Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г.С. Сковороди

І.Т. СІРА

Вивчення модуля «Векторна алгебра» курсу «Лінійна алгебра та геометрія»

Опорні конспекти лекцій для студентів
математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ
(Навчально-методичний посібник)

Харків 2017

Укладачі: І.Т. Сіра

Рецензенти:

Олефіренко Н.В. – доктор педагогічних наук, доцент кафедри інформатики ХНПУ імені Г.С.Сковороди

Водолаженко О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ХНПУ імені Г.С.Сковороди

Вивчення модуля «Векторна алгебра» курсу «Лінійна алгебра та геометрія»(опорні конспекти лекцій для студентів спеціальності «Інформатика» педагогічних ВНЗ(Навчально-методичний посібник) - Харків: ХНПУ імені Г.С.Сковороди, – 2017.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до навчальної програми курсу «*Лінійна алгебра та геометрія»* для спеціальностей „Математика", „Фізика", „Інформатика" педагогічних ВНЗ.

Навчальний курс «*Лінійна алгебра та геометрія*» покликаний розвинути у майбутнього вчителя математики просторову уяву у зв'язку з аналітичними методами, з груповою і структурною точками зору на геометрію; дати ґрунтовні загальні уявлення про сучасний аксіоматичний метод, елементи багатовимірної геометрії афінного і евклідового просторів, тобто сформувати достатньо широкий погляд на геометрію, алгебру та їх методи і на елементарну математику з точки зору вищої. Сформувати у студентів загальну та предметну компетентність.

Посібник придатний для самостійної підготовки студентів (особливо студентів заочної форми навчання), а включені до нього завдання для самоконтролю допоможуть випускнику оцінити свої знання і вміння.

Затверджено кафедрою математики
Харківського національного педагогічного університету
імені Г. С. Сковороди
Протокол № 2 від 12.09.2017 р.

Видано за друк укладачів

Зміст модуля « Векторна алгебра»

Тема 1. Вектори у звичайному та лінійному просторі.

1.1. Основні поняття векторної алгебри
1.2. Лінійні операції над векторами
1.3. Лінійна залежність векторів.
1.4. Поняття базису.
1.5. Лінійний простір
1.5.1. Означення лінійного простору.
1.5.2. Властивості лінійного простору.
1.5.3. Розмірність лінійного простору.

Тема 2. Вектори та їхні добутки в системах координат.

2.1. Системи координат.
2.1.1. Проекція вектора на вісь.
2.1.2. Афінна система координат.
2.1.3. Декартова прямокутна система координат.
2.1.4. Полярна система координат.
2.1.5. Циліндрична та сферична системи координат.
2.2. Вектори в декартовій прямокутній системі координат.
2.2.1. Координати, довжина та напрямні косинуси вектора.
2.2.2. Лінійні дії з векторами. Рівність та коленіарність векторів.
2.2.3. Поділ відрізка в даному відношенні. Координати центра мас.
2.3. Добутки векторів
2.3.1. Скалярний добуток двох векторів.
2.3.2 Векторний добуток двох векторів.
2.3.3. Мішаний добуток векторів.
2.3.4. Подвійний векторний добуток.

ТЕМА 1. ВЕКТОРИ У ЗВИЧАЙНОМУ ТА ЛІНІЙНОМУ ПРОСТОРІ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Багато величин повністю визначаються своїм числовим значенням (маса, час, температура та ін.), які називаються *скалярними*. Але є такі величини, які визначаються не лише числовим значенням, а й напрямом, такі величини називаються *векторними*.

Непорожня множина називається ***векторним простором V***, а її елементи ***векторами****[*], якщо на ній (цій множині) визначені операції додавання елементів та множення елементів на числа таким чином, що виконуються наступні умови, які називаються **аксіомами векторного простору**:

1) від переставляння місцями двох векторів значення суми не змінюється, тобто $\forall \vec{a} \in V \ \forall \vec{b} \in V \Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\right)$ (*переставний закон додавання*);

2) для того, щоб до суми двох векторів додати третій, достатньо до першого вектора додати суму двох інших, тобто $\forall \vec{a} \in V \ \forall \vec{b} \in V \ \forall \vec{c} \in V \Rightarrow \left(\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right)$ (*сполучний закон додавання*);

3) у векторному просторі існує, причому єдиний, такий елемент (нуль-вектор), який при додаванні до нього іншого елемента залишає останній без змін, тобто $\exists! \vec{0} : \forall \vec{a} \in V \Rightarrow \left(\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}\right)$ (*закон існування нуля*);

4) для будь-якого елемента даного простору існує такий відповідний елемент, який в сумі з даним утворює нуль, тобто $\forall \vec{a} \in V \ \exists! \left(-\vec{a}\right) : \left(\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \left(-\vec{a}\right) + \vec{a} = 0\right)$ (*закон поглинання вектора*);

5) у векторному просторі існує, причому єдиний, одиничний елемент, при множенні якого на даний елемент в результаті отримується даний елемент, тобто $\exists! 1 : \forall \vec{a} \in V \Rightarrow \left(\vec{a} \cdot 1 = 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}\right)$ (*закон множення на одиницю*);

6) $\forall x \in R \ \forall y \in R \ \forall \vec{a} \in V \Rightarrow \left(x\left(y\vec{a}\right) = \left(xy\right)\vec{a}\right)$ (*сполучний закон множення*);

---

[*] Термін „вектор” (від лат. vector – переносник) ввів у 1848 р. Гамільтон.

7) $\forall x \in R\ \forall y \in R\ \forall \vec{a} \in V \Rightarrow \left((x+y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}\right)$ (*перший дистрибутивний закон*);

8) $\forall x \in R\ \forall \vec{a} \in V\ \forall \vec{b} \in V \Rightarrow \left(x(\vec{a}+\vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}\right)$ (*другий дистрибутивний закон*).

Векторний простір має такі інтепретації[**]:

- *арифметична*, коли векторний простір являє собою множину всіх впорядкованих пар чисел, тобто $V = \{(a_i; b_i), i \in [1; \infty)\}$;
- *за допомогою паралельного перенесення*[*], коли векторний простір являє собою множину пар відповідних точок площини виду $X \to X'$, отриманих в результаті паралельного перенесення за означенням;
- *за допомогою напрямлених відрізків*.

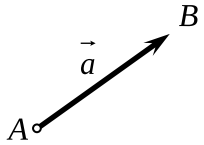

Рис. 1.1

Ми надалі будемо користуватися останньою інтерпретацією.

Будь-яка пара точок *A* і *B* простору визначає *напрямлений відрізок*, або *вектор*, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. Першу точку *A* називають *початком вектора*, а другу *B* – *кінцем вектора*. *Напрямом вектора* вважають напрям від його початку до кінця. Отже, можна сказати, що в даній інтерпретації ***вектором*** прийнято називати напрямлений відрізок.

Вектори позначаються малими латинськими літерами зі стрілкою зверху, наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Вектор, початок якого знаходиться в точці *A*, а кінець – в точці *B*, позначається символом $\overrightarrow{AB}$, або $\vec{a}$. Напрям вектора на малюнку вказують стрілкою (рис. 7.1). Відстань між початком вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і його кінцем називається *довжиною* або *модулем вектора* і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор $\vec{0}$ називається *нульовим*, якщо його початок і кінець збігаються, напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю, тобто $|\vec{0}| = 0$.

[**] Інтерпретацією абстрактного поняття ввжається його конкретне тлумачення.

[*] *Паралельним перенесенням* називається таке відображення площини на себе, при якому кожній точці *X* площини співставляється така точка X' цієї ж площини, що відстань між цими точками дорівнює заданому числу і промінь $[XX')$ має заданий напрям.

Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці. *Ортом* даного ненульового вектора $\vec{a}$ називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора, і який позначається $\vec{a}_0$ або $\vec{a}^{\,0}$, причому $\left|\vec{a}_0\right| = 1$.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однакові напрями.

Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони колінеарні, протилежно направлені і мають рівні модулі, вектор, протилежний до $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$.

Вектори називаються *компланарними*[**], якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні. Три вектори також вважаються компланарними у тому випадку, коли хоча б один із них нульовий.

1.2. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операцію додавання векторів і операцію множення вектора на дійсне число.

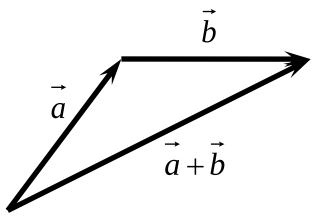

Рис. 1.2

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ *двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 1.2).

Поряд із «правилом трикутника», яке сформульоване вище, часто користуються рівносильним йому «правилом паралелограма». Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить із спільного початку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.3).

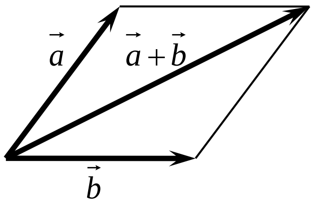

Рис. 1.3

Властивості операції додавання векторів

1. Комутативність $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. Асоціативність $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

[**] Мінімальна можлива кількість компланарних векторів – три.

3. Існування нейтрального елемента – нульового вектора – відносно додавання векторів, тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$ має місце рівність $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

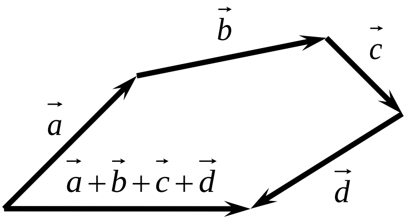

Рис. 1.4

4. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$, такий, що $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Зауваження. Сума кількох векторів може бути знайдена за «правилом многокутника». Сумою кількох векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого доданка, а кінець – з кінцем останнього за умови, що початок кожного наступного доданка збігається з кінцем попереднього (рис. 1.4).

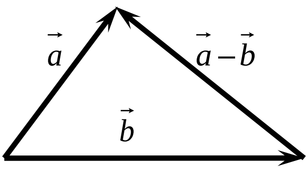

Рис. 1.5

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ *двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$, із яких перший називається *зменшуваним*, а другим *від'ємником*, називається вектор, який є сумою зменшуваного вектора і вектора, протилежного від'ємнику, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ (рис. 1.5).

Добутком $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) *вектора* $\vec{a}$ *на дійсне число* α називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, який має модуль, рівний добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α, тобто $\left|\vec{a}\alpha\right|=\left|\alpha\vec{a}\right|=\left|\alpha\right|\left|\vec{a}\right|$, та напрям, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний напряму вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha<0$.

Властивості операції множення вектора на число

1. Дистрибутивність числового множника відносно суми векторів $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\vec{b}\alpha$.

2 Дистрибутивність векторного множника відносно суми чисел $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

3. Асоціативність $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$.

Лінійною комбінацією *n* векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, тобто вираз, що має вигляд

$$\alpha_1\vec{a}_1,\alpha_2\vec{a}_2,\ldots,\alpha_n\vec{a}_n. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Якщо вектор* $\vec{b}$ *колінеарний вектору* $\vec{a}$ *і* $\left|\vec{a}\right|\neq 0$, *то існує дійсне число* α *таке, що* $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

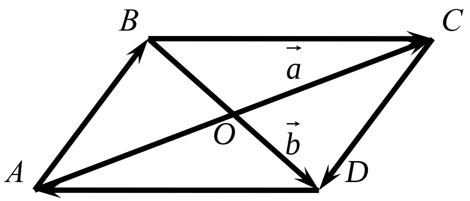

Рис. 1.6

Приклад 1. Вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ є діагоналями паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

➤ Нехай O – точка перетину діагоналей (рис. 7.6).

Оскільки $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|$ і вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{BD}$ мають протилежні напрями, то $\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\vec{b}$. Аналогічно $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a}$. Оскільки $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$ і вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають однакові напрями, то $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a}$. Аналогічно $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b}$. Із рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ випливає, що $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Аналогічно

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}; \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$ ➤

1.3. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація виду (7.1) векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0. \qquad (1.2)$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації (7.1) з числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можлива лише у випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

Теорема 1.2. *Якщо один із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ нульовий, то ці вектори є лінійно залежними.*

Теорема 1.3. *Якщо серед n векторів будь-які* $n-1$ *вектори – лінійно залежні, то і всі n векторів лінійно залежні.*

Теорема 1.4. *Вектори* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.*

Теорема 1.5. *Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.*

Наслідки. 1. *Якщо вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *не колінеарні, то вони лінійно незалежні.*

2. *Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.*

Теорема 1.6. *Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їхня компланарність.*

Наслідки. 1. *Якщо вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *не компланарні, то вони лінійно незалежні.*

2. *Серед трьох некомпланарних векторів і не може бути ні одного нульового вектора.*

Теорема 1.7. *Будь-які чотири вектори в звичайному просторі лінійно залежні.*

Приклади. 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α вектори $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ будуть лінійно незалежні.

◄ За теоремою (7.5) необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Оскільки $\vec{a}-\vec{b} \neq 0$, то з колінеарності векторів $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ випливає, що $\alpha\vec{a}+2\vec{b}=\beta\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, або $\alpha\vec{a}+2\vec{b}-\beta\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha-\beta)\vec{a}+(2+\beta)\vec{b}=\vec{0}$. За умовою задачі вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні. Тому з рівності $(\alpha-\beta)\vec{a}+(2+\beta)\vec{b}=\vec{0}$ випливає, що

$$\begin{cases} \alpha-\beta=0, \\ 2+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta, \\ \beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha=-2. ►$$

3. Довести, що вектори $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(0;1;2)$, $\vec{c}=(1;3;-1)$ лінійно незалежні.

◄ Розв’яжемо рівняння $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$. Маємо

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} \alpha_1+\alpha_3=0, \\ 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0. \end{cases}$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля (перевірте), то система має єдиний розв’язок $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні. ➤

1.4. ПОНЯТТЯ БАЗИСУ

Два лінійно незалежні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать на площині, *утворюють базис у цій площині*, якщо довільний вектор $\vec{c}$ цієї площини може бути поданий у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Три лінійно незалежних вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *утворюють в просторі базис*, якщо будь-який вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Справедливі такі твердження:

1) будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать в даній площині, утворюють базис у цій площині;

2) будь-яка трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює базис у просторі.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – довільний базис у просторі, тобто довільна трійка некомпланарних векторів. Тоді (за означенням базису) для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, що буде справедлива рівність

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \tag{1.3}$$

Рівність (7.3) називається *розкладом вектора* $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа α, β, γ *координатами вектора* $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звичайно пишуть так $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладеним за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тобто координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ визначаються однозначно.

У разі додавання двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати помножаються на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Приклад 4. В трапеції $ABCD$ відношення основи $\overrightarrow{BC}$ до основи $\overrightarrow{AD}$ дорівнює λ. Беручи за базис вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$, знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$.

Зауваження. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два колінеарні вектори і $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то число λ називається відношенням вектора $\vec{b}$ до вектора $\vec{a}$.

➤ За умовою задачі $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$ (рис. 1.7).

