зображення

$$f(t)g(t)\div\int_0^\infty f(t)g(t)e^{-pt}dt\,.$$

Візьмемо $a>s_1$ і замінимо $f(t)$ за формулою обертання:

$$f(t)g(t) \div \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt}dq\right\}g(t)e^{-pt}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)\left\{\int_0^{\infty} g(t)e^{-(p-q)t}dt\right\}dq\,.$$

(зміна порядку інтегрування можлива, тому що інтеграл абсолютно збіжний). Якщо вважати, що $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, то отримаємо $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$, тому що $\operatorname{Re} q = a$, і внутрішній інтеграл можна замінити на $G(p-q)$. Отже, теорема доведена. ◄

12^0. *Загальна теорема множення* . (Теорема Ефроса) *Нехай дано зображення* $F(p) \div f(t)$ *і такі аналітичні функції* $G(p)$ *і* $q(p)$, *що*

$$G(p)e^{-\tau q(p)} \div g(t;\tau)\,, \tag{47}$$

тоді

$$F\left[q(p)\right]G(p) \div \int_0^{\infty} f(\tau)g(t;\tau)d\tau \tag{48}$$

► Дійсно, зображення правої частини співвідношення (48) можна записати так:

$$\int_0^{\infty} f(\tau)g(t;\tau)d\tau \div \int_0^{\infty} e^{-pt}dt\int_0^{\infty} f(\tau)g(t;\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau\int_0^{\infty} g(t;\tau)e^{-pt}dt\,.$$

(вважаємо, що можна змінити порядок інтегрування). Але внутрішній інтеграл є зображення $g(t;\tau)$; Отже, використовуючи формулу (47), одержимо:

$$\int_0^{\infty} f(\tau)g(t;\tau)d\tau \div G(p)\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-q(p)\tau}d\tau = G(p)F\left[q(p)\right]$$

Теорема доведена. ◄

Зауваження. *Якщо, в окремому випадку, покласти* $q(p)=p$*, то* $g(t;\tau)\div e^{-p\tau}G(p)$ *і тоді за теоремою запізнення* $g(t;\tau)=g(t-\tau)$*. Отже, формула (48) прийме вид*

$$F(p)G(p)\div\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(при $\tau>t$ *за властивістю* 2^0 *оригіналів* $g(t-\tau)=0$*) і відповідно співпадає з формулою (42).* Таким чином, теорема Ефроса дійсно є узагальненням теореми множення.

Приклад 1. Нехай $G(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ і $q(p)=\sqrt{p}$. Функцію $g(t;\tau)$ знайдемо за формулою обертання

$$g(t;\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}.$$

Розглянемо замкнений контур, складений з відрізка $(a-ib,a+ib)$, дуг C'_R і C''_R кола $|p|=R$, двох берегів розрізу I, II і кола c_r: $|p|=r$ (*Рис. 5*). Усередині цього контура підінтегральна функція аналітична й однозначна (для визначеності вважаємо $-\pi<\arg p<\pi$). Тому, за теоремою Коші інтеграл вздовж відрізка $(a-ib,a+ib)$ можна замінити інтегралом вздовж контура, який залишився (напрямок інтегрування показано стрілками на (*Рис. 5*). Оскільки $\tau>0$, то на дугах C'_R і C''_R функція $\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}}\to 0$ при $R\to\infty$. Отже, за лемою Жордана при $\tau>0$ інтеграл від функції

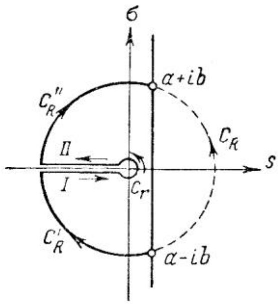


Рис. 5

$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\tau\sqrt{p}}$ вздовж C'_R і C''_R прямує до нуля при $R\to\infty$, і можна записати:

$$g(t;\tau)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_I e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}+\int_{c_r} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}+\int_{II} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}\right\}.$$

На березі I маємо $p=xe^{-i\pi}$, $\sqrt{p}=-i\sqrt{x}$, на березі II: $p=xe^{i\pi}$, $\sqrt{p}=i\sqrt{x}$; відповідно

$$\int_I e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}=\int_R^r e^{i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}},\quad \int_{II} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}=-\int_r^R e^{-i\tau\sqrt{x}-xt}\frac{dx}{i\sqrt{x}}.$$

Інтеграл вздовж дуги c_r, очевидно, прямує до нуля при $r\to 0$, оскільки $\left|\int_{c_r} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\frac{dp}{\sqrt{p}}\right|<\frac{M}{\sqrt{r}}2\pi r$. Таким чином,

$$g(t;\tau)=\int_0^\infty e^{-xt}\cos\tau\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-tu^2}\cos\tau u du=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$$

Тут, використавши підстановку $x=u^2$, і значення інтеграла Пуассона отримали:

$$\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\div\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \tag{49}$$

Тепер, нехай відомий оригінал функції $F(p)\div f(t)$. За співвідношенням (49) і за теоремою Ефроса ми можемо знайти оригінал функції $\frac{F\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}$ безпосередньо, тобто

$$\frac{F\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}\div\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau \tag{50}$$

Наприклад, покладаючи $F(p)=\frac{e^{-\alpha p}}{p}$ $(\alpha>0)$ за теоремою запізнення $f(t)=\eta(t-\alpha)$, і за формулою (50) отримаємо

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} \div \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega .$$

Тут ми скористалися тим, що $\eta(t-\alpha)=0$, при $t<\alpha$, і підстановку $\frac{\tau}{2\sqrt{t}}=\omega$, а також приймаючи до уваги функції Хартрі

$$erf\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{u^2} u\,; \qquad 1-erf\,x = erfc x\,, \tag{51}$$

і властивість $erf\,\infty=1$, то, остання формула може бути записана у вигляді:

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} \div 1-erf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \tag{52}$$

Приклад 2. Нехай $G(p)=\frac{1}{p}$, $q(p)=\sqrt{p}$, тоді ми маємо:

$$g(t;\tau) \div \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} .$$

Приймаючи до уваги результат попереднього прикладу, тобто

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \div \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

і застосувавши теорему згортки, ми одержимо:

$$g(t;\tau) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-t_1)}} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t_1}}}{\sqrt{\pi t_1}} dt_1$$

Помінявши змінну інтегрування за формулою $z=\sqrt{\frac{t-t_1}{t_1}}$, інтеграл прийме вид:

$$g(t;\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}z^2} \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \cdot \frac{dz}{z^2+1} \qquad (53)$$

Обчислимо інтеграл

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2}dz, \qquad \alpha > 0.$$

Після диференціювання за параметром α, маємо:

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty \frac{z^2 e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2}dz = -\int_0^\infty e^{-\alpha z^2}dz + \int_0^\infty \frac{\beta^2 e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2}dz .$$

Отже, ми одержали диференціальне рівняння виду:

$$I'(\alpha) - \beta^2 I(\alpha) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

з початковою умовою

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}$$

Розв'язок рівняння має вид

$$I(\alpha) = e^{\beta^2\alpha}\left[\frac{\pi}{2\beta} - \int_0^\alpha e^{-\beta^2\xi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\xi}d\xi\right] = e^{\beta^2\alpha}\left[\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\int_0^{\beta\sqrt{\alpha}} e^{-z^2}dz\right] =$$

$$= e^{\beta^2\alpha}\left[\frac{\pi}{2\beta} - \frac{\pi}{2\beta}erf\,\beta\sqrt{\alpha}\right] = \frac{\pi}{2\beta}e^{\beta^2\alpha}erfc\,\beta\sqrt{\alpha}$$

отже

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2}dz = \frac{\pi}{2\beta}e^{\beta^2\alpha}erfc\,\beta\sqrt{\alpha} \qquad (54)$$

Покладаючи $\beta = 1, \alpha = \frac{\tau^2}{4t}$, то формула (54) прийме вид:

$$g(t;\tau) = erfc\frac{\tau}{2\sqrt{t}},$$

відповідно, за теоремою Ефроса одержимо:

$$\frac{F\left(\sqrt{p}\right)}{p} \div \int_0^\infty f(\tau) erfc\frac{\tau}{2\sqrt{t}} d\tau \qquad (55)$$

Використовуючи теорему про диференціювання оригінала, отримаємо оригінал функції $F(\sqrt{p})$:

$$F\left(\sqrt{p}\right) \div \int_0^\infty \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau) d\tau \qquad (56)$$

Приклад 3. *Нехай* $F\left(p\right) = \frac{e^{-\alpha p}}{b+p}$. *Знайти оригінал даного зображення.*

► Оскільки $\frac{1}{p} \div \eta(t)$, $\frac{1}{p+b} \div e^{-bt}\eta(t)$ і

$$F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{b+p} \div e^{-b(t-\alpha)}\eta(t-\alpha) = f(t),$$

Приймаючи до уваги формулу (56) , отримаємо:

$$F\left(\sqrt{p}\right) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{b+\sqrt{p}} \div \int_0^\infty e^{-b(\tau-\alpha)}\eta(\tau-\alpha) \cdot \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau =$$

$$\int_\alpha^\infty \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}} e^{-\frac{\tau^2}{4t} - b(\tau-\alpha)} d\tau = e^{b\alpha+b^2t} \int_\alpha^\infty \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}} e^{-\frac{(\tau+2bt)^2}{4t}} d\tau .$$

Міняючи змінну інтегрування та використовуючи позначення $z = \frac{\tau+2bt}{2\sqrt{t}}$ будемо мати:

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{b+\sqrt{p}} \div e^{b\alpha+b^2t} \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}}^\infty \left(z - b\sqrt{t}\right) e^{-z^2} dz =$$

$$= e^{b\alpha+b^2t} \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \left[-\frac{1}{2} e^{-z^2} \Big|_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}}^\infty - b\sqrt{t} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) \right] =$$

$$e^{b\alpha+b^2t}\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4t}-\alpha b-b^2t}-e^{b\alpha+b^2t}\frac{2}{\sqrt{\pi t}}b\sqrt{t}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right).$$

Нарешті ми одержимо

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{b+\sqrt{p}}\div\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}-be^{b\alpha+b^2t}erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right) \qquad (57)$$

§ 7.4. Теореми розвинення

Теорема 1. ***(Перша теорема розвинення)*** *Якщо ряд* $F(p)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}$ *збігається для деякого скінченного* p_0, *то: 1)він збігається і при всіх* p, *для яких* $|p|>r$, *де* r *деяке додатне число; 2) ряд* $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}t^k$ *збігається при* $t\ge 0$*; 3) сума ряду* $F(p)$ *першого ряду є зображення суми* $f(t)$ *другого ряду.*

► Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}$ - степеневий відносно величини $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_0}\ne 0$, то він має радіус збіжності $R>0$. Це означає, що ряд збігається при будь якому p, яке задовольняє умові $\left|\frac{1}{p}\right|<r$, або, інакше, для якого $|p|>\frac{1}{r}=R$. Візьмемо деяке p таке, що задовольняє нерівності $\left|\frac{1}{\rho}\right|=\frac{1}{\rho}<R$. Оскільки ряд, який розглядаємо, збігається абсолютно в області його збіжності, тоді збігається і ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\rho^{k+1}}$. Відомо, що загальний член $\frac{a_n}{\rho^{n+1}}$ ряду, який збігається прямує до нуля при $n\to\infty$,

Тому починаючи з деякого n, виконується нерівність $\left|\dfrac{a_n}{\rho^{n+1}}\right| < M$, або $|a_n| < M\rho^{n+1}$, де $M -$ постійна величина.

