Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Харківський національний педагогічний
Університет імені Г.С.Сковороди

А.Ю. Пуди, А.І. Прокопенко

НЕОДНОРІДНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Навчально-методичний посібник для студентів і викладачів вищих навчальних закладів

Харків – 2013

517.2
УДК 517.946/517/3 (075.8)
Т 46

Автори:
А.Ю. Пуди, А.І. Прокопенко

Рецензенти:
Л.І. Білоусова - кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики ХНПУ ім. Г.С.Сковороди;
О.Г. Нерух - доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики ХНУРЕ.

У першій частині навчального посібника розглядаються інтегральні перетворення Фур'є, Лапласа і Ханкеля, які застосовуються при розв'язанні неоднорідних крайових задач параболічного типу. Друга частина присвячена постановці крайових задач, а також були доведені теореми про коректність поставлених задач. У третій четвертій і п'ятій частинах посібника строго викладені розв'язки одномірних, двомірних і трьохмірних неоднорідних крайових задач теплопровідності і одержані розв'язки поставлених задач у замкненому виді.

Посібник може бути використаний викладачами та студентами вищих навчальних закладів.

Затверджено редакційно-видавницькою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г.С.Сковороди

Протокол № 1 від 09.01.2013 р.

З м і с т

Частина І. Інтегральні перетворення

§ 1 Перетворення Лапласа

1^0. Зображення та оригінал

Нехай функція $f(t)$ дійсного аргументу t така, що існує інтеграл

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,,$$

де $p = s + i\sigma$.

Цей інтеграл є функцією параметра p. Позначаючи нову функцію через $F(p)$, будемо мати

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,. \qquad (1.1.1)$$

Інтеграл, який стоїть у правій частині рівності, називають ***інтегралом Лапласа*** функції $f(t)$, а функцію $F(p)-$ ***зображенням за Лапласом*** для $f(t)$. Інакше функцію $F(p)$ називають ***зображенням*** функції $f(t)$, а $f(t)-$ ***оригіналом*** для $F(p)$.

Операцію переходу від оригінала до його зображення *називають* ***перетворенням Лапласа.***

Той факт, що $f(t)$ і $F(p)$ відносяться один до одного як оригінал та зображення, символічно записують так: $f(t) \doteq$ або $F(p) \doteq$ і називають ***операційною*** (або ***операторною***) ***рівністю.*** Застосовують і другі позначення**,** наприклад: $F(p) \to f(t)$; $F(p) = Lf(t) : f(t) = L^{-1}F(p)$.

Перетворення Лапласа ставить у відповідність функцію $f(t)$ дійсної змінної функцію $F(p)$ комплексної змінної p за допомогою співвідношення (1.1.1). Істотно, що не для всякої функції $f(t)$ цей інтеграл має сенс.

Отже функція $f(t)$ називається оригіналом, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1^0. Функція $f(t)$ диференційована достатнє число разів на всій вісі t, крім , майже точок, де вона та її похідні мають розриви першого роду, причому число таких точок на скінченному проміжку скінченне.

2^0. Для всіх від'ємних t функція $f(t)=0$, тобто $f(t)\equiv 0$, при $t<0$.

3^0. Функція $f(t)$ зростає не швидше показникової функції, тобто існує таке постійне число $M>0$ і $s_0>0$, що для всіх $t>0$

$$\left|f(t)\right| \le Me^{s_0 t} \tag{1.1.2}$$

Остання умова означає, що функція $f(t)$ може бути як обмеженою ($s_0=0$), так і необмеженою ($s_0>0$). Однак у останньому випадку її модуль при любому t не може бути більше значення деякої показникової функції $Me^{s_0 t}$ при тому ж t. *Точна верхня грань всіх значень s_0, для яких має місце нерівність (1.1.2), називається **показником степені росту** функції $f(t)$.*

З точки зору фізичних застосувань умови 1^0 і 3^0 вони виконуються для більшості функцій $f(t)$, які описують фізичні процеси. Умова 2^0 на перший погляд вважається штучною. Однак слід мати на увазі, що операційний метод застосовується до задач, які приводяться до розв'язання диференціальних рівнянь з заданими початковими умовами, і для фізики абсолютно байдуже, як ведуть себе функції, які необхідно знайти, до початкового моменту, який можна прийняти за момент $t=0$. Таким чином, умова 2^0 з фізичної точки зору цілком істотна.

Введемо основне означення

Перетворенням Лапласа заданої функції $f(t)$ дійсної змінної t називається перетворення, яке ставить у відповідність функції $f(t)$ функцію $F(p)$ комплексної змінної p, яка визначається за допомогою інтеграла

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{1.1.3}$$

Зауважимо, що інтеграл (1.1.3) є невласний інтеграл, який залежить від змінної p, як від параметра. Очевидно, в загалі кажучи, збігається при всіх значеннях параметра p. Дійсно, якщо функція $f(t)$

прямує до відмінної від нуля границі при $t \to \infty$, а $\operatorname{Re} p < 0$, то інтеграл явно розбігається. Отже істотно поставити питання про область збіжності інтеграла (1.1.3), тим самим про область визначення функції $F(p)$.

Теорема 1. *Інтеграл (1.1.3) збігається в області* $\operatorname{Re} p > s_0$*, де* s_0 *є показник степені зростання функції* $f(t)$*, причому у області* $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ *цей інтеграл збігається рівномірно.*

► Дійсно, при $\operatorname{Re} p > s_0$ і $p = s + i\sigma$, застосовуючи ознаку порівняння збіжності невласних інтегралів, одержимо;

$$\left|F(p)\right| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \leq M\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{s_0 t}dt = \frac{M}{s - s_0}, \quad s > s_0, \quad (1.1.4)$$

що дає підстави зробити висновок про збіжність інтеграла (1.1.3) при $s > s_0$. Якщо $s \geq s_1 > s_0$, то аналогічна оцінка дає

$$\left|F(p)\right| \leq M\int_0^{\infty} e^{-(s_1 - s_0)t}dt = \frac{M}{s_1 - s_0}, \quad (1.1.5)$$

що і доводить в силу ознаки Вейєрштрасса рівномірну збіжність інтеграла (1.1.3) за параметром p у області $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ ◄

Теорема 2. *Зображення Лапласа (1.1.3) функції* $f(t)$ *є аналітичною функцією комплексної змінної* p *в області* $\operatorname{Re} p > s_0$*, де* s_0 *є показник степені зростання функції* $f(t)$.

► Доведемо для любої точки p комплексної площини $\operatorname{Re} p > s_0$ функція $F(p)$ має похідну. Так як інтеграл (1.1.3) при $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ збігається абсолютно і рівномірно, отже диференціювання під знаком інтеграла за параметром p обґрунтовано. Покажемо, що інтеграл

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} f(t)te^{-pt}dt \quad (1.1.6)$$

який одержали після диференціювання, збігається рівномірно у півплощині $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ відносно параметра p. Дійсно

$$|F'(p)| = \left| -\int_0^{+\infty} f(t) t e^{-pt} dt \right| \le$$

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|t|e^{-pt}|dt \le M\int_0^{\infty} t \cdot e^{-(s_1 - s_0)t} dt = \frac{M}{(s_1 - s_0)^2} .$$

Звідси випливає, що інтеграл (1.1.6) збігається рівномірно відносно p, якщо $\operatorname{Re} p \ge s_1 > s_0$, що і доводить існування похідної функції $F(p)$ у любій півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$.◄

2^0. Формула обертання

Розглянемо інтеграл

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp , \qquad (1.1.7)$$

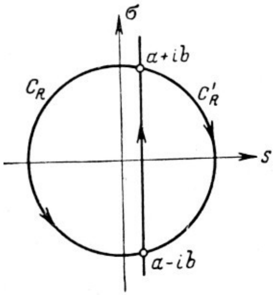

Рис. 1

який береться вздовж прямої $\operatorname{Re} p = a > 0$.

Позначимо через C_R і C'_R частини кола $|p| = R$, які лежать відповідно зліва і справа від прямої $\operatorname{Re} p = a$, а через $a - ib$ і $a + ib$ - кінці C_R і C'_R (Рис. 1)

Інтеграл (1.1.7) будемо обчислювати у розумінні головного значення Коші, тобто

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp$$

Нехай $t > 0$. Функція $\frac{1}{p} \to 0$ на C_R рівномірно при $R \to \infty$, то за лемою Жордана маємо:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 . \qquad (1.1.9)$$

Так як функція $\dfrac{1}{p}$ аналітична всюди, окрім початку координат (початок координат простий полюс) отже, за основною теоремою Коші про лишки, згідно якої

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot res\left.\frac{e^{pt}}{p}\right|_{p=0}=\lim_{p\to 0}\frac{p\cdot e^{pt}}{p}=1$$

Переходячи до границі при $b\to\infty$ (відповідно $R\to\infty$) і використовуючи (1.1.9), одержимо:

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp=1 \qquad (t>0) \qquad (1.1.10)$$

Покладаємо тепер $t<0$. В цьому випадку розглянемо дугу C'_R. За лемою Жордана маємо

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0. \qquad (1.1.11)$$

Так як справа від прямої $\operatorname{Re}p=a$ підінтегральна функція всюди аналітична, то основою теоремою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p}dp+\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_R}\frac{e^{pt}}{p}dp=0$$

Переходячи до границі при $b\to\infty$ і враховуючи (1.1.11), одержимо:

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp=0 \qquad (t<0) \qquad (1.1.12)$$

Об'єднуючи (1.1.10) і (1.1.12), маємо:

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \qquad (1.1.13)$$

Функція $\eta(t)$ називається одиничною функцією. При $t=0$ маємо:

$$\eta(0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{1}{p}dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{a+ib}{a-ib}=\frac{1}{2\pi i}\ \ln(-1)=\frac{1}{2}$$

Одинична функція має наступні властивості

1)Якщо функція $f(t)$ задовольняє першому і третьому умовам оригінала, отже добуток

$$f(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}f(t), & \text{якщо } t>0,\\ 0, & \text{якщо } t<0.\end{cases}$$

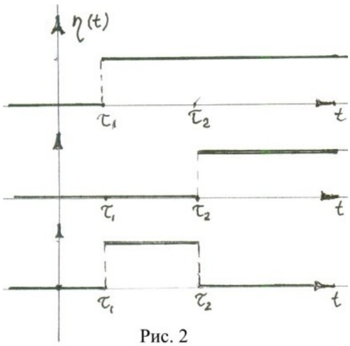

Рис. 2

буде задовольняти другій умові. Всюди дедалі, записуючи оригінал $f(t)$, будемо вважати його вже помноженим на одиничну функцію. Щоб скоротити запис множник $\eta(t)$ будемо опускати. Наприклад, запис $f(t)=t$ фактично означає

$$f(t)=\begin{cases}t, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

2) Якщо у формулі (1.1.12) t поміняти на $t-\tau$, де τ є фіксоване число, то

$$\eta(t-\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p(t-\tau)}}{p}dp=\begin{cases}1, & t>\tau,\\ 0, & t<\tau.\end{cases}$$

3) Розглянемо різницю двох одиничних функцій:

$$\eta(t-\tau_1)-\eta(t-\tau_2)$$

де $\tau_1<\tau_2$.

Ця різниця дає ступеневу функцію (Рис. 2). Дійсно:

$$\eta(t-\tau_1)-\eta(t-\tau_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{p(t-\tau_1)}-e^{p(t-\tau_2)}}{p}dp= \qquad =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left(e^{-p\tau_1}-e^{-p\tau_2}\right)dp=\begin{cases}0, & t<\tau_1,\\ 1, & \tau_1<\tau_2,\\ 0, & t>\tau_2\end{cases}$$

Тепер візьмемо оригінал $f(t)$. Замінимо його ступеневою функцією. Для чого інтервал $\left[0,T\right]$ розіб'ємо на n частин і складемо суму

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\sum_{k=0}^{n-1}f(\tau_k)\left[e^{-p\tau_k}-e^{-p\tau_{k+1}}\right]dp \qquad (1.1.14)$$

Ця сума дає функцію яку позначимо $f_1(t)$:

$$f_1(t)=f(\tau_0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left[e^{-p\tau_0}-e^{-p\tau_1}\right]dp+$$

$$+f(\tau_1)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left[e^{-p\tau_1}-e^{-p\tau_2}\right]dp+$$

$$+f(\tau_2)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\left[e^{-p\tau_2}-e^{-p\tau_3}\right]dp+...$$

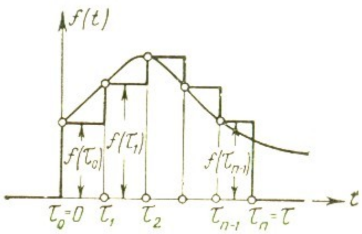

Рис. 3

Перший інтеграл у правій частині дорівнюється нулю, якщо $t<\tau_0$, дорівнюється одиниці якщо $\tau_0<\tau_1$, і дорівнюється нулю, якщо $t>\tau_1$; другий інтеграл дорівнюється нулю, якщо $t<\tau_1$, дорівнюється одиниці, якщо $\tau_1<\tau_2$, і дорівнюється нулю, якщо $t>\tau_2$ і т.д. Отже функція $f_1(t)$ ступенева. Якщо збільшити число ділень n так, щоб $\max\Delta\tau_k$ ($\Delta\tau_k=\tau_{k+1}-\tau_k$) прямувало до нуля, то функція $f_1(t)$ буде прямувати до $f(t)$.

Так як

$$e^{-p\tau_k}-e^{-p\tau_{k+1}}=e^{-p\tau_k}\left[1-e^{-p(\tau_{k+1}-\tau_k)}\right]=e^{-p\tau_k}\left[1-e^{-p\Delta\tau_k)}\right]=$$

$$=e^{-p\tau_k}\left[p\Delta\tau_k-p^2\frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!}+p^3\frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!}-...\right]=e^{-p\tau_k}p\Delta'\tau_k$$

де

$$\Delta'\tau_k = \left[\Delta\tau_k - p\frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!} + p^2\frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!} - ...\right]$$

Таким чином

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k\right\}dp$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, заключаємо, що сума

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)e^{-p\tau_k}\Delta'\tau_k$$

перейде до інтеграла від функції $f(t)e^{-pt}$ у проміжку від нуля до T. Таким чином , сума (1.1.14) дасть інтегральне представлення оригінала $f(t)$ на інтервалі $[0,T]$, тобто

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\left[\int_0^T e^{-p\tau} f(\tau)d\tau\right]dp$$

Тепер, якщо $T \to \infty$ одержимо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (1.1.15)$$

де

$$F(p) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \qquad (1.1.16)$$

Формули (1.1.15) і (1.1.16) *називаються* ***формулами обертання.***

Слід зауважити, що формула обертання (1.1.15) була одержана не строго, так як ми переходили до границі під знаком інтеграла без строгого обґрунтування.

3^0. Умови, при яких $F(p)$ є зображенням

Покажемо, що якщо $F(p)$ є зображенням, то $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$. Оцінюючи модуль $F(p)$, одержимо:

$$\left|F(p)\right| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \frac{M}{s - s_0},$$

де $s = \operatorname{Re} p$ і s_0 є показник зростання функції $f(t)$, звідси випливає, що якщо $s \to \infty$, то $F(p) \to 0$.

Отже, умова $F(p) \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$ є необхідним для того, щоб $F(p)$ була зображенням оригінала $f(t)$. Достатніми ж умовами є наступні:

1^0. Функція $F(p)$ аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$;

2^0. $F(p)$ прямує до нуля при $|p| \to \infty$ рівномірно відносно аргументу p у любій півплощині $\operatorname{Re} p \ge a > s_0$;

3^0. Інтеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp, \qquad a > s_0$$

абсолютно збігається.

При цих умовах $F(p)$ є зображенням оригінала $f(t)$ і

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (1.1.17)$$

► Для доведення обидві частини (1.1.17) помножимо на $e^{-p_1 t}$, де p_1 - деяке фіксоване комплексне число, $\operatorname{Re} p_1 > a$ і проінтегруємо за змінною t у межах від нуля до нескінченості, отже

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_1 t}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-p_1 t}\left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp\right\}dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[e^{-p_1 t + at} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma}F(a+i\sigma)d\sigma\right]dt \qquad (1.1.18)$$

так як $p = a + i\sigma$, $dp = id\sigma$ і $-\infty < \sigma < \infty$.

Очевидно, що

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t}F(a+i\sigma)d\sigma\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(a+i\sigma)\right|d\sigma$$

За умовою 3^0 інтеграл у правій частині збігається, тому інтеграл у лівій частині збігається рівномірно відносно t, отже, у формулі (1.1.18) припустима зміна порядку інтегрування і ми маємо:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-p_1 t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(a+i\sigma)\left[\int_0^{\infty} e^{-p_1 t + at + i\sigma}dt\right]d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\left[\int_0^{\infty} e^{-(p_1-p)t}dt\right]dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)dp}{p-p_1} \qquad (1.1.19)$$

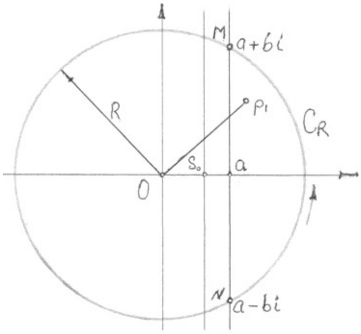

Рис. 4

Розглянемо інтеграл

$$\int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_1}dp$$

який обчислюється за дугою кола C_R $(|p| = R > |p_1|, \operatorname{Re} p_1 > a)$.

Позначимо $\max|F(p)|$ через $\alpha(R)$. Враховуючи, що $|p-p_1| \geq |p| - |p_1|$ одержимо нерівність:

$$\left|\int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_1}dp\right| \leq \int_{C_R} \frac{|F(p)|}{|p-p_1|}|dp|$$

$$\leq \alpha(R)\int_{C_R} \frac{ds}{|p|-|p_1|} \leq \qquad \leq \alpha(R)\int_{C_R} \frac{ds}{R-|p_1|} = \frac{\alpha(R)}{R-|p_1|}\pi R.$$

Так як за умовою 2^0 $\alpha(R) \to 0$ рівномірно при $R \to \infty$, то з останнього виразу випливає, що

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_1}dp = 0 \qquad (1.1.20)$$

Тепер розглянемо замкнений контур $\overleftarrow{C}_R$, який складається з відрізка MN (Рис. 4) і дуги $\overleftarrow{C}_R$. Очевидно, що

$$\int_{\overleftarrow{C}_R} \frac{F(p)}{p-p_1}dp = \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{F(p)}{p-p_1}dp + \int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_1}dp$$

Так як другий інтеграл у правій частині в силу (1.1.20) прямує до нуля при $R \to \infty$, то

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_1} dp = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_1} dp \qquad (1.1.21)$$

Підставляючи (1.1.21) у (1.1.19), одержимо:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_1 t} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{F(p)}{p-p_1} dp = F(p_1)$$

так як під знаком границі стоїть інтеграл Коші. ◄

Остання формула показує, що при сформульованих трьох умовах функція $F(p)$ дійсно є зображенням оригінала $f(t)$.

4^0. Теореми розвинення

Застосування формули обертання (1.1.15) для практичного знаходження оригінала за його зображенням викликають певні труднощі, так як приходиться обчислювати інтеграл у комплексній площині. На практиці для знаходження оригіналів дуже часто використовують так званні теореми розвинення. Перш ніж сформулювати їх, умовимося вважати всі зображення $F(p)$, які раніше були визначені у правій півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, аналітично продовженими у ліву півплощину $\operatorname{Re} p \le s_0$.

Друга теорема розвинення. *Нехай функція $F(p)$ задовольняє умовам:*

а) $F(p)-$ правильна у деякій півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, тобто у цій півплощині вона не має сингулярних точок і прямує до нуля при $p \to \infty$;

б) $F(p)-$ мероморфна у півплощині $\operatorname{Re} p \le s_0$, тобто у скінченній частині цієї півплощини $F(p)$ не має інших сингулярних точок, крім полюсів;

в) Існує система кіл

$C_{R_n}: \ |p| = R_n, \quad R_1 < R_2 < R_3 < \ldots < R_n < \ldots$, на якій $F(p)$ прямує до нуля рівномірно відносно аргументу p, якщо $R_n \to \infty$;

г) для любого a абсолютно збігається інтеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$$

тоді оригіналом для $F(p)$ буде функція

$$f(t) = \sum_k r_k(t) \tag{1.1.22}$$

де $r_k(t) = res\left[e^{pt}F(p)\right]_{p=p_k}$ - лишки функції $e^{pt}F(p)$ у сингулярних точках p_k функції $F(p)$.

► Так як функція $F(p)$ задовольняє всім умовам зображення, то оригінал $f(t)$ виражається формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)dp \tag{1.1.23}$$

Позначимо через C'_{R_n} частину кола C_{R_n} розташованою зліва від прямої $\operatorname{Re} p = a$, через $a \pm ib$ - точки перетину кола C_{R_n} з цією прямою і через $\overline{C_{R_n}}$ - замкнений контур складений з відрізка MN і C'_{R_n}, причому контур $\overline{C_{R_n}}$ беремо так, щоб він не проходив через полюси (Рис. 4*)

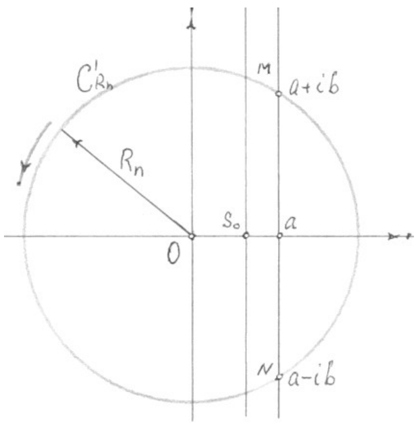

Рис. 4*

На основі леми Жордана

$$\lim_{R_n\to\infty} \int_{C'_{R_n}} e^{pt}F(p)dp = 0$$

Тоді рівність (1.4.23) можна записати так

$$f(t) = \lim_{R_n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_n} e^{pt}F(p)dp\right],$$

Звідки

$$f(t)=\lim_{R_n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} e^{pt}F(p)dp\right] \qquad (1.1.24)$$

Підінтегральна функція аналітична всередині замкненого контуру окрім сингулярних точок, які є полюсами. За теоремою Коші про лишки маємо:

$$\int_{C_n} e^{pt}F(p)dp = 2\pi i\sum_k res\left[e^{pt}F(p)\right]_{p=p_k} \qquad (1.1.25)$$

Підставляючи (1.1.25) у рівність (1.1.24), одержимо (1.1.22), що і треба було довести. ◄

Приклади.

1.Розглянемо функцію $f(p)=\dfrac{1}{p}$.

►У півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$, вона аналітична і її аналітичне продовження у ліву півплощину $\operatorname{Re} p \le s_0$ буде мати той же вид $\dfrac{1}{p}$.

Аналітично продовжена функція має єдиний полюс $p_1 = 0$ у початку координат і задовольняє усім умовам другої теореми розкладу. В силу цієї теореми

$$f(t)=r_1(t)=res\left[e^{pt}\frac{1}{p}\right]_{p=0}=\lim_{p\to 0} p\cdot\frac{1}{p}\cdot e^{pt}=1.$$

Отже

$$\frac{1}{p}\doteqdot \ . \left(\frac{1}{p}\div 1\right) ◄ \qquad (1.1.26)$$

2. Нехай $F(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

► Функція $F(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$, аналітично продовжена на всю комплексну площину, має у початку координат єдиний полюс порядку $n+1$, тому

$$f(t)=res\left[e^{pt}\frac{n!}{p^{n+1}}\right]_{p=0}=\frac{1}{n!}\lim_{p\to 0}\frac{d^n}{dp^n}\left[\frac{p^{n+1}\cdot n!}{p^{n+1}}e^{pt}\right]=t^n$$

Тобто

$$\frac{n!}{p^{n+1}}\doteq \quad ◀ \qquad (1.1.27)$$

3. Нехай $F(p)=\dfrac{1}{p-\alpha}$.

▶ Аналітичне продовження цієї функції має єдиний простий полюс у точці $p=\alpha$, отже

$$f(t)=res\left[e^{pt}\frac{1}{p-\alpha}\right]_{p=\alpha}=\lim_{p\to\alpha}\left((p-\alpha)\cdot\frac{e^{pt}}{(p-\alpha)}\right)=e^{\alpha t}.$$

Тобто

$$\frac{1}{p-\alpha}\doteq \quad ◀ \qquad (1.1.28)$$

4. $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, де $\omega=const$

▶ Аналітичне продовження цієї функції має два простих полюса $p_1=i\omega$ і $p_2=-i\omega$. У цьому випадку

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2}r_k(t)=res\left[e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]_{p=i\omega}+res\left[e^{pt}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]_{p=-i\omega}=$$

$$=\lim_{p\to i\omega}\left[(p-i\omega)\frac{e^{pt}\omega}{p^2+\omega^2}\right]+\lim_{p\to -i\omega}\left[(p+i\omega)\frac{e^{pt}\omega}{p^2+\omega^2}\right]=$$

$$=\lim_{p\to i\omega}\left[\frac{e^{pt}\omega}{p+i\omega}\right]+\lim_{p\to -i\omega}\left[\frac{e^{pt}\omega}{p-i\omega}\right]=\frac{e^{i\omega t}}{2i}-\frac{e^{-i\omega t}}{2i}=\sin\omega t$$

Тобто

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\doteq \qquad . \qquad (1.1.29)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{p}{p^2+\omega^2} \doteq \qquad\qquad ◄ \qquad (1.1.30)$$

5. $F(p)=\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$, де $\omega = const$

► Аналітичне продовження $F(p)=\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ має два простих полюса $p_1=\omega$ і $p_2=-\omega$, тому

$$f(t)=res\left[e^{pt}\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]_{p=\omega}+res\left[e^{pt}\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]_{p=-\omega}=$$

$$=e^{\omega t}\frac{\omega}{2\omega}+e^{-\omega t}\frac{\omega}{2\omega}=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}=\cosh\omega t$$

$$\frac{p}{p^2-\omega^2} \doteq \qquad (1.1.31)$$

Аналогічно знаходимо оригінал функції $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$.

$$\frac{\omega}{p^2-\omega^2} \doteq \qquad\qquad .◄ \qquad (1.1.33)$$

Перша теорема розвинення. *Якщо функція $F(p)$ - аналітична і правильна у околі нескінченно віддаленій точці і має у цьому околі розклад у ряд Лорана виду*

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k} \qquad (1.1.34)$$

то її оригіналом буде функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(k-1)!}t^{k-1} \qquad (1.1.35)$$

причому $f(t)$ - ціла функція.

► Функція $F(p)$ задовольняє всім умовам зображення, отже,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p^k}dp \qquad (1.1.36)$$

З умови теореми випливає, що при достатньо великому $a = \operatorname{Re} p$, тобто при $|p| \ge N$, де N - достатньо велике число, ряд (1.1.34) збігається абсолютно і рівномірно тому у формулі (1.1.36) припустиме почленне інтегрування ряду , в результаті чого одержимо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^k} dp$$

Використовуючи формулу (1.1.27) можемо записати:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

і перша частина тереми доведена.

Доведемо тепер ,що $f(t)$ - ціла функція.

Так як ряд (1.1.34) при $|p| \ge N$ збігається, то існує постійне M, таке, що для любого k

$$\frac{|c_k|}{N^k} < M$$

Тобто

$$|c_k| < M \cdot N^k$$

За формулою (1.1.35) одержимо, що

$$|f(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{(k-1)!} t^{k-1} < M \cdot N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Nt)^{k-1}}{(k-1)!} = MNe^{Nt}$$

Звідси видно, що $f(t)$ є ціла функція. ◄

Приклад. *Нехай* $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$*, де* n *- ціле число.*

► Очевидно, $F(p)$ задовольняє всім умовам першої теореми розвинення. Так як

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{p^{k+n+1}},$$

Отже на основі (1.1.35) маємо:

$$f(t) = \;=\frac{1}{p^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{t^{k+n}}{(k+n)!} = t^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{2\sqrt{t}}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}$$

Приймаючи до уваги, що

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} = J_n(z)$$

є функція Бесселя $n-$ го порядку

Одержимо

$$f(t) = t^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{t}\right)$$

Таким чином

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \doteq \; t^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{t}\right) \qquad (1.1.37)$$

У частому випадку при $n = 0$ маємо

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \doteq \; J_0\left(2\sqrt{t}\right) \qquad (1.1.38)$$

Функцію Бесселя нульового порядку. ◄

5^0. Основні властивості перетворення Лапласа

1). ***Властивість лінійності.*** *Якщо* $F_k(p) \doteq$ *при* $\operatorname{Re} p > s_k$ *(*$s_k -$*показник зростання* $f_k(t)$*), то для любих постійних чисел (дійсних або комплексних)* c_k *(* $k = \overline{1,n}$ *)*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p) \doteq \sum_{k=1}^{n} \quad t) \qquad \operatorname{Re} p > \max s_k \qquad (1.1.39)$$

► Дійсно, за означенням

$$F_k(p) = \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt$$

Помноживши обидві часини цієї рівності на c_k і якщо знайти суму за індексом k обох частин одержаної рівності, то будемо мати

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}c_kF_k(p)=\ \sum_{k=1}^{n}c_k\int_0^\infty f_k(t)e^{-pt}dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty\left(c_kf_k(t)\right)e^{-pt}dt$$

Звідси випливає справедливість формули (1.1.39). ◄

Наприклад. Покажемо справедливість формули (1.1.30).

► Нехай $f(t)=\cos\omega t$. Приймаючи до уваги, що $\cos\omega t=\dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$ застосуємо формулу знаходження зображення

$$F(p)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{-(p-i\omega)t}+e^{-(p+i\omega)t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

Отже, дійсно

$$\cos\omega t\doteq \qquad .◄$$

2). ***Теорема подібності.*** *Якщо* $F(p)\doteq \qquad$, $\operatorname{Re}p>s_0$ *і* $\lambda>0$*,то*

$$\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)\doteq \qquad\qquad \operatorname{Re}p>s_0, \quad (1.1.40)$$

тобто, якщо помножити аргумент оригінала на додатне число, то це приводить до ділення зображення і аргументу на це число.

► Дійсно, покладаючи $\lambda t=\tau,\quad dt=\dfrac{1}{\lambda}d\tau$, маємо:

$$\int_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

Таким чином ми одержали формулу (1.1.40). ◄

Наприклад. *Знайти зображення функції* $f(\lambda t)=J_0\left(2\lambda\sqrt{t}\right)$.

► Приймаючи до уваги $(1.1.37)$ одержімо

$$f(\lambda t)=J_0\left(2\lambda\sqrt{t}\right)\ \doteq \qquad =\frac{1}{p}e^{-\frac{\lambda^2}{p}}.$$

Отже

$$J_0\left(2\lambda\sqrt{t}\right) \doteq \quad \lambda^2 \quad p \qquad ◄$$

3). Диференціювання оригінала. *Якщо функція* $f(t) \doteq$ *і* $f'(t)$ *або взагалі* $f^{(n)}(t)$ *є оригіналом, то*

$$f'(t) \doteq \qquad - f(0) \tag{1.1.41}$$

або

$$f^{(n)}(t) \doteq \qquad - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \tag{1.1.42}$$

де під $f^{(k)}(0)$ *розуміється праве граничне значення* $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$

► Формулу (1.1.42) докажемо методом математичної індукції. Спочатку докажемо її для $n = 1$, тобто , що

$$f'(t) \doteq \qquad - f(0)$$

Склавши інтеграл Лапласа для $f'(t)$ та інтегруючи його за частинами одержимо

$$f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} \qquad {}^{pt} dt = \left[f(t) e^{pt} \right]_0^{\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{pt} dt$$

Але $\lim\limits_{t \to +\infty} \left[f(t) e^{-pt} \right] = 0$ так як, покладаючи показник росту $f(t)$ дорівнюється s_0, але ж $\operatorname{Re} p = s > s_0$, будемо мати:

$$\left| f(t) e^{-pt} \right| < M e^{-(s - s_0)t} \to 0$$

при $t \to \infty$

Звідси

$$f'(t) \doteq \qquad p \int_0^{+\infty} f(t) e^{pt} dt = pF(p) - f(0)$$

У частому випадку, при $f(0) = 0$ одержимо $f'(t) \doteq$, тобто в цьому випадку *диференціювання оригінала приводить до множення зображення на величину* p .

Якщо $f''(t)$ існує і є оригіналом, то, використовуючи тільки що одержаний результат, знайдемо:

$$f''(t) \doteq \qquad) - f(0) \big] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Аналогічно одержимо загальну формулу (1.1.38).

Якщо початкові умови $f(t)$ дорівнюються нулю, тобто

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$$

то

$$f^{(n)}(t)\doteq \qquad ◄$$

Приклад. Довести, що формула $f(t)=\sinh\omega t\doteq$ $\quad p \quad \omega$ правильна, застосовуючи виведену формулу (1.1.41)

► Відомо, що $f'(t)=\left(\sinh\omega t\right)'=\omega\cosh\omega t$ і $\sinh 0=0$, отже з даної рівності, використовуючи правило диференціювання оригінала, одержимо:

$$\omega\cosh\omega t\doteq \quad p \quad \omega \qquad \text{або } \cosh\omega t\doteq \quad p \quad \omega \qquad ◄$$

4). Диференціювання зображення. *Якщо*

$$F(p)\doteq \qquad \operatorname{Re} p>s_0,$$

тоді

$$F^{(n)}(p)\doteq \qquad t), \tag{1.1.43}$$

Тобто, диференціювання зображення приводить до множення оригінала на величину $(-t)$.

► Дійсно, так як $F(p)$ у півплощині $\operatorname{Re} p>s_0$ є аналітична функція, то її можна диференціювати по p, і ми одержимо:

$$F'(p)=-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt \qquad F'(p)\doteq$$

$$F''(p)=\int_0^\infty t^2f(t)e^{-pt}dt, \qquad F''(p)\doteq$$

У загальному випадку

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n\int_0^\infty t^nf(t)e^{-pt}dt \qquad F^{(n)}(p)\doteq \qquad t),$$

що співпадає з формулою (1.1.43)◄

Приклад.1 *Знайти зображення Функцій:*
$a)\ f(t)=t\sin\alpha t;\quad b)\ f(t)=t\cos\alpha t$.

► *а)* Приймаючи до уваги формулу $\sin\alpha t \doteq$ і використовуючи правило диференціювання зображення, одержимо

$$-t\sin\alpha t \doteq \left(\right)' = -\frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$$

або

$$t\sin\alpha t \doteq \frac{}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}.$$

в) З формули $\cos\alpha t \doteq$, а також виконуючи такі ж самі операції знайдемо

$$-t\cos\alpha t \doteq \left(\right)' = \frac{p^2+\alpha^2-2p^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$$

Або

$$t\cos\alpha t \doteq \frac{}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад.2. *Знайти зображення функції* $t^n e^{\alpha t}$, *де* $n-$ *натуральне число.*

► *За формулою* $e^{\alpha t} \doteq$ *і застосовуючи правило диференціювання зображення одержимо*

$$(-t)^n e^{\alpha t} \doteq \left(\right)^n = \frac{(-1)^n n!}{\left(p-\alpha\right)^{n+1}}$$

Звідси

$$t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{}{\left(p-\alpha\right)^{n+1}}. \blacktriangleleft$$

5). Інтегрування оригінала. *Якщо* $F(p) \doteq$ е $p > s_0$ *Тоді*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{}{p} \quad , \qquad\qquad \operatorname{Re} p > s_0 \qquad \textit{(1.1.44)}$$

тобто інтегрування оригінала зводиться до ділення зображення на величину p .

► Покажемо, що якщо $f(t)$ є оригінал, то $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ також є оригінал. Для функції $\varphi(t)$ виконання перших двох умов оригінала очевидна. Виконання третьої умови доводиться так:

$$|\varphi(t)| \le \int_0^t |f(\tau)| d\tau \le M \int_0^t e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s^0}(e^{s_0 t} - 1) \le \frac{M}{s^0} e^{s_1 t} = M_1 e^{s_1 t}$$

де $s_0 \neq 0, s_0 \le s_1, s_1 > 0$. Якщо $s_0 = 0$, то $|\varphi(t)| \le Mt < Me^t$, отже функція $\varphi(t)$ являється оригіналом. Тоді $\varphi(t)$ має зображення і позначимо його через $\Phi(p)$, Так як

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(\tau)d\tau = 0 \, ,$$

отже використовуючи правило диференціювання оригінала із рівності

$$\varphi(t) \ \doteq \ \Phi(p)$$

Одержимо

$$\varphi'(t) \ \doteq \ p\Phi(p) .$$

Але ж

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau)d\tau \right)' = f(t)$$

Тоді $f(t) \ \doteq \ p\Phi(p)$. Враховуючи, що за умовою $F(p) \doteq$ і оригінал має єдине зображення, знайдемо:

$$p\Phi(p) = F(p), \qquad \Phi(p) = \frac{F(p)}{p} ,$$

або

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{}{p} \qquad ◄$$

Зауваження. *Нехай* $F(p) \doteq$ е $p > s_0$ *; тоді*

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \doteq \qquad p \qquad) \qquad (1.1.45)$$

Приклад *Знайти зображення степеневої функції* t^n*, де* n *– натуральне число.*

► Із рівності $1 \doteq \quad p$, користуючись правилом інтегрування оригінала, одержимо:

$$\int_o^t 1 d\tau \doteq \quad p \; ; \; \int_o^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2!} \doteq \quad p \; ;...; \; \int_o^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\tau = \frac{t^n}{n!} \doteq \quad p \; .$$

Звідси $t^n \doteq \quad p$ ◄

6). Інтегрування зображення. *Якщо* $F(p) \doteq$ $p > s_0$

$\dfrac{f(t)}{t}$ *являється оригіналом і* $\int_p^\infty F(q)dq$ *збігається, то*

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^\infty \qquad {}^{pt} dt = \int_p^\infty F(q)dq \qquad \textit{(1.1.46)}$$

причому, шлях інтегрування лежить у півплощині $\operatorname{Re} p \ge s_1 > s_0$*, де* $s_0 -$ *показник зростання оригінала* $f(t)$*, тобто інтегрування зображення приводить до ділення оригінала на величину* t *.*

► Позначимо

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt \qquad (1.1.47)$$

Функція $I(p)$ є аналітична у області $\operatorname{Re} p > s_0$, причому $I(\infty) = 0$, знайдемо похідну функції $I(p)$, диференціюючи за параметром p .

$$I'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -F(p)$$

Звідси, враховуючи умову $I(\infty)=0$, одержимо

$$I(p)=I(\infty)\ -\int_{\infty}^{p} F(q)dq=\int_{p}^{\infty} F(q)dq$$

отже одержана рівність доводить справедливість формули (1.1.47).◄

Приклад. *Знайти зображення функції* $f(t)=\dfrac{\sin\omega t}{t}$

► Користуючись співвідношенням $\sin\omega t \doteq$ і правилом інтегрування зображення, одержимо

$$\frac{\sin\omega t}{t} \doteq \int_{p}^{\infty} \ldots\, dp=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{p}{\omega}=\cot^{-1}\frac{p}{\omega}$$

$$\frac{\sin\omega t}{t} \doteq \ldots \qquad (1.1.48)$$

Використовуючи властивість $\mathbf{5^0}$ одержимо зображення функції $f(t)=si\,t=\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$, яка називається *інтегральним синусом* Отже

$$si\,t=\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau\ \ \doteq\ \ \frac{1}{p}\cot^{-1}p\ ◄ \qquad \textit{(1.1.49)}$$

*7)**. Теорема зміщення.** Якщо* $F(p)\doteq \ldots\ p>s_0$ *і тоді для любого комплексного числа* p_0

$$e^{p_0 t}f(t)\doteq \ldots_0) \qquad \textit{(1.1.50)}$$

Тобто зміщення аргументу зображення на величину p_0 *приводить до множення оригінала на величину* $e^{p_0 t}$.

► Дійсно, нехай $p_0=s_1+i\sigma_1$, тоді

$$\left|e^{p_0 t}f(t)\right|\le e^{s_1 t}\left|f(t)\right|\le Me^{(s_1+s_0)t}$$

Отже показником зростання функції $e^{p_0 t} f(t)$ буде $s_1 + s_0$, тоді при $\operatorname{Re} p > s_1 + s_0$

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq \int\limits_0^\infty \quad f(t)dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p-p_0)t} f(t)dt = F(p-p_0)$$

Звідси випливає справедливість формули (1.1.50).◄

Приклади. Користуючись теоремою зміщення і відповідними зображеннями елементарних функцій можна знайти

$$te^{p_0 t} \doteq \frac{\quad}{(p-p_0)^2} \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$$

$$t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{\quad}{(p-p_0)^{n+1}} \qquad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$$

$$e^{p_0 t} \sin \omega t \doteq \frac{\quad}{(p-p_0)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega| - \operatorname{Re} p_0$$

$$e^{p_0 t} \cos \omega t \doteq \frac{p_0}{(p-p_0)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega| - \operatorname{Re} p_0$$

8). Теорема запізнення. *$F(p) \doteq \quad p > s_0$ і $\tau > 0$, тоді*

$$f(t-\tau) \doteq \quad), \qquad (1.1.51)$$

тобто запізнення аргументу оригінала на додатну величину τ приводить до множення зображення на величину $e^{-p\tau}$.