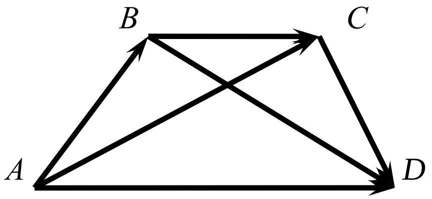

Рис. 1.7

Визначаємо координати векторів:

1) $\overrightarrow{AB}=0\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AB}=(0;1)$;

2) $\overrightarrow{AD}=1\overrightarrow{AD}+0\overrightarrow{AB}=(1;0)$; $\overrightarrow{DA}=(-1;0)$;

3) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(1;0)-(0;1)=(1;-1)$;

4) $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}+0\overrightarrow{AB}=(\lambda;0)$;

5) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=(-\lambda;0)+(1;-1)=(1-\lambda;-1)$;

6) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(0;1)+(\lambda;0)=(\lambda;1)$. ➤

1.5. ЛІНІЙНИЙ ПРОСТІР

1.5.1. ОЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ

Множина L елементів $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\ldots$ довільної природи називається *дійсним лінійним простором*, якщо справджуються такі три умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ множини L ставиться у відповідність третій елемент $\vec{z}$ цієї множини, що називається *сумою елементів* $\vec{x}$ і $\vec{y}$ і позначається символом $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$.

II. Існує правило, за допомогою якого будь-якому елементу $\vec{x}$ множини L і будь-якому дійсному числу λ ставиться у відповідність елемент $\vec{u}$ цієї множини, що називається *добутком елемента* $\vec{x}$ на число λ і позначається символом $\vec{u}=\lambda\vec{x}$ або $\vec{u}=\vec{x}\lambda$.

III. Указані два правила підпорядковані таким восьми аксіомам:

1. $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (*комутативна властивість суми*).

2. $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ (*асоціативна властивість суми*).

3. Існує нульовий елемент $\vec{0}$ такий, що $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x}$ (*особлива роль нульового елемента*).

4. Для кожного елемента $\vec{x}$ існує протилежний елемент $\vec{x}'$ такий, що $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{0}$.

5. $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x}$ (*особлива роль числового множника 1*).

6. $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$ (*асоціативна властивість відносно числового співмножника*).

7. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ (*дистрибутивна властивість множника-елемента відносно суми чисел*).

8. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми елементів*).

Зауваження. Елементи лінійного простору часто називають векторами і позначають так само, як і вектори звичайного простору, або елементи векторного простору.

Наприклад, розглянемо множину впорядкованих наборів із *n* дійсних чисел. Цю множину називають *n-вимірним числовим простором* A_n, елемент цієї множини – впорядкований набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називають *точкою* A_n, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – її *координатами*. Точка $O(0{,}0, \ldots, 0)$ називається *початком координат* в A_n. Кожній парі точок $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$. Числа $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n$ назвемо *координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$. При цьому два вектори вважаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором* точки *M*. Його координати збігаються з координатами точки *M*. Отже, вектори також є впорядкованими наборами *n* чисел матрицями-рядками довжини *n*.

Введемо лінійні операції над векторами за **правилами**: якщо дано вектори $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то $\vec{x} + \vec{y}$ має координати $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, а $\lambda\vec{x}$ має координати $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Можна показати, що множина векторів числового простору A_n з лінійними операціями, введеними вище, є лінійним простором, який позначається через L_n. У просторі L_n роль нульового вектора відіграє вектор $\vec{0} = (0{,}0, \ldots, 0)$, а протилежним вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є вектор $\vec{x}' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Зауваження 1. Якщо точками дійсного числового простору є матриці-стовпці $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ висоти n, то, міркуючи аналогічно, прийдемо до лінійного простору L^n, в якому лінійні операції збігаються з операціями над матрицями-стовпцями висоти n – векторами L^n.

Зауваження 2. Надалі через L_n $\left(L^n\right)$ позначатимемо і лінійний простір матриць-рядків (матриць-стовпців) довжини n (висоти n) з дійсними елементами і з лінійними операціями над ними, що збігаються з лінійними операціями над матрицями.

Наприклад, множина $C[a,b]$ усіх функцій $x = x(t)$, означених і неперервних на відрізку $a \le t \le b$, із звичайними операціями додавання двох функцій і множення функції на дійсне число, утворює лінійний простір.

Дійсно, можна переконатись у справедливості аксіом 1-8 для множини $C[a,b]$. Це дає змогу дійти висновку, що множина $C[a,b]$ є лінійним простором.

1.5.2. ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ

Теорема 1.8. *У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент і для кожного елемента $\vec{x}$ існує єдиний протилежний елемент, причому:*

1) добуток довільного елемента $\vec{x}$ на дійсне число 0 дорівнює нульовому елементу $\vec{0}$;

2) для кожного елемента $\vec{x}$ протилежний елемент дорівнює добутку цього елемента $\vec{x}$ на дійсне число -1.

Приклад 5. Нехай L_2 – множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел $\vec{x} = (x_1, x_2)$ з операціями:

1) якщо $\vec{x} = (x_1, x_2)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2)$, то $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$;

2) для будь-якого дійсного λ покладемо $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

Переконайтеся, що L_2 є лінійним простором.

➤ Перевіримо виконання аксіом 1-8.

1) $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\vec{y} + \vec{x} = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, тобто $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

2) $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2)$, $\vec{y}+\vec{z}=(y_1+z_1, y_2+z_2)$,
$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=(x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2)$, $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2)$.
Отже $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$.
3) Нульовим вектором є $\vec{0}=(0;0)$. Дійсно, $\vec{x}+\vec{0}=(x_1+0, x_2+0)=(x_1,x_2)=\vec{x}$.
4) Вектор $(-x_1,-x_2)$ є протилежним вектору (x_1,x_2), оскільки
$(x_1,x_2)+(-x_1,-x_2)=(0,0)$.
5) $1\cdot\vec{x}=(1\cdot x_1, 1\cdot x_2)=\vec{x}$.
6) $\lambda(\mu\vec{x})=\lambda(\mu x_1,\mu x_2)=(\lambda\mu x_1,\lambda\mu x_2)=(\lambda\mu)\vec{x}$.

7)
$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\vec{x} &= ((\lambda+\mu)x_1,(\lambda+\mu)x_2)= \\
&=(\lambda x_1+\mu x_1,\lambda x_2+\mu x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)+(\mu x_1,+\mu x_2)= \\
&=\lambda(x_1,x_2)+\mu(x_1,x_2)=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}
\end{aligned}
$$

8)
$$
\begin{aligned}
\lambda(\vec{x}+\vec{y}) &= \lambda(x_1+y_1,x_2+y_2)= \\
&=(\lambda(x_1+y_1),\lambda(x_2+y_2))=(\lambda x_1,\lambda x_2)+(\lambda y_1,\lambda y_2)= \\
&=\lambda(x_1,x_2)+\lambda(y_1,y_2)=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}
\end{aligned}
$$

➤

1.5.3. РОЗМІРНІСТЬ ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ

Лінійний простір L називається *n-вимірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$, а будь-які $n+1$ векторів $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}, \overrightarrow{p_{n+1}}$ є лінійно залежними*. Число n в цьому випадку називається *розмірністю простору L*, це записується так: $d(L)=n$.

Лінійний простір L називається *нескінченно вимірним*, якщо в ньому існує довільне число лінійно незалежних векторів $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}, \ldots$.

Базисом лінійного простору L називається сукупність лінійно незалежних векторів $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$, якщо для кожного вектора $\vec{x}$ простору L можна знайти такі дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що справедлива рівність

---

* Вектори лінійного простору називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, щоб принаймні одне з них було відмінне від нуля і мала місце рівність $\lambda_1\overrightarrow{p_1}+\lambda_2\overrightarrow{p_2}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{p_n}=\vec{0}$; якщо ж остання рівність можлива лише у випадку, коли всі $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ дорівнюють нулю, то вектори лінійного простору називаються *лінійно незалежними*.

$$\vec{x} = x_1 \overrightarrow{p_1} + x_2 \overrightarrow{p_2} + \ldots + x_n \overrightarrow{p_n} \; . \tag{7.4}$$

Рівність (7.4) називається *розкладом вектора* $\vec{x}$ у базисі $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *координатами вектора* $\vec{x}$ відносно базису $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_n}$.

Теорема 1.9. *Для того, щоб лінійний простір L мав розмірність n, необхідно і достатньо, щоб будь-які n лінійно незалежних векторів цього простору утворювали базис*.