Повернемося тепер до ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{c_k}{k!}t^k$ при $t > 0$. Користуючись отриманою нерівністю,маємо:

$$\left|\frac{c_n}{n!}t^n\right| < \frac{M\rho^{n+1}}{n!}t^n = M\rho\frac{(\rho t)^n}{n!}$$

Але ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\rho\dfrac{(\rho t)^n}{n!}$ є рядом Тейлора для функції $e^{\rho t}$, який збігається при всіх t, отже за ознакою порівняння, збігається і ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{c_k}{k!}t^k$ при всіх t. Позначимо його суму через $f(t)$. Функція $f(t)$, як сума степеневого ряду, що збігається при будь якому t, є диференційованою функцією (і при тому скільки завгодно разів) при всіх t. Крім того,

$$|f(t)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!}t^k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k|}{k!}t^k < \sum_{k=0}^{\infty}M\rho\frac{(\rho t)^k}{k!}t^k = M\rho e^{\rho t} = M_1 e^{\rho t}$$

Отже, виявляється, що функція $f(t)$, є оригіналом і має зображення, яке виражається формулою

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N f(t)e^{-pt}dt\ .◄$$

Приклад . *Нехай задане зображення*

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$$

де n *- деяке ціле число.*

► Очевидно, що функція $F(p)$ задовольняє умовам першої тереми розвинення. Можна формально перейти до оригінала

$$F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{p^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{p^{k+n+1}}.$$

Отже, ми маємо

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{t^{k+n}}{(k+n)!}$$

Одержаний ряд нагадує розвинення циліндричної функції $J_n(t)$. Щоб звести його до цієї функції покладаємо $t=\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$, тоді

$$f(t)=\left(\frac{\tau}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\cdot\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k+n}=\left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau)=t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})$$

Отже, ми маємо:

$$t^{n/2}J_n(2\sqrt{t})\div\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$$

У окремому випадку, при $n=0$

$$J_0(2\sqrt{t})\div\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}\ ◀$$

Теорема 2. (*Друга теорема розвинення*).

Нехай функція $F(p)$ задовольняє наступним умовам:

1) $F(p)$ є правильною функцією у деякій півплощині $\operatorname{Re} p>s_0$, тобто у цій півплощині вона не має сингулярних точок і прямує до нуля при $p\to\infty$;

2) $F(p)$ є мероморфною функцією у півплощині $\operatorname{Re} p\le s_0$, тобто у скінченній частині цієї півплощини функція $F(p)$ не має інших сингулярних точок крім полюсів;

3) існує система кіл $C_n:|p|=R_n$, $R_1<R_2<\dots R_n\to\infty$, на яких функція $F(p)$ прямує до нуля рівномірно відносно аргументу $\arg p$;

4) для будь якого $a > s_0$ абсолютно збігається інтеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$, тоді оригіналом функції $F(p)$ буде (помножена на $\eta(t)$) функція

$$f(t) = \sum_k r_k(t) \qquad (58)$$

де $r_k = res\left[e^{pt}F(p), p = p_k\right]$ - лишки функції $e^{pt}F(p)$ у сингулярних точках p_k функції $F(p)$.

► Оскільки функція $F(p)$ задовольняє всім умовам зображення, то оригінал $f(t)$ виражається формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (59)$$

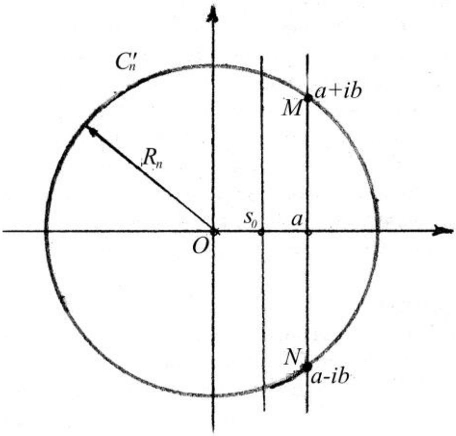


Рис. 6

Позначимо через C'_n частину кола C_n, яка розташована ліворуч від прямої $\operatorname{Re} p = a$, через $a \pm ib$ - точки перетину кола C_n з цією прямою і через $\overline{C_n}$ - замкнений контур, який складається із відрізка MN і C'_n, причому контур C_n вибираємо таким, щоб він не проходив через полюси (*Рис. 6*).

За лемою Жордана

$$\lim_{R_n \to \infty} \int\limits_{C'_n} e^{pt}F(p)dp = 0$$

тоді рівність (59) можна записати так:

$$f(t)=\lim_{R_n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}e^{pt}F(p)dp+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n}e^{pt}F(p)dp\right]$$

Звідси

$$f(t)=\lim_{R_n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C_n}}e^{pt}F(p)dp\right] \qquad (60)$$

Підінтегральна функція аналітична всередині замкненого контура крім сингулярних точок, які є полюси. За теоремою про лишки, випливає:

$$\int_{\overline{C_n}}e^{pt}F(p)dp=2\pi i\sum_k res\left[e^{pt}F(p)\right]_{p=p_k} \qquad (61)$$

Підставляючи (61) у (60), одержимо (58). Отже, теорема доведена. ◄

Приклади.

1. *Нехай дана функція* $F(p)=\frac{1}{p}$.

► Функція $F(p)=\frac{1}{p}$ аналітична у півплощині $\operatorname{Re}p>s_0$, і її аналітичне продовження у лівій півплощині $\operatorname{Re}p\le s_0$ буде мати той же вид $F(p)=\frac{1}{p}$. Аналітично продовжена функція має єдиний полюс $p_1=0$ у початку координат і задовольняє всім умовам другої теореми розвинення. За цією теоремою

$$f(t)=r_1(t)=res\left[e^{pt}\cdot\frac{1}{p}\right]_{p=0}=\lim_{p\to0}p\cdot\frac{1}{p}\cdot e^{pt}=1.$$

Отже,

$$\frac{1}{p}\div1. \text{ ◄}$$

2. *Нехай* $F(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

► Аналітично продовжена функція $F(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ на всю комплексну площину у початку координат має єдиний полюс $n+1$ порядку, тому

$$f(t)=res\left[\frac{n!}{p^{n+1}}e^{pt}\right]_{p=0}=\frac{1}{n!}\lim_{p\to 0}\frac{d^n}{dp^n}\left[p^{n+1}\cdot\frac{n!}{p^{n+1}}\cdot e^{pt}\right]=t^n.$$

Таким чином

$$\frac{n!}{p^{n+1}}\div t^n. \blacktriangleleft$$

3. *Нехай* $F(p)=\dfrac{1}{p-a}$.

► Аналітичне продовження цієї функції має єдиний простий полюс у точці $p=a$, отже

$$f(t)=res\left[e^{pt}\cdot\frac{1}{p-a}\right]_{p=a}=\lim_{p\to a}\left[(p-a)\cdot\frac{1}{(p-a)}\cdot e^{pt}\right]=e^{at}.$$

Оригіналом даної функції є показникова функція

$$\frac{1}{p-a}\div e^{at}. \blacktriangleleft$$

4. *Дана функція* $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, *де* $\omega=const$

► Аналітичне продовження цієї функції має два простих полюса $p_1=i\omega$ і $p_2=-i\omega$. У цьому випадку:

$$F(p)=\sum_{k=1}^{2}r_k(t)=res\left[e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]_{p=i\omega}+res\left[e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]_{p=-i\omega}=$$

$$=+\left.\frac{\omega e^{pt}}{2p}\right|_{p=\omega i}+\left.\frac{\omega e^{pt}}{2p}\right|_{p=-\omega i}=\frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega}-\frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega}=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}=\sin\omega t.$$

Отже, функція $f(t)=\sin\omega t$ є оригіналом даної функції. Звідси

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \div \sin\omega t$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} \div \cos\omega t . \blacktriangleleft$$

5. *Знайти оригінал функції* $F(p)=\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$*, де* $\omega = const$.

► Аналітичне продовження даної функції має два простих полюса $p_1=\omega$ і $p_2=-\omega$, тому

$$f(t)=res\left[e^{pt}\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]_{p=\omega}+res\left[e^{pt}\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]_{p=-\omega}=$$

$$=\left[\frac{pe^{pt}}{2p}\right]_{p=\omega}+\left[\frac{pe^{pt}}{2p}\right]_{p=\omega}=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}=\cosh\omega t .$$

Отже

$$\frac{p}{p^2-\omega^2} \div \cosh\omega t .$$

Аналогічно дії приводять до знаходження оригінала функції $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$, тобто

$$\frac{\omega}{p^2-\omega^2} \div \sinh\omega t . \blacktriangleleft$$

Наслідок. *Якщо функція* $F(p)$ *є правильною раціональною функцією, тобто*

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{a_0p^m+a_1p^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+\ldots+b_n}$$

То оригінал функції $F(p)$ *буде (помножена на* $\eta(t)$*) функцією*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left[F(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\right], \qquad (62)$$

де p_k *- полюси, а* n_k *- їх кратність і сума береться за всіма полюсами.*

В окремому випадку, *якщо полюси* $F(p)$ *- прості полюси, тоді формула (62) спрощується і має наступний вид:*

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \sum_{k=1}^{l} \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} \qquad (63)$$

У прикладних задачах (в основному у електротехнічних) важливий різновид цієї формули, яка відноситься до випадку, коли зображення має вид $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{pF_2(p)}$, де степінь $F_1(p)$ не перевищує степеня $F_2(p)$ і $F_2(p)$ має прості корені, які відмінні від нуля, В цьому випадку замість (63), очевидно, отримаємо

$$\frac{F_1(p)}{pF_2(p)} \div \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{F_1(p_k)}{p_k F'_2(p_k)} e^{p_k t} \qquad (64)$$

Зауваження. *Якщо многочлен* $F_2(p)$ *має дійсні коефіцієнти, то кожному комплексному кореню* p *відповідає комплексно-спряжений корінь* $\overline{p}$. *Дійсно,*

$$F_2(\overline{p}) = b_0 \overline{p}^n + b_1 \overline{p}^{n-1} + \ldots + b_n = \overline{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n} =$$
$$= \overline{F_2(p)} = 0.$$

Якщо, крім того многочлен $F_1(p)$ має дійсні коефіцієнти, то

$$\frac{F_1(\overline{p})}{F'_2(\overline{p})} e^{\overline{p}t} = \overline{\frac{F_1(p)}{F'_2(p)} e^{pt}}$$

і, відповідно, сума виразів $\dfrac{F_1(p)}{F'_2(p)} e^{pt}$, *які підраховані для коренів* $p = p_k$ і $p = \overline{p}_k$ буде дорівнювати $2\,\mathrm{Re}\dfrac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}$.