► Нехай задана функція

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau > 0, \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}$$

Тоді

$$f_\tau(t) \doteq \qquad \int\limits_0^\infty f_\tau(t) e^{-pt} dt = \int\limits_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt$$

Зробимо заміну змінної поклавши $t - \tau = \theta$. Тоді

$$F_\tau(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p(\theta+\tau)} f(\theta) d\theta = e^{-p\tau} F(p)$$

Що і доводить теорему. ◄

***Приклад 1**. Знайти зображення функції Хевісайда*

$$\eta(t-\tau)=\begin{cases}0, & якщо\; t\le\tau,\\ 1, & якщо\; t>\tau.\end{cases}$$

► Відомо, що $\eta(t)\doteq\frac{1}{p}$, отже застосовуючи теорему запізнення одержимо

$$\eta(t-\tau)\doteq\frac{e^{-p\tau}}{p} \quad ◄ \tag{1.1.52}$$

***Приклад 2**. Знайти зображення ступеневої функції*

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ nf_0, & n\tau\le t<(n+1)\tau, \quad n=1,2,...\end{cases} \tag{1.1.53}$$

► Представимо функцію $f(t)$ за допомогою одиничної функції Хевісайда $\eta(t)$

$$f(t)=f_0\left[\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\eta(t-3\tau)+...+\eta(t-n\tau)+...\right]$$

Використовуючи властивість лінійності та теорему запізнення, одержимо

$$f(t)\doteq f_0\left(\frac{e^{-p\tau}}{p}+\frac{e^{-2p\tau}}{p}+\frac{e^{-3p\tau}}{p}+...+\frac{e^{-np\tau}}{p}+...\right)$$

Покладаючи, що $\operatorname{Re}p>0$, знаходимо, що $0<\left|e^{-p\tau}\right|<1$,знайдемо суму нескінченно спадної геометричної прогресії, тобто

$$f(t)\doteq\frac{f_0}{p}\cdot\frac{e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}} \quad ◄ \tag{1.1.54}$$

Приклад 3. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням

$$F(p)=\frac{1}{p(1-e^{-p})}$$

► Як і у попередньому прикладі, покладаючи, що $\operatorname{Re}p>0$, знаходимо, що $0<\left|e^{-p}\right|<1$. Тому дріб $\frac{1}{1+e^{-p}}=\frac{1}{1-(-e^{-p})}$ можна розглядати, як суму нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом, який дорівнюється 1, і знаменником $q = -e^{-p}$. Це дає можливість $F(p)$ представити у вигляді суми

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-2p} - \frac{1}{p}e^{-3p} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{p}e^{-np} + \ldots$$

Але ж $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$, за теоремою запізнення $\frac{e^{-np}}{p} \doteq$.
Застосовуючи до одержаного ряду властивість лінійності, дає для $F(p)$ оригінал у вигляді ряду

$$f(t) = 1 - \eta(t-1) + \eta(t-2) - \eta(t-3) + \eta(t-4) - \ldots$$

Для $0 < t < 1$ його сума дорівнюється 1, для $1 < t < 2$ вона дорівнюється 0 для $2 < t < 3$ сума дорівнюється 1, для $3 < t < 4$ знову 0 і т.д. Таким чином, новий ряд визначає періодичну функцію $f(t)$ з періодом $T = 2$, яка дорівнюється 1 при $0 < t < 1$ і дорівнюється 0 при $1 < t < 2$. Вона і є шуканим оригіналом. Однак, строго кажучи, це потребує перевірки. Так як тут

$$\varphi(p) = \int_0^1 e^{-pt}dt = \frac{1 - e^{-p}}{p},$$

То за формулою зображення періодичного оригінала одержимо

$$\frac{1 - e^{-p}}{p(1 - e^{-2p})} = \frac{1}{p(1 + e^{-p})},$$

що співпадає з $F(p)$.◄

9). Теорема множення. *(Зображення згортки).*
Якщо $F(p) \doteq$ *і* $G(p) \doteq$ *, то*

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t \quad (t-\tau)d\tau = f * g \qquad (1.1.55)$$

Зауважимо, $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ *називають складкою*, або *згорткою*, функцій $f(t)$ і $g(t)$, а операція одержання складки *називається згортанням функцій*. Тому теорему множення можна сформулювати так: *множення зображень приводить до згортання їх оригіналів.* Цю теорему називають також *теоремою згортання* і *теоремою Бореля*.

► Спочатку доведемо, що згортка є оригінал. Нехай s_1 є показник росту функції $f(t)$, а s_2 – показник росту $g(t)$. Позначимо $\max\{s_1, s_2\}$ через s_0. Тоді

$$\left|f(\tau)g(t-\tau)\right| \le M_1 e^{s_1\tau} M_2 e^{s_2(t-\tau)} \le M e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} = M e^{s_0 t}.$$

Звідси випливає, що

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)g(t-\tau)\right| d\tau \le \frac{M}{s_0}\left(e^{s_0 t}-1\right) \le M_1 e^{s_0 t}$$

тобто дійсно згортка являється оригіналом.

Покладемо $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

Для доведення теореми запишемо формулу Діріхле

$$\int_0^\infty dt \int_0^t \phi(\tau,t)d\tau = \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty \phi(\tau,t)dt$$

використовуючи яку, одержимо

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt = \int_0^\infty d\tau\left(\int_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau)dt\right) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau\left(\int_0^\infty e^{-pt_1} g(t_1)dt_1\right) = F(p)\cdot G(p)$$

$$F(p)\cdot G(p) \doteq {}_{0}^{t} \qquad (t-\tau)d\tau,$$

що і треба було довести. ◄

Якщо у правій частині одержаної операційній рівності замінити τ на $t-\tau$, тоді одержимо

$$F(p)\cdot G(p) \doteq {}_{0}^{t} \qquad (t-\tau)d\tau \tag{1.1.56}$$

Це означає, що згортка комутативна, тобто

$$F(p)\cdot G(p)\doteq \;{}_{0}^{t}\qquad (t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$= f*g = g*f$$

Приклад. *Знайти оригінал* $\varphi(t)$ *за його зображенням*

$$\Phi(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$$

► Так як $\dfrac{p}{p^2+1}\doteq$, тоді покладаючи у теремі множення $F(p)=G(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ і $f(t)=g(t)=\cos t$, одержимо

$$\varphi(t)=\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos t+\cos(2\tau-t)\right]d\tau=$$

$$\frac{1}{2}\left[\tau\cos t+\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)\right]_0^t=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$$ ◄

Інтеграл Дюамеля. Якщо звернути увагу на те, що функція $\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ обертається в нуль при $t=0$, та застосовуючи правило диференціювання оригінала і формулу диференціювання інтеграла, який залежить від параметра t, одержимо наступний запис теореми множення

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)\doteq \;{}_{0}^{t}\qquad)g(t-\tau)d\tau=$$

$$=f(t)g(0)+\int_0^t f(\tau)g_t^{'}(t-\tau)d\tau \qquad (1.1.57)$$

Враховуючи рівноправність функцій $F(p)$ і $G(p)$ маємо

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)\doteq \;{}_{0}^{t}\qquad -\tau)g(\tau)d\tau=$$

$$= g(t)f(0) + \int_0^t g(\tau) f_t^{'}(t-\tau)d\tau \tag{1.1.58}$$

Оригінали (1.157) і (1.1.58) носять назви інтегралів накладання або інтегралів Дюамеля.

Останні два запису теореми множення можна видозмінити, якщо врахувати, що

$$\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau = \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau \tag{1.1.59}$$

і

$$\int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau = \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.1.60}$$

10). Теорема двоїстості теоремі множення.

Нехай дані два оригінали $f(t)$ *і* $g(t)$ *з показниками росту* s_1 *і* s_2. *Їх добуток також є оригіналом, причому*

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(q-p)dq \tag{1.1.61}$$

► Очевидно, добуток $f(t)g(t)$ задовольняє умовам оригінала. Запишемо його зображення:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{qt}F(q)dq\right)g(t)dt,$$

де $a > s_1$. Внутрішній інтеграл збігається рівномірно, тому можна змінити порядок інтегрування. Тоді

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)\left(\int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t}dt\right)dq$$

Якщо вважати, що $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, то будемо мати $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$, так як $\operatorname{Re} p = a$ і внутрішній інтеграл можна замінити через $G(p-q)$. Теорема доведена. ◄

11). Теорема Ефроса. (Узагальнена теорема множення). Н*ехай дано зображення* $F(p) \doteq$ *і нехай функції* $G(p)$ *і* $q(p)$ *аналітичні і такі, що*

$$G(p)e^{-\tau q(p)} \doteq$$

Тоді

$$F\left[q(p)\right]G(p) \doteq {}_{0}^{\infty} \qquad (t;\tau)d\tau \qquad (1.1.62)$$

► Дійсно, зображення правої частини співвідношення (1.1.62),

$$\int_0^\infty f(\tau)g(t;\tau)d\tau \doteq {}_{0}^{\infty} \qquad \left({}_{0}^{\infty} f(\tau)g(t;\tau) \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty g(t;\tau)e^{-pt}dt \right)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)G(p)e^{-\tau q(p)}d\tau =$$

$$= G(p)\int_0^\infty e^{-\tau q(p)}f(\tau)d\tau = G(p)\cdot F[q(p)] \blacktriangleleft \qquad (1.1.63)$$

При доведенні покладали, що інтеграл $\int_0^\infty f(\tau)g(t;\tau)d\tau$ збігається рівномірно відносно t, і звідси випливає, що допустима зміна порядку інтегрування.

Якщо, у окремому випадку, покласти $q(p) = p$, тоді $g(t;\tau) \doteq \qquad)$ і за теоремою запізнення $g(t;\tau) = g(t-\tau)$, де $g(t) \doteq$. Отже, формула (1.1.63) приймає вид

$$F(p)G(p) \doteq {}_{0}^{\infty} \qquad (t-\tau)d\tau$$

*я*кщо, $\tau > t$, то $g(t-\tau) = 0$, тому

З відси випливає, що

$$F(p)G(p) \doteq {}_{0}^{t} \qquad (t-\tau)d\tau$$

і співпадає з (1.1.61).

Таким чином, теорема Ефроса є узагальненням теореми множення.

Приклад 1. Нехай $G(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ і $q(p)=\sqrt{p}$, Функцію $g(t;\tau)$ знайдемо за формулою обертання

$$g(t;\tau)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\,\frac{dp}{\sqrt{p}}$$

Розглянемо замкнений контур (Рис.5) C_R, який складається з відрізку $(a-ib;a+ib)$, дуг $C_R^{'}$ і $C_R^{''}$ кола радіуса R, двобережних розрізів I, II і кола γ_ε $|p|=\varepsilon$. В середині цього контуру підінтегральна функція аналітична і однозначна, тому за теоремою Коші

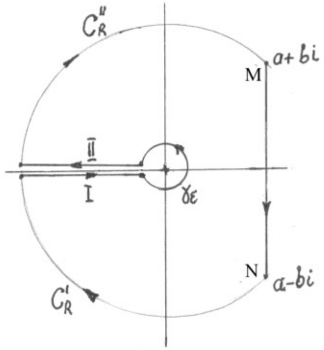

Рис. 5

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\overleftarrow{C}} e^{pt}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-\tau\sqrt{p}}=0$$

Звідки $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\,\frac{dp}{\sqrt{p}}=$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{\overleftarrow{C'}_R} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp+\int_{I_1} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp+\right.$$

$$\left.+\int_{\overleftarrow{\gamma}_\varepsilon} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp\;+\int_{II} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp\;+\int_{C''_R} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp\right] \quad (1.1.64)$$

На дугах $C_R^{'}$ і $C_R^{''}$ функція $e^{-\tau\sqrt{p}}\dfrac{1}{\sqrt{p}}\to 0$ при $|p|=R\to\infty$, так як $\tau>0$, отже, за лемою Жордана при $t>0$ інтеграли від функції $e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ вздовж контурів $C_R^{'}$ і $C_R^{''}$ прямують до нуля при $R\to\infty$.

На колі γ_ε маємо: $p=\varepsilon e^{i\varphi}$ і

$$\left|\int\limits_{\overleftarrow{\gamma_\varepsilon}} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp\right| \le \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}\,2\pi\varepsilon \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$

Далі на берегу I маємо $p = xe^{-i\pi}$, $\sqrt{p} = -i\sqrt{x}$, а по берегу II $p = xe^{i\pi}$, $\sqrt{p} = i\sqrt{x}$, отже

$$\int\limits_{I} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp = \int\limits_{R}^{\varepsilon} e^{i\tau\sqrt{x}-xt}\,\frac{dx}{i\sqrt{x}}$$

$$\int\limits_{II} e^{pt-\tau\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}}\,dp = \int\limits_{\varepsilon}^{R} e^{-i\tau\sqrt{x}+xt}\,\frac{dx}{i\sqrt{x}}$$

Враховуючи попередні результати і переходячи до границі у рівності (1.1.64) при $R \to \infty$ і $\varepsilon \to 0$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau\sqrt{p}+pt}\,\frac{dp}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty}^{0} e^{-xt+i\sqrt{x}\tau}\,\frac{dx}{i\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt-i\sqrt{x}\tau}\,\frac{dx}{i\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt}\cos\sqrt{x}\tau\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-z^2 t}\cos z\tau dz = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$$

Отже,

$$g(t;\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \doteq \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \tag{1.1.65}$$

Тоді за теоремою Ефроса

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\,d\tau \tag{1.1.66}$$

Приклад 2. Нехай $G(p) = \dfrac{1}{p}$, $q(p) = \sqrt{p}$, тоді маємо:

$$g(t;\tau) \doteq \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}\cdot\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

Приймаючи до уваги попередній приклад випливає, що

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \doteqdot \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

Застосовуючи теорему згортки, одержимо:

$$g(t;\tau) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-t_1)}} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t_1}}}{\sqrt{\pi t_1}} dt_1$$

Виконаємо заміну змінної інтегрування за формулою $z = \sqrt{\frac{t-t_1}{t_1}}$.

Тоді

$$g(t;\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t} z^2} \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \frac{dz}{z^2+1}$$

(1.1.67)

Обчислимо інтеграл

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2} dz\,, \quad \alpha > 0$$

Диференціюючи його за параметром α одержимо

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty \frac{z^2 e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2} dz = -\int_0^\infty e^{-\alpha z^2} dz + \beta^2 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2} dz =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} + \beta^2 I(\alpha).$$

Таким чини ми одержали звичайне диференціальне рівняння

$$I'(\alpha) - \beta^2 I(\alpha) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

з початковою умовою

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}.$$

Його розв’язок має вид

$$I(\alpha)=e^{\beta^2\alpha}\left(\frac{\pi}{2\beta}-\int_0^{\alpha}e^{-\beta^2\xi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\xi}d\xi\right)=e^{\beta^2\alpha}\left(\frac{\pi}{2\beta}-\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\int_0^{\beta\sqrt{\alpha}}e^{-z^2}dz\right)=$$

$$=e^{\beta^2\alpha}\left(\frac{\pi}{2\beta}-\frac{\pi}{2\beta}erf\,\beta\sqrt{\alpha}\right)=\frac{\pi}{2\beta}e^{\beta^2\alpha}erfc\beta\sqrt{\alpha}$$

Отже

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha z^2}}{z^2+\beta^2}dz=\frac{\pi}{2\beta}e^{\beta^2\alpha}erfc\beta\sqrt{\alpha} \qquad (1.1.68)$$

Покладаючи тут $\beta=1$, $\alpha=\frac{\tau^2}{4t}$ з (1.1.66) одержимо:

$$g(t;\tau)=erfc\frac{\tau}{2\sqrt{t}}$$

Таким чином за теоремою Ефроса

$$\frac{F(\sqrt{p})}{p}\doteq\int_0^{\infty}\quad fs\frac{\tau}{2\sqrt{t}}d\tau \qquad (1.1.69)$$

Якщо застосувати теорему про диференціювання оригінала, тоді одержимо формулу:

$$F(\sqrt{p})\doteq\int_0^{\infty}\quad e^{-\frac{\tau^2}{4t}}f(\tau)d\tau \qquad (1.1.70)$$

Приклад 3. Нехай , зокрема, $F(p)=\frac{e^{-\alpha p}}{b+p}$. Так як $\frac{1}{p}\doteq$ тоді

$$\frac{1}{p+b}\doteq \qquad , \; F(p)=\frac{e^{-\alpha p}}{b+p}\doteq \qquad (t-\alpha)$$

тоді приймаючи до уваги формулу (1.1.70) одержимо

$$F(\sqrt{p})=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{b+\sqrt{p}}\doteq\int_0^{\infty}\quad \eta(\tau-\alpha)\frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau$$

$$=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}-b(\tau-\alpha)}d\tau=e^{b\alpha+b^2t}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\tau}{2\sqrt{\pi}\cdot t^{3/2}}e^{-\frac{(\tau+2bt)^2}{4t}}d\tau$$

Після заміни $\dfrac{\tau + 2bt}{2\sqrt{t}} = z$ будемо мати

$$F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{b+\sqrt{p}} \doteq e^{b\alpha+b^2t} \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}}^{\infty} (z - b\sqrt{t}) e^{-z^2} dz =$$

$$= e^{b\alpha+b^2t} \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \left[-\frac{1}{2} e^{-z^2} \Big|_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}}^{\infty} - b\sqrt{t} \frac{\sqrt{\pi}}{2} erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) \right]$$

Нарешті

$$F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{b+\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} - be^{b\alpha+b^2t} erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) \quad (1.1.71)$$

6⁰. Особливий інтеграл

Доведемо наступну операційну формулу:

$$\frac{1}{p^{\alpha}} \doteq \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.1.72)$$

де $0 < \alpha < 1$ і $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx -$ гама-функція.

Функція, яка стоїть у правій частині співвідношення (1.1.72) не є оригіналом у розумінні означення, яке було дано раніше, так як вона необмежена при $t \to 0$. Однак, інтеграл Лапласа від неї однак існує. Такі оригінали будемо називати особливими.

Оригінал $f(t)$, який відповідає зображенню $\dfrac{1}{p^{\alpha}}$, і знайдемо за формулою обертання:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{\alpha}} dp$$

Функція $\dfrac{1}{p^{\alpha}}$ - багатозначна і начало координат є її сингулярною точкою. Тому розглянемо замкнений контур C_R, який виключає початок координат, який указаний у попередньому пункті (Рис. 5). За теоремою Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{e^{pt}}{p^{\alpha}}dp=0$$

Приймаючи до уваги лему Жордана

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{C_R}}\frac{e^{pt}}{}dp\to 0 \text{ і } \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{C_R}}\frac{e^{pt}}{}dp\to 0$$

при $R\to\infty$, тому

$$f(t)=\lim_{\substack{b\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{e^{pt}}{p^{\alpha}}dp=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\int_{I}\frac{e^{pt}}{p^{\alpha}}dp+\qquad+$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\gamma_\varepsilon}}\frac{e^{pt}}{}dp+\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\frac{1}{2\pi i}\int_{II}\frac{e^{pt}}{p^{\alpha}}dp$$

На контурі γ_ε маємо: $p=\varepsilon e^{i\varphi}$ і

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\gamma_\varepsilon}}\frac{e^{pt}}{}dp\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^{\alpha}}\varepsilon d\varphi<e^{\varepsilon t}\varepsilon^{1-\alpha}\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$.

Вздовж контуру I $p=xe^{-i\pi}$, $dp=-dx$, а вздовж контуру II $p=xe^{i\pi}$, $dp=-dx$, відповідно

$$f(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-xt}}{x^{\alpha}e^{-\pi\alpha i}}dx-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-\infty}\frac{e^{-xt}}{x^{\alpha}e^{\pi\alpha i}}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\pi\alpha i}-e^{-\pi\alpha i}}{2i}\frac{e^{-xt}}{x^{\alpha}}dx=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_{0}^{\infty}x^{-\alpha}e^{-xt}dx$$

Після заміни $xt=x_1$, одержимо

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}x_1^{-\alpha}e^{-x_1}dx_1=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$$

Використовуючи відому властивість гама-функції

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

знаходимо

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

що і доводить формулу (1.1.72)

Інтегруючи оригінал у цій формулі , одержимо:

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}} \doteq \frac{t^{\alpha}}{\alpha\,\Gamma(\alpha)} = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

Отже, справедлива формула:

$$\frac{1}{p^{n+\alpha}} \doteq \frac{t^{\alpha+n-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$$

Якщо ввести позначення $\beta = n+\alpha$, то

$$\frac{1}{p^{\beta}} \doteq \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \qquad (1.1.73)$$

де $\beta -$ любе додатне число.

7^0. Гранична теорема.

Теорема. *Якщо $f(t)$ являється оригіналом разом із своєю похідною $f'(t)$ і $F(p) \doteq$, то*

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} pF(p) = f(0) \qquad (1.1.74)$$

Якщо крім того, існує $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(0)$$

(1.1.75)

► Дійсно, так як $f'(t) -$ оригінал, то його зображення $pF(p) - f(0)$ повинно прямувати до нуля, якщо $\operatorname{Re} p \to \infty$. Звідси випливає формула (1.1.74).

Для доведення формули (1.1.75) зауважимо, що із існування

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ випливає обмеженість функції $f(t)$, тому показником росту можна прийняти $s_0 = 0$. Таким чином, зображення $F(p)$ визначено у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. За властивістю диференціювання оригінала можна записати:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = pF(p) - f(0), \qquad \operatorname{Re} p > 0$$

Так як у околі $p = 0$ інтеграл у лівій частині збігається рівномірно відносно p, то можна перейти до границі при $p \to 0$ під знаком інтегралу, у результаті чого одержимо:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = \lim_{p\to 0}\big(pF(p) - f(0)\big),$$

Звідси випливає (1.1.75).◄

§ 2. Перетворення Фур'є

1⁰. Загальне перетворення Фур'є. Основні означення

Означення 1. ***Нехай функція $\varphi(x)$ задовольняє наступним умовам:***

1) вона абсолютно інтегрована на всій вісі x, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx = Q < \infty \qquad (1.2.1)$$

2) вона неперервна та в любому скінченному інтервалі має скінченне число максимумів і мінімумів. (*Всюди дедалі ці умови будемо називати для скорочення умовами застосування перетворення Фур'є.)*

Означення 2. ***Розглянемо інтеграл***

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{isx} dx = \varphi(s) \qquad (1.2.2)$$

який, очевидно, збігається абсолютно в силу умови (1.2.1). Формула (1.2.2) кожній функції $\varphi(x)$ ставить у відповідальність функцію $\varphi(s)$, яка називається перетворенням Фур'є первісно заданої функції $\varphi(x)$.

Поставимо тепер обернену задачу: ***Якщо відома функція*** $\varphi(s)$***, знайти функцію*** $\varphi(x)$***, тобто довести, що***

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-isx}ds \qquad (1.2.3)$$

► Дійсно, розглядаючи інтеграл (1.2.3) у розумінні головного значення, можемо записати:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-isx}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\varphi(s)e^{-isx}ds$$

Підставляючи сюди значення $\varphi(s)$ з формули (1.2.2), одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-isx}ds=$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{its}dt\right)e^{-isx}ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left.\frac{e^{-i(x-t)s}}{-i(x-t)}\right|_{-N}^{N}dt=$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{e^{i(x-t)N}-e^{-i(x-t)N}}{i(x-t)}dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin N(x-t)}{(x-t)}dt=\frac{1}{\pi}\cdot\varphi(x)\cdot\pi=\varphi(x)$$

.◄

Перестановка порядку інтегрування, яка була використана при доведенні, справедлива, так як інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{ist}dt$ збігається рівномірно при всіх значеннях s завдяки абсолютної інтегрованості функції $\varphi(x)$.

Крім того, була використана формула Діріхле

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin N(x-t)}{(x-t)}dt=\pi\cdot\varphi(x).$$

Доведемо що це дійсно так.

► Запишемо інтеграл Ейлера

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

Очевидно, що

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin Nx}{x}dx=\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx=2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\pi$$

Отже, формула Діріхле еквівалентна наступній:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\frac{\sin N(x-t)}{(x-t)}dt=\varphi(x)\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin Nt}{t}dt$$

тобто

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^\infty (\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt=0$$

або

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty (\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt=0 \qquad (1.2.4)$$

Покажемо, що формула (1.2.4) вірна. Розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^\infty (\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt=$$

$$\int_{-\infty}^0 (\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt+$$

$$+\int_0^\infty (\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt$$

у першому інтегралі зробимо заміну $t=-z, dt=-dz$. Відповідно змінюються границі інтегрування. Отже ми одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt=$$

$$-\int_{\infty}^{0}(\varphi(x+z)-\varphi(x))\frac{\sin Nz}{z}dz+$$

$$+\int_{0}^{\infty}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt$$

Змінюючи порядок інтегрування і приймаючи до уваги , що величина інтеграла не залежить від змінної інтегрування одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x+t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt=$$

$$\int_{0}^{\infty}(\varphi(x+t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt+$$

$$+\int_{0}^{\infty}(\varphi(x-t)-\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt$$

Використовуючи властивість інтегралів одержимо формулу (1.2.4).

Для доведення формули (1.2.4) область інтегрування $(0,\infty)$ розбиваємо на три інтервали: $(0,\delta),(\delta,a)$ і (a,∞). Оцінимо інтеграл (1.2.4) у кожному з наведених інтервалів.

Отже, на інтервалі (a,∞) маємо наступну оцінку

$$\left|\int_{a}^{\infty}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)]\frac{\sin Nt}{t}dt\right|\le$$

$$\le\int_{a}^{\infty}[|\varphi(x+t)|+|\varphi(x-t)|]\frac{1}{a}dt$$

$$+2|\varphi(x)|\left|\int_{a}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt+\ +2|\varphi(x)|\left|\int_{a}^{\infty}\frac{\sin Nt}{t}dt\right|.$$

Так як функція $\varphi(x)$ абсолютно інтегрована і інтеграл Ейлера збігається, то робимо висновок, що при достатньо великому a права частина нерівності може бути зроблена менше любого наперед заданого $\varepsilon > 0$.

Далі виберемо δ настільки малим, щоб на інтервалі $(0,\delta)$ функція $\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)$ була монотонною. Тоді за другою теоремою про середнє

$$\int_0^\delta [\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)]\frac{\sin Nt}{t}dt \le$$

$$\le [\varphi(x+\delta)+\varphi(x-\delta)-2\varphi(x)]\int_\xi^\delta \frac{\sin Nt}{t}dt$$

і при достатньо малому δ права частина може бути менше ε у наслідок неперервності функції $\varphi(x)$.

Нарешті інтервал (δ, a) розіб'ємо на частини (a_0, a_1) ,(a_1, a_2),..., (a_{n-1}, a_n) так, щоб в середині кожного з інтервалів (a_{i-1}, a_i) функція $\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)$ була монотонною відносно змінної t. Це завжди можна зробити, так як функція $\varphi(x)$ має скінченне число максимумів і мінімумів. Застосовуючи другу теорему про середнє в середині кожного з інтервалів, одержимо:

$$\int_\delta^a (\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} (\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x))\frac{\sin Nt}{t}dt \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left\{[\varphi(x+a_{i-1})+\varphi(x-a_{i-1})-2\varphi(x)]\int_{a_{i-1}}^{\xi_i}\frac{\sin Nt}{t}dt + \right.$$

$$\left. [\varphi(x+a_i)+\varphi(x-a_i)-2\varphi(x)]\int_{\xi_i}^{a_i}\frac{\sin Nt}{t}dt\right\},$$

де $a_{i-1} < \xi_i < a_i$.

Так як границі інтегрування у кожному з інтегралів, які входять у суму, строго додатні, то

$$\int_{a_{i-1}}^{\xi_i} \frac{\sin Nt}{t} dt = \int_{Na_{i-1}}^{N\xi_i} \frac{\sin z}{z} dz < \varepsilon$$

$$\int_{\xi_i}^{a_i} \frac{\sin Nt}{t} dt = \int_{N\xi_i}^{Na_i} \frac{\sin z}{z} dz < \varepsilon$$

при достатньо великому N .

Звідси випливає справедливість формули (4),а також і формули (1.2.3). ◄

Формула (1.2.3) носить назву ***оберненого перетворення Фур'є.***

Зауваження 1. *Якщо функція $\varphi(x)$ не є неперервною, то обернене перетворення Фур'є замість (1.2.3) буде мати вид:*

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) e^{-isx} ds \qquad (1.2.5)$$

Зауваження 2. *Якщо задана функція $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n незалежних змінних, то застосовуючи послідовно перетворення Фур'є по кожній із змінних, одержимо:*

$$\varphi(s_1, s_2, ..., s_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, ... x_n) e^{i(x_1 s_1 + s_2 x_2 + ... x_n s_n)} dx_1 dx_2 ... dx_n \qquad (1.2.6)$$

а застосовуючи послідовно обернене перетворення Фур'є, знайдемо, що

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s_1, s_2, ... s_n) e^{-i(x_1 s_1 + s_2 x_2 + ... x_n s_n)} ds_1 ds_2 ... ds_n$$

Очевидно, для того щоб формули (1.2.6) і (1.2.7) були справедливі необхідно щоб функція $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ задовольняла умовам застосування перетворення Фур'є по кожній змінній.

2⁰. Властивості перетворення Фур'є

1). Якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ - перетворення Фур'є функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, то оберненим перетворенням Фур'є добутку $\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s)$ є згортка функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$, тобто

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s)e^{-isx}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-\xi)\cdot\varphi_2(\xi)d\xi \qquad (1.2.8)$$

► Дійсно

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-\xi)\cdot\varphi_2(\xi)d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(s)e^{-is(x-\xi)}ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(s)e^{-isx}ds\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\xi)e^{is\xi}d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_1(s)\,e^{-isx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(\xi)e^{is\xi}\,d\xi\right]ds==\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(s)\cdot\varphi_2(s)e^{-isx}ds$$ ◄

2). *Перетворення Фур'є похідної функції.*

Теорема. Перетворення Фур'є похідної $\frac{d^r\varphi(x)}{dx^r}$ ***є добуток*** $(-is)^r$ ***перетворення Фур'є функції*** $\varphi(x)$***, якщо*** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{d^k\varphi}{dx^k}=0$***, де*** $k=0,1,2,...(r-1)$***, тобто***

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^r\varphi}{dx^r}e^{ixs}dx=(-is)^r\cdot\varphi(s) \qquad (1.2.9)$$

Формулу (1.2.9) легко одержати інтегруючи за частинами r разів.

3^0. *Синус - та косинус – перетворення Фур'є*

Означення. *Інтегральне перетворення*

$$\varphi_s(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x)\sin sxdx \qquad (1.2.10)$$

$$\varphi_c(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x)\cos xsdx \qquad (1.2.11)$$

Називаються відповідно синус - перетворенням і косинус-перетворенням Фур'є.

Формули обертання для них мають вид:

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi_s(s)\sin sxdx \tag{1.2.12}$$

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi_c\cos xsds \tag{1.2.13}$$

Доведемо, наприклад, формулу (1.2.13). Для цього функцію $\varphi(x)$, яка задана на інтервалі $(0,\infty)$ продовжимо на інтервал $(-\infty,0)$ парним чином, тобто

$$\varphi(-x)=\varphi(x)$$

і використаємо формули (1.2.2) і (1.2.3). Використовуючи (1.2.2) одержимо

$$\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{isx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)e^{isx}dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x)e^{isx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(-x)e^{-isx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x)e^{isx}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(x)s\cos xsdx=\varphi_c(s)$$

Очевидно, що $\varphi_c(s)$ - парна функція. Підставляючи її у формулу (3) одержимо:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{-isx}ds=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\varphi(s)e^{-isx}ds+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(s)e^{-isx}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(-s)e^{isx}ds+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\varphi(s)e^{isx}ds=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi_c(s)\cos xsdx$$

Формула (1.2.12) доводиться аналогічно, якщо функцію $\varphi(x)$ продовжити на всю числову вісь непарним чином.

4^0. Деякі властивості синус - та косинус – перетворення Фур'є

1). Теорема 1.Для синус - та косинус – перетворень Фур'є справедливі наступні теореми згортки

$$\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)\varphi_{2c}(s)\cos xs ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_2(\xi)[\varphi_1(x-\xi)+\varphi_1(x+\xi)]d\xi \qquad (1.2.14)$$

$$\int_0^\infty \varphi_{1s}(s)\varphi_{2s}(s)\sin xs ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_2(\xi)[\varphi_1|x-\xi|-\varphi_1(x+\xi)]d\xi$$

► Дійсно, у ліву частину формули (1.2.14) замість φ_{2c} підставимо вираз правої частини (1.2.11), тоді одержимо

$$\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)\varphi_{2c}(s)\cos xs ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)\cos xs\int_0^\infty \varphi_2(\xi)\cos\xi s d\xi ds$$

Змінюючи порядок інтегрування маємо

$$\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)\varphi_{2c}(s)\cos xs ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_2(\xi)\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)\cos xs\cos\xi s ds d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_2(\xi)\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)[\cos(x-\xi)s+\cos(x+\xi)s]ds d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_2(\xi)[\varphi_1(x-\xi)+\varphi_1(x+\xi)]d\xi$$

Застосовуючи формулу (1.2.12) одержали шукану формулу

Аналогічно доводиться формула (1.2.15).

Зауваження. Покладаючи $x=0$ у формулі (1.2.14) одержимо:

$$\int_0^\infty \varphi_{1c}(s)\varphi_{2c}(s)ds = \int_0^\infty \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi$$

Знайдемо зв'язок між синус - та косинус – перетвореннями Фур'є та їх похідних.

2). ***Синус - перетвореннями Фур'є парних і непарних похідних функції.***

Покладаючи, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{d^k\varphi}{dx^k} = 0 \qquad (1.2.17)$$

де $k=0,1,2,...,2r-1$ *для першого інтеграла і* $k=0,1,2,...,2r$ *для другого інтеграла.*

Інтегруючи першій інтеграл за частинами $2r-$ разів, а другий інтеграл $(2r+1)-$раз, одержимо

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{2r}\varphi}{dx^{2r}}\sin xsdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}s^{2n+1}\frac{d^{2r-2n}\varphi(0)}{dx^{2r-2n}}+(-1)^r\cdot s^{2r}\varphi_s(s) \quad (1.2.18)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{2r+1}\varphi}{dx^{2r+1}}\sin xsdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}s^{2n-1}\frac{d^{2r-2n+1}\varphi(0)}{dx^{2r-2n+1}}+(-1)^{r+1}s^{2r+1}\varphi_c(s) \quad (1.2.19)$$

3). *Косинус - перетвореннями Фур'є парних і непарних похідних функції.*

Розглянемо інтеграли

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{2r}\varphi}{dx^{2r}}\cos xsdx\,, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{2r+1}\varphi}{dx^{2r+1}}\cos xsdx\,.$$

Інтегруючи першій інтеграл за частинами $2r-$ разів, а другий інтеграл $(2r+1)-$раз і приймаючи до уваги умову (1.2.17), одержимо:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{2r}\varphi}{dx^{2r}}\cos xsdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{r-1}(-1)^{n+1}s^{2n}\frac{d^{2r-2n-1}\varphi(0)}{dx^{2r-2n-1}}+(-1)^r\cdot s^{2r}\cdot\varphi_c(s) \quad (1.2.20)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^{2r+1}\varphi}{dx^{2r+1}}\cos xsdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{r}(-1)^{n+1}s^{2n}\frac{d^{2r-2n}\varphi(0)}{dx^{2r-2n}}+(-1)^r s^{2r+1}\varphi_s(s) \quad (1.2.21)$$

Отже при $r=1$, тобто для похідних другого порядку маємо

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^2\varphi}{dx^2}\sin xsdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sin sx\frac{d\varphi}{dx}\cdot\Big|_0^\infty - s\int_0^\infty \frac{d\varphi}{dx}\cos sxdx\right)=$$

$$=-s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\varphi(x)\cdot\cos sx\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty \varphi(x)\sin sxdx\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot s\cdot\varphi(0)-s^2\varphi_s(s)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^2\varphi}{dx^2}\sin xsdx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot s\cdot\varphi(0)-s^2\varphi_s(s) \quad (1.2.22)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos xs dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d\varphi(0)}{dx} - s^2\varphi_c(s) \qquad (1.2.23)$$

§ 3. Перетворення Ханкеля

При розв'язуванні різних задач для циліндричних областей виявляється корисним застосувати наступне інтегральне перетворення

$$F_H(\rho) = \int_0^\infty f(r)J_n(\rho r)rdr \qquad (1.3.1)$$

яке ***називається перетворенням Ханкеля.*** Формула обертання для цього перетворення має вид:

$$f(r) = \int_o^\infty F_H(\rho)J_n(\rho r)\rho d\rho \qquad (1.3.2)$$

► Для доведення формул (1.3.1) і (1.3.2) запишемо формули перетворення Фур'є і оберненого перетворення Фур'є у випадку двох незалежних змінних:

$$\varphi(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_2, x_2)e^{i(s_1x_1+s_2x_2)}dx_1dx_2 \qquad (1.3.3)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s_2, s_2)e^{-i(s_1x_1+s_2x_2)}ds_1ds_2 \qquad (1.3.4)$$

і зробимо заміну змінних

$$x_1 = r\cos\theta_1, \quad x_2 = r\sin\theta_1. \ s_1 = \rho\cos\theta_2, \quad s_2 = \rho\sin\theta_2$$

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 \le \theta_1 \le 2\pi, \quad 0 \le \theta_2 \le 2\pi.$$

Тоді формули (1.3.3) і (1.3.4) приймуть наступний вид:

$$\varphi(\rho\cos\theta_2, \rho\sin\theta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty rdr\int_0^{2\pi}\varphi(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)e^{ir\rho\cos(\theta_1-\theta_2)}d\theta_1 \quad (1.3.5)$$

$$\varphi(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \rho d\rho\int_0^{2\pi}\varphi(\rho\cos\theta_2, \rho\sin\theta_2)e^{ir\rho\cos(\theta_1-\theta_2)}d\theta_2 \quad (1.3.6)$$

В цих формулах покладаємо

$$\varphi(r\cos\theta_1, r\sin\theta_1) = \cos n\theta_1 f(r) \qquad (1.3.7)$$

Приймаючи до уваги, що $\cos n\theta_1 = \dfrac{e^{in\theta_1} + e^{-in\theta_1}}{2}$

$$\varphi(\rho\cos\theta_2, \rho\sin\theta_2) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty f(r)rdr\int_0^{2\pi}\left\{e^{i[n\theta + r\rho\cos(\theta_1-\theta_2)]} + \right.$$

$$\left. + e^{i[-n\theta_1 + r\rho\cos(\theta_1-\theta_2)]}\right\}d\theta_1$$

Проведемо заміну $\theta_1 = \varphi - \dfrac{\pi}{2} + \theta_2$ і враховуючи періодичність у інтервалі по θ_1, будемо мати:

$$\varphi(\rho\cos\theta_2, \rho\sin\theta_2) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty f(r)rdr\left\{e^{in\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{2\pi} e^{-i(n\varphi - r\rho\sin\varphi}d\varphi + \right.$$

$$\left. e^{-in\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{2\pi} e^{-i(n\varphi - r\rho\sin\varphi)}d\varphi\right\}$$

Використовуючи інтегральне представлення функції Бесселя $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi - x\sin\varphi)}d\varphi = J_n(x)$ і формулу $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ Знайдемо, що

$$\varphi(\rho\cos\theta_2, \rho\sin\theta_2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(r)r\left\{e^{in\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}J_{-n}(r\rho) + \right.$$

$$\left. + e^{-in\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}J_n(r\rho)\right\}dr = \frac{1}{2}\left[(-1)^n e^{in\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-in\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}\right] \times$$

$$\times \int_0^\infty f(r)J_n(r\rho)dr.$$

Підставимо це значення у формулу (1.3.6). Враховуючи (1.3.7) і виконуючи обернену заміну змінної інтегрування $\varphi = \theta_1 - \theta_2 + \dfrac{\pi}{2}$

одержимо: $\cos\theta_1 \cdot f(r) = \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty F_H(\rho)\rho\int\limits_0^{2\pi}\left[(-1)^n e^{in\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-in\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$

$\times$

$$\times e^{-i\rho r\cos(\theta_1-\theta_2)}d\theta_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty F_H(\rho)\rho\int\limits_0^{2\pi}\left[(-1)^n e^{in\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-in\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)}\right]\times$$

$$\times e^{-i\rho r\sin\varphi}d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty F_H(\rho)\rho\left[e^{in\theta_1}(-1)^n J_{-n}(\rho r) + e^{-in\theta_1}J_n(\rho r)\right]d\rho =$$

$$= \cos n\theta_1\int\limits_0^\infty F_H(\rho)J_n(\rho r)\rho d\rho\,.$$

Отже

$$f(r) = \int\limits_0^\infty F_H(\rho)J_n(\rho r)\rho d\rho\,,$$

що і треба було довести. ◄

Зауважимо, що для застосування перетворення Ханкеля, достатньо накласти умови, щоб функція $f(r)$ була неперервною, мала скінченне число екстремумів у любій скінченній області і щоб

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|\sqrt{r}dr < \infty$$

Остання нерівність достатня для абсолютної збіжності інтеграла Ханкеля.

Зауваження. *Циліндрична функція першого роду* $J_n(z)$ *цілого порядку* n *визначається як коефіцієнт при* w^n *у розкладі Лорана*

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)w^n \qquad (1.3.8)$$

Функцію $J_n(z)$ *можна представити у вигляді степеневого ряду. Для цього достатньо перемножити ради для* $e^{\frac{z}{2}w}$ *і* $e^{-\frac{z}{2}\frac{1}{w}}$*; маємо:*

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n} w^{n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}\frac{1}{w^{n}}$$

Звідси коефіцієнт при w^n $(n=0,1,2,...)$ *дорівнюється*

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{(n+k)!r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \qquad (1.3.9)$$

а коефіцієнт при $\frac{1}{w^n}$ $(n=0,1,2,...)$ *дорівнюється*

$$J_{-n}(z)=\left(-1\right)^{n}J_n(z) \qquad (1.3.10)$$

Знайдемо тепер вираз для $J_n(z)$ *безпосередньо за допомогою формули для коефіцієнтів ряду Лорана:*

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\frac{z}{2}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}\frac{d\omega}{\omega^{n+1}} \qquad (1.3.11)$$

Перетворимо цей вираз, для цього виберемо контур C *коли* $|\omega|=1$ *і покладемо* $\omega=e^{it}$ *,одержимо:*

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}e^{iz\sin t}e^{-\mathrm{int}}i\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(nt-z\sin t)}dt \qquad (1.3.12)$$

або

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-z\sin t)dt-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt-z\sin t)dt$$

Другий інтеграл дорівнюється нулю, так як згідно властивостям інтеграла від періодичної функції проміжок $(0,2\pi)$ *можна замінити проміжком* $(-\pi,\pi)$ *, а підінтегральна функція непарна , Таким чином,*

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-z\sin t)dt \qquad (1.3.13)$$

Одержане співвідношення, так званий ***інтеграл Бесселя,*** *у вигляді інтегралу.*

Частина II. Постановка крайових задач

§ 1. Виведення рівняння теплопровідності

Розглянемо деяке тверде тіло, яке є нерівномірно нагрітим, внаслідок чого всередині цього тіла відбувається тепловий рух від більш нагрітої частини до менш нагрітої і температура u в кожній точці (x, y, z) тіла змінюється з часом t за деяким законом:

$$u = u(x, y, z, t)$$

Щоб зрозуміти цей закон, виділимо всередині тіла деякий об'єм D, який обмежений замкненою поверхнью S, і підрахуємо кількість тепла, що протікає через цю поверхню. Через елементарну поверхню dS проходить кількість тепла dQ, яка визначається за законом Фур'є формулою

$$dQ_1 = \lambda \left| grad_{\vec{n}} u \right| dS ,$$

де λ - коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом внутрішньої теплопровідності тіла; $\vec{n}$ - зовнішня нормаль до елементарної площадки dS. Так як тепловий потік виходить з тіла через площадку dS у напрямку зовнішньої нормалі $\vec{n}$, то очевидно, температура в цьому напрямку спадає, тобто $\left| grad_{\vec{n}} u \right| = -grad_{\vec{n}} u$, звідси випливає, що

$$dQ_1 = -\lambda grad_{\vec{n}} u dS$$

Інтегруючи за поверхнею S, знаходимо, що через всю цю поверхню на одиницю часу виходить кількість тепла

$$Q_1 = -\oiint_S \lambda grad_{\vec{n}} u ds$$

Підрахуємо тепер зменшення кількості тепла dQ всередині елементарного об'єму dv за проміжок часу dt. Воно пропорційне різниці температур du і масі, тобто

$$dQ_2 = c\gamma \left| du \right| dv$$

де γ - густина речовини, c - питома теплоємність.