Приклади. 6. Розглянемо простір L^n розмірності *n*. Показати, що *n* векторів цього простору

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

утворюють його базис.

➤ Для цього покажемо, що вектори системи (7.5) лінійно незалежні та довільний вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ простору L^n є лінійною комбінацією системи векторів (7.5).

Розглянемо лінійну комбінацію векторів системи (7.5) з числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{e_n} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

.

Вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ є нульовим лише за умови $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, а це і означає лінійну незалежність системи векторів (1.5). Причому довільний вектор $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ простору L^n є лінійною комбінацією системи векторів (1.5),

тобто справедлива рівність $\vec{x}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Таким чином, у просторі L^n сукупність векторів (7.5) утворює базис цього простору. ➤

7. Показати, що лінійний простір $C[a,b]$ усіх функцій $x=x(t)$, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$, є нескінченно вимірним.

➤ Дійсно, для будь-якого невід'ємного цілого числа *n* вектори цього простору $1, t, t^2, \ldots, t^n$ лінійно незалежні, оскільки в протилежному випадку деякий многочлен $c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots+c_nt^n$, коефіцієнти якого $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ не всі рівні нулю, виявився б тотожно рівним нулю на відрізку $[a,b]$. ➤

Теорема 1.10. *При додаванні двох будь-яких векторів лінійного простору L їхні координати відносно довільного базису простору L додаються, при множенні довільного вектора на довільне число* λ *всі координати цього вектора множаться на це число* λ.

Два довільних дійсних лінійних простори L і L' називаються *ізоморфними*, якщо між векторами цих просторів можна встановити взаємно однозначну відповідність так, щоб якщо векторам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ простору L відповідають вектори $\vec{x'}$ і $\vec{y'}$ простору L', то вектору $\vec{x}+\vec{y}$ відповідає вектор $\vec{x'}+\vec{y'}$, а вектору $\lambda\vec{x}$ відповідає вектор $\lambda\vec{x'}$, де $\lambda \in R$.

Теорема 1.11. *Будь-які два n-вимірних дійсних лінійних простори L і* L' *ізоморфні.*

Наслідок. *Лінійні простори* L_n *і* L^n *ізоморфні.*

<u>Зауваження</u>. Надалі всі означення і твердження, що мають місце в L^n або L_n з точністю до ізоморфізму справедливі і в довільному *n*-вимірному лінійному просторі *L*.

Приклад 8. Нехай L_2 – лінійний простір векторів $\vec{x}=(x_1, x_2)$. Довести, що вектори $\vec{p_1}=(1;2)$ та $\vec{p_2}=(3;4)$ утворюють базис даного лінійного простору L_2. Знайти координати вектора $\vec{x}=(7;10)$ в цьому базисі.

◀ Покажемо, що вектори $\overrightarrow{p_1}$ та $\overrightarrow{p_2}$ лінійно незалежні. Дійсно, рівність

$$\alpha\overrightarrow{p_1}+\beta\overrightarrow{p_2}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha(1;\,2)+\beta(3;\,4)=(0;\,0)\Leftrightarrow(\alpha+3\beta;\,2\alpha+4\beta)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+3\beta=0,\\2\alpha+4\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0,\\\beta=0.\end{cases}$$

Розглянемо довільний вектор $\vec{y}=(y_1;\,y_2)$. Покажемо, що для будь-яких значень y_1, y_2 можна визначити числа λ та μ, щоб виконувалась рівність $\vec{y}=\lambda\overrightarrow{p_1}+\mu\overrightarrow{p_2}$ або $(y_1;\,y_2)=(\lambda+3\mu;\,2\lambda+4\mu)$. Існує єдина пара значень (λ,μ), для яких виконується ця рівність. Це випливає з того, що система рівнянь

$$\begin{cases}\lambda+3\mu=y_1,\\2\lambda+4\mu=y_2\end{cases}$$

має $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix}\neq 0$ і тому має єдиний розв'язок при будь-яких y_1 і y_2. Отже, вектори p_1 і p_2 утворюють базис.

Визначимо координати вектора $\vec{x}=(7;10)$ в цьому базисі. Задача зводиться до визначення λ і μ із системи рівнянь $\begin{cases}\lambda+3\mu=7,\\2\lambda+4\mu=10.\end{cases}$. Знаходимо $\lambda=1, \mu=2$, тобто $\vec{x}=\overrightarrow{p_1}+2\overrightarrow{p_2}$. ➤

◈ ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка множина називається векторним простором? Які існують інтерпретації ВП?

2. Що називається і як позначається вектор, його довжина, напрям?

3. Який вектор є одиничним, нульовим? Запишіть позначення цих векторів?

4. Коли вектори є рівними, протилежними, колінеарними, компланарними?

5. Дайте визначення суми, різниці векторів та добутка вектора на число.

6. Сформулюйте властивості лінійних дій з векторами.

7. Що називається лінійною комбінацією векторів?

8. Які вектори називаються лінійно залежними та незалежними?

9. Назвіть необхідні та достатні умови лінійної залежності та незалежності.

10. Дайте визначення базису на площині, в просторі та розкладу вектора за базисом.

11. Чому дорівнюють координати суми, різниці, добутку на числа векторів, заданих своїми координатами, відносно певного базису?

12. Яка множина називається дійсним лінійним простором?

13. Сформулюйте властивості лінійного простору.

14. Коли лінійний простір називається n-вимірним?

15. Які два лінійних простора називаються ізоморфними?

16. Чи є векторний простір лінійним?

✍ ВПРАВИ

1. У паралелограмі *ABCD* точка *O* – це точка перетину діагоналей, а точки *M, N, P, Q* – відповідно середини сторін *AB, BC, CD, DA*. Побувати на рисунку такі вектори:

1) $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$; **2)** $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$; **3)** $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}$; **4)** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PD}$; **5)** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ}$; **6)** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{NP}$.

2. Дано паралелограм *ABCD*. Точка *M* лежить на стороні *CD* знайти суму векторів:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; **2)** $\left(-\overrightarrow{AM}\right) + \overrightarrow{DM}$; **3)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; **4)** $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM}$.

3. У трикутнику *ABC* проведені медіани *AD*, *BE* і *CP*. Записати вектори $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CP}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α такі пари векторів лінійно залежні: **1)** $(\alpha+1)\vec{a}+\vec{b}$ та $2\vec{b}$; **2)** $\alpha\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

5. Знайти α і β, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – лінійно незалежні.

1) $3\vec{a}+5\vec{b}=\alpha\vec{a}+(2\beta+1)\vec{b}$; **2)** $(2\alpha-\beta-1)\vec{a}-(3\alpha-\beta+10)\vec{b}=\vec{0}$.

6. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – лінійно незалежні. За якого значення дані вектори лінійно залежні:

1) $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{y}=\alpha\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$ і $\vec{z}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; **2)** $\vec{x}=\alpha\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=\vec{a}+\alpha\vec{b}-\vec{c}$?

7. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні вектори. Визначити, чи є колінеарними такі пари векторів:

1) $\overrightarrow{p_1}=\vec{a}-2\sqrt{3}\vec{b}$ і $\overrightarrow{p_2}=\sqrt{3}\vec{a}-6\vec{b}$; **2)** $\overrightarrow{p_1}=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\overrightarrow{p_2}=\vec{a}+2\vec{b}$;

3) $\overrightarrow{p_1} = 7\vec{a}$ і $\overrightarrow{p_2} = 3\sqrt{5}\vec{a}$;

4) $\overrightarrow{p_1} = \vec{a} - 2\sqrt{2}\vec{b} + \sqrt{6}\vec{c}$ і $\overrightarrow{p_2} = \sqrt{2}\vec{a} - 4\vec{b} + 2\sqrt{3}\vec{c}$.

8. Дано правильний шестикутник *ABCDEF*. Беручи за базисні вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

9. Візьмемо у ромбі *ABCD* вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$ та $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$ в цьому базисі.