Таким чином, *якщо многочлени* $F_1(p)$ *і* $F_2(p)$ *мають дійсні коефіцієнти то формулу (63) можна подати у вигляді*

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \sum \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} + 2\,\mathrm{Re} \sum \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t} \qquad (65)$$

де перша сума розповсюджується на всі дійсні корені $F_2(p)$, *а друга – на всі комплексні корені з додатними уявними частинами.*

Приклад. *Знайти оригінал* $f(t)$ *зображення*

$$F(p) = \frac{p^2+1}{p^4-3p^3+4p^2-12p}$$

► $F_1(p) = p^2+1$; $F_2(p) = p^4-3p^3+4p^2-12p =$

$= p(p-3)(p^2+4)$;

$F'_2(p) = (p-3)(p^2+4) + p(p^2+4) + 2p^2(p-3)$;

$p_1 = 0$; $p_2 = 3$; $p_3 = 2i$; $p_4 = 2i$;

$F_1(0) = 1$; $F_1(3) = 10$; $F_1(2i) = -3$; $F_1(-2i) = -3$;

$F'_2(0) = -12$; $F'_2(3) = 30$; $F'_2(2i) = 24-16i$;

$F'_2(-2i) = 24+16i$.

Використовуючи другу теорему про розклад, одержимо

$$f(t) = -\frac{1}{12} + \frac{10}{39}e^{3t} - \frac{3}{24-16i}e^{2it} - \frac{3}{24+16i}e^{-2it} =$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{10}{39}e^{3t} - \frac{3}{104}\left[(3+2i)e^{2it} + (3-2i)e^{-2it}\right] =$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{10}{39}e^{3t} - \frac{3}{104}\left[3\left(e^{2it}+e^{-2it}\right) + 2i\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{10}{39}e^{3t} - \frac{9}{52}\cos 2t + \frac{3}{26}\sin 2t.$$ ◄

§ 7.5. *Таблиця властивостей перетворень.*

1)	$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \quad C_k = const;$
2)	$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right);$
3)	$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & \tau > t, \\ f(t-\tau), & \tau \le t, \end{cases} \quad f_\tau(t) \div e^{p\tau} F(p);$
4)	$f^{(n)}(t) \div p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right];$
5)	$\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{1}{p} F(p);$
6)	$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \div F(p) G(p);$
7)	$F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t);$
8)	$\int_p^\infty F(q) dq \div \frac{f(t)}{t};$
9)	$F(p+\lambda) \div e^{-\lambda t} f(t).$

§ 7.6. *Таблиця перетворень Лапласа деяких функцій*

№	$f(t)$	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$
1)	1	$\frac{1}{p};$
2	t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0;$

3)	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re} p > 0$;
4)	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$ $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$;
5)	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$;
6)	$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$;
7)	$\sinh \omega t$	$\dfrac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$;
8)	$\cosh \lambda t$	$\dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$;
9)	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$;
10)	$t^n \sin \omega t$	$n! \dfrac{\operatorname{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$;
11)	$t^n \cos \omega t$	$n! \dfrac{\operatorname{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \lvert \operatorname{Im} \omega \rvert$;
12)	$e^{-at} \cos(\omega t + b)$	$\dfrac{(p+a)\cos b - \omega \sin b}{(p+a)^2+\omega^2}$;
13)	$e^{-at} \sin(\omega t + b)$	$\dfrac{\omega \cos b + (p+a)\sin b}{(p+a)^2+\omega^2}$;
14)	$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > (\lvert \operatorname{Im} \omega \rvert + \operatorname{Re} a)$;
15)	$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{(p-a)}{(p-a)^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > (\lvert \operatorname{Im} \omega \rvert + \operatorname{Re} a)$;
16)	$\dfrac{\sin \omega t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} \dfrac{p}{\omega}$;

17)	$\begin{cases} 1, & 2k\tau \le t < (2k+1)\tau, \\ -1, & (2k+1)\tau \le t < (2k+2)\tau \end{cases}$	$\dfrac{1}{p}\tanh\dfrac{p\tau}{2}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $k = 0,1,2,,...$
18)	$\lvert\sin\omega t\rvert$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\coth\dfrac{p\pi}{2\omega}$, $\operatorname{Re} p > \lvert\operatorname{Im}\omega\rvert$;
19)	$e^{-a^2t^2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{2a^2}}erfc\left(\dfrac{p}{2a}\right)$;
20)	$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p+a}}$;
21)	$\dfrac{e^{-2a\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}erfc\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)$;
22)	$J_0(at)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$;
23)	$J_0(2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$;
24)	$J_n(t)$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$;
25)	$si\,t$	$\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}p\right)$;
26)	$erf\left(\sqrt{at}\right)$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{p}\sqrt{p+a}}$;
27)	$erfc\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$;
28)	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$;

29)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$;
30)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t erfc\left(\sqrt{t}\right)$	$\frac{1}{1+\sqrt{t}}$.

Зауваження:

Тут $erf\ u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-z^2} dz$; $erfc\, u = 1 - erf\ u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-z^2} dz$.

Практичні заняття 7.1

Знайти перетворення наступних функцій

a) *застосовуючи означення:*

1) $f(t) = t$, 2) $f(t) = \sin 3t$, 3) $f(t) = te^t$, 4) $f(t) = t^n$;

b) *застосовуючи теореми лінійності і подібності:*

1) $f(t) = e^{at}$, 2) $f(t) = \sin 4t$, 3) $f(t) = \cos 7t$,

4) $f(t) = \sinh 5t$, 5) $f(t) = \cos^3 t$, 6) $f(t) = \sin^2 t$,

7) $f(t) = \cos^2 t$, 8) $f(t) = \cos nt \sin mt$

9) $f(t) = \cos nt \cos mt$, 10) $f(t) = \sin nt \sin mt$;

c) *застосовуючи теорему диференціювання оригіналу:*

1) $f(t) = \cos^2 t$, 2) $f(t) = \sin^3 t$, 3) $f(t) = \cos^4 t$

4) $f(t) = te^{4t}$, 5) $f(t) = t\cos \omega t$, 6) $f(t) = t\sin \omega t$;

d) *Користуючись теоремою диференціювання зображення:*

1) $f(t) = t^2 \cos t$, 2) $f(t) = t(e^t + \cosh t)$,

3) $f(t) = t s \sinh 3t$,4) $f(t) = (t+1)\sin 2t$.

Практичні заняття - 7.2

1. Знайти перетворення наступних функцій

a) використовуючи теорему інтегрування оригіналу:

1) $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$ 2) $f(t)=\int\limits_0^t (t+1)\cos\omega\tau d\tau$,

3) $f(t)=\int\limits_0^t \cosh\omega\tau d\tau$, 4) $f(t)=\int\limits_0^t t\sinh 2\tau d\tau$,

5) $f(t)=\int\limits_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$, 6) $f(t)=\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

Приклад. *Знайти перетворення функції* $f(t)=\int\limits_0^t \sin^2\tau d\tau$.

► Ми маємо $\sin^2 t \div \dfrac{2}{p(p^2+1)}$. Користуючись теоремою інтегрування оригінала, отримаємо:

$$f(t)=\int\limits_0^t \sin^2\tau d\tau \div \frac{\dfrac{2}{p(p^2+4)}}{p}=\frac{2}{p^2(p^2+4)}.$$ ◄

b) використовуючи терему інтегрування зображення:

1) $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$ 2) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$, 3) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$,

4) $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$, 5) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$,

6) $f(t)=\dfrac{e^t-1-t}{t}$, 7) $f(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{t}$.

Приклад. *Знайти зображення функцій* $f(t)=\dfrac{\sin^2\omega t}{t}$.

► Оскільки ми знаємо, що $\sin^2 \omega t \div \dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$, тоді

$$f(t)=\frac{\sin^2 \omega t}{t} \div \int_p^{\infty} \frac{2\omega^2}{(q^2+4\omega^2)}dq = 2\omega^2 \int_p^{\infty} \frac{1}{(q^2+4\omega^2)}dq =$$

$$=\omega \tan^{-1} \frac{q}{2\omega}\Bigg|_p^{\infty} = \omega\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{p}{\omega}\right) = \omega \cot \frac{p}{2\omega} \blacktriangleleft$$

c) Використовуючи теорему зміщення

1) $f(t)=e^{2t}\sin t$, *2)* $f(t)=e^{t}\cos nt$, *3)* $f(t)=e^{-t}t^2$,

4) $f(t)=e^{t}\sinh t$, *5)* $f(t)=te^{t}\cos t$, *6)* $f(t)=e^{3t}\sin^2 t$,

7) $f(t)=e^{-\alpha t}\cos^2 \beta t$

Приклад. *Знайти зображення функції* $f(t)=e^{-t}\cos 2t$.

► Так як відомо, що $\cos 2t \div \dfrac{p}{p^2+4}$. Використовуючи теорему зміщення $(p_0=-1)$, одержимо

$$f(t)=e^{-t}\cos 2t \div \frac{p+1}{(p+1)^2+4}. \blacktriangleleft$$

d) Використовуючи теорему запізнення:

1) $f(t)=\sin(t-b)\eta(t-b)$, *2)* $f(t)=\cos^2(t-b)\eta(t-b)$,

3) $f(t)=e^{t-2}\eta(t-2)$

Приклад. *Знайти зображення функції* $f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1)$.