Якщо об'єм dv достатньо малий, то можна вважати, що зміна температури в ньому залежить лише від часу і не залежить від координат x, y, z точки, тому

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Крім того, температура в тілі з часом спадає і, значить

$$|du| = \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| dt = -\frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

$$dQ_2 = -c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} dv dt$$

Повна зміна кількості тепла в об'ємі v за одиницю часу дорівнює

$$Q_2 = -\oiiint_V c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

Якщо в тілі є джерела (або стоки) тепла, які виділяють (або поглинають) за одиницю часу в одиниці об'єму кількість тепла, що дорівнює $l(x, y, z, t)$, або, як кажуть, мають густину $l(x, y, z, t)$, то у всьому об'ємі v виділиться (або поглинеться) кількість тепла

$$Q_3 = -\oiiint_V l(x, y, z, t) dv$$

Очевидно, що при наявності в тілі джерел $l(x, y, z, t) > 0$, а при наявності стоків $l(x, y, z, t) < 0$.

Складемо тепер для об'єму v рівняння теплового балансу. Воно має вигляд:

$$Q_2 = Q_1 - Q_3$$

Або

$$-\oiiint_V c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} dv = -\oiint_S \lambda grad_{\vec{n}} u ds - \iiint_V l(x, y, z, t) dv \quad (2.1.1)$$

Передбачаючи, що функція $u(x,y,z,t)$ в області, що розглядається, має неперервну похідну по t і неперервні похідні по змінним x,y,z, перетворимо поверхневий інтеграл (2.1.1) за формулою Гауса-Остроградського:

$$\oiint_S \lambda grad_{\vec{n}} u ds = \iiint_V div(\lambda grad u) dv$$

Тепер формула (2.1.1) може бути записана у вигляді:

$$\iiint_V \left[c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - div(\lambda grad u) - l(x,y,z,t) \right] dv = 0$$

Внаслідок довільності області V і неперервності підінтегральної функції маємо:

$$c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} - div(\lambda grad u) - l(x,y,z,t) = 0 \qquad (2.1.2)$$

Рівняння (2.1.2) називається рівнянням теплопровідності. В координатній формі воно записується наступним чином:

$$c\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) + l(x,y,z,t) \qquad (2.1.3)$$

Величини c,γ,λ можуть, взагалі кажучи, залежати не тільки від координат x,y,z і часу t, але і від температури u.

Якщо λ величина стала, то рівняння (2.1.3) прийме вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x,y,z,t) \qquad (2.1.4)$$

де

$a^2 = \frac{\lambda}{c\gamma}$ є коефіцієнт температуропровідності,

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ є оператор Лапласа,

$$F(x,y,z,t)=\frac{1}{c\gamma}l(x,y,z,t).$$

Якщо тепло не розповсюджується у напрямку осі z , то $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ і ми отримаємо двомірне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t)$$

В одновимірному випадку воно має вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t)$$

Оператор Лапласа Δu в рівнянні (2.1.4) записаний в Декартовій системі координат. В залежності від геометрії області, що розглядається його інколи буває зручно виразити в інших системах координат. Наприклад, у сферичній системі координат

$$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$$

оператор Лапласа має вигляд:

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.1.5}$$

в циліндричній системі координат

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{2.1.6}$$

§ 2. Постановка крайових задач. Початкові і граничні умови. Умови спряження

При математичному описі фізичного процесу треба, перш за все, правильно поставити задачу. Тобто сформулювати умови, достатні для однозначного визначення процесу. Диференціальні рівняння з частинними похідними, мають, взагалі кажучи, безліч розв’язків. Тому, в тому випадку, коли задача зводиться до рівняння з частинними похідними, для однозначної характеристики процесу необхідно до рівняння приєднати деякі додаткові умови. Для рівняння теплопровідності можуть бути задані наступні додаткові умови:

1) початкові умови;
2) граничні умови або умови на поверхні;
3) умови спряження.

Сукупність початкових і граничних умов *називають крайовими умовами.*

1⁰. Початкові умови.

Нехай в початковий момент часу t_0 температура у всьому тілі є заданою функцією координат:

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=t_0} = f(x,y,z) \qquad (2.2.1)$$

Іншими словами, розв'язок рівняння (2.1.4) має бути таким, щоб для всіх точок тіла виконувалася умова

$$\lim_{t\to t_0+0} u(x,y,z,t) = f(x,y,z).$$

2⁰. Граничні умови або умови на поверхні.

Якщо розв'язок рівняння (2.1.4) шукається в області D обмеженої поверхнею S, то на цій поверхні задається одна з наступних трьох умов.

1) гранична умова першого роду – на поверхні S задана певна температура:

$$u(x,y,z,t)\Big|_S = \varphi(x,y,z,t) \qquad (x,y,z)\in S \qquad (2.2.2)$$

2) гранична умова другого роду – на поверхні S заданий потік тепла за напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до цієї поверхні:

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_S = \phi(x,y,z,t) \qquad (x,y,z)\in S \qquad (2.2.3)$$

3) гранична умова третього роду – на поверхні S відбувається теплообмін тіла з зовнішнім середовищем, яке має температуру $u(x,y,z,t)$. Тут можливі два випадки:

а) Теплообмін з середовищем носить конвективний характер, тобто він відбувається за законом Ньютона, при якому тепловий потік є пропорційним різниці температур між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем:

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_S = \alpha\left[u(x,y,z,t)\big|_S - u_0(x,y,z,t)\right] \qquad (2.2.4)$$

де α - константа, яка називається коефіцієнтом теплообміну.

б) Теплообмін з середовищем відбувається шляхом випромінювання за законом Стефана-Больцмана. При цьому

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_S = \alpha\left[u^4(x,y,z,t)\big|_S - u_0{}^4(x,y,z,t)\right] \qquad (2.2.5)$$

Задача, в якій потрібно знайти розв’язок рівняння (2.1.4) з початковою умовою (2.2.1) і однією з граничних умов першого, другого або третього роду *називається відповідно першою, другою або третьою крайовою задачею*.

Сформульовані вище граничні умови задавалися на всій поверхні S. Інколи на різних частинах поверхні S можуть бути задані граничні умови різного роду. Такі *граничні задачі називаються змішаними*.

Зазначимо, що граничні умови (2.2.3) – (2.2.5) містять похідні шуканої функції не вище першого порядку. На практиці часто зустрічаються задачі, в яких граничні умови містять похідні шуканих функцій більш високого порядку. Такі задачі *називаються загальними крайовими задачами.*

Розглянуті задачі можна узагальнити на той випадок, коли поверхня S тіла є функцією часу. Вони називаються задачами з рухомою границею.

3^0. Умови спряження

Розглянемо тепер складене тіло, дві частини якого складаються з різних матеріалів з коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 та дотикаються один з одним по деякій поверхні S_0. Для такого тіла окрім початкової і граничної умови необхідно задати додаткові умови на поверхні дотикання S_0, які мають вид

$$u_1(x,y,z,t)\big|_{S_0} = u_2(x,y,z,t)\big|_{S_0} \tag{2.2.6}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S_0} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S_0} \tag{2.2.7}$$

і називаються умовами спряження. В формулах (2.2.6), 2.2.7) через u_1 і u_2 позначена температура відповідних складових частин.

Фізичні умови спряження означають, що складові частини тіла знаходяться в ідеальному контакті один до одного , тобто температура і тепловий потік змінюються неперервно при переході через поверхню дотикання S_0. Якщо на поверхні S_0 є джерела тепла, що створюють тепловий потік q, то замість (2.2.7) необхідно записати наступну умову:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S_0} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S_0} + q \tag{2.2.8}$$

Досить часто виявляється, що контакт між складовими частинами не ідеальний, на поверхні S_0 є тонка плівка погано провідних матеріалів. У такому випадку замість умови (2.2.6) необхідно записати співвідношення

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}}\bigg|_{S_0} = h_1(u_1 - u_2) \tag{2.2.9}$$

Зауваження: *Якщо розподілення температури, що задовольняє рівнянню теплопровідності (2.1.4) знаходиться по всій поверхні, то задається лише початкова умова (2.2.1), цю задачу називають задачею Коші. Так як область, в якій знаходиться розв'язок необмежена, то замість граничних умов задається поведінка шуканої функції на нескінченності. Зазвичай вимагають, щоб вона була там обмеженою.*

§ 3. Коректність постановки крайових задач

У відношенні кожної з поставлених вище задач виникають питання, пов'язані з існуванням розв'язку задачі, та його єдиністю, а також з неперервною залежністю розв'язків від крайових умов. Ці питання є фундаментальними при дослідженні будь-якої задачі для рівнянь з частинними похідними. Доведення існування розв'язків важливо не тільки для якісного дослідження задачі, але й для фактичної побудови розв'язання, бо сам спосіб доведення теореми існування дає схему знаходження розв'язку. Доведення теореми єдиності розв'язку також має принципово важливе значення, бо якщо задача має декілька розв'язків, то сам вираз «розв'язок задачі» не має певного змісту.

У подальшому, при постановці різноманітних практичних задач завжди неминуча деяка похибка в початкових або граничних умовах, бо вони визначаються, як правило, експериментально. Тому звичайно виникає питання, чи буде знайдений розв'язок мало відрізнятися від істинного, якщо похибка при визначенні початкових і граничних даних мала, або, говорячи математичною мовою, чи буде розв'язок задачі неперервно залежати від крайових умов. Якщо існує єдиний розв'язок задачі, що неперервно залежить від крайових умов, то кажуть, що задача поставлена коректно.

Єдність розв'язку і неперервна залежність його від крайових умов для рівнянь теплопровідності випливає з так званого принципу максимуму, який проілюструємо на прикладі першої крайової задачі.

§ 4. Принцип максимуму і теорема єдиності

Розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (2.4.1)$$

всередині області D, обмеженої поверхнею S, з початковою умовою

$$u(x,y,z,t)\,\Big|_{t=t_0} = f(x,y,z) \qquad (2.4.2)$$

і першою граничною умовою

$$u(x,y,z,t)\,\Big|_{S} = \varphi(t) \qquad (2.4.3)$$

Має місце принцип максимуму, який сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема. ***Найбільше значення функції*** $u(x,y,z,t)$ ***досягається або при*** $t=0$ ***або на границі*** S ***області*** D***. Іншими словами, для будь-якого моменту часу*** t***,*** $0\le t\le T$***, і будь-якої точки*** (x,y,z)***, що лежить всередині*** D***, справедлива нерівність***

$$\left|u(x,y,z,t)\right|\le \max\left\{\left|f\right|,\left|\varphi\right|\right\}.$$

► Доведемо теорему методом від супротивного. Нехай функція $u(x,y,z,t)$ приймає своє максимальне значення , яке дорівнює M , в деякій точці (x_0,y_0,z_0,t_0), причому $(x_0,y_0,z_0)\notin S, t>0$. Позначимо через D_T область чотирьохвимірного простору $(x,y,z)\in\overline{D}$, $0\le t\le T$. Точки цієї області, які лежать або на S, або в площині $t=0$ позначимо через *Г*. Нехай $m=\max\limits_{Г}u(x,y,z,t)$, $M=\max\limits_{D_T}u(x,y,z,t)=u(x_0,y_0,z_0,t_0)$. За припущенням $M>m$.

Побудуємо функцію

$$v(x,y,z,t)=u(x,y,z,t)+\frac{M-m}{6d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right] \qquad (2.4.4)$$

де d - діаметр області D. Очевидно,

$$v(x,y,z,t)\Big|_{Г}=u(x,y,z,t)\Big|_{Г}+\frac{M-m}{6}=m+\frac{M-m}{6}=\frac{M}{6}+\frac{5m}{6}<M .$$

З іншого боку

$$v(x_0,y_0,z_0,t_0)=u(x_0,y_0,z_0,t_0)=M ,$$

Отже, $v(x,y,z,t)$ не може досягати свого максимуму на межі *Г* і досягає його в деякій точці $P_1(x_1,y_1,z_1,t_1)\notin Г$. За теоремою про екстремум в цій точці $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\le 0, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\le 0, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\le 0, \frac{\partial v}{\partial t}\ge 0$ (якщо $t_1<T$,

то $\frac{\partial v}{\partial t}=0$, якщо ж $t_1=T$, то $\frac{\partial v}{\partial t}\geq 0$). Звідси випливає, що в точці P_1

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\geq 0 \qquad (2.4.5)$$

Але з іншого боку

$$\frac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-a^2\frac{M-m}{3d^2}=-a^2\frac{M-m}{3d^2}, \qquad (2.4.6)$$

що суперечить попередній нерівності і доводить тим самим теорему. ◄

З теореми про максимум зміною знака у $u(x,y,z,t)$ випливає аналогічна теорема про мінімум:

Найменше значення функції $u(x,y,z,t)$ ***досягається в області Г, тобто або при*** $t=0$***, або на межі*** S***.***

Наслідком теорем про максимум і мінімум є теореми єдиності і неперервної залежності від крайових умов.

а) ***Розв'язок першої граничної задачі (2.4.1) – (2.4.3) єдине в області*** D_T***.***

► Дійсно, якщо u_1 і u_2 - два розв'язки задачі (2.4.1) – (2.4.3), то їх різниця $u=u_1-u_2$ задовольняє рівнянню (2.4.1) і обертається у нуль на межі S і при $t=0$, тобто в області *Г*. Але тоді в силу теорем про максимум і мінімум $u\equiv 0$ по всій області D_T, тобто $u_1\equiv u_2$.◄

б) ***Розв'язок першої граничної задачі (2.4.1) – (2.4.3) неперервно залежить від початкової і граничної умов (2.4.2) і (2.4.3).***

► Справді, нехай дві функції u_1 і u_2 задовольняють рівнянню (2.4.1), а різниця між їх початковими і граничними значеннями за абсолютною величиною не перевищує деякого $\varepsilon > 0$. Це означає, що на межі *Г* $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$.

Але тоді на основі принципу максимуму і мінімуму робимо висновок, що по всій області D_T, $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$.◄

Доведені нами єдиність і коректність розв'язання зберігаються, очевидно, і для неоднорідного рівняння.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F(x, y, z, t) \qquad (2.4.7)$$

Так як різниця двох розв'язків цього рівняння задовольняє однорідному рівнянню (2.4.1).

Доведемо тепер, що ***розв'язок рівняння (2.4.7) неперервно залежить не тільки від початкових і від граничних умов (2.4.2) і (2.4.3), але і від вільного члена*** $F(x, y, z, t)$.

► Справді, нехай функції u_1 і u_2 задовольняють неоднорідному рівнянню (2.4.7) з вільними членами $F_1(x, y, z, t)$ і $F_2(x, y, z, t)$ відповідно, початковим даним $f_1(x, y, z)$ і $f_2(x, y, z)$ та граничним даним $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$. Тоді їх різниця $u = u_1 - u_2$ задовольняє рівнянню (2.4.7), де $F = F_1 - F_2$, початковій умові (2.4.2), де $f = f_1 - f_2$ і граничній умові (2.4.3), де $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Доведемо, що при малих F, f і φ різниця $u = u_1 - u_2$ також буде малою. Точніше, *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, що якщо*

$$|F|, |f|, |\varphi| < \delta \qquad \textit{(2.4.8)}$$

Тоді

$$|u| < \varepsilon \qquad \textit{(2.4.9)}$$

по всій області D_T.

Дійсно, нехай $M = \max\limits_{D_T} u$, $m = \max\limits_{\Gamma} u$. Нехай нерівність (2.4.9) не має місця, яким би малим не було δ.

Виберемо $\delta < \varepsilon$. Очевидно, $M \geq \varepsilon, M > m$. Побудуємо функцію. Повторюючи попередні міркування, прийдемо до нерівності (2.4.5), а замість нерівності (2.4.6) будемо мати:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - a^2\frac{M-m}{3d^2} =$$

$$= F - a^2\frac{M-m}{3d^2} < |F| - \frac{a^2}{3d^2}M + \frac{a^2}{3d^2}m < \delta - \frac{a^2}{3d^2}M + \frac{a^2}{3d^2}\delta =$$

$$= \left(1 + \frac{a^2}{3d^2}\right)\delta - \frac{a^2}{3d^2}M < \left(1 + \frac{a^2}{3d^2}\right)\delta - \frac{a^2}{3d^2}\varepsilon < 0 \qquad (2.4.6')$$

Якщо вибрати δ так, щоб

$$\delta < \frac{a^2}{a^2 + 3d^2}\varepsilon .$$

нерівності (2.4.5) і (2.4.6′) суперечливі, що і доводить твердження.

Таким чином, коректність постановки першої крайової задачі для рівняння теплопровідності доведено повністю. ◄

Можна показати, що друга і третя крайові задачі для різнорідних тіл з умовами спряження, також є коректними.

Частина III. Одномірні задачі теплопровідності

§ 1. Задачі теплопровідності для необмеженого стержня

1^0. Задача Коші

Постановка задачі. ***Знайти обмежений розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

в області $D(0<x<\infty, t>0)$***, який задовольняє початковій умові***

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x) \qquad (3.1.2)$$

Доведемо наступну **теорему**: ***Якщо функція*** $f(x)$ ***неперервна і обмежена на всій числовій вісі, функція*** $F(x,t)$ ***і її похідна*** $\frac{\partial F}{\partial x}$ ***неперервні і обмежені в області*** D***, то існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.1.1) - (3.1.2), який визначається за формулою***

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

(3.1.3)

►Для доведення теореми формально застосуємо до рівняння (3.1.1) і умови (3.1.2) загальне перетворення Фур'є, покладаючи, що $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0$. Використовуючи властивість диференціювання перетворень Фур'є, отримаємо:

$$\frac{d\tilde{u}(s,t)}{dt}=-a^2s^2\tilde{u}(s,t)+\tilde{F}(s,t) \qquad (3.1.4)$$

$$\tilde{u}(s,t)\big|_{t=0}=\tilde{f}(s) \qquad (3.1.5)$$

Розв'язок звичайного диференціального рівняння (3.1.4) з початковою умовою (3.1.5) має вигляд:

$$\tilde{\imath} \qquad {}^{a^2s^2t}\left[\tilde{\jmath} \qquad \int_0 \qquad {}^{\imath^2s^2\tau}\tilde{I} \qquad \right]=$$

$$= e^{-a^{2}s^{2}t} \quad \ldots \quad \int_{0} \quad \ldots \, {}^{2}s^{2}(t-\tau) \quad (3.1.6)$$

За формулою обертання знайдемо обернене перетворення Фур'є $g(x,t)$ функції $\tilde{g}(s,t) = e^{-a^{2}s^{2}t}$.

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^{2}s^{2}t} \cdot e^{-ixs} ds =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^{2}s^{2}t} \cdot (\cos xs - i \sin xs) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^{2}s^{2}t} \cdot \cos xs ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-a^{2}s^{2}t} \cdot \cos xs ds = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^{2}}{4a^{2}t}}$$

Отже

$$g(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^{2}}{4a^{2}t}}$$

Застосовуючи формулу згортки для загального перетворення Фур'є, на (3.1.6) отримаємо формулу (3.1.3).

Зробимо тепер аналіз цієї формули.

Покажемо, що формально знайдений розв'язок (3.1.3) задачі Коші дійсно задовольняє рівнянню (3.1.1) в області D і початковій умові (3.1.2).

Введемо позначення:

$$u_{1}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}t}} d\xi,$$

$$u_{2}(x,t) = \int_{0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}(t-\tau)}} d\xi$$

Безпосереднім диференціюванням легко перевірити, що функція

$$G(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^{2}}{4a^{2}t}} \quad (3.1.7)$$

задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \tag{3.1.8}$$

Оскільки при $t > 0$ можливе диференціювання під знаком інтегралу $u_1(x,t)$, то звідси виходить, що в області D $u_1(x,t)$ також задовольняє однорідному рівнянню

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \tag{3.1.9}$$

Доведемо, що $u_1(x,t)$ задовольняє початковій умові

$$u_1(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{3.1.10}$$

Дійсно,

$$u_1(x,t) = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\xi)-f(x)\right]\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi$$

Зробивши у першому інтегралі заміну $\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = z$, знайдемо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = 1 \tag{3.1.11}$$

отже

$$u_1(x,t) = f(x) + I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t),$$

де

$$I_1(x,t) = \int_{-\infty}^{x-\delta}\left[f(\xi)-f(x)\right]\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi$$

$$I_2(x,t) = \int_{x-\delta}^{x+\delta}\left[f(\xi)-f(x)\right]\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi$$

$$I_3(x,t) = \int_{x+\delta}^{+\infty}\left[f(\xi)-f(x)\right]\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi$$

Оцінимо кожен з цих інтегралів.

В силу неперервності функції $f(x)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\left|f(\xi) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

якщо $x - \sigma < \xi < x + \sigma$ і σ досить мале, тому

$$\left|I_2(x,t)\right| \le \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left|f(\xi) - f(x)\right| \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} d\xi < \frac{\varepsilon}{3} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} d\xi \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} d\xi = \frac{\varepsilon}{3}$$

Далі, внаслідок обмеженості функції $f(x)$

$$\left|I_1(x,t)\right| \le M \int_{-\infty}^{x-\delta} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} d\xi = M \int_{-\infty}^{-\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz$$

При досить малому t інтеграл справа буде менше $\dfrac{\varepsilon}{3M}$,

тобто

$$\left|I_1(x,t)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогічно $\left|I_3(x,t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при досить малому t.

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ при досить малому t завжди

$$\left|I_1(x,t)\right| + \left|I_2(x,t)\right| + \left|I_3(x,t)\right| < \varepsilon$$

Отже,

$$\lim_{t \to 0} u_1(x,t) = f(x)$$

Тепер покажемо, що $u_2(x,t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad (3.1.12)$$

Дійсно,

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t F(x,\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[F(\xi,\tau)-F(x,\tau)\right]\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi \qquad (3.1.13)$$

Використовуючи рівність(3.1.11) для першого доданку і теорему Лагранжа

$$F(\xi,\tau)-F(x,\tau)=F'_x\ (\eta,\tau)(\xi-x) \qquad (3.1.14)$$

для другого доданку отримаємо

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t F(x,\tau)d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F'_x(\eta,\tau)(x-\xi)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi$$

Тут η є середнє значення, яке розташоване між ξ і x та залежить лише від ξ,x,τ, самої функції F, але не від t. Так функція $\frac{\xi-x}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}$ обертається в нуль, якщо $t=\tau$, при будь-яких значеннях ξ і x, тоді

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=F(x,t)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F'_x\ (\eta,\tau)(\xi-x)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right]d\xi$$

Знову використовуючи рівність (3.1.14), а також рівняння (3.1.8), знайдемо, що

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=F(x,t)+a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F(\xi,\tau)-F(x,\tau)\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right]d\xi=$$

$$=F(x,t)+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi-$$

$$-a^2\int_0^t F(x,\tau)d\tau\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi \qquad (3.1.15)$$

Останній інтеграл справа дорівнює нулю в силу формули (3.1.11), тому

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+F(x,t)$$

і рівність (3.1.12) доведено.

Зрозуміло, що

$$u_2(x,t)\big|_{t=0}=0 \qquad (3.1.16)$$

Додаємо рівняння (3.1.9) та (3.1.12), а також початкові умови (3.1.10) та (3.1.16), отримаємо:

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial x^2}+F(x,t)$$

$$\left(u_1(x,t)+u_2(x,t)\big|\right)_{t=0}=f(x)$$

Тобто формула (3.1.3) дійсно дає розв'язок задачі Коші. ◄

2^0. Зауваження:

1. Умови застосування перетворень Фур'є, а також умова $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\partial u}{\partial x}=0$, покладені раніше на функції в (3.1.1) і (3.1.2), були необхідні лише на проміжному етапі, при застосуванні перетворення Фур'є і побудові формального розв'язку. Зроблений нами аналіз формули (3.1.3) показує, що якщо ці умови не мають місця, але виконані умови теореми, то в цьому випадку формула (3.1.3) дає розв'язок задачі Коші. Таким *чином, після проведеного аналізу, вказані вище обмежувальні умови автоматично знімаються.*

2. *Легко побачити, що якщо початкова функція* $f(x)$ *має скінчену кількість точок розриву, то інтеграл (3.1.3) подає обмежений розв'язок задачі Коші, неперервний скрізь у області* $\overline{D}(-\infty < x < +\infty, t \geq 0)$, *крім точок розриву функції* $f(x)$.

3.Якщо функції $F(x,t)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *кусково-неперервні і обмежені за першим аргументом, інтегровані за другим аргументом, то функція (3.1.3) задовольняє рівнянню (3.1.1) усюди крім точок розриву функцій* $F(x,t)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

Насправді, нехай точка x не є точкою розриву. Тоді в достатньо малому інтервалі $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ функції $F(x,t), \dfrac{\partial F}{\partial x}$ також неперервні.

Розбиваючи в останньому інтегралі права частина формула (3.1.13) область інтегрування по ξ $(-\infty,+\infty)$ на три інтервалу $(-\infty, x-\varepsilon)$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $(x+\varepsilon,+\infty)$ і використовуючи формулу (3.1.14) для середнього інтервалу $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ отримаємо:

$$u_2(x,t) = \int_0^t F(x,\tau)d\tau + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \left[F(\xi,\tau) - F(x,\tau)\right] \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} F'_x\ (\eta,\tau)(\xi - x) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{x+\varepsilon}^{+\infty} \left[F(\xi,\tau) - F(x,\tau)\right] \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\xi$$

Диференціюючи за верхньою границею t, другий і четвертий інтеграли справа, бачимо, що підінтегральна функція обертається в нуль, оскільки $x \neq \xi$, тому диференціювання по t зводиться до диференціювання підінтегральної функції. Розмірковуючи далі, як і раніше, і знову об'єднуючи інтеграли, отримаємо формули (3.1.3).

3^0 Фізичний зміст розв'язку:

З'ясуємо фізичний зміст розв'язку (3.1.3). Розглянемо спочатку перший доданок

$$u_1(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi \qquad (3.1.17)$$

Він задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності (3.1.9) і початковій умові (3.1.10), тобто описує розповсюдження температури даною температурою $f(x)$. Нехай функція $f(x)$ дорівнює нулю зовні деякого відрізка $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ стержня, а всередині його має постійне значення u_0. Це означає, що в даний момент часу відрізку $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ подається кількість теплоти $Q = 2\varepsilon\cdot\gamma\cdot c\cdot u_0$, де γ - лінійна густина стержню, c - його питома теплоємність.

У всі наступні моменти часу температура у стержні визначається інтегралом (3.1.17), який в даному випадку приймає вид:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u_0\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi = \frac{Q}{2\gamma c\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

Нехай тепер $\varepsilon\to 0$,тобто одна й таж кількість теплоти Q розподіляється на все меншій ділянці і в границі подається стержню в одній точці x_0. В цьому випадку кажуть, що в точці $x = x_0$ діє миттєве джерело теплоти напруги Q. При дії такого джерела розподіл температури у стержні визначається виразом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Q}{2\gamma c\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

За теоремою про середнє

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi = e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}, \text{ де } x_0-\varepsilon<\eta<x_0+\varepsilon .$$

Оскільки при $\varepsilon \to 0$ $\eta \to x_0$, то вище вказана границя дорівнює

$$\frac{Q}{c\gamma}\cdot\frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$$

Покладемо, що кількість теплоти Q, поданого стержню числено дорівнює $c\gamma$. Заміняючи x_0 на ξ, робимо висновок, що функція

$$G(x-\xi,t)=\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} \qquad (3.1.18)$$

описує розповсюдження температури, який було викликано миттєвим джерелом теплоти напруги $Q=\gamma c$, розташований в початковий момент часу $t=0$ в точці $x=\xi$ стержня.

Розв’язок (3.1.17) отримає наочний фізичний зміст. Для того, щоб на деякому малому елементі $d\xi$, який містить точку ξ, початкова температура стержня була рівною $f(\xi)$, необхідно до цього елемента прикласти кількість теплоти

$$dQ=c\gamma\cdot f(\xi)d\xi,$$

тобто розташувати у точці ξ миттєве джерело теплоти напруги dQ. Розподіл температури, викликаний цим джерелом, в силу формули (3.1.18) має вигляд

$$f(\xi)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}d\xi$$

Підсумовуючи за всіма елементами $d\xi$, отримаємо загальну дію від початкової температури у всіх точках стержня, що дає нам розв’язок (3.1.17) задачі Коші (3.1.9), (3.1.10).

Розглянемо тепер другий доданок

$$u_2(x,t)=\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi \qquad (3.1.19)$$

який задовольняє неоднорідному рівнянню теплопровідності (3.1.12) з нульовою початковою умовою.

В силу прийнятих позначень

$$F(x,t)=\frac{l(x,t)}{c\gamma}$$

де $l(x,t)$ - щільність теплових джерел у стержні, тобто кількість теплоти, яка виділяється у стержні на одиниці довжини за одиницю часу. Кількість теплоти Q, яка виділилася в малому елементі $d\xi$ стержня за проміжок часу від τ до $\tau+d\tau$, буде дорівнювати

$$l(\xi,\tau)d\xi d\tau=c\gamma\cdot F(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

Якщо проміжок часу $d\tau$ досить малий, то наступний розподіл температури у стержні від дії цього джерела буде з точністю до нескінченно малих таким самим, як якщо б у точці ξ було розташовано миттєве джерело напруги $Q=\gamma c$, тобто для всіх $t>\tau$ він має вигляд

$$u_2(x,t)=F(\xi,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

Якщо джерела розташовані неперервно, то підсумовуючи теплові впливи джерел, які діють по всій області $(-\infty<\xi<+\infty, 0\le\tau\le t)$, отримаємо (3.1.19).

Таким чином, розподіл температури (3.1.3) можна розглядати як результат дії двох джерел, один з яких, діючий миттєво, створює початкову температуру $f(x)$, а інший діє неперервно і залежить від вільного члена $F(x,t)$.

Якщо $f(x)<0$ чи $F(x,t)<0$, то скрізь замість джерел треба говорити про стоки.

4^0. *Єдиність розв'язку задачі Коші :*

Доведемо тепер, що *розв'язок задачі Коші, який визначається формулою (3.1.3) єдиний.*

► Справді, нехай $u(x,t)$, $v(x,t)$ - два розв'язки здачі Коші(3.1.1), (3.1.2). Тоді їх різниця

$$\omega(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

і початковій умові.

Оскільки за доведеним раніше функції $u(x,t), v(x,t)$ обмежені по всій області, то

$$|\omega(x,t)| \leq |u(x,t)| + |v(x,t)| \leq M$$

в необмеженій області функція $\omega(x,t)$ може і не досягати свого найбільшого і найменшого значень, тому безпосередньо застосовувати теорему про максимум і мінімум не можна. Для того, щоб все-ж-таки користуватися цією теоремою розглянемо скінчену область

$$|x| \leq N,\ 0 \leq t \leq T \tag{3.1.20}$$

і функцію

$$H(x,t) = \frac{2M}{N^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right),$$

яка задана в цій області.

Легко перевірити, що $H(x,t)$ задовольняє рівнянню теплопровідності (3.1.10).

Очевидно,

$$H(x,0) \geq \omega(x,0) = 0$$

$$H(\pm N,t) \geq M \geq |\omega(\pm N,t)|,$$

тобто

$$[H(x,t) \pm \omega(x,t)]_{t=0} \geq 0$$

$$[H(x,t) \pm \omega(x,t)]_{x=\pm N} \geq 0$$

в скінченій області (3.1.20) до функції $H(x,t) \pm \omega(x,t)$ можна застосувати теорему про максимум та мінімум, і ми отримаємо, що скрізь в цій області

$$H(x,t) \pm \omega(x,t) \geq 0$$

звідки

$$-H(x,t) < \omega(x,t) < H(x,t)$$

або

$$|\omega(x,t)| \leq H(x,t) = \frac{2M}{N^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)$$

Якщо тепер зафіксувати значення x, t і спрямувати N до нескінченності, то ми отримаємо, що $\omega(x,t) = 0$

Отже доведено, що задача Коші має єдиний розв'язок. ◄

§ 2. Задачі теплопровідності для напівобмеженого стержня

1⁰. Перша гранична задача.

Постановка задачі: ***Знайти обмежений розв'язок рівняння***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{3.2.1}$$

в області $D\,(0 < x < \infty, t > 0)$***, який задовольняє початковій умові***

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{3.2.2}$$

і граничній умові

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varphi(t) \tag{3.2.3}$$

► Припустимо, що розв'язок задачі (3.2.1)-(3.2.3) існує і що функції, які входять в (3.2.1) та (3.2.2), припускають застосування синус-перетворення Фур'є, а функція $\varphi(t)$ неперервна і обмежена.

Застосовуючи до системи (3.2.1)-(3.2.3) синус-перетворення Фур'є і використовуючи властивість диференціювання оригіналу, отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\tilde{\imath}}{dt} \qquad \cdot a^2 s^2 \tilde{\imath} \qquad {}^2 s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi(t) + \tilde{I}$$

з початковою умовою

$$\tilde{u}_s(s,t)\Big|_{t=0} = \tilde{f}_s(s)$$

розв'язок якого має вигляд:

$$\tilde{\imath} \qquad {}_0^t\, e^{-a^2s^2(t-\tau)} a^2 s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\tilde{I} \qquad + e^{-a^2s^2t}\,\tilde{\jmath} \tag{3.2.4}$$

Застосуємо обернене синус-перетворення Фур'є. Оскільки

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\cos xs\,ds = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{a\sqrt{2t}}, \tag{3.2.5}$$

отже, диференціюючи по x, отримаємо

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty s e^{-a^2s^2t}\sin xs\,ds = \frac{x\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\sqrt{2}a^3t^{\frac{3}{2}}}$$

і, отже, обернене синус-перетворення Фур'є першого доданку в правій частині формули (3.2.4) має вигляд

$$\int_0^t \frac{x\cdot\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$$

Експоненту $e^{-a^2s^2(t-\tau)}$, яка стоїть під інтегралом у другому доданку формули (3.2.4), можна в силу (3.2.5) розглядати як косинус-перетворення Фур'є функції

$$g(x,t-\tau) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{a\sqrt{2(t-\tau)}}$$

Використовуючи формулу згортки, бачимо, що оберненим синус-перетворенням Фур'є чи, коротше, оригіналом добутку $\tilde{g}_s(s)\cdot\tilde{F}_s(s,\tau)$ буде функція

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(\xi,t)\big[g(|x-\xi|)-g(|x+\xi|)\big]d\xi\,,$$

тобто оригіналом для другого доданку буде

$$\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

Аналогічно, оригіналом для третього доданку буде:

$$\int_0^\infty \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi$$

Таким чином, формальний розв'язок задачі (3.2.1)-(3.2.3) задається формулою

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{x\cdot\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^\infty \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi \qquad (3.2.6)$$

Доведемо, що якщо в області $D\,(0<x<\infty, t>0)$ функції $F(x,t)$, $f(x)$ задовольняють тим же умовам, що і у задачі Коші, а функція $\varphi(t)$ неперервна і обмежена у вказаній області, то функція (3.2.6) дійсно є розв'язком задачі (3.2.1) - (3.2.3).

Позначимо доданки, які стоять в правій частині формули (3.2.6) відповідно $I_1(x,t)$, $I_2(x,t)$, $I_3(x,t)$.

Якщо функції $F(x,t)$, $f(x)$ продовжити з області $D(0<x<\infty, t>0)$ в область $D_1(-\infty<x<\infty, t>0)$ непарним способом:

$$F(-x,t) = -F(x,t) \qquad f(-x) = -f(x)$$

то отримаємо:

$$I_2(x,t) + I_3(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi +$$

$$+\int_0^\infty \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{F(-\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \ + \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

$$+\int_0^\infty \frac{f(-\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi +$$

$$+\int_{-\infty}^\infty \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

В цьому випадку, як це випливає з попереднього параграфу, функція $I_2(x,t) + I_3(x,t)$ є розв'язком задачі Коші (3.2.1) - (3.2.2) всюди в області $D_1(-\infty<x<\infty, t>0)$ за винятком, майже, точки $x=0$, де функція $F(x,t)$ та її похідна $\frac{\partial F}{\partial x}$ можуть мати розрив. Отже, всюди в області $D(0<x<\infty, t>0)$ функція $I_2(x,t) + I_3(x,t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню (3.2.1) і початковій умові (3.2.2). крім того, очевидно, що

$$\left[I_2(x,t) + I_3(x,t) \right]_{x=0} = 0 \qquad (3.2.7)$$

Розглянемо перший доданок:

$$I_1(x,t)=\int_0^t \frac{x\cdot\varphi(\tau)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$$

Безпосереднім диференціюванням легко перевірити, що $I_1(x,t)$ задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності в області $D(0<x<\infty, t>0)$ і, очевидно, що

$$I_1(x,t)\big|_{t=0}=0$$

покажемо, що

$$\lim_{x\to 0} I_1(x,t)=\varphi(t) \tag{3.2.8}$$

Насправді, зробивши заміну змінної інтегрування за формулою $z=\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$, отримаємо

$$I_1(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\varphi\left(t-\frac{x^2}{4a^2z^2}\right)e^{-z^2}dz=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon}^{\infty}\varphi\left(t-\frac{x^2}{4a^2z^2}\right)e^{-z^2}dz+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\varepsilon}\varphi\left(t-\frac{x^2}{4a^2z^2}\right)e^{-z^2}dz,$$

де $\varepsilon>0$ - довільно мале число.

Перший доданок справа при знаходженні границі при $x\to+0$ приймає значення, яке дорівнює:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\varphi(t)\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-z^2}dz,$$

а другий доданок, в силу обмеженості функції $\varphi(t)$ має оцінку

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\varepsilon}\varphi\left(t-\frac{x^2}{4a^2z^2}\right)e^{-z^2}dz\le M\int_0^{\varepsilon}e^{-z^2}dz<M\cdot\varepsilon$$

Спрямовуючи ε до нуля, отримаємо (3.2.8).

Підсумовуючи вище сказане, заключаємо, що сума $I_1(x,t)+I_2(x,t)+I_3(x,t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню

(3.2.1), початковій умові (3.2.2) і граничній умові (3.2.3), та, отже, формула (3.2.6) дійсно дає розв’язок поставленої задачі.

Те що розв’язок єдиний встановлюється дослівним повторенням міркувань, приведених при доведені того, що розв’язок задачі Коші єдиний, якщо там замість області (3.1.20) взяти область $\overline{D}_0(0 < x < N, 0 \le t \le T)$.◄

2^0. *Друга гранична задача*

Постановка задачі: ***Найти обмежений розв’язок рівняння***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{3.2.9}$$

в області $D(0 < x < \infty, t > 0)$***, який задовольняє початковій умові***

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{3.2.10}$$

і граничній умові другого роду

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t) \tag{3.2.11}$$

Застосуємо формально косинус-перетворення Фур’є. Використовуючи властивість диференціювання оригіналу, отримаємо замість (3.2.9) звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\tilde{\imath}}{\quad dt} \qquad \cdot a^2 s^2 \tilde{\imath} \qquad {}^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi(t) + \tilde{I}$$

з початковою умовою

$$\tilde{\imath} \qquad = \tilde{\jmath}$$

Розв’язок якого прийме вигляд

$$\tilde{\imath} \qquad \cdot a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+\int_0^t e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} \tilde{I} \qquad + e^{-a^2 s^2 t} \cdot \tilde{\jmath} \tag{3.2.12}$$

Застосуємо обернене косинус-перетворення Фур’є.

Використовуючи формулу (1.2.23) і формулу згортки для оберненого косинус-перетворення Фур'є, отримаємо формальний розв'язок:

$$u(x,t) = -\int_0^t \frac{a\varphi(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi \qquad (3.2.13)$$

Легко переконатися, що при тих самих обмеженнях, які були накладені на функції $F(x,t)$, $f(x)$, $\varphi(t)$ у попередньому пункті, формула (3.2.13) дійсно дає розв'язок другої граничної задачі.

Дійсно, продовжуючи функції $F(x,t)$, $f(x)$ парним способом для від'ємних значень x, отримаємо, як і раніше, що два останніх доданки в правій частині формули (3.1.13) задовольняє неоднорідному рівнянню (3.2.9) і початковій умові (3.2.10), а їх похідна по x при $x=0$ обертається в нуль.

Щодо першого доданку, то безпосередньою перевіркою можна встановити, що воно задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності в області $D(0<x<\infty, \quad t>0)$, обертається в нуль при $t=0$, а його похідна по x, яка дорівнює

$$\int_0^t \varphi(\tau) \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau ,$$

прямує до $\varphi(t)$ при $x \to +0$ в силу формули (3.2.8), що і доводить наше твердження.