10. Дано рівнобічну трапецію *ABCD*, в якій нижня основа $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ і кут між ними $\angle\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Розкласти за $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$.

11. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини:

1) множина матриць-рядків довжини *n* з операціями додавання і множення на число матриць;

2) множина квадратних матриць *n*-го порядку з дійсними елементами, якщо за операції взяти додавання матриць і множення на матриці число;

3) множина всіх многочленів ступеня, не більшого за *n*, із звичайними діями додавання многочленів та множення многочлена на число;

4) множина всіх многочленів ступеня, що дорівнює *n* із звичайними діями додавання многочленів та множення многочлена на число;

5) множина R^+ додатних дійсних чисел, в якій операції додавання і множення на дійсне число означені так:

- сума двох елементів $\vec{x} = x$ та $\vec{y} = y$ цієї множини дорівнює добутку цих дійсних чисел xy,
- добуток елемента $\vec{x}$ на дійсне число λ визначимо як піднесення дійсного додатного числа x до ступеня λ.

12. Нехай P_2 – лінійний простір многочленів степеня не вище другого. Довести, що вектори $\overrightarrow{p_1} = 1 + 2t + 3t^2$, $\overrightarrow{p_2} = 2 + 3t + 4t^2$ і $\overrightarrow{p_3} = 3 + 5t + 7t^2$ лінійно незалежні.

ТЕМА 2. ВЕКТОРИ ТА ЇХНІ ДОБУТКИ В СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

2.1. СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Одним з найбільш ефективних способів „пов'язування" чисел з їхнім геометричним зображенням у вигляді точок є системи координат. Найпростіша з них – числова вісь, яку легко отримати з будь-якої прямої, виконавши такі дії:

- взяти на цій прямій довільну точку і назвати її початком координат (прийнято таку точку позначати буквою O);
- вибрати одиницю виміру, тобто умовитися, довжину якого відрізка вважати рівним одиниці (використовуючи такий відрізок як еталон довжини, можна буде визначати відстань між двома будь-якими точками прямої та виражати її чисельно);
- з двох можливих напрямів обрати один, позначити стрілкою і вважати його додатнім (за додатній прийнято брати напрям зліва направо), протилежний обраному напрям вважати від'ємним.

Тепер кожній точці числової осі відповідає одне єдине число, і навпаки, тобто маємо взаємно однозначну відповідність. Число, яке відповідає тій чи іншій точці, називається *координатою* цієї точки.

2.1.1. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Проекцією точки *A на вісь u* називається точка A_1, яка є основою перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на дану вісь. Таким чином, проекція A_1 є точкою перетину осі u з площиною, яка проходить через точку A, перпендикулярно до осі u.

Нехай у просторі задано вісь u і вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь u відповідно початку A та кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.1).

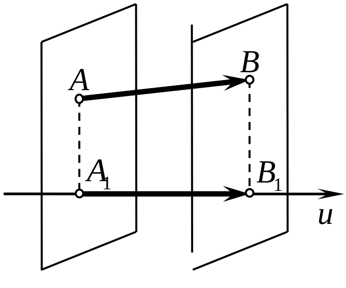

Рис. 2.1

Проекцією вектора *$\overrightarrow{AB}$ на вісь u* називають додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u однаково напрямлені, і від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь u позначають так: $\text{пр}_u \vec{a}$. Якщо $\vec{a}=\vec{0}$, то вважають, що $\text{пр}_u \vec{a}=0$.

Кутом φ між вектором $\vec{a}$ і віссю u (або між двома векторами) називається менший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю: $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},u}\right)=\left(\widehat{\vec{a},\vec{u_0}}\right), 0\le\varphi\le\pi$.

Властивості проекцій

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь u дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором та віссю, тобто

$$\text{пр}_u \vec{a}=\vec{a}\cos\varphi. \tag{2.1}$$

2. Проекція суми скінченої кількості векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто

$$\text{пр}_u\left(\vec{a_1}+\vec{a_2}+\ldots+\vec{a_n}\right)=\text{пр}_u \vec{a_1}+\text{пр}_u \vec{a_2}+\ldots+\text{пр}_u \vec{a_n}. \tag{2.2}$$

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число, тобто

$$\text{пр}_u\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\,\text{пр}_u \vec{a}. \tag{2.3}$$

Приклад 1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють з віссю $\vec{S}$ кути $60°$ і $120°$. Знайти проекцію суми $\vec{a}+3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$.

➤ Оскільки за формулою (8.2) проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$\text{пр}_{\vec{S}}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right),$$

то досить знайти проекції на вісь $\vec{S}$ кожного з векторів $\vec{a}$ і $3\vec{b}$. Відповідно до формули (8.1) дістаємо:

$$\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos 60°=6\frac{1}{2}=3;$$

$$\text{пр}_{\vec{S}}\vec{b}=|\vec{b}|\cos 120°=4\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$$

За властивістю 3 знаходимо проекцію вектора $3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$: $\text{пр}_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right)=3\text{пр}_{\vec{S}}\vec{b}=3(-2)=-6.$

Отже, $\text{пр}_{\vec{S}}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=3+(-6)=-3.$ ➤

2.1.2. АФІННА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Афінною системою координат *у просторі* називається впорядкована четвірка точок $(O; A_1; A_2; A_3)$, які не лежать на одній площині. Точка O називається *початком* афінної системи координат, промені $[OA_1)$, $[OA_2)$, $[OA_3)$ – *додатними напівосями* афінної системи координат, прямі (OA_1), (OA_2), (OA_3) – *осями*. Афінна система координат також називається *афінним репером*.

Вектори $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$ називаються *координатними векторами* афінної системи координат або *базисом.* Тобто афінна система координат у просторі визначається заданням базису $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ і деякої точки O, яка називається *початком координат*.

Теорема 2.1. *Будь-який вектор у просторі може бути розкладений по базисних векторах афінної системи координат* $(O; A_1; A_2; A_3)$, *причому єдиним способом, тобто*

$$\forall \vec{d}\ \exists! \alpha_1 \in R, \exists! \alpha_2 \in R, \exists! \alpha_3 \in R : \vec{d} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 . \qquad (2.4)$$

Коефіцієнти розкладу у формулі (8.4) вектора $\vec{d}$ по координатним векторам афінної системи координат називаються *афінними координатами* цього *вектора* відносно даної афінної системи координат.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором* точки M в афінній системі координат $(O; A_1; A_2; A_3)$. *Афінними координатами* будь-якої точки M в даній афінній системі координат називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ (відносно базису $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$), тобто числа α, β, γ такі, що $\overrightarrow{OM} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3$. Запис $M(\alpha; \beta; \gamma)$ означає, що числа α, β, γ є координатами точки M.

Теорема 2.2. *Координати вектора* $\overrightarrow{M_1 M_2}$ *в афінній системі координат дорівнюють різницям відповідних координат точок* M_1 і M_2, *тобто якщо ці точки мають такі координати* $M_1(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ *і* $M_2(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$, *то вектор* $\overrightarrow{M_1 M_2} = (\alpha_2 - \alpha_1; \beta_2 - \beta_1; \gamma_2 - \gamma_1)$.

Аналогічно визначається афінна система координат на площині.

2.1.3. ДЕКАРТОВА ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, тобто утворюють ортонормований базис, який записують через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, де $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$ і $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right) = \left(\widehat{\vec{j},\vec{k}}\right) = \left(\widehat{\vec{k},\vec{i}}\right) = \frac{\pi}{2}$, то система координат називається ***декартовою прямокутною*** *системою координат*. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є відповідно *ортами* осей Ox, Oy, Oz, які називаються Ox *– віссю абсцис*, Oy *– віссю ординат*, Oz *– віссю аплікат*.