► Для функції $f(t)=t^2\eta(t)$ маємо зображення

$$f(t)\div\frac{2}{p^2}$$

За теоремою запізнення ($f(t-\tau)\div e^{-p\tau}F(p)$) маємо:

$$f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1)\div e^{-p}\frac{2}{p^2}.$$

Дуже важливо, що ми знайшли зображення функції $f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1)$. Ця функція дорівнює нулю при $t<1$ Розглянемо функцію $f_1(t)=(t^2-2p+1)\eta(t)$. Користуючись властивістю лінійності, одержимо:

$$f_1(t)=(t^2-2p+1)\eta(t)\div\frac{2!}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p} \blacktriangleleft$$

Зауваження. *Використовуючи теорему інтегрування зображення, необхідно буде обчислювати невласні інтеграли першого роду.*

Нехай $f(t)\div F(p)$ *і невласний інтеграл* $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ *збігається, тоді*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp \qquad (*)$$

2. Обчислити інтеграли :

1) $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \qquad (a>0,\quad b>0)$,

2) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt \qquad (a>0,\quad \alpha>0)$,

3) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}\sin mtdt \qquad (\alpha>0,\quad \beta>0,\quad m>0)$,

4) $\int_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha t}+Be^{-\beta t}+Ce^{-\gamma t}+De^{-\delta t}}{t}dt$,

$(A+B+C+D=0,\quad \alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma>0,\quad \delta>0)$,

5) $\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt$, $\qquad (a>0,\quad b>0)$,

6) $\int_0^\infty \frac{\sin at\sin bt}{t}dt$, $\qquad (a>0,\quad b>0)$.

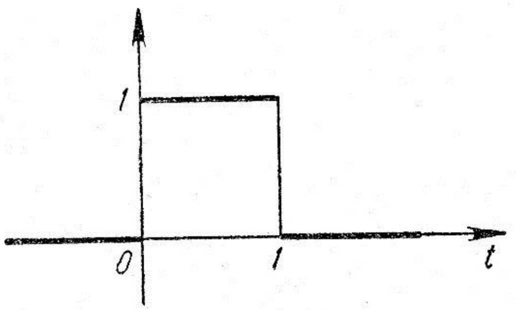
Приклад. *Обчислити інтеграл* $\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t} dt$.

► Ми знаємо, що $\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Використовуючи формулу (*) одержимо

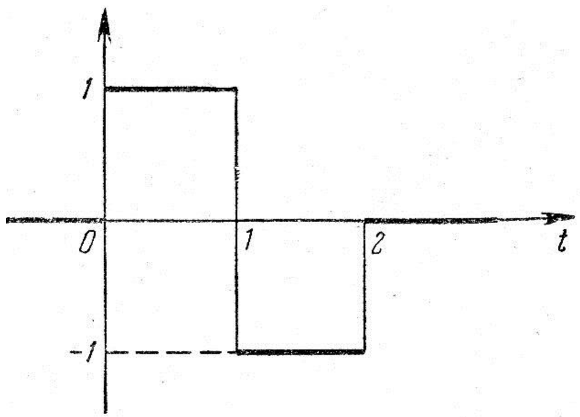
$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \tan^{-1} \frac{p}{\omega}\Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2}. ◄$$

3. ***Знайти зображення функцій, заданих графічно***

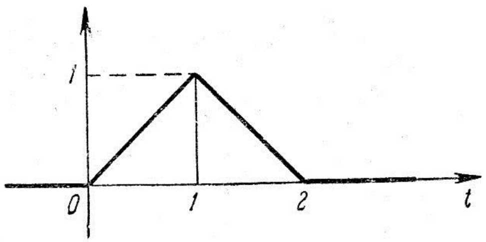
1)



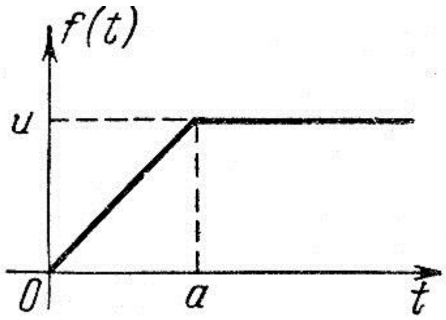
2)



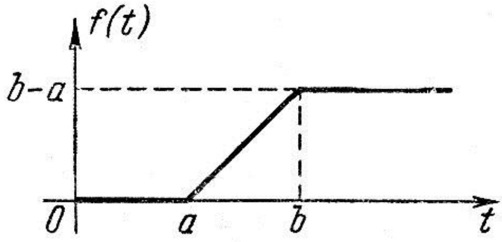
3)



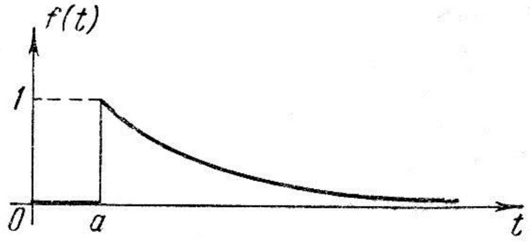
4)



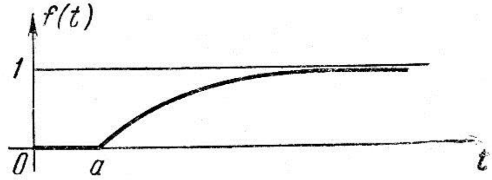
5)



6) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 \le t \le a, \\ e^{-b(t-a)}, & \text{якщо} \quad t > a. \end{cases}$

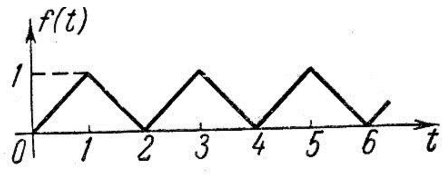


7) $f(t) = \begin{cases} 0, & якщо \quad 0 \le t \le a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & якщо \quad t > a. \end{cases}$

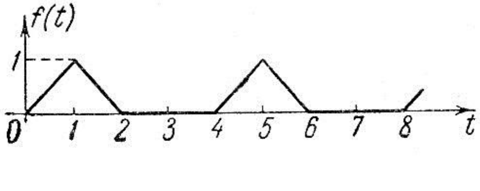


3) Знайти зображення наступних періодичних функцій

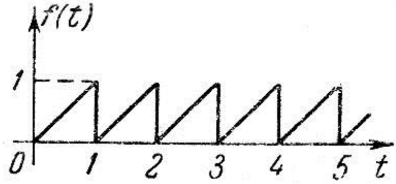
1)



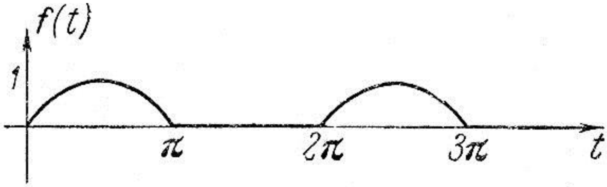
2)



3)



4) $f(t)=\begin{cases}\sin t, \ \textit{якщо}\ 2k\pi < t < (2k+1)\pi, \\ 0, \quad \textit{якщо}\ (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi\end{cases} \quad (k=0,1,2,...)$



Практичні заняття - 7.3

Знайти оригінали для даних зображень

1) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$	2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$
3) $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$	4) $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$
5) $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$	6) $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$
7) $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2)}{p^5+2p^4+2p^3}$	8) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$
9) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p^2+4)}$	10) $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$
11) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$	12) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$

13) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$	14) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$
15) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^2-2p^2+2p-1}$	16) $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$
17) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$	18) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$
19) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$	20) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\left(e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}\right)$
21) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$	22) $F(p)=\dfrac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}$
23) $F(p)=\left(\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{3e^{-3p}}{p^4}\right)$	24) $F(p)=\dfrac{e^{-p/2}}{p(p^2+1)}$

§ 7.7. Звичайні диференціальні рівняння і системи

Операційний метод достатньо просто застосовується до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами і систем таких рівнянь. Нехай задане лінійне диференціальне рівняння $n-$го порядку з постійними коефіцієнтами $a_0,\ a_2,\ a_2,\dots,a_n$:

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx(t)=f(t) \qquad (1)$$

і з наступними початковими умовами

$$x(0)=x_0,\ \ x'(0)=x_1,\ \ x''(0)=x_2,\dots,\ \ x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}, \qquad (2)$$

Наведемо простий метод розв'язання, застосовуючи операційний метод. Будемо вважати, що $a_0\neq 0$, а функція $f(t)$ і розв'язок $x(t)$ разом з його похідними до $n-$го порядку є оригінали. Позначимо: $x(t)\div X(p),\ f(t)\div F(p)$.

За правилом диференціювання оригінала і користуючись початковими умовами (2), а також властивість лінійності,

рівняння (1) перетворюється у наступне операторе рівняння:
$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)\ X(p) = F(P) + x_0\ (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + ... + a_{n-1})$
$+ x_1\ (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + ... + a_{n-2}) + \ldots +\ x_{n-1} a_n$.
або

$$A_n(p)X(p) = F(p) + B_{n-1}(p) \qquad (3)$$

де $A_n(p)$ і $B_{n-1}(p)$ - відомі многочлени. Розв'язавши рівняння (3) ми одержимо $X(p)$, який є операторним розв'язком

$$X(p) = \frac{F(p)}{A_n(p)} + \frac{B_{n-1}(p)}{A_n(p)} \qquad (4)$$

Отриманий таким чином $X(p)$ є зображенням шуканого розв'язку $x(t)$ рівняння (1), який задовольняє початковим умовам (2). Застосовуючи відповідні властивості і теореми, знаходимо оригінал $x(t)$.

Приклад 1. *Знайти розв'язок рівняння* $x''(t) + a^2 x(t) = b\sin at$ *з початковими умовами* $x(0) = x_0$ *і* $x'(0) = x_1$.

► Оскільки $x(t) \div X(p)$, $x''(t) \div p^2 X(p) - x_0 p - x_1$ і $b\sin \omega t \div \dfrac{ba}{p^2 + a^2}$ одержимо наступне операторне рівняння

$$(p^2 + a^2)X(p) = \frac{ab}{p^2 + a^2} + x_0 p + x_1$$

і його розв'язок

$$X(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} + x_0 \frac{p}{p^2 + a^2} + \frac{x_1}{p^2 + a^2} \qquad (5)$$

Знайдемо оригінали членів у правій частині ревіння(5)

$$\frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} \div \frac{b}{a}\int_0^t \sin a\tau \sin a(t - \tau)d\tau =$$

$$= \frac{b}{2a}\int_0^t \left[\cos(2a\tau - at) - \cos at\right] d\tau =$$

$$=\frac{b}{2a}\cdot\left\{\frac{1}{2a}\left[\sin(2a\tau-at)\Big|_0^t\right]-t\cos at\right\}=$$

$$=\frac{b}{2a^2}(\sin at-at\cos at)$$

$$\frac{p}{p^2+a^2}\div\cos at,\ \frac{x_1}{p^2+a^2}\div\frac{x_1}{a}\sin at.$$

Нарешті

$$x(t)=\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\frac{\sin at}{a}+\left(x_0-\frac{bt}{2a}\right)\cos at \blacktriangleleft \qquad (6)$$

Приклад 2. *Знайти розв'язок рівняння* $x''(t)+9x(t)=1$ *який задовольняє однорідним початковим умовам:* $x(0)=x'(0)=0$.