3⁰. Третя гранична задача

Поставимо задачу*: Знайти обмежений розв'язок рівняння:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \qquad (3.2.14)$$

у області $D(0<x<\infty,\quad t>0)$***, яке задовольняє початковій умові***

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x) \qquad (3.2.15)$$

і граничній умові третього роду

$$\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-hu(x,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\varphi(t) \qquad (3.2.16)$$

де $h=\dfrac{\alpha}{\lambda}$ - константа. Тут $\alpha-$ коефіцієнт тепловіддачі, а $\lambda-$ коефіцієнт теплопровідності.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо перетворення Лапласа. Тоді замість системи (3.2.14) – (3.2.16) одержимо задачу у зображеннях:

$$a^2\frac{d^2U}{dx^2}-pU(x,p)+f(x)+\overline{F}(x,p)=0 \qquad (3.2.17)$$

$$\left[\frac{dU(x,p)}{dx}-hU(x,p)\right]\Bigg|_{x=0}=\Phi(p) \qquad (3.2.18)$$

У рівняннях (3.2.17) і (3.2.18) функції $\overline{F}(x,p)$ і $\Phi(p)$ є відповідно зображення функцій $F(x,t)$ і $\varphi(t)$.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (3.2.17) має вид:

$$U(x,p)=\left\{C_1-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\left(\overline{F}(\xi,p)+f(\xi)\right)d\xi\right\}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+$$

$$+\left\{C_2+\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x e^{\frac{\sqrt{p}}{a}\xi}\left(\overline{F}(\xi,p)+f(\xi)\right)d\xi\right\}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \qquad (3.2.19)$$

Виберемо постійні таким чином, щоб розв'язок (3.2.19) був обмеженим при $x\to\infty$. Очевидно, при любому C_2 другий доданок у правій частині (3.2.19) обмежений. Що стосовно першого доданку, то для його обмеженості необхідно, щоб вираз у фігурних дужках прямував до нуля при $x \to \infty$, тобто

$$C_1 = \frac{1}{2a\sqrt{p}} \int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi} \left(\overline{F}(\xi, p) + f(\xi)\right) d\xi$$

Підставляючи це значення у (3.2.19) , одержимо:

$$U(x,p) = \frac{1}{2a\sqrt{p}} \int_x^\infty e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi} e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} \left(\overline{F}(\xi, p) + f(\xi)\right) d\xi +$$

$$+\left\{ C_2 + \frac{1}{2a\sqrt{p}} \int_0^x e^{\frac{\sqrt{p}}{a}\xi} \left(\overline{F}(\xi, p) + f(\xi)\right) d\xi \right\} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \qquad (3.2.20)$$

Задовольняючи рівнянню (3.2.18) знайдемо значення для C_2

$$C_2 = \frac{\sqrt{p} - ah}{2a\sqrt{p}(\sqrt{p} + ah)} \int_0^\infty \left(\overline{F}(\xi, p) + f(\xi)\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}\xi} d\xi -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{p} + ah} \Phi(p) \qquad (3.2.21)$$

Підставляючи (3.2.21) у (3.2.20) одержимо

$$U(x,p) = \frac{1}{2a\sqrt{p}} \int_x^\infty \left(f(\xi) + \overline{F}(\xi, p)\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(\xi - x)} d\xi +$$

$$+\frac{\sqrt{p} - ah}{2a\sqrt{p}(\sqrt{p} + ah)} \int_0^\infty \left(f(\xi) + \overline{F}(\xi, p)\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x + \xi)} d\xi -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{p} + ah} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \Phi(p) + \frac{1}{2a\sqrt{p}} \int_0^x \left(f(\xi) + \overline{F}(\xi, p)\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x - \xi)} d\xi$$

або

$$U(x,p) = \frac{1}{2a\sqrt{p}} \int_0^\infty \left(f(\xi) + \overline{F}(\xi, p)\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|\xi - x|} d\xi +$$

$$+\frac{\sqrt{p}-ah}{2a\sqrt{p}(\sqrt{p}+ah)}\int_0^\infty \left(f(\xi)+\overline{F}(\xi,p)\right)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+\xi)}d\xi -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{p}+ah}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\Phi(p).$$

Проймаючи до уваги, що

$$\frac{\sqrt{p}-ah}{2a\sqrt{p}(\sqrt{p}+ah)} = \frac{2\sqrt{p}-(\sqrt{p}+ah)}{2a\sqrt{p}(\sqrt{p}+ah)} = \frac{1}{a(\sqrt{p}+ah)} - \frac{1}{2a\sqrt{p}}$$

Одержимо

$$U(x,p) = \frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^\infty \left(f(\xi)+\overline{F}(\xi,p)\right)\left[e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-\xi|} - e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+\xi)}\right]d\xi +$$

$$+\frac{1}{a(\sqrt{p}+ah)}\int_0^\infty \left(f(\xi)+\overline{F}(\xi,p)\right)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+\xi)}d\xi -$$

$$-\frac{a}{\sqrt{p}+ah}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\Phi(p). \qquad (3.2.22)$$

Так як оригіналом функції $\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$ є функція $\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$, а оригіналом функції $\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}+b}$ є функція

$$\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - be^{b\alpha+b^2t}erfc\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+bt\right)$$

Отже приймаючи до уваги ці оригінали до відповідних виразів у рівності (3.2.22), то вони приймуть наступний вид:

$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-\xi|}}{\sqrt{p}} \doteq \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi t}}; \qquad \frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+\xi)}}{\sqrt{p}} \doteq \frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi t}};$$

$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x+\xi)}}{\sqrt{p}+ah} \doteq \frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi t}} - ahe^{h(x+\xi)+a^2h^2t}erfc\left(\frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}}+aht\right);$$

$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{\sqrt{p}+ah} \doteq \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\pi t}} - ahe^{hx+a^2h^2t}erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+aht\right).$$

А також використовуючи формулу згортки одержимо формальний розв'язок поставленої задачі.

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^{\infty}f(\xi)\left[\frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}}{a\sqrt{\pi t}}-ahe^{h(x+\xi)+a^2h^2t}erfc\left(\frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}}+aht\right)\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}F(\xi,\tau)\left[\frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}-ahe^{h(x+\xi)+a^2h^2(t-\tau)}erfc\left(\frac{x+\xi}{2a\sqrt{(t-\tau)}}+ah(t-\tau)\right)\right]d\xi-$$

$$-\int_0^t\varphi(\tau)\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}-ahe^{hx+a^2h^2(t-\tau)}\,erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)}}+ah(t-\tau)\right)\right]d\tau$$

(3.2.23)

Якщо $h=0$, тоді ми одержимо розв'язок, який буде відповідати другій граничній задачі, тобто

$$u_0(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^{\infty} \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi - a\int_0^t \varphi(\tau) \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \right] d\tau . \quad (3.2.24)$$

Функція $u_0(x,t)$, яка є розв'язком другої граничної задачі (3.2.9)-(3.2.11), задовольняє неоднорідному рівнянню (3.2.14) і начальній умові (3.2.15), звідси випливає, що функція (3.2.22) Також задовольняє рівнянню (3.2.14) і умові (3.2.15).

Доведемо що вона задовольняє і граничній умові (3.2.16). Дійсно, приймаючи до уваги (3.2.11)

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t) \quad (3.2.25)$$

Позначаючи через $I(x,t)$ три останніх доданки у правій частині (3.2.24), так що

$$u(x,t) = u_0(x,t) + I(x,t) \quad (3.2.26)$$

Безпосередньою перевіркою неважко упевнитись, що

$$\left. \left(-hu_0(x,t) + \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} - hI(x,t) \right) \right|_{x=0} = 0$$

Складаючи цю рівність з (3.2.25) і приймаючи до уваги (3.2.26), одержимо (3.2.16), що і треба було довести.

Таким чином, формула (3.2.24) дійсно дає розв'язок задачі (3.2.14) - (3,2.16), якщо функції $F(x,t), \quad f(x), \quad \varphi(t)$ задовольняють тім же умовам , що і у другій граничній задачі.

§ 3. Одномірні задачі теплопровідності для обмеженого стержня

1⁰. Перша гранична задача.

Постановимо задачу. ***Знайти розв'язок рівняння***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (3.3.1)$$

в області $D(0 < x < l, \quad t > 0)$***, який задовольняє початковій умові***

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \quad (3.3.2)$$

і граничним умовам:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varphi(x) \quad (3.3.3)$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = \phi(x) \quad (3.3.4)$$

Для розв'язання задачі (3.3.1)-(3.3.4) застосовуємо метод Фур'є, тобто будемо шукати розв'язок у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x\,, \quad (3.3.5)$$

де коефіцієнт $u_n(t)$ визначається за формулою:

$$u_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad (3.3.6)$$

Виразимо $u_n(t)$ через задані функції $F(x,t)$, $f(x)$, $\varphi(t)$, $\phi(t)$. З цією метою помножимо обидві частини рівняння (3.3.1) і начальної умови (3.3.2) на $\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$ і проінтегруємо у межах від 0 до *l*.

Інтегруючи за частинами двічі член, що містить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, і враховуючи граничні умови (3.3.3) і (3.3.4), отримаємо звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння відносно функції $u_n(t)$

$$\frac{du_n(t)}{dt} = -\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} u_n(t) + \frac{2a^2 n\pi}{l^2}\left[\varphi(t) - (-1)^n \phi(t)\right] + F_n(t) \quad (3.3.7)$$

з початковими умовами

$$u_n(t)\big|_{t=0} = f_n \quad (3.3.8)$$

де

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (3.3.9)$$

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \qquad (3.3.10)$$

Розв'язок звичайного диференціального рівняння (3.3.7) з початковою умовою (3.3.8) має вигляд:

$$u_n(t) = f_n \cdot e^{-\lambda_n{}^2 t} + \frac{2a\lambda_n}{l}\int_0^t e^{-\lambda_n{}^2(t-\tau)}\left[\varphi(\tau) - (-1)^n\phi(\tau)\right]d\tau +$$

$$+\int_0^t e^{-\lambda_n{}^2(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau,$$

де $\lambda_n = \dfrac{an\pi}{l}$.

Підставимо цей вираз у розв'язок (3.3.5). використовуючи позначення (3.3.9), (3.3.10) і змінюючи формально порядок підсумовування і інтегрування, будемо мати:

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n{}^2 t}\sin\frac{\lambda_n}{a}x\cdot\sin\frac{\lambda_n}{a}\xi d\xi +$$

$$+\frac{2a}{l}\int_0^t \varphi(\tau)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n{}^2(t-\tau)}\cdot\lambda_n\sin\frac{\lambda_n}{a}xd\tau -$$

$$-\frac{2a}{l}\int_0^t \phi(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\lambda_n{}^2(t-\tau)}\cdot\lambda_n\sin\frac{\lambda_n}{a}xd\tau +$$

$$+\frac{2}{l}\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n{}^2 t}\sin\frac{\lambda_n}{a}x\cdot\sin\frac{\lambda_n}{a}\xi d\xi \qquad (3.3.11)$$

Використовуючи тотожності:

$$\sin\frac{\lambda_n}{a}x\sin\frac{\lambda_n}{a}\xi = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\lambda_n}{a}(x-\xi) - \cos\frac{\lambda_n}{a}(x+\xi)\right],$$

$$(-1)^n \sin\frac{\lambda_n}{a}x = \sin\frac{\lambda_n}{a}(x-l)$$

і вводячи позначення

$$g(x,t) = \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n{}^2 t}\cos\frac{\lambda_n}{a}x \qquad (3.3.12)$$

Запишемо попередній вираз у вигляді:

$$u(x,t) = \int_0^l f(\xi)\big[g(x-\xi,t) - g(x+\xi,t)\big]d\xi -$$

$$-2a^2\int_0^t \varphi(\tau)\cdot g'_x(x,t-\tau)d\tau \ +2a^2\int_0^t \phi(\tau)\cdot g'_x(x-l,t-\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\big[g(x-\xi,t-\tau) - g(x+\xi,t-\tau)\big]d\xi \qquad (3.3.13)$$

Покажемо тепер, що формально знайдений розв'язок (3.3.13) дійсно задовольняє диференціальному рівнянню (3.3.1), початковій умові (3.3.2) і граничним умовам (3.3.3), (3.3.4). Для цього перетворимо функцію $g(x,t)$.

Розглянемо ряд:

$$\hat{O}(y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(y+k)^2\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Очевидно, $\Phi(y)$ - парна і періодична функція з періодом, який дорівнює 1, таким чином, в інтервалі $[0;1]$ вона розкладається в ряд Фур'є за косинусами:

$$\Phi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos 2k\pi y \qquad (3.3.14)$$

де

$$a_k = 2\int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(y+m)^2\alpha}\cos 2k\pi y dy \qquad (3.3.15)$$

При $\alpha > 0$ ряд в правій частині формули (3.3.15) збігається рівномірно відносно *m*. Інтегруючи його за членами, отримаємо:

$$a_k = 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_0^1 e^{-(y+m)^2\alpha}\cos 2k\pi y dy =$$

$$= 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_m^{m+1} e^{-z^2\alpha}\cos 2k\pi(z-m)dz =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2\alpha}\cos 2k\pi z dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2k^2}{\alpha}}$$

таким чином,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(y+k)^2\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2k^2}{\alpha}}\cos 2\pi k y$$

Покладаючи тут $y = \dfrac{x}{2l},\ \alpha = \dfrac{l^2}{a^2t}$, будемо мати

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2t}} = \frac{a\sqrt{\pi t}}{l} + \frac{2a\sqrt{\pi t}}{l}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k^2 t}\cos\frac{\lambda_k}{a}x =$$

$$= \frac{a\sqrt{\pi t}}{l} + 2a\sqrt{\pi t}\cdot g(x,t),$$

Звідки

$$g(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2t}} - \frac{1}{2l} \qquad (3.3.16)$$

Підставимо цей вираз в формулу (3.3.13). Отже

$$u(x,t) = \int_0^l \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi +$$

$$+\int_0^t \varphi(\tau)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau-$$

$$-\int_0^t \phi(\tau)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \qquad (3.3.17)$$

Позначимо доданки в правій частині (3.3.17) відповідно через $I_1(x,t),\quad I_2(x,t),\quad I_3(x,t),\quad I_4(x,t)$. Функції $f(x)$ і $F(x,t)$, які визначені на інтервалі $(0;l)$, продовжимо на інтервал $(-l;0)$ непарним чином, а потім знову продовжимо періодично на всю числову вісь з періодом *2l*, так, що

$$f(-x)=-f(x),\qquad f(x+2kl)=f(x)$$
$$F(-x,t)=-F(x,t)\quad F(x+2kl,t)=F(x,t)$$

Тоді будемо мати:

$$I_1(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-2kl}^{l-2kl}\frac{f(z+2kl)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-2kl}^{-l-2kl}\frac{f(-z-2kl)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz=$$

$$=\int_0^l\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}d\xi-\int_0^l\frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}d\xi=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-l-2kl}^{l-2kl}\frac{f(z)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(z)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}dz$$

Перетворивши аналогічно четвертий доданок, отримаємо:

$$I_4(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(z,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]dz\,.$$

Звідси безпосередньо випливає, що сума $I_1(x,t)+I_4(x,t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню (3.3.1) і початковій умові (3.3.2) всюди і зокрема, на інтервалі $0<x<l$, окрім, майже, точок $x=2kl,\ (k=0,\pm1,\pm2,...)$.

Далі, очевидно,

$$I_1(0,t)=\int_0^l \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-2kl)^2}{4a^2t}}d\xi-\int_0^l \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi+2kl)^2}{4a^2t}}d\xi,$$

і, роблячи заміну індексу підсумовування k у другому доданку праворуч на $-k$, знаходимо, що $I_1(0,t)=0$. Аналогічно, $I_1(l,t)=0$, $I_4(0,t)=0,\quad I_4(l,t)=0$ тобто сума $I_1(x,t)+I_4(x,t)$ задовольняє однорідним граничним умовам.

Другий доданок в (3.3.17) запишемо у вигляді:

$$I_2(x,t)=\int_0^l \varphi(\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^l \varphi(\tau)\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{+\infty}\frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

Перший інтеграл в правій частині, як було показано раніше, задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності і, враховуючи формулу (3.2.8) граничній умові (3.3.3). Ряд, який стоїть під знаком другого інтеграла, збігається рівномірно на відрізку $0\le x\le l$, так як $k\neq0$. Змінюючи порядок інтегрування і підсумовування і диференціюючи отриманий ряд за членами, можемо легко переконатися, що він задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності. Крім того, при $x=0$ він обертається на нуль,так як доданки, що відповідають додатнім значенням k, взаємно знищуються з доданками для від’ємних k. З тієї ж самої причини $I_2(l,t)=0$.

Нарешті останній доданок $I_3(x,t)$ представимо у вигляді:

$$I_3(x,t)=-\int_0^l \phi(\tau)\frac{x-l}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau-$$

$$-\int_0^l \phi(\tau)\cdot\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau \quad .$$

Диференціюючи безпосередньо легко перевірити, що перший інтеграл праворуч задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності. Виконуючі ті ж самі дії, що і при доведенні формули (3.2.8), можна показати, що

$$\lim_{x\to l-0}\int_0^t \phi(\tau)\frac{x-l}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau=-\phi(t)$$

Другий інтеграл внаслідок рівномірної збіжності підінтегрального ряду також задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності і перетворюється на нуль при $x=l$. Далі, легко побачити, що $I_3(0,t)=0,\ I_2(x,0)+I_3(x,0)=0$.

Таким чином, сума $I_2(x,t)+I_3(x,t)$ задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності, нульовій початковій умові і граничним умовам (3.3.3), (3.3.4).

Підводячи підсумки вище зазначеного, робимо висновок, що формула (3.3.17), або, що так само, формула (3.3.13) дійсно дає розв'язок поставленої задачі.

Єдиність цього розв'язку була доведена раніше за допомогою принципу максимуму.

2^0. Друга гранична задача

Постановка задачі. ***Знайти розв'язок рівняння***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{3.3.18}$$

в області $D(0<x<l,t>0)$,

що задовольняє початковій умові

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{3.3.19}$$

і граничним умовам другого роду:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi(t) \tag{3.3.20}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \phi(t) \tag{3.3.21}$$

Для того, щоб розв'язати поставлену задачу методом Фур'є, необхідно знайти власні функції другої однорідної крайової задачі, тобто:

Необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1*}$$

в області $D\,(0 < x < l, \quad t > 0)$***,***

з початковими умовами

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{2*}$$

і однорідними граничним умовам другого роду

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{3*}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \tag{4*}$$

Для розв'язування задачі (1*) – (4*) скористаємося методом відокремлювання змінних.

Частинні розв'язки рівняння (1*), які задовольняють однорідним граничним умова(3*) і (4*), будемо шукати у вигляді добутку

$$u(x,t) = K(x)\cdot T(t)$$

і відокремлюючи змінні, отримаємо для $K(x)$ і $T(t)$ звичайні однорідні лінійні диференціальні рівняння:

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0\,, \tag{5*}$$

$$K''(x) + \lambda^2 K(x) = 0\,, \tag{6*}$$

з граничними умовами для другого рівняння:

$$K'(0)=0,\qquad K'(l)=0 \tag{7*}$$

Розв'язуючі рівняння (6*) з умовами (7*), знаходимо власні функції задачі:

$$K_n(x)=B_n\cos\lambda_n x \tag{8*}$$

де власні числа

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l}\qquad n=0,\pm1,\pm2,...$$

Від'ємні значення n дають ті ж самі власні функції, що і додатні, тому їх можна вилучити з розгляду. Однак, на відміну від першої граничної задачі, при $n=0$ ми отримаємо нетривіальну власну функцію $K_0(x)=B_0$. Очевидно, система функцій $K_n(x),\quad n=0,1,2,...$ ортогональна на проміжку $[0;l]$. Нормуючі її, маємо:

$$B_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{l}}, & n=0,\\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{l}}, & n=1,2,...\end{cases}$$

Розв'язуючі рівняння (5*), отримаємо розв'язок поставленої задачі у вигляді:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-a^2\lambda^2 t}K_n(x) \tag{9*}$$

де

$$c_n=\int_0^l f(x)K_n(x)dx \tag{10*}$$

Знаючи власні функції $K_n(x)$ однорідної задачі, легко можна розв'язати неоднорідну задачу (3.3.18) – (3.3.21).

Справді, уявивши шуканий розв'язок у вигляді ряду Фур'є за власними функціями

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)K_n(x) \tag{3.3.22}$$

і виконуючі ті самі міркування, що і для першої граничної задачі, отримаємо для $u_n(t)$ вираз:

$$u_n(t)=f_n\cdot e^{-\lambda_n{}^2 t}+a^2B_n\int_0^t e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau)}\left[\varphi(\tau)-(-1)^n\phi(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-a^2\lambda_n{}^2(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau \tag{3.3.23}$$

де

$$f_n=\int_0^l f(x)K_n(x)dx\,,\qquad F_n(t)=\int_0^l F(x,t)K_n(x)dx$$

Підставляючи (3.3.23) у (3.3.22), враховуючи (8*) і змінюючи порядок підсумування і інтегрування, будемо мати:

$$u(x,t)=\int_0^l f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}B_n{}^2e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}\xi d\xi-$$

$$-a^2\int_0^t\varphi(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}B_n{}^2e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\cos\frac{n\pi}{l}xd\tau+$$

$$+a^2\int_0^t\varphi(\tau)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_n{}^2e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\cdot xd\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l F(\xi,\tau)\sum_{n=0}^{\infty}B_n{}^2e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\cdot\cos\frac{n\pi}{l}\xi d\xi \tag{3.3.24}$$

Так як

$$B_n = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{l}}, & n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{l}}, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

то врахувавши (3.3.12), (3.3.16), отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^2 e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-\tau)} \cos\frac{n\pi}{l}x = \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \tag{3.25}$$

Використовуючи цю формулу, а також тотожності

$$\cos\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}\xi = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-\xi) + \cos\frac{n\pi}{l}(x+\xi)\right],$$

$$(-1)^n \cos\frac{n\pi}{l}x = \cos\frac{n\pi}{l}(x-l)$$

розв’язок (3.3.24) можна перетворити до вигляду

$$u(x,t) = \int_0^l \frac{f(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi -$$

$$-\int_0^t \frac{a\varphi(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \int_0^t \frac{a\phi(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi \tag{3.3.26}$$

Аналізуючи цей вираз, можна, як і в першій граничній задачі, показати, що якщо функції $F(x,t)$, $f(x)$, $\varphi(t)$, $\phi(t)$ неперервні і, крім того, $F(x,t)$ задовольняє умові Гьольдера за просторовою змінною x, то функція (3.3.26) є розв’язком другої граничної задачі.

3^0. Загальна гранична задача.

Поставимо задачу: ***Знайти розв'язок рівняння***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \qquad \textbf{\textit{(3.3.27)}}$$

у області $D\,(0 < x < l, \quad t > 0)$,

який задовольняє початковій умові

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \qquad \textbf{\textit{(3.3.28)}}$$

і граничними умовами загального виду

$$\left.\begin{aligned} \left.\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u(x,t)\right)\right|_{x=0} &= \varphi(t), \\ \left.\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u(x,t)\right)\right|_{x=l} &= \phi(t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(3.3.29)}}$$

Для того щоб застосувати метод Фур'є необхідно знайти власні функції загальної однорідної граничної задачі, тобто

Знайти розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1^0)$$

у області $D\,(0 < x < l, \quad t > 0)$

з початковою умовою

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \qquad (2^0)$$

і граничними умовами загального виду:

$$\left.\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u(x,t)\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad (3^0)$$

$$\left.\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u(x,t)\right)\right|_{x=l} = 0 \qquad (4^0)$$

Будемо вважати, що α_1 і α_2, а також β_1 і β_2 не обертаються у нуль одночасно, так як ці випадки відповідають першій або другій граничній задачі, які вже розглянуті.

Для розв'язання задачі використаємо метод Фур'є. Представимо розв'язок , який треба знайти, у вигляді добутку

$$u(x,t) = K(x)T(t)$$

і розподіляючи змінні, одержимо два рівняння:

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \qquad (5^0)$$

$$K''(x) + \lambda^2 K(x) = 0 \qquad (6^0)$$

з граничними умовами для рівняння (6^0):

$$\alpha_1 K'(0) + \beta_1 K(0) = 0 \qquad (7^0)$$

$$\alpha_2 K'(l) + \beta_2 K(l) = 0 \qquad (8^0)$$

Загальний розв'язок рівняння (6^0) має вид:

$$K(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad (9^0)$$

Задовольняючи граничним умовам (7^0) і (8^0), одержимо наступну систему рівнянь відносно коефіцієнтів A і B :

$$\begin{cases} \beta_1 A + \alpha_1 \lambda B = 0, \\ -(\alpha_2\lambda\sin\lambda l - \beta_2\cos\lambda l)A + (\alpha_2\lambda\cos\lambda l + \beta_2\sin\lambda l)B = 0 \end{cases} \qquad (9^0)$$

Для того, щоб ця однорідна система відносно коефіцієнтів A і B мала не нульовий розв'язок, необхідно і достатньо щоб детермінант системи Δ дорівнювався нулю (теорема Кронекера –Капеллі), тобто:

$$\Delta = (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\lambda\cos\lambda l + (\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\lambda^2)\sin\lambda l = 0 \quad (10^0)$$

За допомогою рівняння (10^0), яке називається характеристичним, визначаються власні значення λ .

Очевидно, значення $\lambda = 0$ є коренем рівняння (10^0). Отже так як β_1 і β_2 не обертаються у нуль одночасно, тоді з системи (9^0) при $\lambda = 0$ одержимо, що $A = 0$. Отже функція $K(x)$, яка відповідає значенню $\lambda = 0$, є тотожній нуль, таким чином, значення $\lambda = 0$ не є власним числом.

Дедалі, з рівняння (10^0) видно, що якщо $\lambda = \lambda'$ є корінь цього рівняння , тоді $\lambda = -\lambda'$ також буде його коренем. Однак, власні функції, які відповідають цим кореням, будуть лінійно залежними. В цьому легко впевнитись, якщо взяти одне з рівнянь системи (9^0) (незалежно яке, так як вони лінійно залежні при умові (10^0)) і виразити один з коефіцієнтів A або B через другий і підставити у вираз для $K(x)$.

Таким чином, достатньо обмежитись розглядом лише строго додатних коренів рівняння (10^0).

Дослідимо рівняння (10^0). Можуть мати місце два випадки.

1^0. $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 0$. В цьому випадку рівняння (10^0) має наступні дійсні додатні корені:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11^0}$$

2^0. $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \neq 0$. В цьому випадку рівняння (10^0) можна перетворити до виду:

$$\cot\mu = \frac{\gamma_1}{\mu} + \gamma_2\mu, \tag{12^0}$$

де

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1\beta_2 l}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)l}, \quad \mu = \lambda l$$

Графічний розв'язок рівняння (12^0) показує, що воно має незчисленну множену коренів $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$

Вказаний процес знаходження коренів, які одержуються, як точки перетину графіків двох функцій:

$$y = \cot\mu \qquad \text{і} \qquad y = \frac{\gamma_1}{\mu} + \gamma_2\mu.$$

Отже, рівняння (10^0) має незчисленну множину дійсних додатних коренів λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, які визначаються за формулою (11^0), якщо $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 0$ і за формулою $\lambda_n = \dfrac{\mu_n}{l}$, якщо $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \neq 0$.

Власні функції, які відповідають цім власним числам, мають вид:

$$K_n(x) = A_n\cos\lambda_n x + B_n\sin\lambda_n x \tag{13^0}$$

причому A_n і B_n задовольняють системі (9^0), точніше, одному з рівнянь цієї системи, наприклад, першому:

$$\beta_1 A_n + \alpha_1\lambda_n B_n = 0 \tag{14^0}$$

Покажемо, що власні функції $K_n(x)$, які відповідають різним власним значенням, ортогональні на відрізку $[0,l]$. Дійсно, функції $K_n(x)$ і $K_m(x)$, $n \neq m$, задовольняють диференціальним рівнянням

$$K_n''(x) + \lambda_n^2 K_n(x) = 0 \qquad (15^0)$$

$$K_m''(x) + \lambda_m^2 K_m(x) = 0 \qquad (16^0)$$

і граничним умовам

$$\begin{cases} \alpha_1 K_n'(0) + \beta_1 K_n(0) = 0 \\ \alpha_2 K_n'(l) + \beta_2 K_n(l) = 0 \end{cases} \qquad (17^0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 K_m'(0) + \beta_1 K_m(0) = 0 \\ \alpha_2 K_m'(l) + \beta_2 K_m(l) = 0 \end{cases} \qquad (18^0)$$

Помноживши обидві частини рівняння (15^0) на $K_m(x)$ а рівняння (16^0) – на $K_n(x)$ і віднімаючи одне від другого, а також інтегруючи у границях від 0 до l, одержимо:

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)\int_0^l K_n(x)K_m(x)dx =$$

$$= \int_0^l \left[K_m''(x)K_n(x) - K_n''(x)K_m(x) \right] dx =$$

$$= \int_0^l \left[K_m'(x)K_n(x) - K_n'(x)K_m(x) \right]' dx =$$

$$= \left[K_m'(x)K_n(x) \right]\Big|_0^l - \left[K_n'(x)K_m(x) \right]\Big|_0^l = 0$$

враховуючи умови (17^0) і (18^0). Так як $\lambda_n \neq \lambda_m$, то звідси випливає, що

$$\int_0^l K_n(x)K_m(x)dx = 0, \quad m \neq n \qquad (19^0)$$

Очевидно, що

$$\int_0^l K_n^2(x)dx = \int_0^l \left[A_n \cos\lambda_n x + B_n \sin\lambda_n x \right]^2 dx = \|K_n\|^2 \neq 0$$

Коефіцієнти A_n і B_n пов'язані між собою лише одним рівнянням (14^0), тому один з цих коефіцієнтів залишається довільним. Виберемо його так, щоб функції $K_n(x)$ були нормовані, тобто

$$\int_0^l K_n^2(x)dx = 1$$

Повернемося тепер до рівняння (5^0). При $\lambda = \lambda_n$ його загальний розв'язок має вид:

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}$$

Звідси легко зробити висновок , що ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} K_n(x) \qquad (20^0)$$

Формально задовольняє рівнянню (1^0) і граничним умовам (3^0) і (4^0). Як і у попередніх випадках, постійні c_n визначаються задовольняючи початковій умові (2^0):

$$c_n = \int_0^l f(x)K_n(x)dx \qquad (21^0)$$

Якщо система власних функцій $K_n(x)$ не нормована, тоді c_n визначається за формулою:

$$c_n = \frac{1}{\|K_n\|^2}\int_0^l f(x)K_n(x)dx \qquad (22^0)$$

Можна показати, що формально знайдений розв'язок (20^0) дійсно є розв'язок поставленої задачі при попередніх обмеженнях відносно функції $f(x)$.

Розглянемо тепер загальну неоднорідну граничну задачу (3.3.27) - (3.3.29)

Розв'язок поставленої задачі будемо шукати, як і у попередніх випадках, у вигляді ряду за власними функціями (13^0):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)K_n(x) \qquad (3.3.30)$$

Для визначення коефіцієнтів Фур'є $u_n(t)$ помножимо обидві частини рівняння (3.3.27) і (3.3.28) на власну функцію $K_n(x)$ і проінтегруємо за змінною x у межах від 0 до l. Тоді одержимо:

$$\frac{du_n(t)}{dt} = a^2 \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} K_n(x)dx + F_n(t) \qquad (3.3.31)$$

де

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t)K_n(x)dx \qquad (3.3.32)$$

$$F_n(t) = \int_0^l F(x,t)K_n(x)dx \qquad (3.3.32)$$

Інтегруючи двічі за частинами перший доданок у правій частині (3.3.31), будемо мати:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} K_n(x)dx = \left[K_n(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right]\Bigg|_0^l - \left[K_n^{'}(x)\cdot u(x,t) \right]\Big|_0^l$$

$$+\int_0^l u(x,t)K_n^{''}(x)dx$$

Приймаючи до уваги співвідношення (15^0)одержимо, що

$$\int_0^l u(x,t)K_n^{''}(x)dx = -\lambda_n^2 u_n(x,t)$$

Отже

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} K_n(x)dx = \Phi_n(t) - \lambda_n^2 u_n(t) \qquad (3.3.34)$$

де

$$\Phi_n(t) = K_n(l)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} - K_n^{'}(l)u(x,t)\big|_{x=l} -$$

$$-K_n(0)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} + K_n^{'}(0)u(x,t)\big|_{x=0}$$

Приймаючи до уваги граничні умови (3.3.29), а також співвідношення системи (17^0) одержимо:

$$\Phi_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(t)-\frac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(t), & \alpha_1\neq 0, \quad \alpha_2\neq 0,\\ -\frac{1}{\beta_2}K_n^{'}(l)\phi(t)-\frac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(t), & \alpha_1\neq 0, \quad \beta_2\neq 0,\\ \frac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(t)+\frac{1}{\beta_1}K_n^{'}(0)\varphi(t), & \beta_1\neq 0, \quad \alpha_2\neq 0,\\ -\frac{1}{\beta_2}K_n^{'}(l)\phi(t)+\frac{1}{\beta_1}K_n^{'}(0)\varphi(t), & \beta_1\neq 0, \quad \beta_2\neq 0.\end{cases}$$

(3.3.35)

Підставляючи (3.3.34) у (3.3.31), одержимо звичайне лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно $u_n(t)$:

$$\frac{du_n(t)}{dt}=-a^2\lambda_n^2u_n(t)+a^2\Phi_n(t)+F_n(t) \qquad (3.36)$$

Покладаючи у формулі (3.3.32) $t=0$ знаходимо початкову умову

$$u_n(0)=\int_0^l f(x)K_n(x)dx \qquad (3.3.37)$$

Застосовуючи метод варіації довільної сталої і використовуючи початкову умову розв'язок рівняння (3.3.36) має вид:

$$u_n(t)=u_n(0)e^{-a^2\lambda_n^2t}+\int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\left[a^2\Phi_n(\tau)+F_n(\tau)\right]d\tau$$

(3.3.38)

Таким чином, розв'язок поставленої задачі дається формулою (3.3.30), де функція $u_n(t)$ визначається виразом (3.3.38).

§ 4. Обґрунтування застосованого метода Фур'є.

Нехай $\alpha_1\neq 0$ і $\alpha_2\neq 0$. Позначимо

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-\alpha\geq 0, \qquad \frac{\beta_2}{\alpha_2}=\beta\geq 0$$

тоді умови (3^0) і (4^0) можна записати у наступному вигляді

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\alpha u(x,t)\right)\Bigg|_{x=0}=0 \qquad (1^*)$$

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta u(x,t)\right)\Bigg|_{x=l}=0 \qquad (2^*)$$

Тоді у розв'язку (20^0) $K_n(x)$ та c_n можна записати у вигляді:

$$K_n(x)=\frac{\omega_n(x)}{\int\limits_o^l[\omega_n(x)]^2\,dx} \qquad (3^*)$$

$$c_n=\frac{\int\limits_0^l f(x)\omega_n(x)dx}{\int\limits_o^l[\omega_n(x)]^2\,dx} \qquad (4^*)$$

де

$$\omega_n(x)=\lambda_n\cos\lambda_n x+\alpha\sin\lambda_n x \qquad (5^*)$$

а λ_n знаходиться з трансцендентного рівняння

$$(\alpha+\beta)\lambda\cos\lambda l+(\alpha\beta-\lambda^2)\sin\lambda l=0 \qquad (6^*)$$

Позначимо через

$$\Phi(\lambda)=(\alpha+\beta)\lambda\cos\lambda l+(\alpha\beta-\lambda^2)\sin\lambda l \qquad (7^*)$$

Тоді легко впевнитись, що

$$\Phi'(\lambda_n)=-\lambda_n\sin\lambda_n l\left[\frac{(\alpha+\beta)l}{\sin^2\lambda_n l}+\frac{\alpha\beta}{\lambda_n^2}+1\right]\neq 0 \qquad (8^*)$$

Розглянемо функцію

$$\omega_n^*(x)=\lambda_n\cos\lambda_n(l-x)+\beta\sin\lambda_n(l-x) \qquad (9^*)$$

яка відрізняється від $\omega_n(x)$ постійним множником.

Тоді коефіцієнти c_n можна записати у наступному вигляді:

$$c_n = \frac{\int\limits_0^l f(x)\omega_n^*(x)dx}{\int\limits_o^l \omega_n(x)\omega_n^*(x)dx} \tag{10*}$$

Безпосередньо інтегруючи одержимо, що

$$\int\limits_o^l \omega_n(x)\omega_n^*(x)dx = -\frac{1}{2}\Phi'(\lambda_n) \tag{11*}$$

і коефіцієнти $\tilde{n}_n$ будуть мати вигляд

$$c_n = -\frac{2}{\Phi'(\lambda_n)}\int\limits_0^l f(x)\omega_n^*(x)dx \tag{12*}$$

Отже, розв'язок (20^0) може бути представлений рядом

$$u(x,t) = \int\limits_0^l f(x')\theta(x',x,t)dx' \tag{13*}$$

де

$$\theta(x',x,t) = -2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\,\frac{\omega_n^*(x')\omega_n(x)}{\Phi'(\lambda_n)} \tag{14*}$$

Суму перших m членів ряду, який стоїть у правій частині рівності (14*) можна розглядати, як суму лишків функції

$$F(z) = e^{-a^2z^2t}\,\frac{\omega(z,x)\omega^*(z,x')}{\Phi(z)} \tag{15*}$$

де

$$\omega(z,x) = z\cos zx + \alpha\sin zx \tag{16*}$$

$$\omega^*(z,x) = z\cos z(l-x) + \beta\sin z(l-x) \tag{17*}$$

відносно полюсів, які лежать у середині прямокутника $ABCD$.

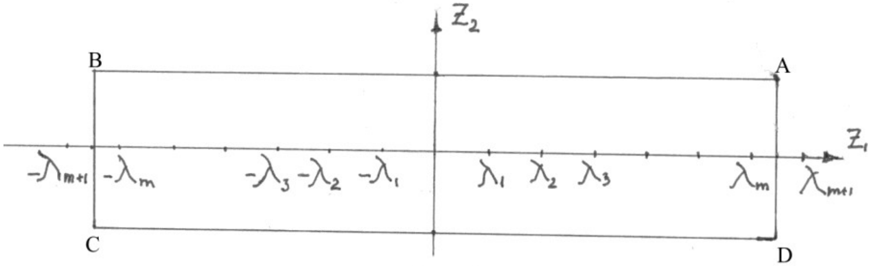

Рис. 6

Ця сума може бути виражена інтегралом, який береться за контуром $ABCDA$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{AE} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\,\frac{\overset{*}{\omega}_n(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\lambda_n)} \quad (18^*)$$

Приймемо, що абсциси AD і BC дорівнюються $\pm\frac{2m-1}{2}\pi$, тоді величина $|F(z)|$ може бути зроблена достатньо малою на AD і BC при достатньо великих m. Приймаючи до уваги, що функція $F(z)$ непарна, при $m\to\infty$ будемо мати:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{+\infty+ci}^{-\infty+ci} F(z)dz + \int_{-\infty-ci}^{+\infty+ci} F(z)dz\right] = -\frac{1}{\pi i}\int_{ci-\infty}^{ci+\infty} F(z)dz =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\,\frac{\overset{*}{\omega}_n(x')\,\omega_n(x)}{\Phi'(\lambda_n)} \qquad (19^*)$$

Враховуючи вираз (19*) функцію $\theta(x',x,t)$ можна записати у формі інтеграла

$$\theta(x',x,t) = \frac{1}{\pi i}\int_{ci-\infty}^{ci+\infty} F(z)dz \qquad (20^*)$$

Перетворимо інтеграл у рівності (20*). Легко перевірити, що функції $\omega(z,x)$, $\omega^*(z,x)$ і $\Phi(z)$ можна привести до виду:

$$\omega(z,x) = \frac{1}{2}(z-\alpha i)e^{xzi} + \frac{1}{2}(z+\alpha i)e^{-xzi} \qquad (21^*)$$

$$\omega^*(z,x)=\frac{1}{2}(z-\beta i)e^{(l-x)zi}+\frac{1}{2}(z+\beta i)e^{-(l-x)zi} \qquad (22^*)$$

$$\Phi(z)=\frac{i}{2}\Big[(z-\alpha i)(z-\beta i)e^{zli}-(z+\alpha i)(z+\beta i)e^{-zli}\Big] \qquad (23^*)$$

Функцію $\Phi^{-1}(z)$ розкладаємо у ряд:

$$\frac{1}{\Phi(z)}=2i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha i)^k(z-\beta i)^k}{(z+\alpha i)^{k+1}(z+\beta i)^{k+1}}e^{(2k+1)zli} \qquad (24^*)$$

Введемо позначення

$$\mathrm{H}_{k,m}(z)=\frac{(z-\alpha i)^k(z-\beta i)^m}{(z+\alpha i)^k(z+\beta i)^m} \qquad (25^*)$$

Тоді на основі рівностей (21*), (22*) і (24*), а також приймаючи до уваги очевидну рівність

$$\mathrm{H}_{k,m}(-z)=\mathrm{H}_{-k,-m}(z)\,,$$

функція $\theta(x',x,t)$ представляється розкладом:

$$\theta(x',x,t)=\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{ci-\infty}^{ci+\infty}\mathrm{H}_{k,k}(z)e^{-a^2z^2t+(x'-x+2kl)zi}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\int_{ci-\infty}^{ci+\infty}\mathrm{H}_{k+1,k}(z)e^{-a^2z^2t+(x'+x+2kl)zi}dz\right\} \qquad (26^*)$$

Або покладаючи $c=0$ одержимо

$$\theta(x',x,t)=\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_{k,k}(z)e^{-a^2z^2t+(x'-x+2kl)zi}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_{k+1,k}(z)e^{-a^2z^2t+(x'+x+2kl)zi}dz\right\} \qquad (27^*)$$

Введемо нову змінну

$$z=\frac{\tau}{a\sqrt{t}}+\frac{n_{k,m}}{2a^2t}i\text{, де } n_{k,m}=\begin{cases}x'-x+2kl, & k=m\\ x'+x+2(k-1)l & k=m-1\end{cases} \qquad (28^*)$$

інтеграли у рівності (27*) приводяться до виду

$$\theta(x',x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x'+2kl)^2}{4a^2t}}F_{k,k}(x,x',t;\alpha,\beta)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x'+2(k+1)l)^2}{4a^2t}}F_{k+1,k}(x,x',t;\alpha,\beta)\right\} \qquad (29^*)$$

де

$$\left|F_{k,n}(x,x',t;\alpha,\beta)\right|\le 1,\; F_{0,0}=1 \qquad (30^*)$$

Права частина (27*) представляє собою суму абсолютно і рівномірно збіжних рядів, отже їх можна інтегрувати і диференціювати за членами. Легко показати, що якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам Гьольдера, то функція (20^0) представляє собою розв'язок загальної однорідної граничної задачі.

Частина IV. Двовимірні задачі теплопровідності

§ 1. Задача Коші

Постановка задачі: ***Розв'язати диференціальне рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x,y,t), \qquad \textbf{\textit{(4.1.1)}}$$

яке задане у області $D\,(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, t > 0)$ ***,***
з початковою умовою

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = f(x,y) \qquad \textbf{\textit{(4.1.2)}}$$

Отже, треба знайти розв'язок задачі (4.1.1) - (4.1.2), який обертається у нуль на нескінченості.

Застосовуючи загальне перетворення Фур'є за змінними x і y, одержимо звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку відносно зображення функції $u(x,y,t)$

$$\frac{du(s_1,s_2,t)}{dt} = -a^2(s_1^2+s_2^2)u(s_1,s_2,t) + F(s_1,s_2,t) \qquad (4.1.3)$$

розв'язок якого, задовольняє початковій умові

$$u(s_1,s_2,t)\Big|_{t=0} = f(s_1,s_2) \qquad (4.1.4)$$

де функція

$$u(s_1,s_2,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,t)e^{is_2y}dy\right)e^{is_1x}dx =$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,t)e^{i(s_1x+s_2y)}dxdy$$

є загальним перетворенням Фур'є функції $u(x,y,t)$, а $F(s_1,s_2,t)$ і $f(s_1,s_2)$ є перетворення Фур'є функцій $F(x,y,t)$ і $f(x,y)$.