Так як декартова прямокутна система координат є афінною системою координат, то за теоремою 8.1. кожний вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладеним за декартовим прямокутним базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто для кожного вектора $\vec{d}$ знайдеться єдина трійка чисел x, y, z така, що справедлива рівність:

$$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z). \tag{2.5}$$

Числа x, y, z у формулі (2.5) називаються *декартовими прямокутними координатами вектора* $\vec{d}$, причому перша координата x називається *абсцисою вектора* $\vec{d}$, друга координата y називається *ординатою вектора* $\vec{d}$, третя координата z називається *аплікатою вектора* $\vec{d}$.

Як і в афінній системі координат визначають координати точки: якщо точка *M* – точка простору, то декартові прямокутні системи координати цієї точки збігаються з декартовими координатами її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$, тобто запис $M(x, y, z)$ рівносильний запису $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. За теоремою 2.2., якщо дано $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{2.6}$$

Теорема 2.3. *Декартові прямокутні координати* x, y, z *вектора* $\vec{d}$ *дорівнюють проекціям цього вектора на осі* Ox, Oy, Oz*, відповідно, тобто*

$$x = \text{пр}_{Ox}\vec{d},\ y = \text{пр}_{Oy}\vec{d},\ z = \text{пр}_{Oz}\vec{d}, \tag{2.7}$$

а вектори $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ *є складовими вектора* $\vec{d}$ *на осі* Ox, Oy, Oz.

<u>Зауваження</u>. Система координат $Oxyz$ називається *правою* (*лівою*), якщо поворот на найменший кут від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, що спостерігається з кінця

вектора $\vec{k}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). Аналогічно визначається права (ліва) система координат на площині (рис 2.2). Далі завжди розглядатимуться тільки праві системи координат.

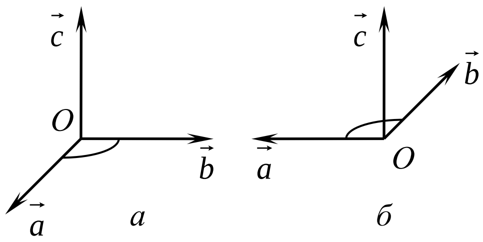

Рис. 2.2

Прямокутні координати точки на площині та на прямій визначаються таким самим способом, як і в просторі

Декартова прямокутна система координат Oxy на площині задається точкою O – початком координат і двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ – базисом системи координат; система координат на прямій задається точкою O та одиничним вектором $\vec{i}$. Зрозуміло, що точка $M(x;y)$ на площині має лише дві координати – абсцису та ординату, а точка $M(x)$ на прямій – одну.

Приклад 2. Побудувати:

1) на координатній прямій *Ox* точки $A_1(3)$, $A_2(-2)$;

2) у прямокутній системі координат на площині *Oxy* точки $B_1(1;2)$, $B_2(2;-3)$, $B_3(-3;0)$;

3) у прямокутній системі координат у просторі *Oxyz* побудувати точки $C_1(1;2;3)$, $C_2(3;-2;3)$, $C_3(-1;-2;-3)$.

◄ Побудову точок показано на рис. 2.3, *а*-*в*. ►

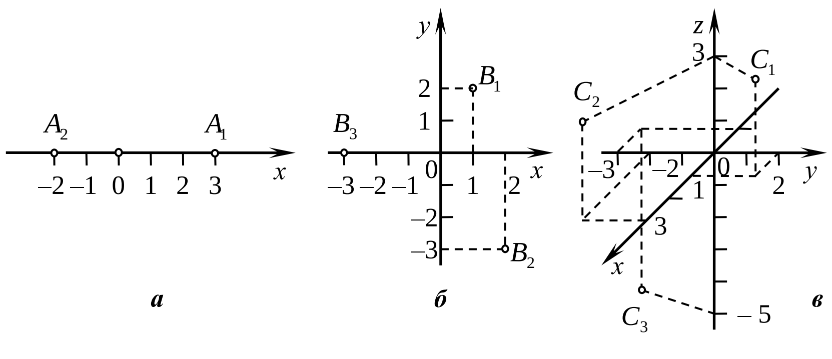

Рис. 2.3

2.1.4. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Декартова система координат не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем.

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O, яка називається *полюсом*, і променем Op, який виходить з полюса і називається *полярною віссю*. Задаються також одиниці масштабу: лінійна – для вимірювання довжин відрізків і кутові – для вимірювання кутів (рис. 2.4). Нехай $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ – відстань від точки O до точки M і

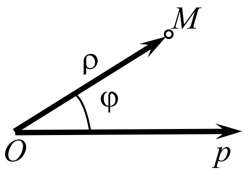

Рис. 2.4

$\varphi = \left(\widehat{Op, \overrightarrow{OM}} \right)$ – кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ. При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом*, а число φ – другою координатою і називається *полярним кутом*. Точка M з полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho;\varphi)$. Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \le \rho < +\infty$ полярний кут вважатимемо таким, що змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$. Іноді розглядають кути φ, більші від 2π, а також від'ємні кути, тобто такі, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Виразимо декартові координати точки M через полярні.

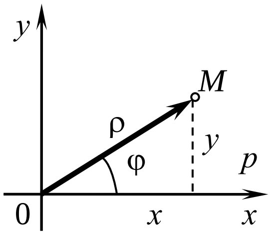

Рис. 2.5

Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, вісь Ox – з полярною віссю Op. Якщо точка M (рис. 2.5) має декартові координати x і y і полярні ρ і φ, то

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \tag{2.8}$$

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{2.9}$$

Зауважимо, що друга з формул (2.9) дає два значення кута φ, оскільки він змінюється від 0 до 2π. З цих двох значень кута треба взяти те, для якого задовольняються формули (2.8). Формули (2.8) називають *формулами переходу від полярних координат до декартових*, а формули (2.9) – *формулами переходу від декартових координат до полярних*.

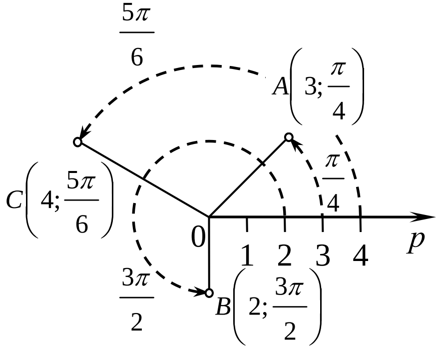

Рис. 2.6

Приклад 3. Побудувати точки за полярними координатами: $A\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2;\frac{3\pi}{2}\right)$ і $C\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$.

➤ Дані точки показано на рис. (2.6) ➤

2.1.5. ЦИЛІНДРИЧНА ТА СФЕРИЧНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ

У просторі крім прямокутної системи координат часто вживаються циліндрична та сферична системи координат.

Циліндрична система координат

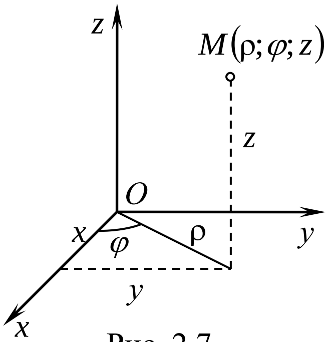

Рис. 2.7

Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат x, y взяти полярні координати ρ і φ, а третю координату z залишити без зміни, то дістанемо циліндричну систему координат (рис. 2.7). Координати точки M простору в цій системі записуються у вигляді $M(\rho;\varphi;z)$.

Залежності між прямокутними координатами точки $M(x;y;z)$ і її циліндричними координатами $M(\rho;\varphi;z)$ випливають з формул (2.8):

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z\,, \qquad (2.10)$$

де $0\le\rho<+\infty, 0\le\varphi<2\pi, -\infty<z<+\infty$.

Отже, якщо прямокутна і циліндрична системи координат розміщені так, як на рис. 2.7, то зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами виражається формулами (2.10).