► Операторне рівняння прийме вид:

$$(p^2+9)X(p)=\frac{1}{p} \text{ або } X(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}$$

Перетворюючи в елементарні раціональні дроби, одержимо

$$X(p)=-\frac{p}{9(p^2+9)}+\frac{1}{9p}.$$

Використовуючи відповідні формули з таблиці §7.6 одержимо розв'язок:

$$x(t)=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos 3t \blacktriangleleft$$

Приклад 3. *Знайти розв'язок рівняння* $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=t$, *який задовольняє наступним однорідним початковим умовам:* $x(0)=x'(0)=0$.

► Дане рівняння перетворюється у операторне рівняння виду: $(p^2+3p+2)X(p)=\frac{1}{p^2}$, тоді одержимо операторний розв'язок

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p^2+3p+2)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$$

Розкладаючи на елементарні раціональні дроби та використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, одержимо операторний розв'язок у вигляді:

$$X(p) = \frac{1}{2p^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+2}$$

Використовуючи ту ж саму таблицю, розвозок прийме вид:

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. *Знайти розв'язок рівняння* $x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = \sin t$*, який задовольняє наступним початковим умовам:* $x(0) = 1,\ x'(0) = 2$.

► Застосовуючи перетворення Лапласа і приймаючи до уваги початкові умови одержимо операторне рівняння у вигляді:

$$(p^2 + 2p + 5)X(p) = \frac{1}{p^2+1} + p + 4$$

або

$$X(p) = \frac{1}{\left(p^2+2p+5\right)\left(p^2+1\right)} + \frac{p+4}{p^2+2p+5}$$

Розкладаючи на елементарні раціональні дроби

$$X(p) = \frac{1}{8}\frac{-p+1}{\left(p^2+2p+5\right)} + \frac{1}{8}\frac{p+3}{\left(p^2+1\right)} + \frac{p+4}{p^2+2p+5}$$

і виділяючи повний квадрат у відповідних тричленах, одержимо:

$$X(p) = \frac{7}{8}\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{13}{8}\frac{2}{(p+1)^2+4} + \frac{1}{8}\frac{p+3}{\left(p^2+1\right)}.$$

Використовуючи відповідні формули отримаємо кінцевий результат:

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{8}\left[\left(7\cos 2t + 13\sin 2t\right) + \cos t + 3\sin t\right]. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. *Знайти розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}=1, \\ \dfrac{dx}{dt}+4\dfrac{dy}{dt}+3y=0 \end{cases},$$

який задовольняє наступним початковим умовам $x(0)=0$, $y(0)=0$.

► Позначимо $x(t)\div X(p)$ і $y(t)\div Y(p)$ і запишемо систему рівнянь у операторній формі:

$$\begin{cases} (3p+2)X(p)+pY(p)=\dfrac{1}{p}, \\ pX(p)+(4p+3)Y(p)=0 \end{cases}$$

Розв'язок неоднорідної лінійної алгебраїчної системи має вид:

$$X(p)=\frac{2p}{p(p+1)(11p+6)}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{33}{10(11p+6)}$$

$$Y(p)=-\frac{1}{(p+1)(11p+6)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right)$$

Застосувавши відповідні теореми переходимо від зображень до оригіналів, одержимо розв'язок задачі:

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},\quad y(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right).◄$$

Приклад 8. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} (2x''(t)-x'(t)+9x(t))-(y''(t)+y'(t)+3y(t))=0, \\ (2x''(t)+x'(t)+7x(t))-(y''(t)-y'(t)+5y(t))=0 \end{cases}$$

з відповідними початковими умовами: $x(0)=x'(0)=1$, $y(0)=y'(0)=0$.

► Дана система рівнянь у операторній формі має вид:

$$\begin{cases} (2p^2-p+9)X(p)-(p^2+p+3)Y(p)=2p+1, \\ (2p^2+p+7)X(p)-(p^2-p+5)Y(p)=2p+3 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 2X(p) - Y(p) = 2\dfrac{p+1}{p^2+4}, \\ X(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p-1} \end{cases}$$

Звідси

$$X(p) = \frac{1}{3}\frac{1}{p-1} + \frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4} + \frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4},$$

$$Y(p) = \frac{2}{3}\frac{1}{p-1} - \frac{2}{3}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{3}\frac{2}{p^2+4}$$

Використовуючи таблицю перетворень знайдемо оригінали функцій:

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t\right),$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(e^t - 2\cos 2t - \sin 2t\right). \blacktriangleleft$$

§ 7.8. *Розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра з ядрами спеціального типу*

Інтегральним рівнянням називають рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтегралу.

Наприклад, розв'язок задачі Коші

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 .$$

як відомо, зводиться до розв'язку наступного інтегрального рівняння:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx + y_0 .$$

Якщо шукана функція y входить у рівняння лінійно, то інтегральне рівняння *називають лінійним.*

Означення 1. ***Рівняння виду***

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt \qquad (1)$$

(*a і b - постійні)* ***називають лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду.***

Тут $K(x,t)$ і $f(x)$ відомі функції, $y(x)-$ шукана функція. Функцію $K(x,t)$ називають ядром рівняння *(1)*

Означення 2. ***Рівняння***

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt \qquad (2)$$

називають лінійним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду.

Якщо у рівняннях (1) і (2) $f(x) \equiv 0$, то *рівняння називають однорідними.*

Якщо шукана функція $y(x)$ входить тільки під знак інтегралу, то маємо відповідно *рівняння Фредгольма, або Вольтерра* ***першого роду***.

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad \text{або} \quad \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$$

Означення 3. ***Рівняння виду***

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (3)$$

з ядром $K(x-t)$***, яке залежить лише від різниці аргументів, представляють собою важливий клас рівнянь Вольтерра.*** *Інколи їх називають* ***рівняннями типу згортки.***

Нехай задане рівняння Вольтерра типу згортки

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad (4)$$

Покладаємо, що $f(x)$ і $K(x)$ достатньо гладкі функції і мають скінченний порядок росту при $x > 0$. В цьому випадку $\varphi(x)$ при $x > 0$ має скінченний порядок росту, а отже, можуть бути знайдені зображення функцій $f(x)$, $K(x)$ і $\varphi(x)$, застосовуючи перетворення Лапласа. Нехай $\varphi(x) \div \Phi(p)$, $f(x) \div F(p)$, $K(x) \div L(p)$.

Застосувавши до обох частин (4) перетворення Лапласа і використавши формулу згортки, будемо мати операторне рівняння

$$\Phi(p) = F(p) + L(p) \cdot \Phi(p), \tag{5}$$

Звідси

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, \qquad L(p) \neq 1 \tag{6}$$

Застосувавши відповідні теореми і властивості для знаходження оригінала функції $\Phi(p)$, отримаємо оригінал $\varphi(x)$ - розв'язок інтегрального рівняння (4).

Приклад. *Розв'язати інтегральне рівняння*

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \tag{7}$$

► Запишемо дане рівняння у зображеннях:

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2} \cdot \Phi(p)$$

звідси

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}$$

Оригінал функції $\Phi(p)$ буде розв'язком рівняння (7), і.е

$$\Phi(p) = p \cdot \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2-1}$$

Застосовуючи терему згортки для функції

$$\psi(p) = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2-1}$$

отримаємо

$$\phi(x)=\int_0^x \cos(x-t)\cosh t dt=\frac{1}{2}\left(\sin x+\sinh x\right)$$

Оскільки

$$\Phi(p)=p\cdot\psi(P),$$

то маємо

$$\varphi(x)=\phi'(x)$$

Отже, розв'язок рівняння (5) набуває наступний вид:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cosh x)\ ◄ \tag{8}$$

Практичні заняття - 7.4

1. Розв'язати наступні диференціальні рівняння з даними початковими умовами

1)	$x''+2x'-3x=e^{-t}$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=1$
3)	$x''+2x'+x=\sin t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=-1$
3)	$x''-2x'+x=e^{t}$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=1$
4)	$x''+2x'+5x=3$,	$x(0)=1, \quad x'(0)=0$
5)	$x'''+x''=\cos t$,	$x(0)=-2, \quad x'(0)=0, \quad x''(0)=0$
6)	$x''+2x'+x=2\cos^2 t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$
7)	$x''+x=2\cot\cos 3t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$
8)	$x''+x'=4\sin^2 t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=-1$
9)	$x'''+x=\frac{1}{2}t^2e^t$,	$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$
10)	$x''+x=t\cos 2t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$
11)	$x''=\frac{1}{t^2+1}$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$
12)	$x''=\tan^{-1}t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$
13)	$x''=t\ln^2 t$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$
14)	$x''-x'=\frac{1}{1+e^t}$,	$x(0)=0, \quad x'(0)=0$

15)	$x''+x=\dfrac{1}{1+\cos t}$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=0$
16)	$x''+x=\dfrac{1}{1+\tan^2 t}$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=0$
17)	$x''+x=\dfrac{1}{1+\cos^2 t}$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=0$
18)	$x''+x=\dfrac{1}{1+\sin^2 t}$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=0$
19)	$x'''-x=\tanh t$,	$x(0)=0,\quad x'(0)=0$
20)	$x'''+x'=\dfrac{1}{2+\sin t}$,	$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$

2. Розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь

1) $\begin{cases}2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0,\\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0,\end{cases}$ $x(0)=x'(0)=1,\ y(0)=y'(0)=0$	2) $\begin{cases}x'+y'-y=e^t,\\ 2x'+y'=\cos t,\end{cases}$ $x(0)=y(0)=0$
3) $\begin{cases}x'=y+z,\ x(0)=0,\\ y'=3x+z,\ y(0)=1,\\ z'=3x+y,\ z(0)=1\end{cases}$	4) $\begin{cases}x'=2x-y+z,\ x(0)=1,\\ y'=x+z,\qquad y(0)=1,\\ z'=-3x+y-z,\ z(0)=0\end{cases}$
5) $\begin{cases}x'=-x+y+z+e^t,\ x(0)=0,\\ y'=x-y+z+e^{3t},\ y(0)=0,\\ z'=x+y+z+4,\quad z(0)=0\end{cases}$	6) $\begin{cases}x'=-2x-2y-4z,\ x(0)=1,\\ y'=-2x+y-2z,\ \ y(0)=1,\\ z'=5x+2y+7z,\quad z(0)=1\end{cases}$
7) $\begin{cases}x''-3x'+9x+y'-y=0,\\ -x'+x+y''-5y'+4y=0,\end{cases}$ $x(0)=x'(0)=y'(0)=0,\ y(0)=1$	8) $\begin{cases}x'=-y-z,\ x(0)=0,\\ y'=-x-z,\ y(0)=1,\\ z'=-x-y,\ z(0)=1\end{cases}$
9) $\begin{cases}3x'+2x+y'=1,\quad x(0)=0,\\ x'+4y'+3y=0,\quad y(0)=0\end{cases}$	10) $\begin{cases}x'-x-2y=t,\quad x(0)=2,\\ -2x+y'-y=t,\ \ y(0)=4\end{cases}$