Розв'язуючи звичайне диференціальне рівняння (4.1.3) методом варіації довільної сталої і задовольняючи початковій умові (4.1.4) одержимо розв'язок поставленої задачі у зображеннях:

$$u(s_1,s_2,t)=e^{-a^2\left(s_1^2+s_2^2\right)t}\cdot f(s_1,s_2)+\int_0^t e^{-a^2\left(s_1^2+s_2^2\right)\tau}\cdot F(s_1,s_2,\tau)d\tau \quad (4.1.5)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є послідовно за змінними s_1 і s_2, а також використовуючи формулу згортки будемо мати :

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\eta)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta+$$

$$+\int_o^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\xi,\eta,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\eta \qquad (4.1.6)$$

Якщо функції $f(x,y)$ і $F(x,y,t)$ неперервні і обмеженні всюди за всіма аргументами, і, крім того, функція $F(x,y,t)$ задовольняє умові Гьольдера за змінними x,y, то, як і у одномірному випадку, можна показати, що формально знайдений розв'язок (4.1.6) дійсно задовольняє рівнянню (4.1.1) і початковій умові ((4.1.2).

§ 2. Задачі теплопровідності для півплощини

1⁰. Перша гранична задача

Постановка задачі:

Знайти в області $D\,(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,t>0)$

розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t) \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=f(x,y) \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

і граничною умовою

$$u(x,y,t)\big|_{x=0}=\varphi(y,t) \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

Застосуємо загальне перетворення Фур'є за змінною y до системи (4.21) – (4.2.3). Тоді одержимо:

$$\frac{\partial u(x,s,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,s,t)}{\partial x^2}-a^2s^2u(x,s,t)+F(x,s,t) \qquad (4.2.4)$$

$$u(x,s,t)\Big|_{t=0}=f(x,s) \qquad (4.2.5)$$

$$u(x,s,t)\Big|_{x=0}=\varphi(s,t) \qquad (4.2.6)$$

де

$$u(x,s,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{isy}u(x,y,t)dy \qquad (4.2.7)$$

Після заміни

$$u(x,s,t)=e^{-a^2s^2t}\cdot\tilde{\ } \qquad (4.2.8)$$

система (4.2.4) – (4.2.6) перетворюється у систему відносно нової шуканої функції $\tilde{\ }$:

$$\frac{\partial\tilde{\ }}{\partial t}=a\quad\frac{\tilde{\ }}{\partial x^2}+e\qquad F(x,s,t) \qquad (4.2.9)$$

$$\tilde{\ }\qquad\Big|_{t=0}=f(x,s) \qquad (4.2.10)$$

$$\tilde{\ }\qquad\Big|_{x=0}=e^{a^2s^2t}\varphi(s,t) \qquad (4.2.11)$$

Записуючи розв’язок одномірної задачі (4.2.9) – (4.2.11) за формулою (3.2.6)і враховуючи (4.2.8), будемо мати:

$$u(x,s,t)=\int\limits_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi(s,\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty e^{-a^2s^2(t-\tau)}\cdot\frac{F(x,s,t)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-a^2s^2t}\cdot\frac{f(x,s)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур’є і використовуючи формулу згортки, одержимо:

$$u(x,y,t)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\eta,\tau)d\eta\ +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4a^2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]F(\xi,\eta,\tau)d\eta$$

$$+\int_0^{\infty} d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4a^2\pi t}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}}\right]f(\xi,\eta)d\eta \qquad (4.2.12)$$

Такі ж самі умови, які накладаються на функції $F(x,y,t)$ і $f(x,y)$, що і у попередньому параграфі, а також умови неперервності і обмеженості граничної функції $\varphi(y,t)$ дають, як і раніше, можливість зробити висновок, що формально знайдена функція (4.2.12) дійсно є розв’язком задачі (4.2.1) – (4.2.3)

2^0. Третя гранична задача

Постановка задачі:
Знайти розв’язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.2.13)}}$$

в області $D\,(0<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,t>0)$***,***
який задовольняє початковій умові

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=f(x,y) \qquad \textbf{\textit{(4.2.14)}}$$

і граничній умові третього роду:

$$\left[\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}-hu(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\varphi(y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.2.15)}}$$

Застосовуючи перетворення Фур’є (4.2.7) за змінною y і використовуючи підстановку (4.2.8) одержимо наступну систему:

$$\frac{\partial \tilde{}}{\partial t}=a\ \frac{\tilde{}}{\partial x^2}+e\qquad F(x,s,t) \qquad (4.2.16)$$

$$\tilde{}\ \Big|_{t=0}=f(x,s) \qquad (4.2.17)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{}}{\partial x} - h\tilde{}\quad\right]\Bigg|_{x=0} = e^{a^2 s^2 t}\varphi(s,t) \qquad (4.2.18)$$

Записуючи розв'язок одномірної задачі (4.2.16) – (4.2.18) за формулою (3.2.23) і враховуючи підстановку (4.2.8) будемо мати:

$$u(x,s,t) = -2a^2\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}g(x,(t-\tau))\varphi(s,\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty e^{-a^2s^2(t-\tau)}\left[g(x-\xi,t-\tau)+g(x+\xi,t-\tau)\right]F(\xi,s,\tau)d\xi +$$

$$+\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\left[g(x-\xi,t)+g(x+\xi,t)\right]f(\xi,s,)d\xi -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty \mathrm{H}(x+\xi,t-\tau)e^{-a^2s^2(t-\tau)}F(\xi,s,\tau)d\xi -$$

$$-\int_0^\infty \mathrm{H}(x+\xi,t)e^{-a^2s^2t}f(\xi,s)d\xi +$$

$$+a^2\int_0^t \mathrm{H}(x,t-\tau)e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi(s,\tau)d\tau \qquad (4.2.19)$$

тут

$$g(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$\mathrm{H}(x,t) = he^{hx+a^2h^2t}erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)$$

Застосовуючи до виразу (4.2.19) обернене перетворення Фур'є і використовуючи формулу згортки, знайдемо шуканий розв'язок у вигляді:

$$u(x,y,t) = -2a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}G_2(x,y-\eta,t-\tau)\varphi(\eta,\tau)d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_2(x-\xi, y-\eta, t-\tau) + G_2(x+\xi, y-\eta, t-\tau)\right] F(\xi,\eta,\tau) d\eta +$$

$$+\int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_2(x-\xi, y-\eta, t) + G_2(x+\xi, y-\eta, t)\right] f(\xi,\eta) d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(x+\xi, y-\eta, t-\tau) F(\xi,\eta,\tau) d\eta -$$

$$-\int_0^\infty d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(x+\xi, y-\eta, t) f(\xi,\eta) d\eta +$$

$$+a^2 \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(x, y-\eta, t-\tau) e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} \varphi(\eta,\tau) d\eta \qquad (4.2.20)$$

де

$$G_2(x,y,t) = \frac{1}{4a^2 \pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}},$$

$$R_2(x,y,t) = h e^{hx + a^2 h^2 t - \frac{y^2}{4a^2 t}} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$$

Розв’язок другої граничної задачі можна одержати з формули (4.2.20), якщо покласти $h = 0$, тобто $R_2(x,y,t) \equiv 0$.

§ 3. Задачі теплопровідності для смуги

Поставка задачі:

Знайти розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.3.1)}}$$

у смузі $D\,(0 < x < l, -\infty < y < +\infty, t > 0)$

з початковою умовою

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = f(x,y) \qquad \textbf{\textit{(4.3.2)}}$$

і граничними умовами третього роду:

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \beta_1 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=0} = \varphi(y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.3.3)}}$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \beta_2 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=l} = \phi(y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.3.4)}}$$

Застосуємо перетворення Фур’є за змінною y і використовуючи підстановку (4.2.8), будемо мати:

$$\frac{\partial \tilde{}}{\partial t} = a \frac{\tilde{}}{\partial x^2} + e \quad F(x,s,t) \qquad (4.3.5)$$

$$\tilde{} \quad \Big|_{t=0} = f(x,s) \qquad (4.3.6)$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \tilde{}}{\partial x} + \beta_1 \tilde{} \quad \right]\Bigg|_{x=0} = e^{a^2 s^2 t} \varphi(s,t) \qquad (4.3.7)$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial \tilde{}}{\partial x} + \beta_2 \tilde{} \quad \right]\Bigg|_{x=l} = e^{a^2 s^2 t} \phi(s,t) \qquad (4.3.8)$$

Розглянемо наступні два випадки, які більш за всього зустрічаються.

1^0. Перша гранична задача для смуги

В цьому випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ і розв’язок задачі (4.3.5) – (4.3.8) дається формулою (3.2.17)в якій замість $f(\xi),\ \varphi(\tau),\ \phi(\tau),\ F(\xi,\tau)$ слід записати відповідно $f(\xi,s),\ e^{a^2 s^2 \tau}\varphi(s,\tau),\ e^{a^2 s^2 \tau}\phi(s,\tau),\ e^{a^2 s^2 \tau}F(\xi,s,\tau)$. Враховуючи підстановку (3.2.8) будемо мати

$$u(x,s,t) = \int_0^l \frac{e^{-a^2 s^2 t} f(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi +$$

$$+ \int_0^t e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} \varphi(s,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2 (t-\tau)}} d\tau -$$

$$-\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\phi(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}F(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

(4.3.9)

Застосовуємо обернене перетворення Фур'є. Приймаючи до уваги, що оригіналом зображення $e^{-a^2s^2t}$ є функція $\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}$ і використовуючи формулу згортки знайдемо оригінал функції (4.3.9):

$$u(x,y,t)=$$

$$=\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\eta,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta \qquad (4.3.10)$$

Як і у одномірному випадку, легко перевірити, що функція (4.3.10) задовольняє рівнянню теплопровідності (4.3.1), початковій умові (4.3.2) і граничним умовам першого роду:

$$u(x,y,t)\big|_{x=0}=\varphi(y,t),\qquad u(x,y,t)\big|_{x=l}=\phi(y,t),$$

якщо функції $f(x,y)$, $\varphi(y,t)$, $\phi(y,t)$, $F(x,y,t)$ неперервні та обмежені, і, крім того, функція $F(x,y,t)$ задовольняє умові Гьольдера за першими двома аргументами.

2^0. *Друга гранична задача для смуги*

Покладаємо: $\beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Тоді розв'язок другої граничної задачі (4.3.5) – (4.3.8) можна знайти за допомогою формули (3.3.26). Зображення $u(x,s,t)$ буде мати вигляд:

$$u(x,s,t) = \int_0^l \frac{e^{-a^2 s^2 t} f(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi \text{ -}$$

$$-\int_0^t \frac{a e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} \varphi(s,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+\int_0^t \frac{a e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} \phi(s,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^l \frac{e^{-a^2 s^2 (t-\tau)} F(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi$$

(4.3.11)

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, одержимо шуканий розв'язок:

$$u(x,y,t) = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi,\eta)}{4a^2 \pi t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2 (y-\eta)^2}{4a^2 t}} \right] d\eta$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\eta +$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - \right.$$

$$\left. -e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\eta \qquad (4.2.12)$$

Умови, які накладаються на функції $f(x,y)$, $\varphi(y,t)$, $\phi(y,t)$, $F(x,y,t)$ залишаються такі ж самі, що і у першій граничній задачі.

3⁰. Загальна гранична задача

Повернемося до загального випадку, коли α_1 і α_2, а також β_1 і β_2, не дорівнюються нулю одночасно.

Розв'язок одномірної задачі (4.3.5) – (4.3.8) можна знайти за формулою (3.3.38). Повертаючись до початкової шуканої функції $u(x,s,t)$ за формулою (4.2.8), будемо мати:

$$u(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s,t) K_n(x) \qquad (4.3.13)$$

де

$$u_n(s,t) = u_n(s,0) e^{-a^2(\lambda_n^2+s^2)t} + \int_0^t e^{-a^2(\lambda_n^2+s^2)(t-\tau)} \left[a^2\Phi(s,\tau) + F_n(s,\tau) \right] d\tau$$

$$u_n(s,0) = \int_0^l f(x,s) K_n(x) dx$$

$$\Phi_n(s,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(s,t)-\dfrac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(s,t),\ \text{ÿêù î}\ \ \alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0\\ -\dfrac{1}{\beta_2}K'_n(l)\phi(s,t)-\dfrac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(s,t),\ \text{ÿêù î}\ \ \alpha_1\neq 0,\beta_2\neq 0\\ \dfrac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(s,t)+\dfrac{1}{\beta_1}K'_n(0)\varphi(s,t),\ \text{ÿêù î}\ \ \alpha_2\neq 0,\beta_1\neq 0\\ -\dfrac{1}{\beta_2}K'_n(l)\phi(s,t)+\dfrac{1}{\beta_1}K'_n(0)\varphi(s,t),\ \text{ÿêù î}\ \ \beta_1\neq 0,\beta_2\neq 0\end{cases}$$

$$F_n(s,t)=\int_0^l F(x,s,t)K_n(x)dx \qquad (4.3.14)$$

де ядро $K_n(x)$ визначаться за формулою(3.9*)

Переходячи у виразі (4.3.13) до оригіналів, знайдемо шуканий розв'язок:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y,t)K_n(x) \qquad (4.3.15)$$

де

$$u_n(y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2t-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}u_n(\eta,0)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[a^2\Phi_n(\eta,\tau)+F(\eta,\tau)\right]d\eta \qquad (4.3.16)$$

Умови, які накладаються на функції $F(x,y,t),\ f(x,y)$, $\varphi(y,t)$, $\phi(y,t)$ такі ж самі, що і у попередніх випадках.

§ 4. Задача теплопровідності для напівсмуги

1^0. Перша змішана гранична задача

Поставка задачі:

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x, y, t) \qquad \textbf{\textit{(4.4.1)}}$$

у пів полосі $D\,(0 < x < l,\, 0 < y < +\infty,\, t > 0)$

з початковими умовами

$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = f(x, y) \qquad \textbf{\textit{(4.4.2)}}$$

і граничній умові третього роду:

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \beta_1 u(x, y, t)\right]\Bigg|_{x=0} = \varphi_1(y, t) \qquad \textbf{\textit{(4.4.3)}}$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \beta_2 u(x, y, t)\right]\Bigg|_{x=l} = \varphi_2(y, t) \qquad \textbf{\textit{(4.4.4)}}$$

та першою граничною умовою на її основі $y = 0$

$$u(x, y, t)\big|_{y=0} = \phi(x, t) \qquad \textbf{\textit{(4.4.5)}}$$

Застосуємо синус - перетворення Фур'є за змінною y.

$$u_s(x, s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x, y, t)\sin sy dy$$

У зображеннях система (4.4.1)-(4.4.5) прийме вигляд:

$$\frac{\partial u_s(x, s, t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_s(x, s, t)}{\partial x^2} - a^2 s^2 u_s(x, s, t) +$$

$$+a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}s\phi(x, t) + F_s(x, s, t) \qquad (4.4.1^*)$$

$$u_s(x, s, t)\big|_{t=0} = f_s(x, s) \qquad (4.4.2^*)$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u_s(x, s, t)}{\partial x} + \beta_1 u_s(x, s, t)\right]\Bigg|_{x=0} = \varphi_{1s}(s, t) \qquad (4.4.3^*)$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u_s(x,s,t)}{\partial x} + \beta_2 u_s(x,s,t)\right]\Bigg|_{x=l} = \varphi_{2s}(s,t) \qquad (4.4.4^*)$$

Розглянемо спочатку важливі окремі випадки.

а) *На бічних сторонах півсмуги перші граничні умови.*

Отже треба розв'язати задачу (4.4.1*)-(4.4.4*) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1$. З точністю до позначень вона співпадає з задачею (4.3.5)-(4.3.8) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1$. Її розв'язок задається формулою (4.3.9), у якій замість u, f, φ, ϕ, F треба писати відповідно $u_s, \ f_s, \ \varphi_{1s}, \ \varphi_{2s}, \quad a^2 s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(x,t) + F_s(x,s,t)$:

$$u_s(x,s,t) = \int_0^l \frac{e^{-a^2s^2t} f_s(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi +$$

$$\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi_{1s}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau -$$

$$-\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi_{2s}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}F_s(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}as\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \qquad (4.4.6)$$

Застосуємо обернене синус - перетворення Фур'є.

Очевидно

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\mathfrak{A}_s(\xi,s)\sin ysds =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\sin ys\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathfrak{A}(\xi,\eta)\sin\eta s d\eta ds=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathfrak{A}_s(\xi,\eta)\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\sin ys\sin\eta s d\eta ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathfrak{A}_s(\xi,\eta)\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\left[\cos(y-\eta)s-\cos(y+\eta)s\right]d\eta ds=$$

$$=\int_o^\infty \frac{\mathfrak{A}(\xi,\eta)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta\ .$$

Тут була використана формула

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2s^2t}\cos xsds=\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\ . \qquad (*)$$

диференціюючи вираз (*) за x, одержимо

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty se^{-a^2s^2t}\sin xsds=\frac{x}{2\sqrt{2}a^3t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \qquad (**)$$

Отже, оберненим синус-перетворенням Фур'є функції $e^{-a^2s^2t}\mathfrak{A}_s(\xi,s)$ буде функція

$$\int_o^\infty \frac{\mathfrak{A}(\xi,\eta)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta$$

Дедалі, застосовуючи формулу (**)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty se^{-a^2s^2(t-\tau)}\sin ysds=\frac{ye^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{2}a^3(t-\tau)^{3/2}}$$

Звідси впливає, що оберненим синус-перетворенням Фур'є для функції $u_s(x,s,t)$, яка визначається формулою (4.4.6) буде наступна функція:

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta)}{4a^2t}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty \varphi_1(\eta,\tau)\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty \varphi_2(\eta,\tau)\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta+\int_0^\tau d\tau\int_0^l \frac{y\phi(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \qquad (4.4.7)$$

б) На бічних сторонах півсмуги задані
другі граничні умови

Необхідно розв'язати задачу (4.4.1*) - (4.4.4*)при умові, що $\alpha_1=\alpha_2=1,\quad \beta_1=\beta_2=0.$ Її розв'язок дається формулою (4.3.11), де замість $u,\ f,\ \varphi,\ \phi,\ F$ треба писати відповідно

$$u_s,\quad f_s,\quad \varphi_{1s},\quad \varphi_{2s}\,,\quad a^2s^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(x,t)+F_s(x,s,t):$$

$$u_s(x,s,t)=\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2t}f_s(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi-$$

$$-\int_0^t \frac{ae^{-a^2s^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\varphi_{1s}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{ae^{-a^2s^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\varphi_{2s}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}a^2s^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}F_s(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

(4.4.8)

Застосовуючи обернене синус-перетворення Фур'є, знайдемо шуканий розв'язок:

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\varphi_1(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\varphi_2(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta+\int_0^\tau d\tau\int_0^l \frac{y\phi(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \qquad (4.4.9)$$

в) У загальному випадку, коли α_1 і α_2, а також β_1 і β_2 не дорівнюються нулю одночасно, задача (4.4.1*) – (4.4.4*) співпадає з задачею (4.3.5) – (4.3.8) при $u(x,s,t)=u_s(x,s,t)$,

$$F(x,s,t)=a^2s\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(x,t)+F_s(x,s,t), \qquad f(x,s)=f_s(x,s),$$

$$\varphi(s,t)=\varphi_{1s}(s,t),\quad \phi(s,t)=\varphi_{2s}(s,t), \quad (4.4.10)$$

має розв'язок, який визначається формулою (4.3.13), яка приймаючи до уваги (4.4.10), приймає наступний вид:

$$u_s(x,s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{ns}(s,t)K_n(x), \qquad (4.4.11)$$

де

$$u_{ns}(s,t)=u_{ns}(s,0)e^{-(\lambda^2+a^2)t}+$$

$$+\int_0^t e^{-(\lambda_n^2+a^2)(t-\tau)}\left[a^2\Phi_{ns}(s,\tau)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}as\phi_n(\tau)+F_{ns}(s,\tau)\right]d\tau,$$

$$u_{ns}(s,0)=\int_0^l f_sK_n(x)dx; \qquad \phi_n(t)=\int_0^l \phi(x,t)K_n(x)dx;$$

$$F_{ns}(s,t)=\int_0^l F_s(x,s,t)K_n(x)dx\ .$$

Функція $\Phi_{ns}(s,t)$ визначається за формулою (4.3.14), якщо у цій формулі замість $\varphi(s,t)$ та $\phi(s,t)$ записати відповідно $\varphi_{1s}(s,t)$ та $\varphi_{2s}(s,t)$; ядро $K_n(x)$ визначається за формулою

$$K_n(x)=A_n\cos\lambda_n x+B_n\sin\lambda_n x$$

а λ_n є корені рівняння

$$\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)\lambda\cos\lambda l+\left(\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2\lambda^2\right)\sin\lambda l=0$$

Переходячи у формулі (4.4.11) до оригіналів, одержимо шуканий розв'язок задачі у вигляді ряду:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y,t)K_n(x) \tag{4.4.12}$$

де

$$u_n(y,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_{ns}(s,t)\sin sy ds$$

2⁰. Друга змішана гранична задача

Поставка задачі:

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t) \tag{4.4.13}$$

у напівсмузі $D\,(0<x<l,0<y<+\infty,t>0)$

з початковими умовами

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=f(x,y) \tag{4.4.14}$$

загальними граничній умові на бокових сторонах напівсмуги:

$$\left[\alpha_1\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}+\beta_1 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\varphi_1(y,t) \tag{4.4.15}$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \beta_2 u(x,y,t)\right]\bigg|_{x=l} = \varphi_2(y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.4.16)}}$$

та другою граничною умовою на її основі $y=0$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = \phi(x,t) \qquad \textbf{\textit{(4.4.17)}}$$

Застосуємо косинус перетворення Фур'є за змінною y:

$$u_c(x,s,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_o^\infty u(x,y,t)\cos sydy$$

до системи (4.4.13) - (4.4.17). Тоді вона прийме вид:

$$\frac{\partial u_c(x,s,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_c(x,s,t)}{\partial x^2} - a^2 s^2 u_c(x,s,t) -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \phi(x,t) + F_c(x,s,t) \qquad (4.4.13^*)$$

$$u_c(x,s,t)\Big|_{t=0} = f_c(x,s) \qquad (4.4.14^*)$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u_c(x,s,t)}{\partial x} + \beta_1 u_c(x,s,t)\right]\bigg|_{x=0} = \varphi_{1c}(s,t) \qquad (4.4.15^*)$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u_c(x,s,t)}{\partial x} + \beta_2 u_c(x,s,t)\right]\bigg|_{x=l} = \varphi_{2c}(s,t) \qquad (4.4.16^*)$$

Розглянемо важливі різні випадки.

а) *На бічних сторонах напівсмуги перші граничні умови.*

В задачі (4.4.13*)-(4.4.16*) треба при цьому покласти: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1$. Вона зводиться до задачі (4.3.5)-(4.3.8), якщо змінити позначення: у якій замість

$$\left.\begin{aligned} &F(x,s,t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi(x,t) + F_c(x,s,t) \\ &u = u_s, \ f = f_s, \ \varphi = \varphi_{1s}, \ \varphi = \varphi_{2s} \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.17)$$

Розв’язок (4.3.9), враховуючи (4.4.17), має вид:

$$u_c(x,s,t)=\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2t} f_c(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi_{1c}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi_{2c}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}F_c(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}a\phi(\xi,\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \quad (4.4.18)$$

Застосуємо обернене косинус-перетворення Фур’є.
У відповідності з формулою (*) попередньої задачі, оригіналом зображення $e^{-a^2s^2t}$ є функція $\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}$. Використовуючи формулу згортки, одержимо:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2s^2t} f_c(\xi,s)\cos sy ds=$$

$$=\int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta \quad (4.4.19)$$

Аналогічні вирази одержимо і для решти зображень у формулі (4.4.18)

Таким чином, шуканий розв’язок запишеться у вигляді:

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty \varphi_1(\eta,\tau)\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty \varphi_2(\eta,\tau)\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta-\int_0^\tau d\tau\int_0^l \frac{\phi(\xi,\tau)}{2a^2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \qquad (4.4.20)$$

б) На бічних сторонах напівсмуги задані другі граничні умови

У задачі (4.4.13*) - (4.4.16*) $\alpha_1=\alpha_2=1,\quad \beta_1=\beta_2=0.$ При цьому розв’язок аналогічної задачі (4.3.5) - (4.3.8) дається формулою (4.3.11), де замість U, f, φ, ϕ, F треба писати відповідно

$$U_c, f_c, \varphi_{1c}, \varphi_{2c}, -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(x,t) + F_c(x,s,t):$$

$$u_c(x,s,t) = \int_0^l \frac{e^{-a^2s^2t} f_c(\xi,s)}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi -$$

$$-\int_0^t \frac{ae^{-a^2s^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\varphi_{1c}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau +$$

$$+\int_0^t \frac{ae^{-a^2s^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\varphi_{2c}(s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}a^2s^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}F_c(\xi,s,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

(4.4.21)

Як і у попередньому випадку обернене косинус-перетворення Фур'є знайдемо за допомогою формули (4.4.19) а шуканий розв'язок прийме наступний вигляд:

$$u(x,y,t) = \int_0^l d\xi\int_0^{\infty}\frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} + \right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}\frac{\varphi_1(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta +$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\varphi_2(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta-\int_0^\tau d\tau\int_0^l \frac{\phi(\xi,\tau)}{2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi \qquad (4.4.22)$$

в) Загальний випадок

У загальному випадку на сторонах напівсмуги задані загальні граничні умови. В цьому випадку α_1 і α_2, а також β_1 і β_2 не дорівнюються нулю одночасно.

Отже задача (4.4.13*) – (4.4.16*) знову співпадає з задачею (4.3.1*) – (4.3.4*) і приймаючи до уваги позначення (4.4.17) розв'язок (4.4.13*) набуває вигляд:

$$u_c(x,s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{nc}(s,t)K_n(x) \qquad (4.4.23)$$

де

$$u_{nc}(s,t)=u_{nc}(s,0)e^{-(\lambda_n^2+a^2)t}+$$

$$+\int_0^t e^{-(\lambda_n^2+a^2)(t-\tau)}\left[a^2\Phi_{nc}(s,\tau)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}a^2\phi_n(\tau)+F_{nc}(s,\tau)\right]d\tau,$$

$$u_{nc}(s,0)=\int_0^l f_c(x,s)K_n(x)dx;$$

$$\phi_n(t)=\int_0^l \phi(x,t)K_n(x)dx;$$

$$\Phi_n(s,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha_2}K_n(l)\varphi_{2c}(s,t)-\dfrac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi_{1c}(s,t),\ \textit{якщо}\ \alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0\\ -\dfrac{1}{\beta_2}K'_n(l)\varphi_{2l}(s,t)-\dfrac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi_{1c}(s,t),\ \textit{якщо}\ \alpha_1\neq 0,\ \beta_2\neq 0\\ \dfrac{1}{\alpha_2}K_n(l)\varphi_{2c}(s,t)+\dfrac{1}{\beta_1}K'_n(0)\varphi_{1c}(s,t),\ \textit{якщо}\ \alpha_2\neq 0,\ \beta_1\neq 0\\ -\dfrac{1}{\beta_2}K'_n(l)\varphi_{2c}(s,t)+\dfrac{1}{\beta_1}K'_n(0)\varphi_{1c}(s,t),\ \textit{якщо}\ \beta_1\neq 0,\ \beta_2\neq 0\end{cases}$$

$$F_{nc}(s,t)=\int_0^l F_c(x,s,t)K_n(x)dx\,. \tag{4.4.24}$$

Функція $\Phi_{nc}(s,t)$ визначається за формулою (4.3.14), якщо у цій формулі замість $\varphi(s,t)$ та $\phi(s,t)$ записати відповідно $\varphi_{1s}(s,t)$ та $\varphi_{2s}(s,t)$; ядро $K_n(x)$ визначається за формулою

$$K_n(x)=A_n\cos\lambda_n x+B_n\sin\lambda_n x$$

а λ_n є корені рівняння

$\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)\lambda\cos\lambda l+\left(\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2\lambda^2\right)\sin\lambda l=0$ переходячи у формулі (4.4.11) до оригіналів, одержимо шуканий розв'язок у вигляді ряду:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y,t)K_n(x) \tag{4.4.24}$$

де

$$u_n(y,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_{nc}(s,t)\cos syds$$

або

$$u_n(y,t)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2 t}}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]u_n(\eta,0)d\eta+$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\left[a^2\Phi_n(\eta,\tau)+a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\phi_n(\tau)+F_n(\eta,\tau)\right]d\eta$$

$$u_n(y,0)=\int_0^l f(x,y)K_n(x)dx$$

$$F_n(y,t)=\int_0^l F(x,y,t)K_n(x)dx$$

$\Phi_n(y,t)$ - є обернене косинус-перетворення Фур'є функції $\Phi_{nc}(y,t)$, тобто вона визначається правою частиною формули (4.4.24), де замість $\varphi_{1c}(s,t),\quad \varphi_{2c}(s,t)$ слід писати $\varphi_1(y,t),\quad \varphi_2(y,t)$.

§ 5. Загальна гранична задача теплопровідності для кола

1^0. Загальна однорідна гранична задача для кола

Для розв'язання задачі про розповсюдження температури у колі зручно використати циліндричну систему координат. Отже, рівняння теплопровідності для плоского випадку, коли температура u не залежить від z, у циліндричній системі координат має вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \tag{4.5.1}$$

Поставка задачі. ***Знайти розв'язок однорідного рівняння*** (4.5.1) ***у області*** $D\,(0<r<R,\ 0\le\theta\le 2\pi,\quad t>0)$,

яке задовольняє початковій умові

$$u(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta) \tag{4.5.2}$$

і однорідній граничній умові загального виду:

$$\left[\alpha\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r}+\beta u(r,\theta,t)\right]\Bigg|_{r=R}=0 \qquad (4.5.3)$$

Крім того, температура повинна задовольняти наступній істотній умові періодичності

$$u(r,\theta,t)=u(r,\theta+2\pi,t) \qquad (4.5.4)$$

► Для розв'язання поставленої задачі застосуємо метод Фур'є, тобто покладаємо, що частинні розв'язки рівняння (4.5.1) мають вид:

$$u(r,\theta,t)=\Re(r)\Phi(\theta)T(t) \qquad (4.5.5)$$

Підставляючи (4.5.5) у рівняння (4.5.1) і розподіляючи змінні одержимо:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{\Re''(r)+\frac{1}{r}\Re'(r)}{\Re(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}$$

Приймаючи до уваги, що права частина цієї рівності залежить лише від просторових координат, а ліва – тільки від часу, отже прирівнюючи обидві частини рівності деякій постійній $\left(-\lambda^2\right)$ одержимо наступні рівняння:

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0 \qquad (4.5.6)$$

$$\frac{\Re''(r)+\frac{1}{r}\Re'(r)}{\Re(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda^2 \qquad (4.5.7)$$

Рівняння (4.5.7) можна записати у вигляді:

$$\frac{r^2\Re''(r)+r\Re'(r)}{\Re(r)}+\lambda^2r^2=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}$$

після чого обидві частини можна прирівняти деякій постійній δ. Очевидно, приймаючи до уваги умову (4.5.4) ця постійна повинна дорівнюватись квадрату натурального числа, тобто

$$\delta=n^2 \qquad n=0,1,2,3,...$$

так як тільки у цьому випадку функція $\Phi(\theta)$ буде періодичною. Таким чином будемо мати ще два рівняння:

$$r^2\Re''(r)+r\Re'(r)+(\lambda^2r^2-n^2)\Re(r)=0 \qquad (4.5.8)$$

$$\Phi''(\theta)+n^2\Phi(\theta)=0$$

Рівняння (4.5.8) заміною $\lambda r = \rho$ зводиться до рівняння Беселя і має загальний розв'язок виду:

$$\Re(r) = C_1 J_n(\lambda r) + C_2 Y_n(\lambda r)$$

Очевидно, для обмеженості температури у центрі кола необхідно покласти, що $C_2 = 0$, отже

$$\Re(r) = C_1 J_n(\lambda r) \qquad (4.5.9)$$

Загальні розв'язки рівнянь (4.5.8) і (4.5.6) мають відповідно вид

$$\Phi(\theta) = C_3 \cos n\theta + C_4 \sin n\theta \qquad (4.5.10)$$

$$T(t) = C_5 e^{-a^2\lambda^2 t} \qquad (4.5.11)$$

Постійна λ визначається з граничної умови (4.5.3). Задовольняючи цій умові функцію (4.5.9) приходимо до рівняння:

$$\alpha\lambda J_n^{'}(\lambda R) + \beta J_n(\lambda R) = 0 \qquad (4.5.12)$$

Нехай λ_{nm} (де $m = 1, 2, ...$) – додатні корені рівняння (4.5.12). Очевидно функція

$$u_{nm}(r,\theta,t) = e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t} J_n(\lambda_{nm} r)(A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta)$$

задовольняє диференціальному рівнянню (4.5.1) та умовам (4.5.2) і (4.5.4) Теж саме можна сказати і про суму всіх таких частинних розв'язків

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t} J_n(\lambda_{nm} r)(A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta) \qquad (4.5.13)$$

при умові, що подвійний ряд (4.5.13) збігається рівномірно у області D і його можна почленно диференціювати, задовольняючи рівнянню (4.5.1).

Постійні A_{nm} і B_{nm} вибираємо таким чином, щоб виконувалась початкова умова (4.5.2). При цьому повинна мати місце рівність:

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(\lambda_{nm} r)\right]\cos n\theta + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_n(\lambda_{nm} r)\right]\sin n\theta\right\} \qquad (4.5.14)$$

Останнє рівняння можна розглядати, як розклад функції $f(r,\theta)$ у тригонометричний ряд Фур'є за змінною θ з коефіцієнтами

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) \qquad\qquad \beta_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_n(\lambda_{nm} r)$$

які, як відомо, визначаються формулами

$$\alpha_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} J_0(\lambda_{0m} r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta \qquad (4.5.15)$$

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(\lambda_{nm} r)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos n\theta d\theta \qquad (4.5.16)$$

$$\beta_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} J_n(\lambda_{nm} r)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)\sin n\theta d\theta \qquad (4.5.17)$$

Рівність (4.5.15) можна розглядати, у свою чергу, як розклад у ряд Діні-Беселя функції $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta$ за змінною r. отже:

$$A_{0m} = \frac{1}{\pi R^2\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2\lambda_{0m}^2 R^2}\right) J_0^2(\lambda_{0m} R)} \int_0^R r J_0(\lambda_{0m} r) \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\theta dr \qquad (4.5.18)$$

$$A_{nm} = \frac{1}{\pi R^2\left(1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2 n^2}{\alpha^2\lambda_{nm}^2 R^2}\right) J_n^2(\lambda_{nm} R)} \int_0^R r J_n(\lambda_{nm} r) \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\cos n\theta d\theta dr \ (4.5.19)$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\pi R^2\left(1 + \frac{\beta^2 - \alpha^2 n^2}{\alpha^2\lambda_{nm}^2 R^2}\right) J_n^2(\lambda_{nm} R)} \int_0^R r J_n(\lambda_{nm} r) \int_0^{2\pi} f(r,\theta)\sin n\theta d\theta dr \ (4.5.20)$$

Таким чином, розв’язок поставленої задачі задається подвійним рядом (4.5.14), коефіцієнти якого визначаються за формулами (4.5.18) – (4.5.20)◄

2^0. *Загальна неоднорідна гранична задача теплопровідності для кола*

Постановка задачі*: Знайти розв'язок рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)+F(r,\theta,t) \qquad \textbf{\textit{(4.5.21)}}$$

в області $D(0<r<R,\quad 0<\theta<2\pi,\quad t>0)$, ***яке задовольняє початковій умові***

$$u(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f(r,t) \qquad \textbf{\textit{(4.5.22)}}$$

неоднорідній граничній умові загального виду:

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial r}+\beta u\right]_{r=R}=\varphi(\theta,t) \qquad \textbf{\textit{(4.5.23)}}$$

і умові періодичності розв'язку:

$$u(r,\theta,t)=u(r,\theta+2\pi,t) \qquad \textbf{\textit{(4.5.24)}}$$

► Розв'язок задачі будемо шукати вигляді ряду Фур'є-Діні-Беселя

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(\lambda_{nm}r)\left[A_{nm}(t)\cos n\theta+B_{nm}(t)\sin n\theta\right] \qquad (4.5.25)$$

де λ_{nm} корені рівняння (4.5.12), $A_{nm}(t)$, $B_{nm}(t)$ - невідомі коефіцієнти Фур'є шуканої функції $u(r,\theta,t)$

$$\left.\begin{aligned}
A_{0m}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,\theta,t)J_0(\lambda_{0m}r)rdrd\theta\\
A_{nm}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,\theta,t)J_n(\lambda_{nm}r)r\cos n\theta drd\theta\\
B_{nm}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r,\theta,t)J_n(\lambda_{nm}r)r\sin n\theta drd\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (4.5.26)$$

Диференціюючи функцію $A_{nm}(t)$ за змінною t і підставляючи замість $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ її значення з рівняння (4.5.21), одержимо наступне співвідношення:

$$A'_{nm}(t)=$$
$$\frac{a^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{a^2}F(r,\theta,t)\right]J_{nm}(\lambda_{nm}r)r\cos n\theta drd\theta=$$
$$=\frac{a^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left[\int_0^R\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)J_n(\lambda_{nm}r)dr\right]\cos n\theta d\theta+\right.$$
$$+\frac{a^2}{\pi}\int_0^R\frac{1}{r}J_n(\lambda_{nm}r)dr\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cos n\theta d\theta+P_{nm}(t) \qquad (4.5.27)$$

де

$$P_{nm}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R F(r,\theta,t)J_{nm}(\lambda_{nm}r)r\cos n\theta drd\theta \qquad (4.5..28)$$

Інтегруючи двічі за частинами внутрішній інтеграл першого доданка (4.5.27), одержимо:

$$\int_0^R\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)J_n(\lambda_{nm}r)dr=rJ_n(\lambda_{nm}r)\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_0^R-\lambda_{nm}rJ'_n(\lambda_{nm}r)u\Big|_0^R+$$
$$+\int_0^R u\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_{nm}rJ'_n(\lambda_{nm}r)\right]dr \qquad (4.5.29)$$

Функції $J_n(\lambda_{nm}R)$ і $J'_n(\lambda_{nm}R)$ пов'язані між собою співвідношенням (4.5.12), і одна з них завжди виражається через другу:

$$J'_n(\lambda_{nm}R)=-\frac{\beta}{\alpha\lambda_{nm}}J_n(\lambda_{nm}R),\ \text{якщо}\ \alpha\neq 0 \qquad (4.5.30)$$

і

$$J_n(\lambda_{nm}R)=-\frac{\alpha\lambda_{nm}}{\beta}J'_n(\lambda_{nm}R),\ \text{якщо}\ \beta\neq 0 \qquad (4.5.31)$$

Для визначеності будемо вважати, що має місце випадок (4.5.30).

Приймаючи до уваги рівняння Беселя

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_{nm}rJ'_n(\lambda_{nm}r)\right]=\left(-\lambda_{nm}^2r+\frac{n^2}{r}\right)J_n(\lambda_{nm}r)$$

і підставляючи (4.5.30) у (4.5.29) одержимо:

$$\int_0^R \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)J_n(\lambda_{nm}r)dr = R\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\beta}{\alpha}u\right]_{r=R} J_n(\lambda_{nm}R) -$$

$$-\lambda_{nm}^2\int_0^R uJ_n(\lambda_{nm}r)rdr + \int_0^R \frac{n^2}{r}uJ_n(\lambda_{nm}r)dr =$$

$$= \frac{R}{\alpha}\varphi(\theta,t)J_n(\lambda_{nm}R) \ -\lambda_{nm}^2\int_0^R uJ_n(\lambda_{nm}r)rdr + \int_0^R \frac{n^2}{r}uJ_n(\lambda_{nm}r)dr \quad (4.5.32)$$

Дедалі, інтегруючи внутрішній інтеграл другого доданка (4.5.27) і приймаючи до уваги умову періодичності одержимо:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cos n\theta d\theta = -n^2\int_0^{2\pi} u\cos n\theta d\theta \qquad (4.5.33)$$

Підставляючи (4.5.32) і (4.5.33) у вираз (4.5.27) і приймаючи до уваги формули (4.5.25) одержимо для функції $A_{nm}(t)$ звичайне лінійне неоднорідне рівняння

$$A'_{nm}(t) = -a^2\lambda_{nm}^2 A_{nm}(t) \ +a^2 P_{nm}(t) + \frac{a^2 R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)P_n(t) \qquad (4.5.34)$$

де

$$P_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,t)\cos n\theta d\theta \qquad (4.5.35)$$

Початкові умови для цього рівняння одержимо, покладаючи у (5.4.26) $t=0$:

$$A_{nm}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\cos n\theta rdrd\theta \qquad (4.5.36)$$

Розв’язок рівняння (4.5.34) з початковою умовою (4.5.36) має вид:

$$A_{nm}(t) = A_{nm}(0)e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t} +$$

$$+ a^2\int_0^t e^{-a^2\lambda_{nm}^2(t-\tau)}\left[P_{nm}(\tau) + \frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)p_n(\tau)\right]d\tau \qquad (4.5.37)$$

Застосовуючи аналогічний метод знаходяться функції $A_{0m}(t)$ і $B_{nm}(t)$:

$$A_{0m}(t)=A_{0m}(0)e^{-a^2\lambda_{0m}^2 t}+$$
$$+a^2\int_0^t e^{-a^2\lambda_{0m}^2(t-\tau)}\left[P_{0m}(\tau)+\frac{R}{\alpha}J_0(\lambda_{0m}R)p_0(\tau)\right]d\tau \qquad (4.5.38)$$

де

$$\left.\begin{aligned}
A_{0m}(0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)J_0(\lambda_{0m}r)rdrd\theta\\
P_{0m}(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R F(r,\theta,t)J_0(\lambda_{0m}r)rdrd\theta\\
p_0(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,t)d\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (4.5.39)$$

$$B_{nm}(t)=B_{nm}(0)e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t}+$$
$$+a^2\int_0^t e^{-a^2\lambda_{nm}^2(t-\tau)}\left[Q_{nm}(\tau)+\frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)q_n(\tau)\right]d\tau \qquad (4.5.40)$$

де

$$\left.\begin{aligned}
B_{nm}(0)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\sin n\theta rdrd\theta\\
Q_{nm}(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R F(r,\theta,t)J_n(\lambda_{nm}r)\sin n\theta rdrd\theta\\
q_n(t)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta,t)\sin n\theta d\theta
\end{aligned}\right\} (4.5.41)$$

Отже, розв'язок загальної неоднорідної граничної задачі теплопровідності для кола дається формулою (4.5.25) з коефіцієнтами, які визначаються за формулами (4.5.37), (4.5.38) і (4.5.40).