Сферична система координат

У системі координат $Oxyz$ візьмемо точку M і через цю точку і вісь Oz проведемо площину (рис. 2.8). Нехай r – відстань від початку координат до точки *M*; φ – двогранний кут між площинами *Ozx* і *zOM*; θ – кут між віссю *Oz* і променем *OM*. Упорядкована трійка чисел *r*, φ, θ однозначно визначає положення точки *M* у просторі. Ці числа називаються *сферичними координатами точки M*.

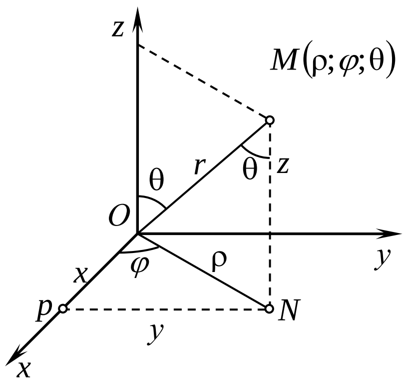

Рис. 2.8

Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки *M*. З прямокутних трикутників *ONM* і *OPN* маємо

$$z = r\cos\theta,\ \rho = r\sin\theta,\ x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,$$

тоді

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \qquad (2.11)$$

де $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi$.

Таким чином, якщо прямокутна і сферична системи координат розміщені так, як на рис. 2.8, то зв’язок між прямокутними і сферичними координатами виражається формулами (2.11).

2.2. ВЕКТОРИ В ДЕКАРТОВІЙ ПРЯМОКУТНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Для того, щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглядатимемо вектори в декартовій прямокутній системі координат.

2.2.1. КООРДИНАТИ, ДОВЖИНА ТА НАПРЯМНІ КОСИНУСИ ВЕКТОРА

Нехай в прямокутній системі координат *Oxyz* задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a}$ можна розкласти у просторі за базисом таким чином: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (п. 1.4), де числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. Але з властивостей проекції (п. 2.1.1) випливає, що

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a},\ a_y = \text{пр}_{Ox}\vec{a},\ a_z = \text{пр}_{Ox}\vec{a}.$$

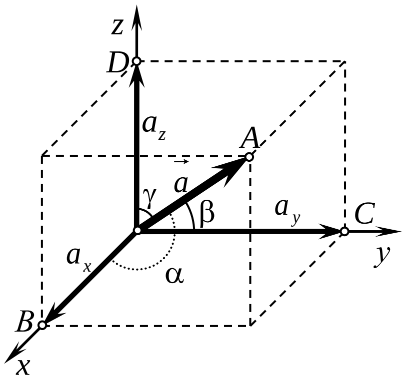

Рис. 2.9

(2.12)

Отже, координати вектора в системі координат *Oxyz* – це його проекції на осі координат. Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.9) з вимірами $|a_x|$, $|a_y|$, $|a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \qquad (2.13)$$

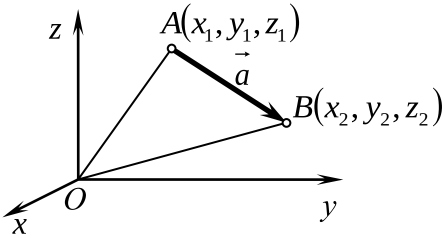

Рис. 2.10

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 2.10) міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то з формул (2.2) і (2.12) випливає, що $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (2.14)$$

Тоді з формули (2.13) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \qquad (2.15)$$

Цією формулою користуються для знаходження *відстані між точками A* і *B*.

Приклад 4. Знайти вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; 3; 2)$ і $B(5; 8; -1)$.

◄ За формулою (2.14) маємо

$a_x = 5 - 1 = 4,\ a_y = 8 - 3 = 5,\ a_x = -1 - 2 = -3$, тобто $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. ►

Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 2.9):

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}\right), \beta = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}\right), \gamma = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}\right), 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi\ .$$

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами*. Формули для напрямних косинусів дістаємо з формул (2.1) і (2.12):

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}\ . \qquad (2.16)$$

Підносячи обидві частини кожної з рівностей (2.16) до квадрата і підсумовуючи, з урахуванням формули (2.13) дістанемо

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (2.17)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

Приклади. 5. Задано точки $A(0;-1;2)$ і $B(-1;1;4)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$.

➤ З формул (2.14), (2.15) і (2.16) маємо:

$$\overrightarrow{AB}=(-1;2;2);\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1+4+4}=3;\ \cos\alpha=-\frac{1}{3};\ \cos\beta=\cos\gamma=\frac{2}{3}.$$ ➤

6. Чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha=\beta=60^\circ$, $\gamma=30^\circ$?

➤ $\cos^2 60^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 30^\circ=\frac{5}{4}\neq 1$, тому згідно з формулою (2.17) дістанемо на це запитання негативну відповідь. ➤

2.2.2. ЛІНІЙНІ ДІЇ З ВЕКТОРАМИ. РІВНІСТЬ ТА КОЛІНЕАРНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають арифметичні дії над їхніми координатами. Це випливає з властивостей 1, 2 проекцій (п. 2.1.1).

Нехай задано вектори $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ і дійсне число λ, тоді:

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z), \tag{2.18}$$

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z). \tag{2.19}$$

Приклади. 7. Визначити модулі суми та різниці векторів $\vec{a}=(3;-5;8)$, $\vec{b}=(-1;1;-4)$.

➤ Знаходимо за формулою (2.19) координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=(2;-4;4);\quad \vec{a}-\vec{b}=(4;-6;12).$$

За формулою (2.13) дістаємо:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6;$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+12^2}=14.$$ ➤

8. Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти довжини ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 піраміди.

⮜ Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Маємо $\overrightarrow{A_1A_2}=(5;3;1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(2;2;3)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(1;4;-2)$. Оскільки $|A_1A_2|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$, то $|A_1A_2|=\sqrt{5^2+3^2+1^2}=\sqrt{35}$.

Аналогічно
$|A_1A_3|=\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}$; $|A_1A_4|=\sqrt{1^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$. ⮞

Нехай вектори $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ та $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ *рівні*, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді з формул (2.1) і (2.12) випливає, що

$$a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z \tag{2.20}$$

і навпаки, якщо мають місце формули (2.20), то $\vec{a}=\vec{b}$. Отже, всяка векторна рівність виду $\vec{a}=\vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям (2.20).

Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a}(a_x;a_y;a_z)$ та $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$ *колінеарні*, є пропорціональність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{2.21}$$

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, тоді з формули (2.20) дістанемо рівності $a_x=\lambda b_x; a_y=\lambda b_y; a_z=\lambda b_z$, з яких випливають формули (2.21).

Приклади. 9. Знайти вектор $\vec{a}=(a_x;-1;a_z)$, колінеарний вектору $\vec{b}=(1;-2;3)$.

⮜ З умов (2.21) маємо $\frac{1}{a_x}=\frac{-2}{-1}=\frac{3}{a_z}$; $a_x=\frac{1}{2}$; $a_z=\frac{3}{2}$. ⮞

10. Довести, що координати орта $\overrightarrow{a^0}$ вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, збігаються з напрямними косинусами даного вектора.

⮜ $\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{|\vec{a}|}(a_x;a_y;a_z)=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\frac{a_y}{|\vec{a}|};\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$. ⮞

2.2.3. ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ДАНОМУ ВІДНОШЕННІ. КООРДИНАТИ ЦЕНТРА МАС

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x; y; z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $\left|\overrightarrow{AM}\right| : \left|\overrightarrow{MB}\right| = \lambda$. Введемо радіус-вектори (рис. 2.11)

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA_1} = (x_1; y_1; z_1)$,

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$,

$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$.