3. Розв'язати наступні інтегральні рівняння і системи інтегральних рівнянь

1)	$\varphi(x)=\sin x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$
2)	$\varphi(x)=e^x-2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$
3)	$\varphi(x)=\sinh x-\int_0^x \cosh(x-t)\varphi(t)dt$
4)	$\varphi(x)=1+x+2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt$
5)	$\varphi(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$
6)	$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^x+\int_0^x \varphi_1(t)dt-2\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)dt,\\ \varphi_2(x)=-x-\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt+\int_0^x \varphi_2(t)dt\end{cases}$
7)	$\begin{cases}\varphi_1(x)=x+\int_0^x \varphi_1(t)dt+\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt,\\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_1(t)dt+\int_0^x \varphi_2(t)dt\end{cases}$
8)	$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^x-\int_0^x \varphi_1(t)dt+4\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)dt,\\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)dt+4\int_0^x \varphi_2(t)dt\end{cases}$

9)	$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2x - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt + 3\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \end{cases}$
10)	$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt - 4\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)dt - \int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt \end{cases}$

§ 7.9. Застосування операційного числення для розрахунок електричних контурів

Як відомо, струм $i(t)$ і напруга $u(t)$ на кінцях елементу ланцюга, який містить активний опір R, самоіндукцію L або ємкість C, пов'язані наступними співвідношеннями:

$$u(t) = R \cdot i(t), \quad u(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C}\left\{\int\limits_0^t i(\tau)d\tau + q_0\right\} \qquad (1)$$

де q_0 – початковий заряд на обкладинках конденсатора.

Якщо ввести замість *зображення* $i(t)$ *операторний струм* $I(p)$ а замість *напруги* $u(t)$ *операторну напругу* $U(p)$, тоді співвідношення (1) перейдуть у наступні:

$$U(p) = RI(p), \quad U(p) = L\left(pI(p) - i_0\right), \; U(p) = \frac{1}{Cp}\left(I(p) + q_0\right) (2)$$

де $i_0 = i(0)$ - початковий струм. Якщо вважати $q_0 = i_0 = 0$, що відповідає задачам включення, то замість рівнянь (2) будемо мати:

$$U(p) = RI(p), \quad U(p) = LpI(p), \quad U(p) = \frac{1}{Cp}I(p) \quad (3)$$

Останні співвідношення об'єднуються у формі «*операторного закону Ома»*

$$U = ZI \qquad (4)$$

де Z - *«операторний опір»* або «*імпеданц»,* які у випадку активного опору, самоіндукції та ємкості відповідно дорівнюються:

$$Z_R = R, \qquad Z_L = Lp \qquad Z_C = \frac{1}{Cp} \qquad (5)$$

Далі зауважимо, що при послідовному з'єднанні елементі з імпеданцами Z_1 і Z_2 одержимо $U_1 = Z_1 I$, $U_2 = Z_2 I$, $U = U_1 + U_2$; звідси $U = (Z_1 + Z_2)I = ZI$, або

$$Z = Z_1 + Z_2 \qquad (6)$$

Аналогічно, якщо елементи з'єднані паралельно $U = Z_1 I_1$, $U = Z_2 I_2$, $I = I_1 + I_2$. Звідси, покладаючи $U = ZI$, знайдемо:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \qquad (7)$$

Отже, *операторний опір ланцюгів у випадку задач включення можна підраховувати за звичайним правилом з'єднання елементів.*

Якщо початковий струм і заряд відмінні від нуля, то у рівнянні (4) з'являться додаткові члени. Наприклад, у випадку, що, якщо послідовного з'єднання опору, ємкості та самоіндукцію ($RLC-$контур), одержимо:

$$U = \left(R + Lp + \frac{1}{CP} \right) I - Li_0 + \frac{q_0}{Cp} = ZI - Li_0 + \frac{q_0}{Cp} \qquad (8)$$

де $Z = R + Lp + \dfrac{1}{Cp}$ - операторний опір контура.

Приклад 1. *Включимо постійну е.р.с U_0 у електричний ланцюг (Рис.1*), де послідовно включені самоіндукція L і ємкість C, яка шунтована активним опіром R. Знайти силу струму у електричному ланцюгу.*

► Операторний опір можна знайти, використовуючи формули (6),(7) і (8):

$$Z = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{RCp + 1}$$

Знайдемо операторну *е.р.с* $U = \frac{U_0}{p}$. Використовуючи (4), операторний струм прийме вид:

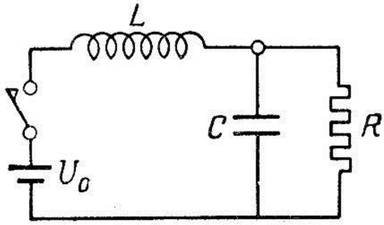


*Рис. 1**

$$I = \frac{U_0(RCp+1)}{p(LCRp^2 + Lp + 1)}$$

Струм, який залежить від часу, знаходимо застосовуючи другу теорему розкладу. Функція $I(p)$ має прості полюси у точках $p_0 = 0$,

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RL} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Якщо $L < 4R^2C$, тоді корені - комплексно спряжені, $p_{1,2} = -\sigma \pm i\omega$, де $\sigma = \frac{1}{2RC}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$, і процес має хвильовий характер. Використовуючи відповідні формули, знаходимо

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left\{1 - e^{-\sigma t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{\sigma}{\omega} - \frac{R}{\omega L}\right)\sin\omega t\right]\right\}. \qquad (1^*)$$

Якщо $L < 4R^2C$, тоді ω буде чисто уявним, і, покладаючи в (1*) $\omega = i\lambda$, де λ - дійсне число, знайдемо

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left\{1 - e^{-\sigma t}\left[\cosh\lambda t + \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{R}{\lambda L}\right)\sinh\lambda t\right]\right\} \qquad (2^*)$$

Процес має аперіодичний характер. ◄

Приклад 2. *Знайти силу струму* $i_1(t)$*,що проходить через ємкість C у контурі (Рис. 2*), який включений на постійну е.р.с* U_0.

► Нехай $Z_1 = R_1 + \frac{1}{Cp}$, $Z_1 = R_2 + Lp$ імпеданси витків контура, по яким течуть струми $i_1(t)$ і $i_2(t)$ *(Рис. 2*)* і

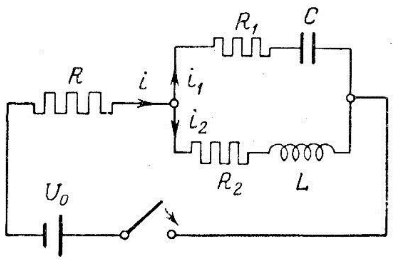


*Рис. 2**

$$Z = R + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$ є імпедансем усього контура.

Маємо $I = \frac{U_0}{pZ} = I_1 + I_2$,

$I_1 Z_1 = I_2 Z_2$. Отже,

$I_1 = I - \frac{I_1 Z_1}{Z_2}$, звідси

$$I_1 = \frac{Z_2 I}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_0 Z_2}{p(Z_1 + Z_2)Z}$$

Підставляючи значення Z_2 і $(Z_1 + Z_2)Z$, які можуть бути знайдені використовуючи відповідні формули, отримаємо:

$$I_1(p) = \frac{U_0(R_2 + Lp)}{\alpha p^2 + 2\beta p + \gamma}$$

де $\alpha = (R + R_1)L$, $2\beta = (R_1 + R_2)R + R_1 R_2 + \frac{L}{C}$, $\gamma = \frac{R_1 + R_2}{C}$.

Струм, який залежить від часу, може бути знайдений використовуючи відповідні формули :

$$i(t) = \frac{U_0}{2} \sum_{k=1}^{2} \frac{R_2 + Lp_k}{\alpha p_k + \beta} \qquad (3^*)$$

де p_k є коренями квадратного тричлена у знаменнику виразу $I_1(p)$. ◄

Приклад 3. *Два однакових* $RLC-$ *контура зв'язані індукцією M (Рис. 3*).У одному з них, починаючи з моменту*

$t=0$, *прикладена постійна е.р.с.* U_0. *знайти силу струму у другому контурі*.

► Система операторних рівнянь має вид

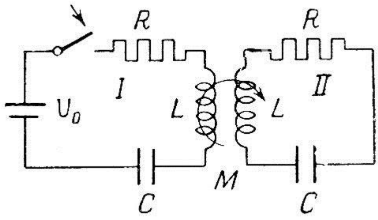


*Рис. 3**

$$\begin{cases}\left(Lp+R+\dfrac{1}{Cp}\right)I_1+MpL_2=\dfrac{U_0}{p},\\ \left(Lp+R+\dfrac{1}{Cp}\right)I_2+MpL_1=0\end{cases}$$

Операторний струм у другому ланцюгу контура буде

$$I_2(p)=\frac{U_0Mp^2}{M^2p^4-\left(Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}\right)^2}$$

Полюси $I_2(p)$ є комплексно спряжені $p_{1,2}=-\sigma_1\pm i\omega_1$, $p_{3,4}=-\sigma_2\pm i\omega_2$, де

$$\sigma_{1,2}=\frac{R}{2(L\pm M)},\qquad \omega_{1,2}^2=\frac{1}{C(L\pm M)}-\sigma_{1,2}^2$$

Оригінал знаходимо використовуючи другу теорему про розвинення. Після простих перетворень

$$i_2(t)=\frac{U_0}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{(-\sigma_1+i\omega_1)t}}{(L+M)i\omega_1}-\frac{e^{(-\sigma_2+i\omega_2)t}}{(L-M)i\omega_2}\right\}=$$

$$=\frac{U_0}{2}\left\{\frac{e^{-\sigma_1t}\sin\omega_1t}{\omega_1(L+M)}-\frac{e^{-\sigma_2t}\sin\omega_2t}{\omega_2(L-M)}\right\}.◄ \qquad (4^*)$$

§ 7.10. Рівняння з частинними похідними

Операторний метод може бути успішно застосований для розв'язання, так званих, *нестаціонарних задач,* для рівнянь *математичної фізики.* Розглянемо випадок коли шукана функція u залежить від двох незалежних змінних x і t, одну з них будемо називати просторовою координатою, а другу як час. Крім того, вважаємо, що диференціальне рівняння має вид:

$$L[u] = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

де a, b, c, a_1, b_1 є неперервними функціями від одного x, у інтервалі $0 \le x \le l$. Ми завжди будемо вважати, що $a > 0$ і розглядати два випадки: 1) $a_1 < 0$ - *гіперболічний випадок*;

2) $a_1 \equiv 0$, $b_1 < 0$ - *параболічний випадок.*

Нестаціонарна задача у нашому випадку формулюється наступним чином.