Ми розглянули випадок (4.5.30). Якщо $\alpha=0$, тоді слід використати співвідношення (4.5.31) і тоді всюди у формулах (4.5.34), (4.5.37). (4.5.38) і (4.5.40) замість множника виду $\dfrac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)$ буде стояти множник $\dfrac{\lambda_{nm}R}{\beta}J'_n(\lambda_{nm}R)$.◄

§6. Загальна гранична задача теплопровідності для кільця

1⁰. Загальна однорідна гранична задача теплопровідності для кільця

Постановка задачі*: Знайти розв'язок рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \qquad \textbf{\textit{(4.6.1)}}$$

в області $D(r_1<r<r_2,\,0<\theta<2\pi,\,t>0)$, ***яке задовольняє початковій умові***

$$u(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f(r,t) \qquad \textbf{\textit{(4.6.2)}}$$

однорідним граничним умовам загального виду:

$$\left[\alpha_1\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r}+\beta_1 u(r,\theta,t)\right]_{r=r_1}=0 \qquad \textbf{\textit{(4.6.3)}}$$

$$\left[\alpha_2\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r}+\beta_2 u(r,\theta,t)\right]_{r=r_2}=0 \qquad \textbf{\textit{(4.6.4)}}$$

і умові періодичності розв'язку:

$$u(r,\theta,t)=u(r,\theta+2\pi,t) \qquad \textbf{\textit{(4.6.5)}}$$

► Застосовуючи метод розподілення змінних і використовуючи умову періодичності (4.6.5) знайдемо загальний розв'язок рівняння (4.6.1) у вигляді:

$$u_n(r,\theta,t)=\Re_n(\lambda r)\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)e^{-a^2\lambda^2 t} \qquad (4.6.6)$$

де

$$\Re_n(\lambda r)=C_nJ_n(\lambda r)+D_nY_n(\lambda r)$$

C_n, D_n і λ невідомі сталі. Для їх визначення використаємо спочатку граничні умови (4.6.3) і (4.6.4). Задовольняючи цім умовам , одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \mathfrak{R}'_n(\lambda r_1) + \beta_1 \mathfrak{R}_n(\lambda r_1) = 0 \\ \alpha_2 \mathfrak{R}'_n(\lambda r_2) + \beta_2 \mathfrak{R}_n(\lambda r_2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.7)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{aligned} & C_n\left[\alpha_1 \lambda J'_n(\lambda r_1) + \beta_1 J_n(\lambda r_1)\right] + \\ & + D_n\left[\alpha_1 \lambda Y'_n(\lambda r_1) + \beta_1 Y_n(\lambda r_1)\right] = 0 \\ & C_n\left[\alpha_2 \lambda J'_n(\lambda r_2) + \beta_2 J_n(\lambda r_2)\right] + \\ & + D_n\left[\alpha_2 \lambda Y'_n(\lambda r_2) + \beta_2 Y_n(\lambda r_2)\right] = 0 \end{aligned}\right\} (4.6.7')$$

Однорідна система рівнянь (4.6. $7'$) відносно C_n і D_n має відмінні від нуля розв’язки тоді і тільки тоді якщо детермінант Δ дорівнюється нулю:

$$\begin{aligned} \Delta = & \\ & \alpha_1 \alpha_2 \lambda^2 \left[J'_n(\lambda r_1) Y'_n(\lambda r_2) - Y'_n(\lambda r_1) J'_n(\lambda r_2)\right] + \\ & + \alpha_1 \beta_2 \lambda \left[J'_n(\lambda r_1) Y_n(\lambda r_2) - Y'_n(\lambda r_1) J_n(\lambda r_2)\right] + \\ & + \alpha_2 \beta_1 \lambda \left[J_n(\lambda r_1) Y'_n(\lambda r_2) - Y_n(\lambda r_1) J'_n(\lambda r_2)\right] + \\ & + \beta_1 \beta_2 \left[J_n(\lambda r_1) Y_n(\lambda r_2) - Y_n(\lambda r_1) J_n(\lambda r_2)\right] = 0 \qquad (4.6.8) \end{aligned}$$

Можна показати, що рівняння (4.6.8), яке називається характеристичним, має для кожного n незчисленну множину додатних дійсних коренів. Позначимо їх через λ_{nm}, де $m = 1, 2, 3, ...$

Легко перевірити, що функції

$$\mathfrak{R}_{nm}(\lambda_{nm} r) = C_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) + D_{nm} Y_n(\lambda_{nm} r)$$

ортогональні у інтервалі (r_1, r_2) з вагою r для різних додатних m при любому фіксованому n :

$$\int_{r_1}^{r_2} r \mathfrak{R}_{nm_1}(\lambda_{nm_1} r) \cdot \mathfrak{R}_{nm_2}(\lambda_{nm_2} r) dr = \begin{cases} 0, & \text{ÿêù î} \quad m_1 \neq m_2 \\ h \neq 0, & \text{ÿêù î} \quad m_1 = m_2 \end{cases} \qquad (4.6.9)$$

Система рівнянь (4.6.7’) буде лінійно-залежною, якщо λ є коренем рівняння (4.6.8), тому одна з постійних C_{nm} або D_{nm} залишається невизначеною. Виберемо її так, щоб функції $\mathfrak{R}_{nm}(\lambda_{nm} r)$

були нормовані у інтервалі (r_1, r_2), тобто щоб у формулі (4.6.9) було $h = 1$.

Знаходячи суму частинних розв'язків по n і по m, одержимо ряд Фур'є-Діні-Беселя:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)\left(A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta\right)e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t} \quad (4.6.10)$$

Постійні A_{nm} і B_{nm} визначаємо з початкової умови (4.6.2), в силу якого

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)\left(A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta\right) \quad (4.6..11)$$

Помноживши обидві частини (4.6.11) на $r\Re_{nm}(r)$, інтегруючи по області (r_1, r_2) і приймаючи до уваги властивість ортогональності (4.6.9), будемо мати рівність

$$\int_{r_1}^{r_2} r\Re_{nm}(r)f(r,\theta)dr =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_{nm}\cos n\theta + B_{nm}\sin n\theta)$$

яке можна розглядати як розклад у тригонометричний ряд Фур'є функції, яка стоїть у лівій частині цієї рівності. Коефіцієнти Фур'є A_{nm} і B_{nm} визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned}
A_{0m} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r\Re_{0m}(\lambda_{0m}r)f(r,\theta)drd\theta \\
A_{nm} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)f(r,\theta)\cos n\theta drd\theta \\
B_{nm} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)f(r,\theta)\sin n\theta drd\theta
\end{aligned}\right\} \quad (4.6.12)$$

Таким чином, розв'язок поставленої загальної однорідної задачі теплопровідності дається виразом (4.6.10) коефіцієнти якого визначаються формулами (4.6.12). ◄

2^0. *Загальна неоднорідна гранична задача теплопровідності для кільця*

Постановка задачі*: Знайти розв'язок рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) + F(r,\theta,t) \qquad \textbf{\textit{(4.6.13)}}$$

в області $D(r_1 < r < r_2, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad t > 0)$, ***яке задовольняє початковій умові***

$$u(r,\theta,t)\big|_{t=0} = f(r,t) \qquad \textbf{\textit{(4.6.14)}}$$

граничним умовам загального виду:

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r} + \beta_1 u(r,\theta,t)\right]_{r=r_1} = \varphi_1(\theta,t) \qquad \textbf{\textit{(4.6.15)}}$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial r} + \beta_2 u(r,\theta,t)\right]_{r=r_2} = \varphi_2(\theta,t) \qquad \textbf{\textit{(4.616)}}$$

і умові періодичності розв'язку:

$$u(r,\theta,t) = u(r,\theta+2\pi,t) \qquad \textbf{\textit{(4.6.17)}}$$

► Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є-Діні-Беселя:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Re_{nm}(\lambda_{nm} r)\left(A_{nm}(t)\cos n\theta + B_{nm}(t)\sin n\theta\right) \qquad (4.6.18)$$

де $\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)$ - такі ж самі функції, що і у однорідній задачі, λ_{nm} - корені рівняння (4.6..8), $A_{nm}(t)$ і $B_{nm}(t)$ - невідомі коефіцієнти шуканої функції $u(r,\theta,t)$, які визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned}
A_{0m}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} u(r,\theta,t) r \Re_{0m}(\lambda_{0m} r)\,dr\,d\theta \\
A_{nm}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} u(r,\theta,t) r \Re_{nm}(\lambda_{nm} r)\cos n\theta\,dr\,d\theta \\
B_{nm}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} u(r,\theta,t) r \Re_{nm}(\lambda_{nm} r)\sin n\theta\,dr\,d\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6.19)$$

Диференціюючи функцію $A_{nm}(t)$ по t і підставляючи замість значення $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ у інтеграл в правій частині праву частину рівняння (4.6.13), будемо мати:

$$A'_{nm}(t) =$$

$$\frac{a^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{a^2}F(r,\theta,t)\right]\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)r\cos n\theta drd\theta =$$

$$=\frac{a^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Re_n(\lambda_{nm}r)dr\right)\cos n\theta d\theta +$$

$$\frac{a^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\Re_n(\lambda_{nm}r)dr\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cos n\theta d\theta + P_{nm}(t) \qquad (4.6.20)$$

де

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}F(r,\theta,t)\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)r\cos n\theta drd\theta \qquad (4.6.21)$$

Інтегруючи внутрішній інтеграл першого доданку (4.6.20) за частинами, одержимо:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)dr = r\Re_{nm}(r)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r_1}^{r_2} - \lambda_{nm}r\Re'_{nm}(\lambda_{nm}r)u\Big|_{r_1}^{r_2} +$$

$$+\int_{r_1}^{r_2}u\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_{nm}r\Re'_{nm}(\lambda_{nm}r)\right]dr \qquad (4.6.22)$$

Функції $\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)\Big|_{r_1}^{r_2}$ і $\Re'_{nm}(\lambda_{nm}r)\Big|_{r_1}^{r_2}$ пов’язані між собою співвідношеннями(4.6.7) і одна з них завжди виражається через другу:

$$\Re'_{nm}(\lambda_{nm}r_i) = -\frac{\beta_i}{\alpha_i\lambda_{nm}}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_i), \text{ якщо } \alpha_i \neq 0,\ i=1,2 \qquad (4.6.23)$$

$$\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_i) = -\frac{\alpha_i\lambda_{nm}}{\beta_i}\Re'_{nm}(\lambda_{nm}r_i), \text{ якщо } \beta_i \neq 0,\ i=1,2 \qquad (4.6.24)$$

Для визначеності будемо вважати, що має місце випадок (4.6.23)

Приймаючи до уваги, що в силу рівняння Беселя

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_{nm} r \Re'_{nm}(\lambda_{nm} r)\right] = \left(-\lambda_{nm}^2 r + \frac{n^2}{r}\right)\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)$$

і підставляючи (2.4.11) у (2.4.10), одержимо:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)dr = r_2\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\beta_2}{\alpha_2}u\right]\Bigg|_{r=r_2}\Re_{nm}(\lambda_{nm} r_2) -$$

$$-r_1\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\beta_1}{\alpha_1}u\right]\Bigg|_{r=r_1}\Re_{nm}(\lambda_{nm} r_1) - \lambda_{nm}^2\int_{r_1}^{r_2} u\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)dr +$$

$$+\int_{r_1}^{r_2} \frac{n^2}{r}\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)dr =$$

$$= \frac{r_2}{\alpha_2}\varphi_2(\theta,t)\Re_{nm}(\lambda_{nm} r_2) - \frac{r_1}{\alpha_1}\varphi_1(\theta,t)\Re_{nm}(\lambda_{nm} r_1) -$$

$$-\lambda_{nm}^2\int_{r_1}^{r_2} u\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{n^2}{r}\Re_{nm}(\lambda_{nm} r)dr \qquad (4.6.25)$$

Далі, в силу періодичності функції $u(r,\theta,t)$ та її похідних

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cos n\theta d\theta = -n^2\int_0^{2\pi} u(r,\theta,t)\cos n\theta d\theta \qquad (4.6.26)$$

Підставляючи (4.6.25) і (4.6.26) у вираз (4.6.20) і враховуючи (4.6.19), одержимо для функції $A_{nm}(t)$ лінійне неоднорідне звичайне диференціальне рівняння першого порядку:

$$A'_{nm}(t) + a^2\lambda_{nm}^2 A_{nm}(t) =$$

$$= a^2 P_{nm}(t) + \frac{a^2 r_2}{\alpha_2}\Re_{nm}(\lambda_{nm} r_2)p_{2n}(t) - \frac{a^2 r_1}{\alpha_1}\Re_{nm}(\lambda_{nm} r_1)p_{1n}(t) \quad (4.6.27)$$

де

$$p_{in}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_i(\theta,t)\cos n\theta d\theta, \quad i = 1,2 \qquad (4.6.28)$$

Початкові умови для рівняння (4.6.27) одержимо, якщо покласти (4.6.19) $t=0$

$$A_{nm}(0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)r\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)\cos n\theta drd\theta \tag{4.6.29}$$

Застосовуючи метод варіації довільної змінної для розв'язування рівняння (4.6.27) і використовуючи початкову умову (4.6.29) одержимо розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} A_{nm}(t) &= A_{nm}(0)e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t} + \\ &+ a^2\int_0^t e^{-a^2\lambda_{nm}^2(t-\tau)} \left[P_{0m}(\tau)+\frac{r_2}{\alpha_2}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_2)p_{2n}(\tau)- \right. \\ &\left. -\frac{r_1}{\alpha_1}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_1)p_{1n}(\tau)\right]d\tau \end{aligned} \tag{4.6.30}$$

Аналогічним чином знаходяться функції $A_{0m}(t)$ і $B_{nm}(t)$, які можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} A_{0m}(t) &= A_{0m}(0)e^{-a^2\lambda_{0m}^2 t} + \\ & a^2\int_0^t e^{-a^2\lambda_{0m}^2(t-\tau)} \left[P_{0m}(\tau)+\frac{r_2}{\alpha_2}\Re_{0m}(\lambda_{0m}r_2)p_{20}(\tau)- \right. \\ &\left. -\frac{r_1}{\alpha_1}\Re_{0m}(\lambda_{0m}r_1)p_{10}(\tau)\right]d\tau \end{aligned} \tag{4.6.31}$$

де

$$\left. \begin{aligned} A_{0m}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)\Re_{0m}(\lambda_{0m}r)rdrd\theta \\ P_{0m}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} F(r,\theta,t)\Re_{0m}(\lambda_{0m}r)rdrd\theta \\ p_{i0}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_i(\theta,t)d\theta \end{aligned} \right\} \tag{4.6.32}$$

$$B_{nm}(t) = D_{nm}(0)e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t} ++ a^2\int_0^t e^{-a^2\lambda_{nm}^2(t-\tau)}\ \Big[Q_{nm}(\tau) +$$

$$+\frac{r_2}{\alpha_2}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_2)q_{2n}(\tau) - \frac{r_1}{\alpha_1}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_1)q_{1n}(\tau)\Big]d\tau \quad (4.6.33)$$

де

$$\left.\begin{aligned}
&B_{nm}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta)\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)\sin n\theta r dr d\theta\\
&Q_{nm}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} F(r,\theta,t)\Re_{nm}(\lambda_{nm}r)\sin n\theta r dr d\theta\\
&q_{in}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_i(\theta,t)\sin n\theta d\theta
\end{aligned}\right\} \quad (4.6.34)$$

Отже, розв’язок неоднорідної задачі задається формулою (4.6.18) з коефіцієнтами , які визначаються виразами (4.6.30), (4.6.31) та (4.6.33). Ми розглянули випадок (4.6.23). Якщо яке-небудь з чисел α_i дорівнюється нулю, то слід використатися співвідношенням (4.6.24) і тоді всюди у формулах (4.6.27), (4.6.30), (4.6.31) та (4.633) замість множників $\frac{r_i}{\alpha_i}\Re_{nm}(\lambda_{nm}r_i)$ будуть стояти множники $-\frac{\lambda_{nm}r_i}{\beta_i}\Re'_{nm}(\lambda_{nm}r_i)$.◄

§ 7. *Граничні задачі теплопровідності для прямокутника*

1⁰. Перша гранична задача

Постановка задачі. ***Знайти розв’язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.7.1)}}$$

у області $D(0 < x < l,\quad 0 < y < h,\quad t > 0)$***,***

який задовольняє початковій умові

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = f(x,y) \qquad \textbf{\textit{(4.7.2)}}$$

і граничним умовам першого роду:

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,t)\big|_{x=0} &= \varphi_1(y,t),\\ u(x,y,t)\big|_{x=l} &= \varphi_2(y,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(4.7.3)}}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,t)\big|_{y=0} &= \phi_1(x,t),\\ u(x,y,t)\big|_{y=h} &= \phi_2(x,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(4.7.4)}}$$

► Розв'язок поставленої задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є за синусами відносно змінної y :

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\sin\frac{n\pi y}{h} \qquad (4.7.5)$$

де невідомі коефіцієнти Фур'є визначаються наступним чином:

$$u_n(x,t) = \frac{2}{h}\int_0^h u(x,\eta,t)\sin\frac{n\pi\eta}{h}d\eta \qquad (4.7.6)$$

Помножимо рівняння (4.7.1) на $\frac{2}{h}\sin\frac{n\pi y}{h}$ і проінтегруємо у проміжку $[0,h]$ за змінною y. Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ і враховуючи граничні умови (4.7.4), одержимо:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 u_n(x,t) + \Phi_n(x,t) \qquad (4.7.7)$$

де

$$\left.\begin{aligned} \Phi_n(x,t) &= \frac{2a^2 n\pi}{h^2}\left[\phi_1(x,t) - (-1)^n\phi_2(x,t)\right] + F_n(x,t),\\ F_n(x,t) &= \frac{2}{h}\int_o^h F(x,\eta,t)\sin\frac{n\pi\eta}{h}d\eta \end{aligned}\right\} (4.7.8)$$

Початкова та граничні умови для рівняння (4.7.7) визначаються з (4.7.2) і (4.7.3) і мають вид:

$$u_n(x,t) = f_n(x) \qquad (4.7.9)$$

де

$$f_n(x)=\frac{2}{h}\int_0^h f(x,\eta)\sin\frac{n\pi\eta}{h}d\eta \qquad (4.7.10)$$

$$\left.\begin{aligned} u_n(x,t)\big|_{x=0}&=\varphi_{1n}(t),\\ u_n(x,t)\big|_{x=l}&=\varphi_{2n}(t)\end{aligned}\right\} \qquad (4.7.11)$$

тут

$$\varphi_{in}(t)=\frac{2}{h}\int_0^h \varphi_i(\eta,t)\sin\frac{n\pi\eta}{h}d\eta\ , \qquad i=1,2 \quad (4.7.12)$$

Задача (4.7.7), (4.7.9), (4.7.11) співпадає з вже розглянутою задачею (4.3.5) - (4.3.8), у якій треба покласти:

$$\alpha_1=\alpha_2=0, \qquad \beta_1=\beta_2=1, \qquad s=\frac{n\pi}{h}$$

$$U=u_n(x,t)\ , \qquad F=\Phi_n(x,t)\ ,$$

$$f=f_n(x)\ , \qquad \varphi=\varphi_{1n}(t)\ , \qquad \phi=\phi_{2n}(t) \quad (4.7.13)$$

Її розв'язок дається формулою (4.3.9), яка з урахуванням (4.7.13) прийме вид:

$$u_n(x,t)=\int_0^l \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 t} f_n(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2(t-\tau)}\varphi_{1n}(\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau-$$

$$-\int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2(t-\tau)}\varphi_{2n}(\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2(t-\tau)}\Phi_n(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

(4.7.14)

Запишемо тепер наступні формули:

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi\eta}{h}\sin\frac{n\pi y}{h}=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right] \qquad (4.7.15)$$

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 t} h\sin\frac{n\pi y}{h}=$$

$$=\frac{h}{2a\sqrt{\pi}(t)^{3/2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y-2mh)e^{-\frac{y+2mh)^2}{4a^2t}} \qquad (4.7.16)$$

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 t} h\sin\frac{n\pi y}{h}= \qquad =$$

$$\frac{h}{2a\sqrt{\pi}(t)^{3/2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y-h+2mh)e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2t}} \qquad (4.7.17)$$

Підставляючи значення коефіцієнта Фур'є (4.7.14) у формулу (4.7.5) враховуючи позначення (4.7.8), (4.7.10), (4.7.12) і тотожності (4.7.15) - (4.7.17), а також змінюючи формально порядки інтегрування і підсумовування, одержимо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_0^h\frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^h\frac{\varphi_1(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$
\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2kh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2ky)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right]d\eta-
$$

$$
-\int_0^t d\tau\int_0^h \frac{\varphi_2(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times
$$

$$
\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right]d\eta+
$$

$$
+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{\phi_1(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times
$$

$$
\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y+2mh)e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi-
$$

$$
-\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{\phi_2(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times
$$

$$
\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y-h+2mh)e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi+
$$

$$
+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^h \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times
$$

$$
\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right]d\eta \qquad (4.7.18)
$$

Аналогічно тому , як це було зроблено у одномірному випадку, легко перевірити, що формально знайдений розв’язок (4.7.18) дійсно задовольняє диференціальному рівнянню (4.7.1), початковій умові (4.7.2) та граничним умовам (4.7.3), (4.7.4), якщо задані функції неперервні, і, крім того, функція $F(x,y,t)$ неперервна у розумінні Гьольдера за першими двома аргументами. ◄

2^0. Друга гранична задача

Постановка задачі. ***Знайти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.7.19)}}$$

у області $D\,(0<x<l,\quad 0<y<h,\quad t>0)$, ***який задовольняє початковій умові***

$$u(x,y,t)\big|_{t=0}=f(x,y) \qquad \textbf{\textit{(4.7.20)}}$$

і граничним умовам другого роду:

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=0}&=\varphi_1(y,t),\\ \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=l}&=\varphi_2(y,t)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(4.7.21)}}$$

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=0}&=\phi_1(x,t),\\ \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=h}&=\phi_2(x,t)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(4.7.22)}}$$

► Розв'язок поставленої задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є за косинусами відносно змінної y :

$$u(x,y,t)=\frac{u_0(x,t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)\cos\frac{n\pi y}{h} \qquad (4.7.23)$$

з невідомими коефіцієнтами Фур'є :

$$u_n(x,t)=\frac{2}{h}\int_0^h u(x,\eta,t)\cos\frac{n\pi\eta}{h}d\eta \quad \left(n=0,1,2,...\right) \qquad (4.7.24)$$

Для їх визначення помножимо рівняння (4.7.19) на $\frac{2}{h}\cos\frac{n\pi y}{h}$ $\left(n=0,1,2,...\right)$ і проінтегруємо у проміжку $\left[0,h\right]$ за змінною y.

Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ і враховуючи граничні умови (4.7.22), одержимо:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - \left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 u_n(x,t) + \Phi_n(x,t) \tag{4.7.25}$$

де

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_n(x,t) = -\frac{2a^2}{h}\left[\phi_1(x,t) - (-1)^n \phi_2(x,t)\right] + F_n(x,t) \\ &F_n(x,t) = \frac{2}{h}\int_0^h F(x,\eta,t)\cos\frac{n\pi\eta}{h}\,d\eta \end{aligned}\right\} \tag{4.7.26}$$

Приймаючи до уваги (4.7.20) і (4.7.21) початкова та граничні умови для рівняння (4.7.19) мають вид:

$$u_n(x,t)\big|_{t=0} = f_n(x) \tag{4.7.27}$$

де

$$f_n(x) = \frac{2}{h}\int_0^h f(x,\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{h}\,d\eta \tag{4.7.28}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_{1n}(t), \\ &\left.\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \varphi_{2n}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.7.29}$$

тут

$$\varphi_{in}(t) = \frac{2}{h}\int_0^h \varphi_i(\eta,t)\cos\frac{n\pi\eta}{h}\,d\eta\,, \quad i = 1,2 \tag{4.7.30}$$

Подібна задача була розглянута раніше. Вона співпадає з задачею (4.3.5) - (4.3.8) при

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=\alpha_2=1,\quad \beta_1=\beta_2=0,\quad s=\frac{n\pi}{h},\\&U=u_n(x,t),\quad F=F_n(x,t),\\&f=f_n(x),\quad \varphi=\varphi_{1n}(t),\quad \phi=\varphi_{2n}(t)\end{aligned}\right\}\qquad(4.7.31)$$

Її розв'язок дається формулою (4.3.11), яка з урахуванням (4.7.31) прийме вид:

$$u_n(x,t)=\int_0^l\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2t}f_n(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi-$$

$$-\int_0^t\frac{ae^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2(t-\tau)}\varphi_{1n}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t\frac{ae^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2(t-\tau)}\varphi_{2n}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2(t-\tau)}\Phi_n(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi$$

(4.7.32)

Підставимо тепер у останній вираз значення коефіцієнтів Фур'є $f_n(x),\ \ \varphi_{in}(t),\ \ \Phi_n(x,t)$, які визначаються формулами (4.7.26), (4.7.28), (4.7.30), після чого одержаний вираз для $u_n(x,t)$ підставимо у ряд Фур'є (4.7.23).

Приймаючи до уваги наступні формули

$$\frac{1}{h}+\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2t}\cos\frac{n\pi\eta}{h}\cos\frac{n\pi y}{h}=$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2 t}} \right] \tag{4.7.33}$$

$$\frac{1}{h} + \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi y}{h} = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2 t}} \tag{4.7.34}$$

$$\frac{1}{h} + \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi y}{h} = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2 t}} \tag{4.7.35}$$

можемо записати шуканий розв'язок у вигляді:

$$u(x,y,t) = \int_0^l d\xi \int_0^h \frac{f(\xi,\eta)}{4a^2 \pi t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} - \right] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2 t}} - \right] d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^h \frac{\varphi_1(\eta,\tau)}{4a^2 \pi (t-\tau)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2 (t-\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-\eta+2kh)^2}{4a^2 (t-\tau)}} + e^{-\frac{(y+\eta+2ky)^2}{4a^2 (t-\tau)}} \right] d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^h \frac{\varphi_2(\eta,\tau)}{4a^2 \pi (t-\tau)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2 (t-\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2 (t-\tau)}} + e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2 (t-\tau)}} - \right] d\eta +$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^l \frac{\phi_1(\xi,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l \frac{\phi_2(\xi,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_0^h \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} - \right] d\eta \qquad (4.7.36)$$

Для обґрунтування описаного вище методу необхідно на задані функції накласти такі ж самі обмеження, що і у першій граничній задачі. ◀

3⁰. Загальна гранична задача

Постановка задачі. ***Знайти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(4.7.37)}}$$

у області $D(0<x<l,\ \ 0<y<h,\ \ t>0)$, ***який задовольняє початковій умові***

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = f(x,y) \qquad \textbf{\textit{(4.7.38)}}$$

і граничним умовам першого роду:

$$\left.\begin{aligned}&\left[\alpha_1\frac{\partial u(x,y.t)}{\partial x}+\beta_1 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\varphi_1(y,t),\\&\left[\alpha_2\frac{\partial u(x,y.t)}{\partial x}+\beta_2 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=l}=\varphi_2(y,t),\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{\textit{(4.7.39)}}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\gamma_1\frac{\partial u(x,y.t)}{\partial x}+\delta_1 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{y=0}=\phi_1(x,t),\\&\left[\gamma_2\frac{\partial u(x,y.t)}{\partial x}+\delta_2 u(x,y,t)\right]\Bigg|_{y=h}=\phi_2(x,t),\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{\textit{(4.7.40)}}$$

► Розв’язок цієї задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур’є

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1} u_n(x,t)K_n^{(2)}(y) \qquad (4.7.41)$$

де $K_n^{(2)}$ є власні функції відповідної однорідної задачі, які визначаються за формулою:

$$K_n^{(2)}(y)=A_n^{(2)}\cos\mu_n y+B_n^{(2)}\sin\mu_n y \qquad (4.7.42)$$

Власні числа μ_n задовольняють рівнянню:

$$(\gamma_2\delta_1-\gamma_1\delta_2)\mu_n\cos\mu_n h+(\delta_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2\mu_n^2)\sin\mu_n h=0 \qquad (4.7.43)$$

$$\left(n=1,2,3,...\right)$$

а коефіцієнти $A_n^{(2)}$ і $B_n^{(2)}$ визначаються з системи рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}&\delta_1 A_n^{(2)}+\gamma_1\mu_n B_n^{(2)}=0\\&\int_0^h\left[K_n^{(2)}(y)\right]^2dy=1\end{aligned}\right\}\qquad (4.7.44)$$

При цих умовах, як це було показано раніше, функції $K_n^{(2)}(y)$ утворюють ортогональну і нормовану систему у області $(0<y<h)$, тому коефіцієнти Фур’є $u_n(x,t)$ у ряду (4.7.41) визначаються за формулою:

$$u_n(x,t)=\int_0^h K_n^{(2)}(y)u(x,y,t)dy$$

Функції $K_n^{(2)}(y)$ задовольняють рівнянню

$$K''^{(2)}_n(y)+\mu_n^2 K_n^{(2)}(y)=0 \qquad (4.7.45)$$

І граничним умовам

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 K'^{(2)}_n(0)+\delta_1 K_n^{(2)}(0)=0\\ \gamma_2 K'^{(2)}_n(h)+\delta_2 K_n^{(2)}(y)=0\end{aligned}\right\} \qquad (4.7.46)$$

Помножимо рівняння (4.7.37) на $K_n^{(2)}(y)$ і проінтегруємо його у проміжку $[0,h]$. Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, приймаючи до уваги рівності (4.7.45) і (4.7.46), одержимо наступне неоднорідне лінійне диференціальне рівняння відносно коефіцієнтів Фур'є $u_n(x,t)$:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}-a^2\mu_n^2 u_n(x,t)+\Phi_h^{(2)}(x,t)+F_n(x,t)$$

(4.7.47)

де

$$\Phi_n^{(2)}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{a^2}{\gamma_2}K'^{(2)}_n(h)\phi_2(x,t)-\dfrac{a^2}{\gamma_1}K_n^{(2)}(0)\phi_1(x,t),\ \text{якщо}\ \gamma_1\neq 0,\gamma_2\neq 0,\\ -\dfrac{a^2}{\delta_2}K'^{(2)}_n(h)\phi_2(x,t)-\dfrac{a^2}{\gamma_1}K_n^{(2)}(0)\phi_1(x,t),\ \text{якщо}\ \gamma_1\neq 0,\delta_2\neq 0,\\ \dfrac{a^2}{\gamma_2}K_n^{(2)}(h)\phi_2(x,t)+\dfrac{a^2}{\delta_1}K'^{(2)}_n(0)\phi_1(x,t),\ \text{якщо}\ \gamma_2\neq 0,\delta_1\neq 0,\\ -\dfrac{a^2}{\delta_2}K'^{(2)}_n(h)\phi_2(x,t)+\dfrac{a^2}{\delta_1}K'^{(2)}_n(0)\phi_1(x,t),\ \text{якщо}\ \delta_2\neq 0,\delta_1\neq 0,\end{cases} \qquad (4.7.48)$$

$$F_n(x,t)=\int_0^h F(x,y,t)K_n^{(2)}(y)dy \qquad (4.7.49)$$

Замість початкової умови (4.7.38) і граничних умов (4.7.39) для знаходження коефіцієнтів Фур'є будемо використовувати наступну початкову умову:

$$u_n(x,t)\Big|_{t=0} = f_n(x), \tag{4.7.50}$$

де

$$f_n(x) = \int_0^h f(x,y) K_n^{(2)}(y) dy \tag{4.7.51}$$

і граничні умови

$$\left.\begin{aligned} \left[\alpha_1 \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} + \beta_1 u_n(x,t) \right]_{x=0} &= \varphi_{1n}(t), \\ \left[\alpha_2 \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} + \beta_2 u_n(x,t) \right]_{x=l} &= \varphi_{2n}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.7.52}$$

тут

$$\varphi_{in}(t) = \int_0^h \varphi_i(y,t) K_n^{(2)}(y) dy \qquad i = 1,2 \tag{4.7.53}$$

Задача (4.7.47), (4.7.50), (4.7.52) обертається у задачу (4.3.5) – (4.3.8), якщо у останній покласти :

$$\left.\begin{aligned} &u = u_n(x,t), \quad F = \Phi_n^{(2)}(x,t) + F(x,n), \quad s = \mu_n \\ &f = f_n(x), \quad \varphi = \varphi_{1n}(t), \quad \phi = \varphi_{2n}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.7.54}$$

Її розв'язок дається формулою (4.3.13), яка в силу (4.7.54) прийме вид:

$$u_n(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t) K_m^{(1)}(x) \tag{4.7.55}$$

де

$$u_{nm}(t) = u_{nm}(0) e^{-a^2(\lambda_n^2 + \mu_n^2)t} + \int_0^t e^{-a^2(\lambda_n^2+\mu_n^2)(t-\tau)} \Big[a^2 \Phi_{nm}^{(1)}(\tau) +$$

$$+ \Phi_{nm}^{(2)}(\tau) + F_{nm}(\tau) \Big] d\tau \tag{4.7.56}$$

$$u_{nm}(0) = \int_0^l f_n(x) K_m^{(1)}(x) dx \tag{4.7.57}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{nm}^{(2)}(t) &= \int_0^l \Phi_n^{(2)}(x,t) K_m^{(1)}(x)dx, \\ F_{nm}(t) &= \int_0^l F_n(x,t) K_m^{(1)}(x)dx, \end{aligned}\right\} \qquad (4.7.58)$$

$$\Phi_{nm}^{(1)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_2} K_m^{(1)}(h)\varphi_{2n}(t) - \dfrac{1}{\alpha_1} K_m^{(1)}(0)\varphi_{1n}(t), \textit{ якщо } \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \\ -\dfrac{1}{\beta_2} K'^{(1)}_m(l)\varphi_{2n}(t) - \dfrac{1}{\alpha_1} K_m^{(1)}(0)\varphi_{1n}(t), \textit{ якщо } \alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \\ \dfrac{1}{\alpha_2} K_m^{(1)}(l)\varphi_{2n}(t) - \dfrac{1}{\beta_1} K'^{(1)}_m(0)\varphi_{1n}(t), \textit{ якщо } \alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \\ -\dfrac{1}{\beta_2} K'^{(1)}_m(l)\varphi_{2n}(t) + \dfrac{1}{\beta_1} K'^{(1)}_m(0)\varphi_{1n}(t), \textit{ якщо } \beta_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \end{cases} \qquad (4.7.59)$$

Функція $K_m^{(1)}(x)$ визначається за формулою :

$$K_m^{(1)}(x) = A_m^{(1)} \cos \lambda_m x + B_m^{(1)} \sin \lambda_m x \qquad (4.7.60)$$

власні числа λ_m задовольняють рівнянню:

$$(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\lambda_m \cos \lambda_m l) + (\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\lambda_m^2)\sin \lambda_m l = 0$$

(4.7.61)

а коефіцієнти $A_m^{(1)}$ і $B_m^{(1)}$ визначаються з системи двох алгебраїчних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 A_m^{(1)} + \alpha_1\lambda_v B_m^{(1)} = 0 \\ &\int_0^l \left(K_m^{(1)}(x)\right)^2 dx = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.7.62)$$

Таким чином, шуканий розв’язок запишеться у вигляді:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{nm}(t) K_m^{(1)}(x) K_n^{(2)}(y) \qquad (4.7.63)$$

Розглянемо окремий випадок.

Нехай $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \ \beta_1 = \beta_2 = 1,\ \ \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1,\ \delta_1 = 1, \delta_2 = 0.$

Тоді граничні умови (4.7.39), (4.7.40) приймуть вид:

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(y,t), \quad u(x,y,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(y,t), \qquad (\,4.7.39'\,)$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=0}=\phi_1(x,t),\quad \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=h}=\phi_2(x,t),\qquad (4.7.40')$$

З рівняння (4.7.61) одержимо

$$\sin\lambda_m l=0,\quad \lambda_m=\frac{m\pi}{l}$$

Розв’язуючи систему (4.7.62), знаходимо:

$$A_m^{(1)}=0\,,\qquad B_m^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{\int\sin^2\frac{m\pi}{l}xdx}}=\sqrt{\frac{2}{l}}\,,$$

і, отже:

$$K_m^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi mx}{l}$$

Аналогічно, з (4.7.43) і (4.7.44) будемо мати

$$\mu_n=\frac{\pi(2n-1)}{2h},\quad A_n^{(2)}=0,\quad B_n^{(2)}=\sqrt{\frac{2}{h}},$$

$$K_n^{(2)}(y)=\sqrt{\frac{2}{h}}\sin\frac{\pi(2n-1)y}{h}$$

Формули (4.7.48) і (4.7.59) приймуть вид:

$$\Phi_{\partial}^{(2)}(x,t)=\frac{a^2}{\gamma_2}K_n^{(2)}(h)\phi_2(x,t)+\frac{a^2}{\delta_1}K_n^{(2)}(0)\phi_1(x,t)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{h}}a^2\left[(-1)^n\phi_2(x,t)+\frac{\pi(2n-1)}{h}\phi_1(x,t)\right]$$

$$\Phi_{nm}^{(1)}(t)=-K'^{(1)}_m(l)\varphi_{2n}(t)+K'^{(1)}_m(0)\varphi_{1n}(t)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\pi m}{l}\left[\varphi_{1n}(t)-(-1)^n\varphi_{2n}(t)\right]$$

Підставляючи всі ці значення у розв’язок (4.7.63) та використовуючи формули (4.7.49). (4.7.51). (4.7.53). (4.7.56). (4.7.57), (4.7.58), одержимо:

$$u(x,y,t)=\frac{4}{lh}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{-a^2(\lambda_m^2+\mu_n^2)t}\int_0^l\int_0^h f(\xi,\eta)\sin\lambda_m\xi\sin\mu_n\eta d\eta d\xi+\right.$$

$$+\int_0^t e^{-a^2(\lambda_n^2+\mu_n^2)(t-\tau)}\left[\frac{a^2\pi m}{l}\int_0^h\left[(-1)^m\varphi_2(\eta,\tau)+\varphi_1(\eta,\tau)\right]\sin\mu_n\eta d\eta+\right.$$

$$+a^2\int_0^l\left[(-1)^n\phi_2(\xi,\tau)+\frac{\pi(2n-1)}{2h}\phi_1(\xi,\tau)\right]\sin\lambda_m\xi d\xi+$$

$$\left.\left.+\int_0^l\int_0^h F(\xi,\eta,\tau)\sin\lambda_m\xi\sin\mu_n\eta d\eta d\xi\right]d\tau\right\}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y=$$

$$=\int_0^l\int_0^h f(\xi,\eta)\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\times$$

$$\times\frac{2}{h}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a(2n-1)\pi}{2h}\right)^2 t}\sin\frac{(2n-1)\pi\eta}{2h}\sin\frac{(2m-1)\pi y}{2h}d\eta d\xi+$$

$$+\frac{\pi a^2}{l}\int_0^t d\tau\int_0^h\left[\varphi_2(\eta,\tau)\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}m\sin\frac{\pi mx}{l}+\right.$$

$$\left.+\varphi_1(\eta,\tau)\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}m\sin\frac{\pi mx}{l}\right]\times$$

$$\times\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi(2n-1)\eta}{2h}\sin\frac{\pi(2n-1)y}{2h}d\eta+$$

$$+a^2\int_0^t d\tau\int_0^l\left[\phi_2(\xi,\tau)\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi(2n-1)y}{2h}+\right.$$

$$\left.+\phi_1(\xi,\tau)\frac{\pi}{h^2}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2(t-\tau)}(2n-1)\sin\frac{\pi(2n-1)y}{2h}\right]\times$$

$$\times\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi m}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi m\xi}{l}\sin\frac{\pi mx}{l}d\xi+$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^l\int_0^h F(\xi,\eta,\tau)\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{m\pi\xi}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\times$$

$$\times\frac{2}{h}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a(2n-1)\pi}{2h}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi(2n-1)\xi}{2h}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2h}d\eta d\xi \quad (4.7.65)$$

Приймаючи до уваги формулу (4.7.33) можна одержати наступні тотожності:

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi n}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y+2kh)^2}{4a^2t}}=\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2 4t}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2h}2y+$$

$$+\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi n}{h}\right)^2 4t}\cos\frac{\pi ny}{h}+\frac{1}{h}$$

Повторно застосовуючи тотожність (4.7.33) до останнього раду у правій частині попередньої рівності, будемо мати:

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi n}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y+2kh)^2}{4a^2t}}=\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2 4t}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2h}2y+$$

$$+\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\sum_{k-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y+4kh)^2}{4a^2t}}.$$

Підстеляючи замість t і y відповідно $\frac{t}{4}$ і $\frac{y}{2}$, знайдемо, що

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2 4t}\cos\frac{\pi(2n-1)}{2h}2y=\frac{2}{a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y+4kh)^2}{4a^2t}}-$$

$$-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\sum_{k-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y+2kh)^2}{4a^2t}}=\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\sum_{k-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{(y+2kh)^2}{4a^2t}} \quad (4.7.65)$$

Диференціюючи останню тотожність за y, одержимо формулу:

$$\frac{\pi}{h^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi(2n-1)}{2h}\right)^2 t}(2n-1)\sin\frac{\pi(2n-1)}{h}y =$$

$$= \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}t^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(y+2kh)e^{-\frac{(y+2kh)^2}{4a^2t}} \qquad (4.7.66)$$

Представимо тепер у формулі (4.7.64) добуток синусів у вигляді різниці косинусів і використовуючи формулу

$$(-1)\sin\frac{\pi(2n-1)y}{2h} = \cos\frac{\pi(2n-1)}{2h}(y-h),$$

а також тотожності (4.7.15) - (4.7.17), (4.7.33) - (4.7.35), (4.7.65), (4.7.66). Тоді розв'язок (4.7.64) можна записати у вигляді:

$$u(x,y,t) = \int_0^l\int_0^h f(\xi,\eta)\frac{1}{4a^2\pi t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta d\xi -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^h \frac{\varphi_2(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\left[e^{-\frac{(x-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^h \frac{\varphi_1(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{\phi_2(\xi,\tau)}{2a\pi(t-\tau)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi+$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^l\frac{\phi_1(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m(y+2mh)e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l\int_0^h\frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta d\xi \qquad (4.7.67)$$

Як і у попередніх випадках, розв'язок виду (4.7.67) має істотні переваги у порівнянні з розв'язком (4.7.64): якщо обґрунтовувати розв'язок виду (4.7.67) достатньо потребувати, щоб всі задані функції були неперервними і, крім того, функція $F(x,y,t)$ задовольняла умові Гьольдера, отже для збіжності інтегралів і рядів, а також їх похідних у формулі (4.7.64), необхідно накласти умови диференційованості заданих функцій до визначеного порядку

Аналогічним чином можна розглядати і другі окремі випадки задаючи різні граничні умови.

Частина 5. Задачі теплопровідності у просторі

§ 1 *Задача Коші*

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F(x, y, z, t) \qquad \textbf{\textit{(5.1.1)}}$$

у області $(-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0)$ ***, яке задовольняє початковій умові***

$$u(x, y, z, t)\Big|_{t=0} = f(x, y.z) \qquad \textbf{\textit{(5.1.2)}}$$

і обмежена на нескінченності.