Знайти розв'язок $u(x,t)$ ***диференціального рівняння (1) для*** $0 < x < l$, $t > 0$***, що задовольняє початковим умовам***

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \qquad \textbf{(2)}$$

(друге задається лише у гіперболічному випадку) і крайовим умовам

$$u(0,t) = \varphi(t), \ \alpha\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = \delta u(l,t) \qquad \textbf{(3)}$$

де α, β ***і*** δ ***постійні. (якщо*** $l = \infty$***, друга умова відпадає)***

Покладаємо, що u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, які розглядаємо як функції від t, є оригіналами, і позначимо через

$$U(p,x) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$$

зображення функції $u(x,t)$. тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} \div \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \div \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

Використовуючи правила диференціювання оригіналів, одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU(x,p) - u(x,0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial(x,0)}{\partial t}$$

і приймаючи до уваги початкові умови (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \div pU(x,p) - f(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \div p^2 U(x,p) - pf(x) - g(x)$$

Покладаючи, що $\varphi(t)$ є оригіналом і $\Phi(p) \div \varphi(t)$, граничні умови мають вид:

$$U\big|_{x=0} = \Phi(p), \quad \left[\alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - f)\right]_{x=l} = \delta U\big|_{x=l}$$

Отже, ***операційний метод приводить розв'язок поставленої вище нестаціонарної задачі для рівняння (1) з частинними похідними до розв'язку звичайного диференціального рівняння***

$$a\frac{d^2U}{dx^2} + b\frac{dU}{dx} + AU + B = 0 \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

при наступних граничних умовах

$$U\big|_{x=0} = \Phi(p), \quad \left[\alpha \frac{dU}{dx} + (\beta p - \delta)U - \beta f\right]_{x=l} = 0 \qquad (5)$$

де

$A = c + a_1 p^2 + b_1 p$**,** $\quad B = -a_1 pf - a_1 g - b_1 f$ ***і*** p ***є комплексним параметром.***

Приклад 1. *Температура* $u(x,t)$ *в тонкому стержні задовольняє рівнянню*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1^*)$$

де a^2 *- постійний коефіцієнт (коефіцієнт температуропровідності). Розглянемо розповсюдження температуру у напівобмеженому стержні* $0 < x < \infty$*, якщо*

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad u\big|_{x=0} = f(t) \qquad\qquad (2^*)$$

► Переходячи до зображень, одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$pU = a^2 \frac{d^2U}{dx^2} \qquad\qquad (3^*)$$

з комплексним параметром p. Це рівняння треба розв'язати за умовою

$$U\big|_{x=0} = F(p) \qquad\qquad (4^*)$$

Загальний розв'язок (3*) має вид

$$U = A_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + A_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \qquad\qquad (5^*)$$

Тут A_2 повинно дорівнюватись нулю, тобто $A_2 = 0$, бо інакше U буде необмежено зростати при $x \to \infty$. За умовою (4*) $A_1 = F(p)$, відповідно

$$U = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

Для знаходження оригінала розглянемо окремий випадок $f(t) = 1$, тоді $F(p) = \dfrac{1}{p}$, $U_1 = \dfrac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{x}}$. Використовуючи таблицю 7.6 знайдемо оригінал U_1

$$u_1(x,t) = erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \qquad\qquad (6^*)$$

У загальному випадку (4*) використаємо інтеграл Дюамеля. Маємо $U(p,x) = pF(p)U_1(p,x)$, відповідно

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi \qquad\qquad (7^*)$$

При $x=0$ за формулою (7*) одержимо $u(0,t)=f(t)erf(\infty)=f(t)$, тобто розв'язок (7*) задовольняє крайовій умові

Приклад 2. *Температура у стержні задовольняє рівнянню*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1^*)$$

Знайти розповсюдження температур у напівобмеженому стержні, якщо на лівому кінці стержня відбувається тепловипромінювання у середу з нульовою температурою і початковою температурою стержня u_0. *Задача зводиться до розв'язання рівняння (1*) при наступних крайових умовах:*

$$u\big|_{t=0}=u_0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=hu\big|_{x=0} \qquad (8^*)$$

► Операторне рівняння має вид

$$pU-a^2\frac{d^2U}{dx^2}=u_0\mathrm{T}$$

Його треба розв'язати за умовою

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=hU\big|_{x=0}$$

Розв'язок рівняння обмежений при $x\to\infty$ і має вид

$$U=\frac{u_0}{p}+Ae^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

Використовуючи граничні умови, знаходимо остаточно:

$$U=\frac{u_0}{p}\left(1-\frac{h}{\left(\sqrt{p}/a\right)+h}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=\frac{u_0}{p}\left(1-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)+$$

$$+\frac{u_0}{a}\frac{1}{\sqrt{p}\left(\left(\sqrt{p}/a\right)+h\right)}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Використовуючи таблицю 7.6 маємо $\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \div erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, отже оригінал першого члена дорівнюється $u_0 erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

Для знаходження оригінала другого члена зауважимо, що за теоремою запізнення і подібності

$$F(p)=\frac{1}{\frac{p}{a}+h}e^{-p\frac{x}{a}} \div ae^{-h}(at-x)\eta(at-x)$$

Тоді за слідством теореми Ефроса

$$\frac{F\left(\sqrt{p}\right)}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{p}}{a}+h}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \div \frac{a}{\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{a}}^{\infty} e^{-h(a\tau-x)-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau$$

Виконуючи заміну $\frac{\tau+2aht}{2a\sqrt{t}}=\xi$, знайдемо остаточно:

$$u(x,t)=u_0\left\{erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+e^{hx+a^2h^2t}erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right\} \blacktriangleleft \qquad (9^*)$$

Практичні заняття - 7.5

Розв'язати наступні задачі

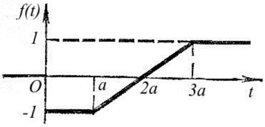
1.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $(0<x<l, t>0)$	$u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0$, $u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$
2.	$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\quad t>0)$	$u(0,t)=u_0$ $u(x,0)=0$
3.	$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x>0,\quad t>0)$	$u(0,t)=0$ $u(x,0)=u_1$

4	$\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0, \quad t > 0)$	$u(0,t) = a\sin\omega t$ $u(x,0) = 0$
5.	$\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0, \quad t > 0)$	$u(0,t) = a\cos\omega t$ $u(x,0) = 0$
6.	$\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(x > 0, \quad t > 0)$	$u(0,t) = \varphi(t)$ $u(x,0) = 0$