► Застосуємо перетворення Фур'є за змінною z :

$$u(x, y, s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isz} u(x, y, z, t)dz \qquad (5.1.3)$$

Отже замість задачі Коші (5.1.1) - (5.1.2) одержимо наступну задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - a^2 s^2 u + F(x, y, s, t) \qquad (5.1.4)$$

$$u(x, y, s, t)\Big|_{t=0} = f(x, y, s) \qquad (5.1.5)$$

яка після підстановки

$$u(x, y, s, t) = e^{-a^2 s^2 t}\tilde{} \qquad (5.1.6)$$

приймає вид:

$$\frac{\partial \tilde{}}{\partial t} = a \left(\frac{\tilde{}}{\partial x^2} + \frac{\tilde{}}{\partial y^2}\right) + e \qquad F(x, y, s, t) \qquad (5.1.7)$$

$$\tilde{} \qquad \Big|_{t=0} = f(x, y, s) \qquad (5.1.8)$$

Задача (5.1.7) - (5.1.8) з точністю до позначень співпадає з розглянутою раніше задачею (4.1.1) - (4.1.2), розв'язок якої задається формулою (4.1.6). Враховуючи підстановку (5.1.6) одержимо:

$$u(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2} f(\xi, \eta, s) e^{-a^2 s^2 t} d\xi d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^2} F(\xi,\eta,s,\tau)e^{-a^2s^2(t-\tau)}d\xi d\eta \quad (4.1.9)$$

Застосуємо загальне обернене перетворення Фур'є. Використовуючи формулу згортки, будемо мати:

$$u(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3} f(\xi,\eta,z)d\xi d\eta d\varsigma +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3} F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)d\xi d\eta d\varsigma \quad (5.1.10)$$

Для того, щоб формально знайдена функція (5.1.10) була розв'язком задачі Коші, достатньо, щоб функції $f(x,y,z)$ і $F(x,y,z,t)$ були непевними і, крім того, функція $F(x,y,z,t)$ задовольняла умові Гьольдера за першими трьома аргументами. ◄

§ 2. *Задачі теплопровідності для півпростору*

1⁰. Перша гранична задача теплопровідності

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \quad \textbf{(5.2.1)}$$

у області $(0<x<\infty, \quad -\infty<y<\infty, \quad -\infty<z<\infty, \quad t>0)$***, яке задовольняє початковій умові***

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y.z) \quad \textbf{(5.2.2)}$$

та граничній умові першого роду

$$u(x,y,z,t)\big|_{x=0}=\varphi(y,z,t) \quad \textbf{(5.2.3)}$$

і обмежена на нескінченності.

► Застосуємо за змінною z загальне перетворення Фур'є.

$$u(x,y,s,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{isz}u(x,y,z,t)dz \qquad (5.2.4)$$

і виконуючи підстановку (5.1.6) одержимо:

$$\frac{\partial\tilde{}}{\partial t}=a\left(\frac{\tilde{}}{\partial x^2}+\frac{\tilde{}}{\partial y^2}\right)+e \qquad F(x,y,s,t) \qquad (5.2.5)$$

$$\tilde{}\qquad\Big|_{t=0}=f(x,y,s) \qquad (5.2.6)$$

$$\tilde{}\qquad\Big|_{x=0}=\varphi(y,s,t)e^{a^2s^2t} \qquad (5.2.7)$$

Задача (5.2.5) - (5.2.7) аналогічна задачі , яка була розглянута раніше (4.2.1) - (4.2.3), розв’язок якої має вид (4.2.12). Приймаючи до уваги підстановку (5.1.6) одержимо:

$$u(x,y,s,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{4a^2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-a^2s^2t}\varphi(\eta,s,\tau)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\right]e^{-a^2s^2t}f(\xi,\eta,s)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^2}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-t)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]e^{-a^2s^2(t-\tau)}F(\xi,\eta,s,\tau)d\eta \qquad (5.2.8)$$

Застосовуючи обернене синус - перетворення Фур’є і користуючись формулою згортки, одержимо розв’язок задачі у вигляді:

$$u(x,y,z,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\eta,\varsigma,\tau)d\varsigma+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}\right]f(\xi,\eta,\varsigma)d\varsigma+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{\infty}d\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-t)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)d\varsigma \qquad (5.2.9)$$

Ті ж самі обмеження для заданих функцій, що і у попередньому параграфі, тобто: непевність цих функцій і крім того, виконання умов Гьольдера за просторовими координатами для вільного члена $F(x,y,z,t)$, дає можливість обґрунтування формально знайденому розв'язку (5.2.9), а також усім задачам, які будуть розглянуті нижче. Оговорювати це спеціально дедалі не будемо. ◄

2⁰. Третя гранична задача теплопровідності

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \qquad \textbf{(5.2.10)}$$

у області $(0<x<\infty,\quad -\infty<y<\infty,\quad -\infty<z<\infty,\quad t>0)$***, яке задовольняє початковій умові***

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y.z) \qquad \textbf{(5.2.11)}$$

та граничній умові третього роду

$$\left[\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}-hu(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{x=0}=\varphi(y,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.2.12)}}$$

і обмежена на нескінченності.

► Застосовуючи за змінною z загальне перетворення Фур'є (5.2.4) і використовуючи підстановку (5.1.6) одержимо замість (5.2.10) - (5.2.12) наступну задачу:

$$\frac{\partial \tilde{}}{\partial t}=a\left(\frac{\tilde{}}{\partial x^2}+\frac{\tilde{}}{\partial y^2}\right)+e \qquad F(x,y,s,t) \qquad (5.2.13)$$

$$\tilde{} \qquad \Big|_{t=0}=f(x,y,s) \qquad (5.2.14)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{}}{\partial x}-h\tilde{} \qquad \right]\Bigg|_{x=0}=e^{a^2s^2t}\varphi(y,s,t) \qquad (5.2.15)$$

Остання задача ідентична задачі (4.2.13) - (4.2.15). Враховуючи підстановки (5.1.6) одержимо:

$$u(x,y,s,t)=-2a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}G_2(x,y-\eta,t-\tau)e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi(\eta,s,\tau)d\eta+$$

$$+\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\left[G_2(x-\xi,y-\eta,t)+G_2(x+\xi,y-\eta,t)\right]e^{-a^2s^2t}f(\xi,\eta,s)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\left[G_2(x-\xi,y-\eta,t-\tau)+G_2(x+\xi,y-\eta,t-\tau)\right]e^{-a^2s^2(t-\tau)}F(\xi,\eta,s,\tau)d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}R_2(x+\xi,y-\eta,t-\tau)e^{-a^2s^2(t-\tau)}F(\xi,\eta,s,\tau)d\eta-$$

$$-\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}R_2(x+\xi,y-\eta,t)e^{-a^2s^2t}f(\xi,\eta,s)d\eta+$$

$$+a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}R_2(x,y-\eta,t-\tau)e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi(\eta,s,\tau)d\eta \qquad (5.2.16)$$

За допомогою оберненого перетворення Фур'є і формули згортки, знайдемо шуканий розв'язок у наступному вигляді:

$$u(x,y,z,t) = -2a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty} G_3(x,y-\eta,z-\varsigma,t-\tau)\varphi(\eta,\varsigma,\tau)d\varsigma +$$

$$+\int_0^{\infty} d\xi\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\left[G_3(x-\xi,y-\eta,z-\varsigma,t)+G_3(x+\xi,y-\eta,z-\varsigma,t)\right]f(\xi,\eta,\varsigma)d\varsigma +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} d\xi\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\left[G_3(x-\xi,y-\eta,z-\varsigma,t-\tau)+G_3(x+\xi,y-\eta,z-\varsigma,t-\tau)\right]F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)d\varsigma +$$

$$+a^2\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty} R_3(x,y-\eta,z-\varsigma,t-\tau)\varphi(\eta,\varsigma,\tau)d\varsigma -$$

$$-\int_0^{\infty} d\xi\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty} R_3(x+\xi,y-\eta,z-\varsigma,t)f(\xi,\eta,\varsigma)d\varsigma -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^{\infty} d\xi\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty} R_3(x+\xi,y-\eta,z-\varsigma,t-\tau)F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)d\varsigma \quad (5.2.17)$$

де

$$G_3(x,y,z,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}} \qquad (5.2.18)$$

$$R_3(x,y,z,t) = he^{hx+a^2h^2t-\frac{y^2+z^2}{4a^2t}}\cdot\frac{1}{4a^2\pi t}erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right) ◄$$

(5.2.19)

§ 3. *Задача теплопровідності для шару*

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \quad \textbf{(5.3.1)}$$

у області $(0 < x < l, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad t > 0)$***, яке задовольняє початковій умові***

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = f(x,y,z) \qquad \textbf{(5.3.2)}$$

та граничним умовам третього роду

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x} + \beta_1 u(x,y,z,t) \right] \Bigg|_{x=0} = \varphi(y,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.3.3)}}$$

$$\left[\alpha_2 \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x} + \beta_2 u(x,y,z,t) \right] \Bigg|_{x=l} = \phi(y,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.3.4)}}$$

► Застосовуючи загальне перетворення Фур’є за змінною z

$$u(x,y,s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,z,t) e^{isz} dz$$

і використовуючи підстановку (5.1.6), замість задачі (5.3.1) - (5.3.4) одержимо наступну задачу:

$$\frac{\partial \tilde{}}{\partial t} = a \left(\frac{\tilde{}}{\partial x^2} + \frac{\tilde{}}{\partial y^2} \right) + e \qquad F(x,y,s,t) \qquad (5.3.5)$$

$$\tilde{} \qquad \Big|_{t=0} = f(x,s,z) \qquad (5.3.6)$$

$$\left[\alpha_1 \frac{\partial \tilde{}}{\partial x} + \beta_1 \tilde{} \qquad \right] \Bigg|_{x=0} = e^{a^2 s^2 t} \varphi(y,s,t)$$

$$(5.3.7) \left[\alpha_2 \frac{\partial \tilde{}}{\partial x} + \beta_2 \tilde{} \qquad \right] \Bigg|_{x=l} = e^{a^2 s^2 t} \phi(y,s,t) \quad (5.3.8)$$

Задача (5.3.5) - (5.3.8) співпадає з задачею (4.3.1) – (4.3.4), якщо у останній покласти:

$$\left. \begin{array}{l} u = \tilde{} \qquad {}^{2}s^{2}t\, F(x,y,s,t), \\ f = f, \quad \varphi = e^{a^2 s^2 t} \varphi, \quad \phi = e^{a^2 s^2 t} \phi \end{array} \right\} \qquad (5.3.9)$$

Розглянемо окремі випадки.

1⁰. Перша гранична задача

Нехай $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1$. Розв’язок (4.3.10) першої граничної задачі з урахуванням (5.3.9) та підстановки (5.1.6) прийме вигляд:

$$u([x,y,s,t)=\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2t}\,\frac{f(\xi,\eta,s)}{4a^2\pi t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi(\eta,s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{(x+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2(t-\tau)}\phi(\eta,s,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{4a^2\pi(t-\tau)}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2(t-\tau)}\,\frac{F(\xi,\eta,s,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\eta$$

Після застосування оберненого перетворення Фур'є, одержимо розв'язок першої граничної задачі у наступному вигляді:

$$u(x,y,z,t)=\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\eta,\varsigma,\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}e^{-\frac{(x+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\varsigma-$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\eta,\varsigma,\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x-l+2kl}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\varsigma$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}} - \right.$$

$$\left. -e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\varsigma \qquad (5.3.10)$$

2^0. *Друга гранична задача.*

Покладаємо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0$. Розв'язок (4.3.12) другої граничної задачі з урахуванням позначень (5.3.9) та підстановки (5.1.6) прийме вигляд:

$$u([x,y,s,t) = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2t} \frac{f(\xi,\eta,s)}{4a^2\pi t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} + \right.$$

$$\left. +e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} \right] d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}\varphi(\eta,s,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-a^2s^2(t-\tau)}\phi(\eta,s,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2(t-\tau)} \frac{F(\xi,\eta,s,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} + \right.$$

$$+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\Bigg]d\eta \qquad (5.3.11)$$

Після застосування оберненого перетворення Фур'є, одержимо шуканий розв'язок:

$$u(x,y,z,t)=\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}+$$

$$+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}\Bigg]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\eta,\varsigma,\tau)}{4a\left(\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\eta,\varsigma,\tau)}{4a\left(\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}+$$

$$+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\Bigg]d\varsigma \qquad (5.3.12)$$

3^0. Загальна гранична задача

Задача (5.3.5) - (5.3.8) при довільних α_i і β_i ідентична задачі (4.3.1) - (4.3.4), розв'язок (4.3.15) якої з урахуванням (5.3.9) і (5.3.6) прийме вид:

$$u(x,y,s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y,s,t)K_n(x) \qquad (5.3.13)$$

де ядро $K_n(x)$ визначається за формулою (3.3.81)

$$u_n(y,s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2 t-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2 t}-a^2s^2t}}{2a\sqrt{\pi t}}u_n(\eta,s,0)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-a^2s^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[a^2\Phi_n(\eta,s,\tau)+F_n(\eta,s,\tau)\right]d\eta$$

$$u_n(y,s,0)=\int_0^l f(\xi,\eta,s)K_n(\xi)d\xi\,,$$

$$F(y,s,t)=\int_0^l e^{a^2s^2t}F_n(\xi,y,s,t)K_n(\xi)d\xi$$

$$\Phi_n(y,s,t)=\begin{cases}\left[\frac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(y,s,t)-\frac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(y,s,t)\right]e^{a^2s^2t},\ \textit{якщо}\ ,\alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0,\\ \left[-\frac{1}{\beta_2}K'_n(l)\phi(y,s,t)-\frac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(y,s,t)\right]e^{a^2s^2t},\ \textit{якщо}\ ,\alpha_1\neq0,\beta_2\neq0,\\ \left[\frac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(y,s,t)+\frac{1}{\beta_1}K'_n(0)\varphi(y,s,t)\right]e^{a^2s^2t},\ \textit{якщо}\ ,\alpha_2\neq0,\beta_1\neq0,\\ \left[-\frac{1}{\beta_2}K'_n(l)\widetilde{\phi(y},s,t)+\frac{1}{\alpha_1}K'_n(0)\widetilde{\varphi(y},s,t)\right]e^{a^2s^2t},\ \textit{якщо}\ ,\beta_1\neq0,\beta_2\neq0\end{cases}$$

λ_n є корені рівняння (3.3.78), тобто

$$(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\lambda\cos\lambda l+(\beta_1\beta_2+\alpha_1\alpha_2\lambda^2)\sin\lambda l=0 \quad (3.3.78)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є, одержимо розв'язок у вигляді:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y,z,t)K_n(x) \qquad (5.3.14)$$

де

$$u_n(y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2 t-\frac{(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}u_n(\eta,\varsigma,0)d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\frac{e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)-\frac{(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{4a^2\pi(t-\tau)}\left[a^2\Phi_n(\eta,\varsigma,\tau)+F_n(\eta,\varsigma,\tau)\right]d\varsigma\ ,$$

$$u_n(y,z,0)=\int_0^l f(\xi,y,z)K_n(\xi)d\xi$$

$$F_n(y,z,t)=\int_0^l F(\xi,y,z,t)K_n(\xi)d\xi$$

$$\Phi_n(y,z,t)=\begin{cases}\left[\frac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(y,z,t)-\frac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(y,z,t)\right], \text{якщо}\ ,\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0,\\ \left[-\frac{1}{\beta_2}K'_n(l)\phi(y,z,t)-\frac{1}{\alpha_1}K_n(0)\varphi(y,z,t)\right], \text{якщо}\ ,\alpha_1\neq 0,\beta_2\neq 0,\\ \left[\frac{1}{\alpha_2}K_n(l)\phi(y,z,t)+\frac{1}{\beta_1}K'_n(0)\varphi(y,z,t)\right], \text{якщо}\ ,\alpha_2\neq 0,\beta_1\neq 0,\\ \left[-\frac{1}{\beta_2}K'_n(l)\phi(y,z,t)+\frac{1}{\alpha_1}K'_n(0)\varphi(y,z,t)\right], \text{якщо}\ ,\beta_1\neq 0,\beta_2\neq 0\end{cases}$$

§ 4. *Граничні задачі теплопровідності для паралелепіпеда*

1⁰. Перша гранична задача

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t)\quad \textbf{(5.4.1)}$$

у області $(0<x<l,\quad 0<y<h,\quad 0<z<d,\quad t>0)$,

яке задовольняє початковій умові

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z)\qquad \textbf{(5.4.2)}$$

та граничним умовам першого роду

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t)\big|_{x=0} &= \varphi_1(y,z,t) \\ u(x,y,z,t)\big|_{x=l} &= \varphi_2(y,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.4.3)}}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t)\big|_{y=0} &= \phi_1(x,z,t) \\ u(x,y,z,t)\big|_{y=h} &= \phi_2(x,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.4.4)}}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t)\big|_{z=0} &= \omega_1(x,y,t) \\ u(x,y,z,t)\big|_{z=d} &= \omega_2(x,y,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.4.5)}}$$

Будемо шукати розвозок задачі у вигляді ряду Фур'є за синусами (за власними функціями першої граничної однорідної задачі)

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y,t)\sin\frac{n\pi z}{d} \qquad (5.4.6)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів Фур'є

$$u_n(x,y,t) = \frac{2}{d}\int_0^d u(x,y,z,t)\sin\frac{n\pi z}{d}\,dz \qquad (5.4.7)$$

помножимо обидві частини рівності (5.4.1) на $\frac{2}{d}\sin\frac{n\pi z}{d}$ і проінтегруємо по z у проміжку $[0,d]$. Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ і враховуючи граничні умови (5.4.5) одержимо:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 u_n(x,y,t) + \Phi_n(x,y,t) \quad (5.4.8)$$

де

$$\left.\begin{aligned} \Phi_n(x,y,t) &= \frac{2a^2 n\pi}{d^2}\left[\omega_1(x,y,t) - (-1)^n\omega_2(x,y,t)\right] + F_n(x,y.t), \\ F_n(x,y,t) &= \frac{2}{d}\int_0^d F(x,y,z,t)\sin\frac{n\pi z}{d}\,dz \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.9)$$

Початкові та граничні умови для рівняння (5.4.8) одержуються з (5.4.2) - (5.4.4). Вони мають вид:

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = f(x,y,z) \qquad (5.4.10)$$

та граничним умовам першого роду

$$\left.\begin{aligned} u_n(x,y,t)\big|_{x=0} &= \varphi_{1n}(y,t) \\ u_n(x,y,t)\big|_{x=l} &= \varphi_{2n}(y,t) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.11)$$

$$\left.\begin{aligned} u_n(x,y,t)\big|_{y=0} &= \phi_{1n}(x,t) \\ u_n(x,y,t)\big|_{y=h} &= \phi_{2n}(x,t) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.12)$$

де

$$\left.\begin{aligned} f_n(x,y) &= \frac{2}{d}\int_0^d f(x,y,z)\sin\frac{n\pi z}{d}\,dz \\ \varphi_{in}(y,t) &= \frac{2}{d}\int_0^d \varphi_i(y,z,t)\sin\frac{n\pi z}{d}\,dz \\ \phi_{in}(x,t) &= \frac{2}{d}\int_0^d \phi_i(x,z,t)\sin\frac{n\pi z}{d}\,dz \end{aligned}\right\} \ (i=1,2) \qquad (5.4.13)$$

Виконуючи підстановку

$$u_n(x,y,t) = v_n(x,y,t)e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 t} \qquad (5.4.14)$$

Одержимо для $v_n(x,y,t)$ задачу, яка співпадає з розглянутою задачею (4.5.1) - (4.5.4) при

$$\left.\begin{aligned} &v_n = u_n e^{\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 t}, \quad \Phi_n = F, \quad f_n = f, \\ &\varphi_i = \varphi_{in} e^{\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 t}, \quad \phi_i = \phi_{in} e^{\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 t}, i=1,2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.15)$$

Використовуючи розв’язок (4.5.18) задачі (4.5.1) - (4.5.4) і враховуючи (5.4.14) і (5.4.15) будемо мати:

$$u_n(x,y,t) = \int_0^l d\xi \int_o^h \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 t} f_n(\xi,\eta)}{4a^2\pi t} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2 t}}\right]\times$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+\int_0^t d\tau\int_o^h\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2(t-\tau)}\varphi_{1n}(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_o^h\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2(t-\tau)}\varphi_{2n}(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+\int_0^t d\tau\int_0^l\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2(t-\tau)}\phi_{1n}(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y+2mh)e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi-$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2(t-\tau)}\phi_{2n}(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y-h+2mh)e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_o^h\frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2(t-\tau)}\Phi_n(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta\quad(5.4.16)$$

Підставимо у формулу (5.4.16) значення коефіцієнтів Фур'є (5.4.9) і (5.4.13), після чого одержаний вираз підставимо у розв'язок (5.4.6), користуючись формулами (4.5.15) - (4.5.17), у яких замість y,η,h слід писати z,ς,d , одержимо шуканий розв'язок задачі у вигляді

$$u(x,y,z,t)=\int_0^l d\xi\int_0^h d\eta\int_0^d \frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2t}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_o^h d\eta\int_0^d\frac{\varphi_1(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^h d\eta\int_0^d\frac{\varphi_2(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau}}-e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^d\frac{\phi_1(\xi,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y+2mh)e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^d\frac{\phi_2(\xi,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y-h+2mh)e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_0^h \frac{\omega_1(\xi,\eta,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z+2nd)e^{-\frac{(z+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_0^h \frac{\omega_2(\xi,\eta,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-d+2nd)e^{-\frac{(z-d+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_o^h d\eta \int_0^d \frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma \quad (5.4.17)$$

2^0. Друга гранична задача

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \quad \textbf{\textit{(5.4.18)}}$$

у паралелепіпеді $(0<x<l, \quad 0<y<h, \quad 0<z<d, \quad t>0)$,

яке задовольняє початковій умові

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = f(x,y,z) \qquad \textbf{\textit{(5.4.19)}}$$

та граничним умовам першого роду

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} &= \varphi_1(y,z,t) \\ \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l} &= \varphi_2(y,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.4.20)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}\bigg|_{y=0} &= \phi_1(x,z,t) \\ \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}\bigg|_{y=h} &= \phi_2(x,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.4.21)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= \omega_1(x,y,t) \\ \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=d} &= \omega_2(x,y,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.4.22)}}$$

Шуканий розвозок задачі представимо у вигляді ряду Фур'є за косинусами (за власними функціями другої граничної однорідної задачі)

$$u(x,y,z,t) = \frac{u_0(x,y,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y,t)\cos\frac{n\pi z}{d} \qquad (5.4.23)$$

з невідомими коефіцієнтів Фур'є

$$u_n(x,y,t) = \frac{2}{d}\int_0^d u_n(x,y,z,t)\cos\frac{n\pi z}{d}\,dz\,,\ n = 1,2,... \quad (5.4.24)$$

Для їх визначення помножимо обидві частини рівності (5.4.1) на $\frac{2}{d}\cos\frac{n\pi z}{d}$ і проінтегруємо за змінною z у проміжку $[0,d]$.

Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ і враховуючи граничні умови (5.4.22) будемо мати:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 u_n(x,y,t) + \Phi_n(x,y,t) \quad (5.4.25)$$

де

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_n(x,y,t)=-\frac{2a^2}{d}\left[\omega_1(x,y,t)-(-1)^n\omega_2(x,y,t)\right]+F_n(x,y.t),\\&F_n(x,y.t)=\frac{2}{d}\int_0^d F(x,y,z,t)\sin\frac{n\pi z}{d}dz\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.26)$$

Початкові та граничні умови для рівняння (5.4.25) одержуються з (5.4.20) - (5.4.21) мають вид:

$$u_n(x,y,t)\Big|_{t=0}=f_n(x,y)\qquad(5.4.22)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial u_n(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_{1n}(y,t)\\&\left.\frac{\partial u_n(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=\varphi_{2n}(y,t)\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.23)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial u_n(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=0}=\phi_{1n}(x,t)\\&\left.\frac{\partial u_n(x,y,t)}{\partial y}\right|_{y=h}=\phi_{2n}(x,t)\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.24)$$

де

$$\left.\begin{aligned}&f_n(x,y)=\frac{2}{d}\int_0^d f(x,y,z)\cos\frac{n\pi z}{d}dz\\&\varphi_{in}(y,t)=\frac{2}{d}\int_0^d \varphi_i(y,z,t)\cos\frac{n\pi z}{d}dz\\&\phi_{in}(x,t)=\frac{2}{d}\int_0^d \phi_i(x,z,t)\cos\frac{n\pi z}{d}dz\end{aligned}\right\}\ (i=1,2)\qquad(5.4.25)$$

За допомогою підстановки (5.4.14) і позначень (5.4.15) задача зводиться до вже розглянутої задачі (4.5.19) –(4.5.22), рішення якої має вид (4.5.36). Враховуючи (5.4.14) і (5.4.15) цей розв’язок запишеться наступним чином:

$$u_n(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_o^h \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 t} f_n(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta \;-\int_0^t d\tau\int_o^h \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 (t-\tau)}\varphi_{1n}(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_o^h \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 (t-\tau)}\varphi_{2n}(\eta,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta \;-\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 (t-\tau)}\phi_{1n}(\xi,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 (t-\tau)}\phi_{2n}(\xi,\tau)}{2\pi(t-\tau)}\times\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_o^h \frac{e^{-\left(\frac{an\pi}{d}\right)^2 (t-\tau)}F_n(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]d\eta \quad (5.4.26)$$

Підставляючи цей вираз у розв’язок (5.4.23), використовуючи позначення (5.4.25) і застосовуючи формули (4.5.33) - (4.5.35) з заміною там y,η,h відповідно на z,ς,d одержимо шуканий розв’язок задачі:

$$u(x,y,z,t)=\int_0^l d\xi\int_0^h d\eta\int_0^d \frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2t}}\right]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_o^h d\eta\int_0^d\frac{\varphi_1(\eta,\varsigma,\tau)}{4a^2\left[\pi(t-\tau)\right]^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^h d\eta\int_0^d\frac{\varphi_2(\eta,\varsigma,\tau)}{4a^2\left[\pi(t-\tau)\right]^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau}}+e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^d\frac{\phi_1(\xi,\varsigma,\tau)}{4a^2\left[\pi(t-\tau)\right]^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^d\frac{\phi_2(\xi,\varsigma,\tau)}{4a^2\left[\pi(t-\tau)\right]^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^h \frac{\omega_1(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\left[\pi(t-\tau)\right]^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^h \frac{\omega_2(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\left[\pi(t-\tau)\right]^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-d+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_o^h d\eta\int_0^d \frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma+2nd)^2}{4a(t-\tau)}}+e^{-\frac{(z+\varsigma+2nd)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma$$

(5.4.27)

3^0. Загальна крайова задача

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \quad \textbf{(5.4.28)}$$

у паралелепіпеді $(0<x<l,\quad 0<y<h,\quad 0<z<d,\quad t>0)$,
з початковою умовою

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z) \qquad \textbf{(5.4.29)}$$

та граничними умовам загального виду

$$\left.\begin{aligned}\left[\alpha_1\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+\beta_1 u(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{x=0}&=\varphi_1(y,z,t)\\\left[\alpha_2\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+\beta_2 u(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{x=l}&=\varphi_2(y,z,t)\end{aligned}\right\}\quad\textbf{\textit{(5.4.30)}}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\gamma_1\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+\delta_1 u(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{y=0}&=\phi_1(x,z,t)\\\left[\gamma_2\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+\delta_2 u(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{y=h}&=\phi_2(x,z,t)\end{aligned}\right\}\quad\textbf{\textit{(5.4.31)}}$$

$$\left.\begin{aligned}\left[\sigma_1\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+\rho_1 u(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{z=0}&=\phi_1(x,y,t)\\\left[\sigma_2\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+\rho_2 u(x,y,z,t)\right]\Bigg|_{z=d}&=\phi_2(x,y,t)\end{aligned}\right\}\quad\textbf{\textit{(5.4.32)}}$$

► Розв’язок задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур’є

$$u(x,y,z,t)=\sum_{k=1}u_k(x,y,t)K_k^{(3)}(z) \qquad (5.4.33)$$

де $K_k^{(3)}(z)$ є власні функції, аналогічні функціям одномірної граничної задачі. Вони визначаються за формулою

$$K_k^{(3)}(z) \ = A_k^{(3)}\cos\nu_k z+B_k^{(3)}\sin\nu_k z \qquad (5.4.34)$$

Власні числа ν_k задовольняють рівнянню

$$(\sigma_2\rho_1-\sigma_1\rho_2)\nu_k\cos\nu_k d+(\rho_1\rho_2+\sigma_1\sigma_2\nu_k^2)\sin\nu_k d=0 \qquad (5.4.35)$$

Тут $k=1,2,3,\ldots$ а коефіцієнти $A_k^{(3)}$ і $B_k^{(3)}$ визначаються з системи двох алгебраїчних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1 A_k^{(3)}+\sigma_1\nu_k B_k^{(3)}=0,\\&\int_0^d\left(K_k^{(3)}(z)\right)^2dz=1\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.36)$$

Функції $K_k^{(3)}(z)$ задовольняють диференціальному рівнянню

$$K''^{(3)}_k(z) + \nu_k^2 K_k^{(3)}(z) = 0 \qquad (5.4.37)$$

і граничним умовам

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 K'^{(3)}_k(0) + \rho_1 K_k^{(3)}(0) = 0 \\ &\sigma_2 K'^{(3)}_k(d) + \rho_2 K_k^{(3)}(d) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.38)$$

Ці функції утворюють ортогональну і нормовану систему у області $(0 < z < d)$. Звідси випливає, що коефіцієнти Фур'є $u_k(x,y,t)$ у формулі (5.4.33) представлені у вигляді:

$$u_k(x,y,t) = \int_0^d u(x,y,z,t) K_k^{(3)}(z)dz \qquad (5.4.39)$$

Для визначення цих коефіцієнтів помножимо обидві частини рівняння (5.4.28) на $K_k^{(3)}(z)$ і проінтегруємо його у проміжку $[0,d]$. Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ і враховуючи формули (5.4.37) - (5.4.38), а також умови (5.4.32), одержимо наступні рівняння відносно коефіцієнтів Фур'є $u_k(x,y,t)$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}\right) - a^2\nu_k^2 u_n(x,y,t) + \Phi_k^{(3)}(x,y,t) + F_k(x,y,t)$$

(5.4.40)

де

$$\Phi_k^{(3)}(x,y,t) = \begin{cases} \frac{a^2}{\sigma_2} K_k^{(3)}(d)\omega_2(x,y,t) - \frac{a^2}{\sigma_1} K_k^{(3)}(0)\omega_1(x,y,t), \text{ якщо } \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0 \\ -\frac{a^2}{\rho_2} K_k^{(3)}{}'(d)\omega_2(x,y,t) - \frac{a^2}{\sigma_1} K_k^{(3)}(0)\omega_1(x,y,t), \text{ якщо } \sigma_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0 \\ \frac{a^2}{\sigma_2} K_k^{(3)}(d)\omega_2(x,y,t) + \frac{a^2}{\rho_1} K_k^{(3)}{}'(0)\omega_1(x,y,t), \text{ якщо } \rho_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0 \\ -\frac{a^2}{\rho_2} K_k^{(3)}{}'(d)\omega_2(x,y,t) - \frac{a^2}{\rho_1} K_k^{(3)}{}'(0)\omega_1(x,y,t), \text{ якщо } \rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0 \end{cases} \qquad (5.4.41)$$

$$F_k(x,y,t) = \int_0^d F(x,y,z,t) K_k^{(3)}(z)dz \qquad (5.4.42)$$

Початкові та граничні умови приймуть вид:

$$u_k(x,y,t)\Big|_{t=0} = f_k(x,y) \qquad (5.4.43)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\alpha_1 \frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial x} + \beta_1 u_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=0} = \varphi_{1k}(y,t) \\ &\left[\alpha_2 \frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial x} + \beta_2 u_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=l} = \varphi_{2k}(y,t) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.44)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\gamma_1 \frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial x} + \delta_1 u_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{y=0} = \phi_{1k}(x,t) \\ &\left[\gamma_2 \frac{\partial u_k(x,y,t)}{\partial x} + \delta_2 u_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{y=h} = \phi_{2k}(x,t) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.45)$$

$$\left.\begin{aligned} &f_k(x,y) = \int_0^d f(x,y,z) K_k^{(3)}(z)\,dz, \\ &\varphi_{ik}(y,t) = \int_0^d \varphi_i(y,z,t) K_k^{(3)}(z)\,dz \\ &\phi_{ik}(x,t) = \int_0^d \phi_i(x,z) K_k^{(3)}(z)\,dz \end{aligned}\right\} (i=1,2)$$

(5.4.46)

Введемо підстановку

$$u_k(x,y,t) = e^{-a^2 \nu_k^2 t} v_k(x,y,t) \qquad (5.4.47)$$

Тоді відносно $v_k(x,y.t)$ одержимо наступну задачу:

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2}\right) + e^{a^2 \nu_k^2 t}\left[\Phi_k^{(3)}(x,y,t) + F_k(x,y,t)\right] \qquad (5.4.48)$$

$$v_k(x,y,t)\Big|_{t=0} = f_k(x,y) \qquad (5.4.49)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\alpha_1 \frac{\partial v_k(x,y,t)}{\partial x} + \beta_1 v_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=0} = e^{a^2 \nu_k^2 t}\varphi_{1k}(y,t)\\
&\left[\alpha_2 \frac{\partial v_k(x,y,t)}{\partial x} + \beta_2 v_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{x=l} = e^{a^2 \nu_k^2 t}\varphi_{2k}(y,t)
\end{aligned}\right\} \quad (5.4.50)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\gamma_1 \frac{\partial v_k(x,y,t)}{\partial x} + \delta_1 v_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{y=0} = e^{a^2 \nu_k^2 t}\phi_{1k}(x,t)\\
&\left[\gamma_2 \frac{\partial v_k(x,y,t)}{\partial x} + \delta_2 v_k(x,y,t)\right]\Bigg|_{y=h} = e^{a^2 \nu_k^2 t}\phi_{2k}(x,t)
\end{aligned}\right\} \quad (5.4.51)$$

Одержана задача співпадає з вже розглянутою задачею (4.5.37) - (4.5.40), якщо покласти:

$$\left.\begin{aligned}
&v_k = u, \quad F = e^{a^{2\nu_k^2 t}}\left[\Phi_k^{(3)}(x,y,t) + F_k(x,y,t)\right],\\
&f = f_k, \quad \varphi_i = e^{a^{2\nu_k^2 t}}\varphi_{ik}, \quad \phi_i = e^{a^{2\nu_k^2 t}}\phi_{ik}
\end{aligned}\right\} \quad (5.4.52)$$

Її розв'язок визначається формулою (4.5.63), яка з урахуванням (5.4.51), (5.4.46), (5.4.42) і підстановкою (5.4.47) перетворюється до виду

$$u_k(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{knm}(t) K_m^{(1)}(x) K_n^{(1)}(y) \quad (5.4.53)$$

$$u_{knm}(t) = u_{knm}(0) e^{-a^2(\lambda_m^2 + \mu_n^2 + \nu_k^2)t} +$$

$$+\int_0^T e^{-a^2\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 + \nu_k^2\right)(t-\tau)}\left[a^2\Phi_{knm}^{(1)}(\tau) + \Phi_{knm}^{(2)}(\tau) + \Phi_{knm}^{(3)}(\tau) + F_{knm}(\tau)\right]d\tau,$$

$$u_{knm}(0) = \int_0^l d\xi \int_0^h d\eta \int_0^d f(\xi,\eta,\varsigma) K_m^{(1)}(\xi) K_n^{(2)}(\eta) K_k^{(3)}(\varsigma) d\varsigma$$

$$F_{knm}(t) = \int_0^l d\xi \int_0^h d\eta \int_0^d F(\xi,\eta,\varsigma,t) K_m^{(1)}(\xi) K_n^{(2)}(\eta) K_k^{(3)}(\varsigma) d\varsigma$$

$$\Phi_{knm}^{(3)}(t) = \int_0^l d\xi \int_0^h \Phi_k^{(3)}(\xi,\eta,t) K_m^{(1)}(\xi) K_n^{(2)}(\eta) d\eta$$

$$\Phi_{knm}^{(2)}(t)=\begin{cases}\frac{a^2}{\gamma_2}K_n^{(2)}(h)\phi_{2km}(t)-\frac{a^2}{\gamma_1}K_n^{(2)}(0)\phi_{1km}(t),\ \textit{якщо}\ \gamma_1\neq 0,\gamma_2\neq 0\\ -\frac{a^2}{\delta_2}K_n^{(2)}{}'(h)\phi_{2km}(t)-\frac{a^2}{\gamma_1}K_n^{(2)}(0)\phi_{1km}(t),\ \textit{якщо}\ \gamma_1\neq 0,\ \delta_2\neq 0\\ \frac{a^2}{\gamma_2}K_n^{(2)}(h)\phi_{2km}(t)+\frac{a^2}{\delta_1}K_n^{(2)}{}'(0)\phi_{1km}(t),\ \textit{якщо}\ \delta_1\neq 0,\gamma_2\neq 0\\ -\frac{a^2}{\delta_2}K_n^{(2)}{}'(h)\phi_{2km}(t)-\frac{a^2}{\delta_1}K_k^{(3)}{}'(0)\phi_{1km}(t),\ \textit{якщо}\ \delta_1\neq 0,\delta_2\neq 0\end{cases}$$

$$\phi_{ikm}(t)=\int_0^l d\xi\int_0^d \phi_i(\xi,\varsigma,t)K_m^{(1)}(\xi)K_k^{(3)}(\varsigma)d\varsigma\ \left(i=1,2\right)$$

$$\Phi_{knm}^{(1)}(t)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha_2}K_m^{(1)}(l)\varphi_{2kn}(t)-\frac{1}{\alpha_1}K_m^{(1)}(0)\varphi_{1kn}(t),\ \textit{якщо}\ \alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0\\ -\frac{1}{\beta_2}K_m^{(1)}{}'(l)\varphi_{2kn}(t)-\frac{1}{\alpha_1}K_m^{(1)}(0)\varphi_{1kn}(t),\ \textit{якщо}\ \alpha_1\neq 0,\beta_2\neq 0\\ \frac{1}{\alpha_2}K_m^{(1)}(l)\varphi_{2kn}(t)-\frac{1}{\beta_1}K_m^{(1)}{}'(0)\varphi_{1kn}(t),\ \textit{якщо}\ \beta_1\neq 0,\alpha_2\neq 0\\ -\frac{1}{\beta_2}K_m^{(1)}{}'(l)\varphi_{2kn}(t)+\frac{1}{\beta_1}K_m^{(1)}{}'(0)\varphi_{1kn}(t),\ \textit{якщо}\ \beta_1\neq 0,\beta_2\neq 0\end{cases}$$

$$\varphi_{ikm}(t)=\int_0^h d\eta\int_0^d \varphi_i(\eta,\varsigma,t)K_n^{(2)}(\eta)K_k^{(3)}(\varsigma)d\varsigma\ \left(i=1,2\right)$$

Функції $K_n^{(1)}(x)$, $K_m^{(2)}(y)$ і власні числа λ_m, μ_n визначаються за формулами (4.5.60), (4.5.42), (4.5.61), (4.5.43).

Підставляючи значення коефіцієнта Фур'є (5.4.53) у формулу (5.4.33), одержимо шуканий розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,y,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{knm}(t)K_m^{(1)}(x)K_n^{(2)}(y)K_k^{(3)}(z) \qquad (5.4.54)$$

Якщо яка-небудь з пар чисел $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$, $\left(\beta_1,\beta_2\right)$, $\left(\sigma_1,\sigma_2\right)$, $\left(\gamma_1,\gamma_2\right)$, $\left(\delta_1,\delta_2\right)$, $\left(\rho_1,\rho_2\right)$ дорівнюється нулю, тоді, користуючись тотожностями (4.5.15) - (4.5.17), (4.5.33) - (4.5.35) можна відповідні тригонометричні члени ряду перетворити у експоненціальні аналогічно тому, як це було зроблено для першої і другої граничних задач.

§ 5. *Граничні задачі для напівобмеженого бруса, чверті шару, однієї восьмої простору*

1^0. *Розповсюдження температури у напівобмеженому брусі*

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F(x,y,z,t) \quad \textbf{(5.5.1)}$$

у області $(0 < x < l, \quad 0 < y < h, \quad 0 < z < \infty, \quad t > 0)$***,***

яке задовольняє початковій умові

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = f(x,y,z) \qquad \textbf{(5.5.2)}$$

та граничним умовам першого роду

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t)\big|_{x=0} &= \varphi_1(y,z,t) \\ u(x,y,z,t)\big|_{x=l} &= \varphi_2(y,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.5.3)}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t)\big|_{y=0} &= \phi_1(x,z,t) \\ u(x,y,z,t)\big|_{y=h} &= \phi_2(x,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.5.4)}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{z=0} = \omega_1(x,y,t) \qquad \textbf{(5.5.5)}$$

Обмежений розв'язок поставленої задачі, при $z \to \infty$, можна одержати з розв'язку (5.4.17) першої граничної задачі для паралелепіпеда находячи границю при $d \to \infty$. При цьому всі доданки у сумах з індексами n пропадуть виключно доданка, який відповідає значенню $n = 0$, і розв'язок задачі (5.5.1) - (5.5.5) прийме вид:

$$u(x,y,z,t) = \int_0^l d\xi \int_0^h d\eta \int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2t}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_o^h d\eta\int_0^\infty\frac{\varphi_1(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^h d\eta\int_0^\infty\frac{\varphi_2(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty\frac{\phi_1(\xi,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y+2mh)e^{-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty\frac{\phi_2(\xi,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(y-h+2mh)e^{-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^h \frac{\omega_1(\xi,\eta,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]ze^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_o^h d\eta\int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma \qquad (5.5.12)$$

Розв’язок другої граничної задачі можна одержати аналогічним чином використовуючи формулу (5.4.27).

2^0. Розповсюдження температури у чверті шару

Постановка задачі. ***Найти розв’язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t) \quad \textbf{\textit{(5.5.7)}}$$

у області $(0<x<l,\quad 0<y<\infty,\quad 0<z<\infty,\quad t>0)$***,***
яке задовольняє початковій умові

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z) \qquad \textbf{\textit{(5.5.8)}}$$

та граничним умовам першого роду

$$\left.\begin{aligned}u(x,y,z,t)\big|_{x=0}=\varphi_1(y,z,t)\\ u(x,y,z,t)\big|_{x=l}=\varphi_2(y,z,t)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.5.9)}}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{y=0}=\phi_1(x,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.5.10)}}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{z=0}=\omega_1(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(5.5.11)}}$$

Треба знайти розв’язок $u(x,y,z,t)$, який обмежений при $y\to\infty$ і $z\to\infty$. Цей розв’язок може бути одержаний з формули (5.5.6) переходячи до границі при $h\to\infty$:

$$u(x,y,z,t)=\int_0^l d\xi\int_0^\infty d\eta\int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2t}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_o^\infty d\eta\int_0^\infty\frac{\varphi_1(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)e^{-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^\infty d\eta\int_0^\infty\frac{\varphi_2(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)e^{-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty\frac{\phi_1(\xi,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times ye^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma-$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l d\xi\int_0^\infty\frac{\omega_1(\xi,\eta,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]ze^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_o^\infty d\eta \int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+\eta^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\varsigma \qquad (5.5.12)$$

Розв'язок другої граничної задачі можна одержати з (5.4.27), якщо перейти до границі при $d \to \infty$ і при $h \to \infty$.

3^0. Розповсюдження температури у однієї восьмої простору

Постановка задачі. ***Найти розв'язок рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(x,y,z,t) \quad \textbf{\textit{(5.5.13}}$$

у області $(0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty, \quad 0 < z < \infty, \quad t > 0)$***,***
з початковою умовою

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0} = f(x,y,z) \qquad \textbf{\textit{(5.5.14)}}$$

та граничним умовам першого роду

$$u(x,y,z,t)\Big|_{x=0} = \varphi_1(y,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.5.15)}}$$

$$u(x,y,z,t)\Big|_{y=0} = \phi_1(x,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.5.16)}}$$

$$u(x,y,z,t)\Big|_{z=0} = \omega_1(x,y,t) \qquad \textbf{\textit{(5.5.17)}}$$

розв'язок якої обмежений на нескінченності.

► Шуканий розв'язок одержимо з формули (5.5.12) знаходячи границю при $l \to \infty$:

$$u(x,y,z,t) = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \int_0^\infty \frac{f(\xi,\eta,\varsigma)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2t}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_o^\infty d\eta\int_0^\infty \frac{\varphi_1(\eta,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\; xe^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+\int_0^t d\tau\int_0^\infty d\xi\int_0^\infty \frac{\phi_1(\xi,\varsigma,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\; ye^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty d\xi\int_0^\infty \frac{\omega_1(\xi,\eta,\tau)}{8a^3\pi^{3/2}(t-\tau)^{5/2}}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right] ze^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^\infty d\xi\int_o^\infty d\eta\int_0^\infty \frac{F(\xi,\eta,\varsigma,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^3}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\times$$

$$\times\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(y+\eta^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\left[e^{-\frac{(z-\varsigma)^2}{4a(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+\varsigma)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\varsigma \;◄ \qquad (5.5.18)$$

§ 6. *Розповсюдження температури у суцільному циліндрі*

1⁰. Розповсюдження температури у обмеженому циліндрі

Постановка задачі. ***Розв'язати рівняння теплопровідності, яке задано у циліндричній системі координат***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(r,\theta,z,t) \qquad \textbf{(5.6.1)}$$

в середині області

$$D\,(0<r<R,\quad 0<\theta<2\pi,\quad 0<z<d,\quad t>0)$$

з початковими умовами

$$u(r,\theta,z,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta,z) \qquad \textbf{(5.6.2)}$$

граничними умовами загального виду

$$\left[\alpha\frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\beta u(r,\theta,z,t)\right]_{r=R}=\varphi(\theta,z,t) \qquad \textbf{(5.6.3)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\gamma_1\frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\delta_1 u(r,\theta,z,t)\right]_{z=0}=\phi_1(r,\theta,t),\\&\left[\gamma_2\frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\delta_2 u(r,\theta,z,t)\right]_{z=d}=\phi_2(r,\theta,t)\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(5.6.4)}$$

та істотними умовами періодичності

$$u(r,\theta+2\pi,z,t)=u(r,\theta,z,t) \qquad \textbf{(5.6.5)}$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є

$$u(r,\theta,z,t)=\sum_{r=0}^{\infty}u_n(r,\theta,t)K_n(z) \qquad (5.6.6)$$

де $K_n(z)$ є власні функції одномірної граничної задачі, які задовольняють рівнянню

$$K_k''(z)+\mu_k K_k(z)=0\,, \qquad (5.6.7)$$

граничним умовам

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_1 K_k'(0)+\delta_1 K_k(0)=0,\\&\gamma_2 K_k'(d)+\delta_2 K_k(d)=0\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.8)$$

і визначаються за формулою

$$K_k(z) = A_k \cos \mu_k z + B_k \sin \mu_k z \tag{5.6.9}$$

Невід'ємні власні числа μ_k, які розташовані у порядку зростання, задовольняють рівнянню, аналогічному (3.3.78):

$$(\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\mu_k \cos \mu_k d + (\delta_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2\mu_k^2)\sin \mu_k d = 0, \; k = 1,2,... \tag{5.6.10}$$

а коефіцієнти A_k і B_k визначаються із системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються приєднанням одного з рівнянь (5.6.8) (вони лінійно залежні) і умові нормування:

$$\int_0^d K_k^2(z)dz = 1 \tag{5.6.11}$$

При цьому функція $K_k(z)$ утворює ортогональну систему у проміжку $[0,d]$. Як і раніше, при $k = 0$

$$\mu_0 = 0, \quad K_0(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{d}}, & \text{якщо} \quad \delta_1 = \delta_2 = 0, \\ 0 \quad , & \text{якщо} \quad \delta_1 \neq 0, \text{або } \delta_2 \neq 0 \end{cases}$$

Шукані коефіцієнти Фур'є задовольняють співвідношенню:

$$u_k(r,\theta,t) = \int_0^d u(r,\theta,z,t)K_k(z)dz, \quad k = 0,1,2,...$$

Для їх визначення помножимо рівняння (5.6.1) на $K_k(z)$ і проінтегруємо обидві частини у проміжку $[0,d]$ за змінною z. Інтегруючи двічі за частинами член, який містить похідну $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, і приймаючи до уваги (5.6.7) - (5.6.8), одержимо наступне рівняння для коефіцієнтів Фур'є $u_k(r,\theta,t)$:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial \theta^2}\right) -$$
$$-a^2\mu_k^2 u_k + \Phi_k(r,\theta,t) + F_k(r,\theta,t) \tag{5.6.13}$$

де

$$\Phi_k(r,\theta,t)=\begin{cases}\frac{a^2}{\gamma_2}K_k(d)\phi_2(r,\theta,t)-\frac{a^2}{\gamma_1}K_k(0)\phi_1(r,\theta,t),\ \textit{якщо}\ \gamma_1\neq 0,\gamma_2\neq 0\\ -\frac{a^2}{\delta_2}K_k{'}(d)\phi_2(r,\theta,t)-\frac{a^2}{\gamma_1}K_k(0)\phi_1(r,\theta,t),\ \textit{якщо}\ \gamma_1\neq 0,\delta_2\neq 0\\ \frac{a^2}{\gamma_2}K_k(d)\phi_2(r,\theta,t)+\frac{a^2}{\delta_1}K_k{'}(0)\phi_1(r,\theta,t),\ \textit{якщо}\ \delta_1\neq 0,\gamma_2\neq 0\\ -\frac{a^2}{\delta_2}K_k{'}(d)\phi_2(r,\theta,t)+\frac{a^2}{\delta_1}K_k{'}(0)\phi_1(r,\theta,t),\ \textit{якщо}\ \delta_1\neq 0,\delta_2\neq 0\end{cases}\qquad(5.6.14)$$

$$\Phi_k(r,\theta,t)=a^2\left[K_k(d)^{(\gamma_2,\delta_2)}\phi_2(r,\theta,t)-K{'}_k(0)^{(\gamma_1,\delta_1)}\phi_1(r,\theta,t)\right]\qquad(5.6.14)$$

$$F_k(r,z,t)=\int_0^d F(r,\theta,z,t)K_k(z)dz\qquad(5.6.15)$$

Приймаючи до уваги (5.6.2), (5.6.3), (5.6.5) випливають наступні початкові, граничні умови та умови періодичності для рівняння (5.6.13)

$$u_k(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f_k(r,\theta)\qquad(5.6.16)$$

$$\left[\alpha\frac{\partial u_k(r,\theta,t)}{\partial r}+\beta u_k(r,\theta,t)\right]_{r=R}=\varphi_k(\theta,t)\qquad(5.6.17)$$

$$u_k(r,\theta+2\pi,t)=u_k(r,\theta,t)\qquad(5.6.18)$$

$$\left.\begin{aligned}f_k(r,\theta)&=\int_0^d f(r,\theta,z)K_k(z)dz,\\ \varphi_k(\theta,t)&=\int_0^d \varphi(\theta,t,z)K_k(z)dz,\end{aligned}\right\}\qquad(5.6.19)$$

Зробимо підстановку

$$u_k(r,\theta,t)=e^{-a^2\mu^2 t}v_k(r,\theta,t)\qquad(5.6.20)$$

Отже задача (5.6.13), (5.6.16) - (5.6.18) зводиться до вже розглянутої задачі (4.6.21) - (5.6.24), якщо у останній покласти

$$\left.\begin{aligned}&u=v_k,\quad F=e^{a^2\mu^2 t}[\Phi_k+F_k]\\ &f=f_k,\quad \varphi=e^{a^2\mu^2 t}\varphi_k\end{aligned}\right\}\qquad(5.6.21)$$

і її розв'язок має вид (4.6.25), де коефіцієнти визначаються за формулами (4.6.28), (4.6.35), (4.6.36), (4.6.38) - (4.6.41). Використовуючи ці розв'язки і приймаючи до уваги (5.6.20), (5.6.21) одержимо наступну формулу для коефіцієнта Фур'є $u_k(r,\theta,t)$:

$$u_k(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} J_n(\lambda_{nm} r)\left[A_{nmk}(t)\cos n\theta + B_{nmk}(t)\sin n\theta\right],$$

(5.6.22)

де λ_{nm} є корені рівняння

$$\alpha\lambda J_n^{'}(\lambda R) + \beta J_n(\lambda R) = 0 \qquad (5.6.23)$$

$$A_{nmk}(t) = A_{nmk}(0)e^{-a^2\left(\lambda_{nm}^2+\mu_k^2\right)t} + a^2\int_0^t e^{-a^2\left(\lambda_{nm}^2+\mu_k^2\right)(t-\tau)} \times$$

$$\times\left[P_{nmk}(\tau) + \frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)p_{nk}(\tau)\right]d\tau,\ n,m = 1,2,...\ k = 0,1,2,... (5.6.24)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{nmk}(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f_k(r,\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\cos n\theta r dr d\theta, \\ P_{nmk}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\Phi_k(r,\theta,t) + F_k(r,\theta,t)\right]J_n(\lambda_{nm}r)\cos n\theta r dr d\theta, \\ p_{nk}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\theta,t)\cos n\theta d\theta \end{aligned}\right\}$$

(5.6.25)

$$A_{0mk}(t) = A_{0mk}(0)e^{-a^2\left(\lambda_{0m}^2+\mu_k^2\right)t} + a^2\int_0^t e^{-a^2\left(\lambda_{0m}^2+\mu_k^2\right)(t-\tau)} \times$$

$$\times\left[P_{0mk}(\tau) + \frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)p_{0k}(\tau)\right]d\tau \qquad (5.6.26)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{0mk}(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f_k(r,\theta)J_0(\lambda_{nm}r) r dr d\theta, \\ P_{0mk}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\Phi_k(r,\theta,t) + F_k(r,\theta,t)\right]J_0(\lambda_{nm}r) r dr d\theta, \\ p_{0k}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\theta,t)d\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.27)$$

$$B_{nmk}(t)=B_{nmk}(0)e^{-a^2\left(\lambda_{nm}^2+\mu_k^2\right)t}+a^2\int_0^t e^{-a^2\left(\lambda_{nm}^2+\mu_k^2\right)(t-\tau)}\times$$

$$\times\left[Q_{nm}(\tau)+\frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)q_n(\tau)\right]d\tau \tag{5.6.28}$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_{nmk}(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R f_k(r,\theta)J_n(\lambda_{nm}r)\sin n\theta rdrd\theta,\\
&Q_{nmk}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[\Phi_k(r,\theta,t)+F_k(r,\theta,t)\right]J_n(\lambda_{nm}r)\sin n\theta rdrd\theta,\\
&q_{nk}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\theta,t)\sin n\theta d\theta
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.29}$$

Ці формули можуть бути придатні для випадку, коли $\alpha\neq 0$. Якщо $\alpha=0$, тоді усюди замість $\frac{R}{\alpha}J_n(\lambda_{nm}R)$ у формулах (5.6.24), (5.6.26), (5.6.28) треба писати $-\frac{\lambda_{nm}R}{\beta}J'_n(\lambda_{nm}R)$.

Отже, розв'язок задачі дається формулою (5.6.6) з коефіцієнтами (5.6.22), (5.6.4) - (5.6.28).

Підставляючи всі ці значення у розв'язок (5.6.6) і змінюючи формально порядки інтегрування і підсумовування, одержимо наступну формулу:

$$u(r,\theta,z,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^d f(r_1,\theta_1,z_1)\cdot G(z,z_1,t)\cdot L(r,r_1,\theta-\theta_1,t)d\theta_1dr_1dz_1+$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^d\varphi(\theta_1,z_1,\tau)\cdot G(z,z_1,t-\tau)\cdot L(r,R^{(\alpha,\beta)},\theta-\theta_1,t-\tau)d\tau d\theta_1dz_1+$$

$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R\phi_2(r_1,\theta_1,\tau)\cdot G(z,d^{(\gamma_2,\delta_2)},t-\tau)\cdot L(r,r_1,\theta-\theta_1,t-\tau)d\tau d\theta_1dr_1-$$

$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R\phi_1(r_1,\theta_1,\tau)\cdot G(z,0^{(\gamma_1,\delta_1)},t-\tau)\cdot L(r,r_1,\theta-\theta_1,t-\tau)d\tau d\theta_1dr_1+$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^d F(r_1,\theta_1,z_1,\tau)\cdot G(z,z_1,t-\tau)\cdot L(r,r_1,\theta-\theta_1,t-\tau)d\tau d\theta_1 dr_1 dz_1$$
(5.6.30)
де

$$G(z,z_1,t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a^2\mu_k^2 t}K_k(z)K_k(z_1) \qquad (5.6.31)$$

$$L(r,r_1,\theta,t)=\frac{r}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-a^2\lambda_{0m}^2 t}J_0(\lambda_{0m}r)J_0(\lambda_{0m}r_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t}\cos n\theta J_n(\lambda_{nm}r)J_n(\lambda_{nm}r_1)\right] \qquad (5.6.32)$$

Якщо температура u, а також задані функції f, φ, ϕ_i, F не залежать від кута θ, тобто у випадку осесиметричної циліндричної задачі, очевидно, можна записати :

$$L(r,r_1,t)=\frac{r}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-a^2\lambda_{0m}^2 t}J_0(\lambda_{0m}r)J_0(\lambda_{0m}r_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_{nm}^2 t}J_n(\lambda_{nm}r)J_n(\lambda_{nm}r_1)\right]$$

і розв'язок (5.6.30) прийме вид

$$u(r,\theta,z,t)=2\pi\int_0^R\int_0^d f(r_1,z_1)\cdot G(z,z_1,t)\cdot L(r,r_1,t)dr_1dz_1+$$
$$+2\pi\int_0^t\int_0^d \varphi(z_1,\tau)\cdot G(z,z_1,t-\tau)\cdot L(r,R^{(\alpha,\beta)},t-\tau)dz_1d\tau+$$
$$+2\pi a^2\int_0^t\int_0^R \phi_2(r_1,\tau)\cdot G(z,d^{(\gamma_2,\delta_2)},t-\tau)\cdot L(r,r_1,t-\tau)drd\tau_1-$$
$$-2\pi a^2\int_0^t\int_0^R \phi_1(r_1,\tau)\cdot G(z,0^{(\gamma_1,\delta_1)},t-\tau)\cdot L(r,r_1,t-\tau)drd\tau_1+$$
$$+2\pi\int_0^t\int_0^R\int_0^d F(r_1,z_1,\tau)\cdot G(z,z_1,t-\tau)\cdot L(r,r_{1,1},t-\tau)dr_1dzd\tau_1 \qquad (5.6.33)$$

Розглянемо окремі випадки.

а) На основах циліндра задані перші граничні умови. У цьому випадку $\gamma_1 = \gamma_2, \delta_1 = \delta_2 = 1$,

$$\mu_k = \frac{k\pi}{d}, \quad K_k(z) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\frac{k\pi}{d} z, \quad k = 1, 2, ..., \quad K_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} & G(z, z_1, t) = \frac{2}{d}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi k}{d}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{d} z \sin\frac{\pi k}{d} z_1, \\ & G(z, z_1^{(\gamma_i, \delta_i)}, t) = G(z, z_1^{(0,1)}, t) = -\frac{\partial}{\partial z_1} G(z, z_1, t) = \\ & = -\frac{2\pi}{d^2}\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\left(\frac{a\pi k}{d}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{d} z \cos\frac{\pi k}{d} z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.34)$$

Користуючись формулами (4.5.15) – (4.5.17). будемо мати:

$$\left.\begin{aligned} & G(z, z_1, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z - z_1 + 2kd)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(z + z_1 + 2kd)^2}{4a^2 t}} \right] \\ & G(z, d^{(\gamma_2, \delta_2)}, t) = -\frac{2\pi}{d^2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k e^{-\left(\frac{a\pi k}{d}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{d} z = \\ & = -\frac{1}{2a^3\sqrt{\pi} t^{3/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z - d + 2kd) e^{-\frac{(z - d + 2kd)^2}{4a^2 t}}, \\ & G(z, d^{(\gamma_1, \delta_1)}, t) = -\frac{2\pi}{d^2}\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\left(\frac{a\pi k}{d}\right)^2 t} \sin\frac{\pi k}{d} z = \\ & = -\frac{1}{2a^3\sqrt{\pi} t^{3/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z + 2kd) e^{-\frac{(z + 2kd)^2}{4a^2 t}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.35)$$

Формули (5.6.15) більш зручніше формул (5.6.34) як при оцінки рядів, так і для використання, розглядаючи нескінченні області.

б) На основах циліндра задані другі граничні умови. У цьому випадку

$$\gamma_1=\gamma_2=1, \delta_1=\delta_2=0\ ,\ \mu_k=\frac{k\pi}{d},\ \ K_k(z)=\sqrt{\frac{2}{d}}\cos\frac{k\pi}{d}z,$$

$$\left.\begin{aligned}
&G(z,z_1,t)=\frac{1}{d}+\frac{2}{d}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{a\pi k}{d}\right)^2 t}\cos\frac{\pi k}{d}z\cos\frac{\pi k}{d}z_1,\\
&G(z,z_1^{(\gamma_i,\delta_i)},t)=G(z,z_1^{(1,0)},t)=G(z_1,z,t)
\end{aligned}\right\}$$

Запомогою формул (4.5.33) - (4.5.35) можемо записати

$$\left.\begin{aligned}
&G(z,z_1,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-z_1+2kd)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+z_1+2kd)^2}{4a^2t}}\right]\\
&G(z,d^{(\gamma_2,\delta_2)},t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(z-l_1+2kd)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+l_1+2kd)^2}{4a^2t}}\right]\\
&G(z,o^{(\gamma_1,\delta_1)},t)=G(z,do^{(\gamma_1,\delta_1)},t)==-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z+2kd)^2}{4a^2t}}
\end{aligned}\right\}\qquad(5.6.36)$$

2^0. Розповсюдження температури у напівобмеженому циліндрі

Постановка задачі. ***Розв'язати рівняння теплопровідності, яке задано у циліндричній системі координат***

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(r,\theta,z,t)\quad \textbf{\textit{(5.6.37)}}$$

у напівобмеженій області

$$D\,(0\le r<R,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0<z<\infty,\quad t>0)$$

з початковими умовами

$$u(r,\theta,z,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta,z)\qquad \textbf{\textit{(5.6.38)}}$$

граничними умовами загального виду

$$\left[\alpha\frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r}+\beta u(r,\theta,z,t)\right]_{r=R}=\varphi(\theta,z,t)\qquad \textbf{\textit{(5.6.39)}}$$

$$u(r,\theta,z,t)\Big|_{z=0}=\phi(r,\theta,t) \qquad \textbf{(5.6.40a)}$$

або

$$\left.\frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=\phi(r,\theta,t) \qquad \textbf{(5.6.40б)}$$

Розв'язок цих задач легко одержати з розв'язків для обмеженого циліндра граничним переходом при $d\to\infty$.

У випадку першої крайової задачі (гранична умова (5.6.40a)) будемо мати:

$$u(r,\theta,z,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\infty}\frac{f(r_1,\theta_1,z_1)\cdot L(r,r_1,(\theta-\theta_1,t)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2t}}\right]dr_1dz_1d\theta_1+$$

$$+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\theta_i,z_1,\tau)\cdot L(r,R^{(\alpha,\beta)},\theta-\theta_1,t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\theta_1dz_1d\tau+$$

$$+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{z\phi(r_1,\theta_1,\tau)\cdot L(r,r_1,t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}dr_1d\theta_1d\tau+$$

$$+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\infty}\frac{F(r_1,\theta_1,z_1,\tau)\cdot L(r,r_1,\theta-\theta_1,t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dr_1dz_1d\theta_1d\tau \qquad (5.6.41a)$$

Для другої крайової задачі (гранична умова (5.6.40б) розв'язок запишемо у наступному виді:

$$u(r,\theta,z,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\infty}\frac{f(r_1,\theta_1,z_1)\cdot L(r,r_1,(\theta-\theta_1,t)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2t}}\right]dr_1dz_1d\theta_1+$$

$$+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\theta_i,z_1,\tau)\cdot L(r,R^{(\alpha,\beta)},\theta-\theta_1,t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\theta_1dz_1d\tau+$$

$$-\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{a\phi(r_1,\theta_1,\tau)\cdot L(r,r_1,t-\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}dr_1d\theta_1d\tau+$$

$$+\int_0^{t}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{\infty}\frac{F(r_1,\theta_1,z_1,\tau)\cdot L(r,r_1,\theta-\theta_1,t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(z+z_1)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dr_1dz_1d\theta_1d\tau \qquad (5.6.41б)$$

§ 7. *Розповсюдження температури у порожньому циліндрі*

1⁰. Розповсюдження температури у обмеженому порожньому циліндрі

Постановка задачі. ***Розв'язати рівняння теплопровідності, яке задано у циліндричній системі координат***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(r,\theta,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.7.1)}}$$

в середині області

$$D\,(r_1 < r < r_2, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < z < d, \quad t > 0)$$

з початковими умовами

$$u(r,\theta,z,t)\big|_{t=0}\, f(r,\theta,z) \qquad \textbf{\textit{(5.7.2)}}$$

граничними умовами загального виду

$$\left.\begin{aligned} \left[\alpha_1 \frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r} + \beta_1 u(r,\theta,z,t)\right]_{r=r_1} &= \varphi_1(\theta,z,t) \\ \left[\alpha_2 \frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r} + \beta_2 u(r,\theta,z,t)\right]_{r=r_2} &= \varphi_2(\theta,z,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.7.3)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\gamma_1 \frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r} + \delta_1 u(r,\theta,z,t)\right]_{z=0} &= \phi_1(r,\theta,t), \\ \left[\gamma_2 \frac{\partial u(r,\theta,z,t)}{\partial r} + \delta_2 u(r,\theta,z,t)\right]_{z=d} &= \phi_2(r,\theta,t) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{\textit{(5.7.4)}}$$

та істотними умовами періодичності

$$u(r,\theta+2\pi,z,t) = u(r,\theta,z,t) \qquad \textbf{\textit{(5.7.5)}}$$

Застосовуючи, як і раніше, метод Фур'є, розв'язок задачі будемо шукати у вигляді рада Фур'є

$$u(r,\theta,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(r,\theta,t) K_k(z) \qquad \textbf{\textit{(5.7.6)}}$$

де $K_k(z)$ є ті ж самі функції, що і у попередньому параграфі (§ 6, 1^0), які визначаються за формулою (5.6.9).

Зберігаючи позначення попереднього параграфа і виконуючи ті ж самі операції, одержимо коефіцієнти Фур'є $u_k(r,\theta,t)$ рівняння (5.6.13) з початковими умовами (5.6.16) і граничними умовами

$$\left.\begin{array}{l} \left[\alpha_1 \dfrac{\partial u_k(r,\theta,t)}{\partial r} + \beta_1 u_k(r,\theta,t)\right]_{r=r_1} = \varphi_{1k}(\theta,t) \\ \left[\alpha_2 \dfrac{\partial u_k(r,\theta,t)}{\partial r} + \beta_2 u_k(r,\theta,t)\right]_{r=r_2} = \varphi_{2k}(\theta,t) \end{array}\right\} \qquad (5.7.7)$$

з умовами періодичності (5.6.18), де

$$\varphi_{ik}(\theta,t) = \int_{r_1}^{r_2} \varphi_i(\theta,z,t) K_k(z)\,dz \qquad (5.7.8)$$

Після підстановки (5.6.20) задача для функції $v_k(r,\theta,t)$ зводиться до вже розглянутій раніше задачі (4.7.13) – (4.7.17), якщо у останній покласти:

$$u = v_k, \quad F = e^{a^2\mu_k^2 t}\left[\Phi_k + F_k\right], \quad f = f_k, \quad \varphi_k = e^{a^2\mu_k^2 t}\varphi_{ik}$$

(5.7.9)

Використовуючи її розв'язок (4.7.18) і приймаючи до уваги підстановку (5.6.20) і позначення (5.7.9), будемо мати:

$$u_k(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} R_{nm}(\lambda_{nm} r)\left[A_{nmk}(t)\cos n\theta + B_{nmk}(t)\sin n\theta\right]$$

(5.7.10)

де

$R_{nm}(r) = C_{nm}J_n(r) + D_{nm}Y_n(r)$ ті ж самі функції, що і у § 7, Ч. IV,

λ_{nm} є корені рівняння (4.7.8)

$$A_{nmk}(t) = A_{nmk}(0)e^{-a^2\left(\lambda_{nm}^2+\mu_k^2\right)t} + a^2\int_0^t e^{-a^2\left(\lambda_{nm}^2+\mu_k^2\right)(t-\tau)} \times$$

$$\times\left[P_{nmk}(\tau) + \frac{r_2^2}{\alpha_2} R_{nm}(\lambda_{nm} r_2) p_{2nk}(\tau) - \frac{r_1}{\alpha_1} p_{1nk}(\tau)\right] d\tau\,, \qquad (5.7.11)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{nmk}(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} f_k(r,\theta)R_n(\lambda_{nm}r)\cos n\theta rdrd\theta, \\
P_{nmk}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[\Phi_k(r,\theta,t)+F_k(r,\theta,t)\right]R_{nm}(\lambda_{nm}r)\cos n\theta\cdot rdrd\theta, \\
p_{ink}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{ik}(\theta,t)\cos n\theta d\theta, \quad i=1,2,
\end{aligned}\right\}$$

(5.7.12)

$$A_{0mk}(t) = A_{0mk}(0)e^{-a^2\left(\lambda_{0m}^2+\mu_k^2\right)t} + a^2\int_0^t e^{-a^2\left(\lambda_{0m}^2+\mu_k^2\right)(t-\tau)}\times$$

$$\times\left[P_{0mk}(\tau)+\frac{r_2}{\alpha_2}R_{0m}(\lambda_{0m}r_2)p_{20k}(\tau)-\frac{r_1}{\alpha_1}R_{0m}(\lambda_{0m}r_1)p_{10k}(\tau)\right]d\tau \qquad (5.7.13)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{0mk}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} f_k(r,\theta)R_{0m}(\lambda_{0m}r)rdrd\theta, \\
P_{0mk}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[\Phi_k(r,\theta,t)+F_k(r,\theta,t)\right]rdrd\theta, \\
p_{0ik}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{ik}(\theta,t)d\theta, \quad i=1,2
\end{aligned}\right\}$$

Підставимо всі ці значення у формулу (5.7.6) і змінимо формально порядки інтегрування і підсумовування. Тоді розв’язок задачі прийме вид:

$$u(r,\theta,z,t) = \int_0^{2\pi}\int_r^{r_2}\int_0^d f(r',\theta',z')\cdot G(z,z',t)\cdot \mathrm{M}(r,r',\theta-\theta',t)dz'dr'd\theta'+$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^d \varphi_1(\theta',z',\tau)\cdot G(z,z',t-\tau)\cdot L(r,r_1^{(\alpha_1,\beta_1)},\theta-\theta',t-\tau)dz'd\theta'd\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^d \varphi_2(\theta',z',\tau)\cdot G(z,z',t-\tau)\cdot L(r,r_2^{(\alpha_2,\beta_2)},\theta-\theta',t-\tau)dz'd\theta'd\tau+$$

$$+a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\phi_2(z',\theta',\tau)\cdot G(z,d^{(\gamma_2,\delta_2)},t-\tau)\cdot \mathrm{M}(r,r',\theta-\theta',t-\tau)dr'd\theta'd\tau-$$

$$-a^2\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\phi_1(r',\theta',\tau)\cdot G(z,0^{(\gamma_1,\delta_1)},t-\tau)\cdot \mathrm{M}(r,r',\theta-\theta_1,t-\tau)dr'd\theta'd\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^d F(r',\theta',z',\tau)\cdot G(z,z',t-\tau)\cdot \mathrm{M}(r,r',\theta-\theta',t-\tau)d\tau d\theta'dr'dz' \quad (5.7.14)$$

тут

$$\mathrm{M}(r,r',\theta,t)=\frac{r}{\pi}\sum_{v=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-a^2\lambda_{0m}^2t}R_0(\lambda_{0m}r)R_0(\lambda_{0m}r')+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_{nm}^2t}\cos n\theta\cdot R_n(\lambda_{nm}r)R_n(\lambda_{nm}r')\right] \quad (5.7.15)$$

а $G(z,z',t)$ визначається за формулою (5.6.31).

§ 8. Задача теплопровідності для кулі

Розглянемо однорідне рівняння теплопровідності у сферичній системі координат

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$$

(5.8.1)

яке задане в середині кулі

$$D\,(0<r<R,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad t>0)$$

з початковими умовами $\quad u(r,\theta,\varphi,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta,\varphi) \quad$ ***(5.8.2)***

і загальними однорідними граничними умовами

$$\left[\alpha\frac{\partial u(r,\theta,\varphi,t)}{\partial r}+\beta u(r,\theta,\varphi,t)\right]\Bigg|_{r=R}=0 \quad \textbf{\textit{(5.8.3)}}$$

Для розв’язання задачі (5.8.1) – (5.8.3) використаємо метод Фур’є. Окремі розв’язки рівняння (5.8.1) шукаємо у вигляді:

$$u(r,\theta,\varphi,t)=T(t)\cdot V(r,\theta,\varphi) \quad (5.8.4)$$

Підставляючи (5.8.4) у рівняння (5.8.1) розподіляючи змінні будемо мати:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\nu^2,$$

Отже одержимо два рівняння

$$T'(t)+a^2\nu^2T(t)=0 \qquad (5.8.5)$$

$$\Delta V+\nu^2V=0 \qquad (5.8.6)$$

де

$$\Delta V=\frac{\partial^2V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}$$

Щоб одержати не тривіальні розв'язки рівняння (5.8.1), необхідно знайти нетривіальні розв'язки рівняння (5.8.6), які задовольняють граничній умові

$$\left[\alpha\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\beta V(r,\theta,\varphi)\right]\Bigg|_{r=R}=0 \qquad (5.8.7)$$

Розв'язок рівняння (5.8.6) з граничною умовою (5.8.7) знову будемо шукати методом Фур'є, представляючи цей розв'язок у вигляді

$$V(r,\theta,\varphi)=\Phi(r)\cdot Y(\theta,\varphi) \qquad (5.8.8)$$

Підставляючи його у рівняння (5.8.6) і розподіляючі змінні, одержимо:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \qquad (5.8.9)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\left(\nu^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)\Phi=0 \qquad (5.8.10)$$

Розв'язуючи рівняння (5.8.9) при умові обмеженості розв'язка на всій поверхні сфери одержимо власні значення

$$\lambda=n(n-1) \qquad (5.8.11)$$

Яким відповідають сферичні функції $Y_{nk}(\theta,\varphi)$,(які визначаються формулами$\left(\left[17\right]\right)$ де $k=-n,...0,...,n$.

Розглянемо тепер рівняння (5.9.10), Використовуючи підстановку

$$\Phi(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}} \qquad (5.8.12)$$

і приймаючи до уваги формулу (5.8.11), приведемо рівняння (5.8.10) до рівняння Бесселя

$$r^2 y'' + r y' + \left[\nu^2 r^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0$$

загальний розв'язок якого має вид

$$y = A J_{n+1/2}(\nu r) + B \Upsilon_{n+1/2}(\nu r) \qquad (5.8.13)$$

Так як при $r = 0$ функція $\Phi(r)$ повинна бути обмеженою, то, очевидно, $B = 0$, отже,

$$\Phi(r) = \frac{A}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\nu r) \qquad (5.8.14)$$

З рівняння (5.8.7) одержимо граничну умову для рівняння (5.8.10):

$$\left[\alpha \frac{d\Phi}{dr} + \beta \Phi \right] \Bigg|_{r=R} = 0$$

Підставляючи у останнє рівняння $\Phi(r)$ за формулою (5.8.14) і приймаючи до уваги, що $A \neq 0$, одержимо для визначення ν наступне трансцендентне рівняння:

$$\alpha \nu R J'_{n+1/2}(\nu R) + \left(\beta R - \frac{\alpha}{2} \right) J_{n+1/2}(\nu R) = 0 \qquad (5.8.15)$$

яке після введення позначень :

$$\nu R = \mu \,, \qquad \beta R - \frac{\alpha}{2} = \gamma \qquad (5.8.16)$$

прийме вид :

$$\alpha \mu J'_{n+1/2}(\mu) + \gamma J_{n+1/2}(\mu) = 0 \qquad (5.8.17)$$

Як відомо це рівняння має нескінченну множину дійсних додатних коренів $\mu_{n1}, \mu_{n2}, \ldots, \mu_{nm}, \ldots$, знаючи які, можна знайти власні значення

$$\nu_{nm}^2 = \left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.8.18)$$

Кожному власному числу ν_{nm}^2 граничної задачі (5.8.6) – (5.8.7) відповідають $(2n+1)$ власних функцій

$$V_{nmk}(r,\theta,\varphi)=\frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}Y_{nk}(\theta,\varphi),$$

$$(k=(-n,-nt1,...,-1,0,1,2,...,n)\qquad(5.8.19)$$

При $\nu=\nu_{nm}$ загальний розв'язок (5.8.5) має вид:

$$T_{nm}(t)=A_{nm}e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t}\qquad(5.8.20)$$

де A_{nm} є довільна стала.

Таким чином, приймаючи до уваги (5.8.4), (5.8.19), (5.8.20) одержимо частинний розв'язок виду:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)\cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\cdot e^{-\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)t}\qquad(5.8.21)$$

де

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\ =\sum_{k=-n}^{n}C_{n,k}^{(m)}Y_{n,k}(\theta,\varphi)\qquad(5.8.22)$$

є сферичні функції порядку n $([17])$ і задовольняють рівнянню (5.8.1) і граничній умові (5.8.3) при любих сталих $C_{n,k}^{(m)}$.

Складемо тепер ряд

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)\cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\cdot e^{-\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)t}\qquad(5.8.23)$$

Вимагаючи виконання початкової умови (5.8.2), одержимо:

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{n}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)\cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\qquad(5.8.24)$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти $C_{n,k}^{(m)}$ сферичних функцій (5.8.22), представимо розклад (5.8.24) у вигляді

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{n}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{n,k}^{*}(r)\cdot Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\qquad(5.8.25)$$

тут

$$C_{n,k}^*(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,k}^{(m)} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right) \qquad (5.8.26)$$

Користуючись відповідними формулами $([17])$ визначимо коефіцієнти $C_{n,k}^*$:

$$\left.\begin{aligned}
C_{0,k}^* &= \frac{2k+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta,\varphi) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\varphi \\
C_{n,k}^* &= \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-n)!}{(k+n)!} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta,\varphi) P_n(\cos\theta) \sin\varphi \sin\theta d\theta d\varphi \\
C_{n,-k}^* &= \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-n)!}{(k+n)!} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(r,\theta,\varphi) P_n(\cos\theta) \cos\varphi \sin\theta d\theta d\varphi
\end{aligned}\right\} \qquad (5.8.27)$$

Помножимо обидві частини рівності (5.8.26) на $\sqrt{r}$. Тоді функція $\sqrt{r} C_{n,k}^*(r)$ опиняється розкладеною у ряд за функціями Бесселя $J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right)$, де корені $\mu_{n,m}$ задовольняють рівнянню (5.8.17). Коефіцієнти $C_{n,k}^{(m)}$ в силу співвідношень $([17])$ визначаються за допомогою наступних формул:

$$C_{n,k}^{(m)} = \frac{2}{R^2\left[1 + \frac{\gamma^2 \alpha^2 (n+1/2)^2}{\alpha^2 \mu_{nm}^2}\right] J_{n+1/2}^2(\mu_{nm})} \int_0^R \tau^{3/2} C_{n,k}^*(r) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm} r}{R}\right) dr \qquad (5.8.28)$$

Таким чином, шуканий розв'язок дається формулою (5.8.23), де сферичні функції визначаються із співвідношень (5.8.22), (5.8.27), (5.8.28).

Литература

1) Тихонов А.Н., Самарський А.А. Уравнения математической физики: М., Наука 1977.

2) Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных М., Наука, 1983.

3)Соболев С.Л. Уравнения математической физики, М., Наука 1977.

4) Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М., Наука 1981

5) Петровский И.Г. Лекции по уравнениям математической физике, Изд-во Моск. ун-та 1974.

6)Араманович И.Г. и Левин В.И. Уравнения математической физики М., Наука 1975.

7)Смирнов В.И., Курс высшей математики: т.II,

8)Толстов Г.И., Ряды Фурье, Гос. издат. физ.-мат, лит. М. 1960.

9) Очан Ю.С., Методы математической физики: Издат «Высшая школа», М., 1965.

10) Фихтенгольц Г.М., Том I-III. Гостехиздат. М. 1975/

11) Смирнов В.И., Задачи по уравнениям математической физики: М., Наука, 1975.

12) Будак Б.В., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Сборник задач по уравнениям математической физики: Гостехиздат, 1956.

13) Лебедев И.И., Скальская И.П.,Уфлянд Я.С., Сборник задач по уравнениям математической физики: Гостехиздат, 1956.

14) Бермант А.Ф. и Араманович И.Г., Краткий курс математического анализа, «Наука», 1967.

15) Кошляков И.С., Глиэр Э.Б., Смирнов М.М., Основные уравнения математической физики, Физматгиз, 1982.

16) Левин И., Гроссберг Ю.И., Дифференциальные уравнения математической физики, Гостехихдат, 1951

17) Д.С. Кузнецов, Специальные функции, «Высшая школа», !965

18) Д.С. Кузнецов, Лебедев Н.Н Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1982.

19)) Смирнов М.М., Задачи по математической физике, «Наука»,1982

20) ЯнкеЕ., Эмде Ф., Леш Ф., Таблици Функцый с формулами и кривыми, «Наука», 1968.

21) Г. Ватсон, Теория бесселевых функцый, Ч. 1 – теория , ч. 2 – Таблици, ИЛ,1948.

22) Г.Карслоу, Д.Егер, Телопроводность твердых тел, М. «Наука», 1964.

23) А.В.Лыков. Теория теплопроводности, М., «Высшая школа», 1967.

24)Л.И.Рубинштейн, Проблема Стефана, Рига, Звайгзие, 1967.

25) И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного: Учебник. М., Наука, 1984. 432 с.

26) Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. Пособие. М., Наука, 1979. 736 с.

27) Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций: М., Наука, 1978. 387 с.

28) Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: в 2-х т., М., Наука, 1968.

29) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: Учебник, М., Наука, 1976.

30) Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: Учеб. Пособие, М., Наука, 1967, 304 с.

31) Давидов М.О. Курс математичного аналізу: 3-я част. Київ, „Вища школа", 1979, 384 с.

32) Шкіль М.І. Математичний аналіз: В 2-х част. Київ, „Вища школа", 1978.

33) Гончаров И.Л. Теория функций комплексного переменного, Учебное пособие для педагогических вузов, М., 1955, 352 с.

34) Хапланов М.Г. Теория функций комплексной переменной: Учеб. пособие, М.,Прсвещение,1965, 208 с.

35) Евграфов М.А., Аналитические функци,: Учебник, М., Наука, 1968, 471 с.

36) Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.В., Лекции по теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1978, 408 с.

37) Сборник задач по теории аналитических функций: Учеб. пособие, Под редакцией Евграфова М.А., 2-е изд., доп., М., Наука, 1972,414 с.

38) Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.И., Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие, М., Наука, 1975,318 с.

39) Pudy A.E, Rakov S.A., Evdokimov A.V., Prokopenko A.I., Proskurnya I.P., Complex Analysis: Guide book, Kharkov, 2003, 300p.

40) Бицадзе А.В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М. Наука, 1972

41) Гурвиц А., Курант Р., Теории функций, Наука, 1968.

42) Фукс Б.А., Шабат Б.В.,Функцыъ комплексного переменного и некоторые их приложения, Физматгиз, 1959.

43) Голузин Г.М., Геометрическая теории функций комплексного переменного, Наука, 1966.

44) Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена, Ч.1 – Теплопроводность, «Высшая школа», 1970.

45) Е. И. Несис, Методы математической физики,»Просвещение», !977.

46) В.А.Диткин, А.П.Прудников, Операционное исчисление, «Высшая школа», 1975

47) Ю.С.Очан, Методы математической физики, «Высшая школа», 1965.

48) А.М.Эфрос, А.М.Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, ГНТИ Украини, Харьков, 1937.

49) М.И.Конторович. Операционное исчисление и нестационарные процессы в электрических цепях, М., «Наука», 1964.

50) Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье ,М., ИЛ, 1947.

Навчальне видання

Анатолій Юхимович Пуди

Андрій Іванович Прокопенко

НЕОДНОРІДНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Навчальний посібник для викладачів та студентів вищих навчальних закладів

Відповідальний за випуск: Моторіна В.Г.
Комп'ютерна верстка: Тараров Д.С.

Підписано до друку 08.01.2013 р. Формат 60 х 84 1/16
Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 14,1. Обл.- вид. арк. 3,0.
Зам № 227. Тираж 300 прим. Ціна договірна.

Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С. Сковороди.
Україна, 61002, м. Харків, вул. Артема, 29.
Видавець СПДФО Прокопенко Г.Є.
Свідоцтво про державну реєстрацію:
Серія ДК № 1635 від 25.12.03 р.
Ліцензія № 1413900866.