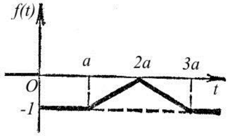
Індивідуальні домашні завдання – 6

1. Знайти зображення за графіками оригіналу

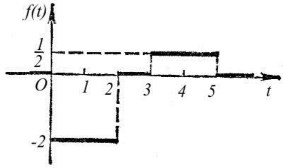
1.1



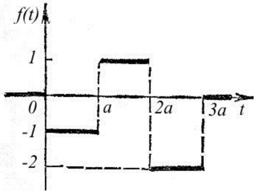
1.2



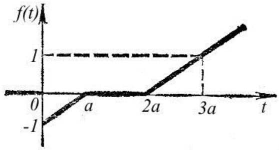
1.3



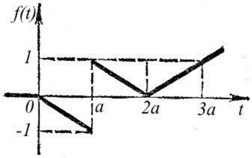
1.4



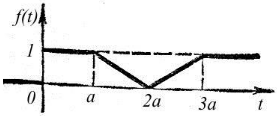
1.5



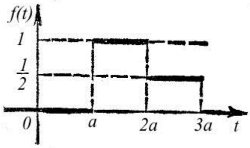
1.6



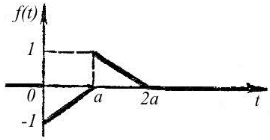
1.7



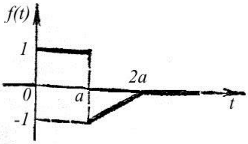
1.8



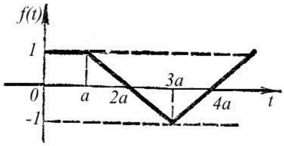
1.9



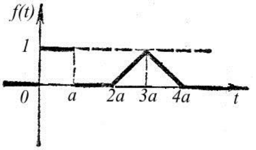
1.10



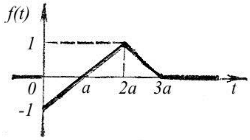
1.11



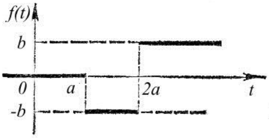
1.12



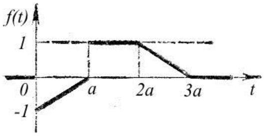
1.13



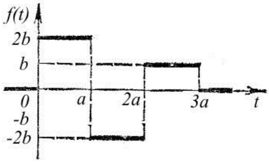
1.14



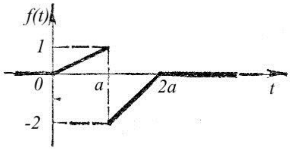
1.15



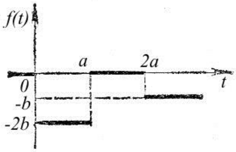
1.16



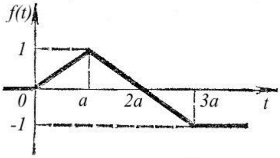
1.17



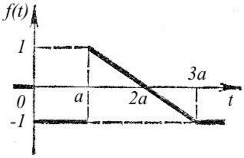
1.18



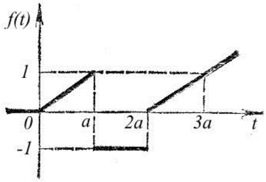
1.19



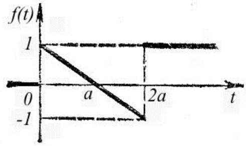
1.20



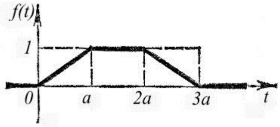
1.21



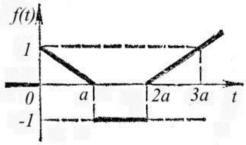
1.22



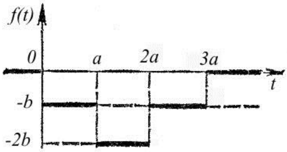
1.23



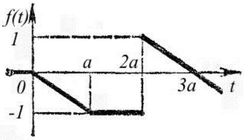
1.24



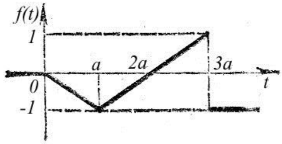
1.25



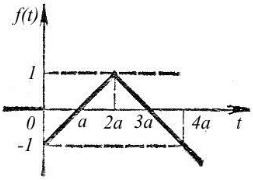
1.26



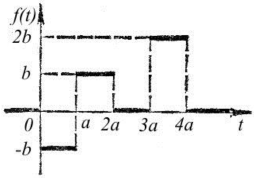
1.27



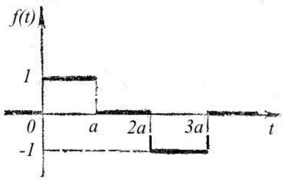
1.28



1.29



1.30



2. Знайти оригінали за заданими зображеннями

2.1 $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$	2.2 $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$
2.3 $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$	2.4 $\dfrac{4p+5}{p(p^2+1)^2}$

2.5 $\frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$	2.6 $\frac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$
2.7 $\frac{6}{p^3-8}$	2.8 $\frac{4}{p^3+8}$
2.9 $\frac{1}{p^5+p^3}$	2.10 $\frac{p+4}{p^2+4p+5}$
2.11 $\frac{4p+5}{(p^2+1)(p^2+4)}$	2.12 $\frac{4p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$
2.13 $\frac{4p+5}{p^3+p^2+p}$	2.14 $\frac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$
2.15 $\frac{4p+5}{p(p^3+1)}$	2.16 $\frac{4p+5}{p^3(p^2-4)}$
2.17 $\frac{4p+5}{(p^2+1)(p^2+2)}$	2.18 $\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$
2.19 $\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$	2.20 $\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$
2.21 $\frac{e^{-p/2}}{(p+2)(p^2-2p+2)}$	2.22 $\frac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$
2.23 $\frac{p}{(p^2+4p+8)^2}$	2.24 $\frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$
2.25 $\frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$	2.26 $\frac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$
2.27 $\frac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$	2.28 $\frac{4p+5}{p^3-2p^2+5p}$
2.29 $\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$	2.30 $\frac{4p+5}{(p-1)(p^2-4p+5)}$

3. Знайти розв'язки диференціальних рівнянь , які задовольняють початковим умовам $y(0)=0$, $y'(0)=0$

3.1 $y''-y=\tanh t$	3.2 $y''-y'=\frac{1}{1-e^t}$
3.3 $y''-2y'+y=\frac{e^t}{1-t^2}$	3.4 $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$
3.5 $y''-y=\tanh^2 t$	3.6 $y''-y=\frac{1}{\cosh t}$
3.7 $y''-y'=\frac{e^t}{1+e^t}$	3.8 $y''-2y'+y=\frac{e^t}{t+1}$
3.9 $y''+y'=\frac{e^{2t}}{3+e^t}$	3.10 $y''-2y'=\frac{e^t}{\cosh t}$
3.11 $y''-y=\frac{1}{1+\cosh t}$	3.12 $y''+y'=\frac{1}{1+e^t}$
3.13 $y''-4y'+4y=\frac{2e^{2t}}{\cosh^2 2t}$	3.14 $y''-4y=\frac{1}{\cosh^t 2t}$
3.15 $y''-y=\frac{1}{\cosh^2 t}$	3.16 $y''+y'=\frac{e^t}{1+e^t}$
3.17 $y''+2y'+y=\frac{e^{-t}}{(t+1)^2}$	3.18 $2y''-y'=\frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}$
3.19 $y''-y=\frac{1}{\cosh^3 t}$	3.20 $y''-y'=\frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$
3.21 $y''+2y'+y=\frac{te^{-t}}{t+1}$	3.22 $y''-y'=\frac{e^{2t}}{2+e^t}$
3.23 $y''-y=\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}$	3.24 $y''+y'=\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$
3.25 $y''+2y'+y=\frac{e^{-t}}{1+t^2}$	3.26 $y''-2y'+2y=\frac{e^t}{\cosh^2 t}$

3.27 $y''+2y'+2y=\dfrac{e^{-t}}{\cosh^2 t}$	3.28 $y''-4y=\tanh^2 t$
3.29 $y''+2y'=\dfrac{1}{\cosh^2 t}$	3.30 $y''+y'=\dfrac{1}{\left(1+e^t\right)^2}$

4. Розв'язати задачу Коші застосовуючи операційний метод

4.1 $y''+y=6e^{-t}$, $y(0)=3,\quad y'(0)=1$	4.2 $y''-y'=t^2$, $y(0)=0,\quad y'(0)=1$
4.3 $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=0,\quad y'(0)=-2$	4.4 $y''-y=\cos 3t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=-1$
4.5 $y''+y'+y=7e^{2t}$, $y(0)=1,\quad y'(0)=4$	4.6 $y''+y'-2y=-2(t+1)$, $y(0)=1,\quad y'(0)=1$
4.7 $y''-9y=\sin t-\cos t$, $y(0)=-3,\quad y'(0)=2$	4.8 $y''+2y'=2+e^t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=2$
4.9 $2y''-y=\sin 3t$, $y(0)=2,\quad y'(0)=1$	4.10 $y''+2y'=\sin t/2$, $y(0)=-2,\quad y'(0)=4$
4.11 $y''+y=\sinh t$, $y(0)=2,\quad y'(0)=1$	4.12 $y''+4y+20y=e^{-2t}$, $y(0)=0,\quad y'(0)=1$
4.13 $y''-3y'+2y=e^t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=0$	4.14 $2y''+3y'+y=3e^t$, $y(0)=0,\quad y'(0)=1$
4.15 $y''-2y'-3y=2t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=1$	4.16 $y''+4y=\sin 2t$, $y(0)=0,\quad y'(0)=1$
4.17 $2y''+5y'=29\cos t$, $y(0)=-1,\quad y'(0)=0$	4.18 $y''+y'+y=t^2+t$, $y(0)=1,\quad y'(0)=-3$
4.19 $y''+4y=8\sin 2t$, $y(0)=3,\quad y'(0)=-1$	4.20 $y''-y'-6y=2$, $y(0)=2,\quad y'(0)=0$
4.21 $y''+4y=4e^{2t}+4t^2$, $y(0)=1,\quad y'(0)=2$	4.22 $y''+4y'+4y=t^2e^{2t}$, $y(0)=1,\quad y'(0)=2$

4.23 $y''-3y'+2y=12e^{3t},$ $y(0)=2,\quad y'(0)=6$	4.24 $y''+4y=3\sin t+10\cos 3t,$ $y(0)=-2,\quad y'(0)=3$
4.25 $y''++2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t,$ $y(0)=5,\quad y'(0)=1$	4.26 $y''+3y'-10y=47\cos 3t-\sin 3t,$ $y(0)=3,\quad y'(0)=-1$
4.27 $y''+y'-2y=e^{-t},$ $y(0)=-1,\quad y'(0)=0$	4.28 $y''-2y'=e^{t}(t^2+t-3),$ $y(0)=2,\quad y'(0)=2$
4.29 $y''+y=2\cos t,$ $y(0)=0,\quad y'(0)=1$	4.30 $y''-y'=4\sin t+5\cos 2t,$ $y(0)=-1,\quad y'(0)=-2$

5. *Розв'язати системи диференціальних рівнянь*

5.1 $\begin{cases} x'=x+3y+2, \\ y'=x-y+1; \end{cases}$ $x(0)=-1,\quad y(0)=2$	5.2 $\begin{cases} x'=-x+3y+1, \\ y'=x+y; \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=2$
5.3 $\begin{cases} x'=x+4y, \\ y'=2x-y+9; \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=0$	5.4 $\begin{cases} x'=x+2y+1, \\ y'=4x-y; \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1$
5.5 $\begin{cases} x'=2x+5y, \\ y'=x-y+2; \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=1$	5.6 $\begin{cases} x'=-2x+5y+1, \\ y'=x+2y+1; \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2$
5.7 $\begin{cases} x'=3x+y, \\ y'=-5x-3y+2; \end{cases}$ $x(0)=2,\quad y(0)=0$	5.8 $\begin{cases} x'=-3x-4y+1, \\ y'=2x+3y; \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=2$
5.9 $\begin{cases} x'=-2x+6y+1, \\ y'=2x+2; \end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1$	5.10 $\begin{cases} x'=2x+3y+1, \\ y'=4x-2y; \end{cases}$ $x(0)=-1,\quad y(0)=0$

5.11 $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5$	5.12 $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = -4x; \end{cases}$ $x(0) = 3, \quad y(0) = 1$
5.13 $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0$	5.14 $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2$
5.15 $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -\dfrac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$	5.16 $\begin{cases} x' = 2x + 1, \\ y' = 2x + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$
5.17 $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1$	5.18 $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4x + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
5.19 $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$	5.20 $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
5.21 $\begin{cases} x' = 3x + 2, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1$	5.22 $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
5.23 $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1$	5.24 $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0$
5.25 $\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0$	5.26 $\begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

5.27 $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$	5.28 $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1$
5.29 $\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0$	5.30 $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

Навчальне видання

Анатолій Юхимович Пуди
Андрій Іванович Прокопенко
Ольга Володимирівна Коржова

ЕЛЕМЕНТИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ТА ОТЕРАЦЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник для викладачів та студентів вищих навчальних закладів

Відповідальний за випуск: Моторіна В.Г.

Комп'ютерна верстка: Тараров Д.С.

Підписано до друку 23.03.2015 Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк – цифровий. Ум. друк. арк. 25,94.
Обл.-вид.арк. 6,38 Зам. № 314. Наклад 300 прим. Ціна договірна.

Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С.Сковороди.
Україна, 61002, м. Харків, вул. Артема,29.

Видавництво «Мітра»
Свідоцтво про державну реєстрацію: Серія ДК №1635
від 25.12.03. Ліцензія №1413900866
т.: +380675765437, e-mail: mitra_izdat@meta.ua