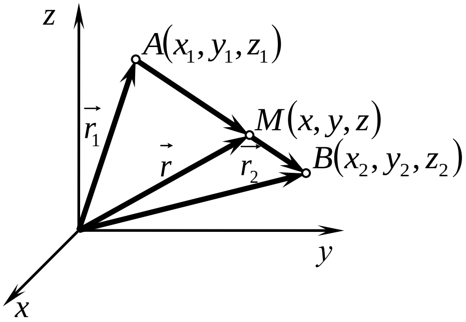

Рис. 2.11

Оскільки $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки $\vec{r} = \dfrac{\vec{r} + \lambda \vec{r}_2}{1+\lambda}$. Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, згідно з формулами (2.20) маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2.22}$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл $(\lambda = 1)$, знаходяться за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.23}$$

Виведемо тепер формули для координат центра мас системи матеріальних точок $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), \ldots, M_n(x_n; y_n; z_n)$, в яких зосереджено маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Знайдемо спочатку центр маси $N_1(x_{N_1}, y_{N_1}, \ldots, z_{N_1})$ системи двох точок M_1 та M_2. Оскільки центр маси лежить на відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні $\lambda_1 = \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1M_2}\right|}$, то за формулами (2.22)

$$x_{N_1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},\ y_{N_1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2},\ z_{N_1} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.24}$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (2.24), називається *центром мас двох матеріальних точок* M_1 і M_2.

Розглянемо тепер систему точок N_1 і M_3, в яких зосереджено маси m_1+m_2 і m_3 та знайдемо центр маси $N_2\left(x_{N_2}, y_{N_2}, \ldots, z_{N_2}\right)$ цих точок. Оскільки $\lambda_2 = \dfrac{m_3}{m_1+m_2} = \dfrac{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_2M_3}\right|}$, то з формул (8.22) і (8.24) маємо

$$x_{N_2} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_2x_3}{m_1+m_2+m_3},\ y_{N_2} = \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},\ z_{N_2} = \frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}. \qquad (2.25)$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (2.25), називаються *центром мас трьох матеріальних точок* M_1, M_2, M_3.

Методом математичної індукції можна довести, що центр мас системи *n* матеріальних точок знаходиться в точці $C\left(x_C; y_C; z_C\right)$, де

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\ y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\ z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Приклади. 11. Дано точки $M_1\left(2; 4; -2\right)$ і $M_2\left(-2; 4; 2\right)$. На прямій $\left(M_1M_2\right)$ знайти точку *M*, яка ділить відрізок $\left[M_1M_2\right]$ у відношенні $\lambda = 3$.

➤ Використаємо формули (2.22)

$$x_M = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{2+3(-2)}{1+3} = -1,\ y_M = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4+3\cdot 4}{1+3} = 4,$$

$$z_M = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-2+3\cdot 2}{1+3} = 1.$$ ➤

12. Дано трикутник: $A\left(1; 1; 1\right)$, $B\left(5; 1; -2\right)$, $C\left(7; 9; 1\right)$. Знайти координати точки D перетину бісектриси кута $\angle A$ із стороною CB.

➤ За формулою (2.15) знайдемо довжини сторін трикутника, які утворюють кут $\angle A$:

$$\left|AC\right| = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 + \left(z_C - z_A\right)^2} = \sqrt{\left(7-1\right)^2 + \left(9-1\right)^2 + \left(1-1\right)^2} = 10;$$

$$\left|AB\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2} = \sqrt{\left(5-1\right)^2 + \left(1-1\right)^2 + \left(-2-1\right)^2} = 5.$$

Так як бісектриса ділить сторону на частини, пропорційні прилеглим сторонам, то $\left|CD\right| : \left|DB\right| = \left|AC\right| : \left|AB\right| = 10 : 5 = 2$. Таким чином

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3},\ y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot 1}{1+2}=\frac{11}{3},$$

$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{1+2(-2)}{1+2}=-1$$

шукана точка $D\left(\frac{17}{3};\frac{11}{3};-1\right)$. ➤

2.3. ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Для векторного простору V і множини дійсних чисел R розглядається два види відображень:

1) *внутрішній закон композиції*, коли відбувається відображення пари векторів на вектор, тобто $\forall\vec{a}\in V\ \forall\vec{b}\in V\ \forall\vec{c}\in V \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right)\to\vec{c}$;

2) *зовнішній закон композиції*, коли відбувається відображення пари векторів, число на вектор, тобто $\forall\vec{a}\in V\ \forall\vec{b}\in V\ \forall\alpha\in R \Rightarrow \left(\alpha,\vec{a}\right)\to\vec{b}$.

Добутки векторів являють собою або внутрішній закон композиції, або зовнішній закон композиції, або взагалі, іноді, не є законом композиції. Пропонуємо вам самостійно, користуючись наступними визначеннями, зробити висновок про те, яким законом відображення є кожний із вказаних добутків.

2.3.1. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, позначене символом $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$ (або $\vec{a}\cdot\vec{b}$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними, тобто

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \tag{2.26}$$

де $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за визначенням $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Оскільки за формулою (8.3) $\left|\vec{a}\right|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, то за формулою (2.26) маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{2.27}$$

Формули (8.27) виражають **геометричний зміст скалярного добутку**: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проекцію другого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. *Комутативність* множення: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$.

2. *Асоціативність* відносно множення на число: $\left\langle \alpha\vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \alpha\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$.

3. *Дистрибутивність* відносно додавання векторів: $\left\langle \left(\vec{a} + \vec{b}\right), \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$.

Геометричні властивості скалярного добутку

1. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку, тобто добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

2. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток додатний (від'ємний) або якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$ – гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$ – тупий.

3.. Добуток $\left\langle \vec{a}\vec{a} \right\rangle$ позначається через $\vec{a}^{\,2}$ і називається *скалярним квадратом*. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора, тобто

$$\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = \left| \vec{a} \right|^2, \tag{2.28}$$

звідки

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}. \tag{2.29}$$

Вираз скалярного добутку через координати

Теорема 2.4. *Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат, тобто*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.30}$$

Наслідки. **1.** *Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів* $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ *і* $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ *є рівність* $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

2. *Кут між векторами* $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ *і* $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ *визначається за формулою*

$$\cos\varphi=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{2.31}$$

3. *Проекція вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *визначається за формулою*

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{2.32}$$

4. *Довжина вектора* $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ *визначається за формулою*

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ . \tag{2.33}$$

5. *Для координатних векторів справедливі рівності*

$$\vec{i}^{\,2}=1;\ \vec{j}^{\,2}=1;\ \vec{k}^{\,2}=1;\ \langle\vec{i},\vec{j}\rangle=\langle\vec{i},\vec{k}\rangle=\langle\vec{j},\vec{k}\rangle=0. \tag{2.34}$$

Приклади. **13.** Дано координати вершин піраміди $A_1(-1;0;1)$, $A_2(4;3;2)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;4;-1)$. Знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

➤ Оскільки $\overrightarrow{A_1A_2}=(5;3;1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4}=(1;4;-2)$, то косинус кута між векторами згідно формули (2.31) $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\frac{\langle\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4}\rangle}{|\overrightarrow{A_1A_2}||\overrightarrow{A_1A_4}|}=\frac{5\cdot1+3\cdot4+1(-2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}}=$$

$$=\frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}}=\frac{15}{7\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тоді

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$. тому

$$\left(A_1A_2\hat{\ }A_1A_4\right)=\left(\overrightarrow{A_1A_2}\hat{\ }\overrightarrow{A_1A_4}\right)=\arccos\frac{\sqrt{15}}{7}. ➤$$

14. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Визначити, за яких значень α вектори $\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ перпендикулярні.

➤ Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку за першою геометричною властивістю. Звідси для α маємо співвідношення:

$$\left\langle\left(\vec{a}+\alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\alpha\vec{b}\right)\right\rangle=0.$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$\left\langle\left(\vec{a}+\alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\alpha\vec{b}\right)\right\rangle=\vec{a}^2-\alpha\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle+\alpha\left\langle\vec{b}\vec{a}\right\rangle-\alpha^2\vec{b}^2=$$

$$=|\vec{a}|^2-\alpha\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle+\alpha\left\langle\vec{b}\vec{a}\right\rangle-\alpha^2\left|\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2-\alpha^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

Оскільки $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, то $9-25\alpha^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\pm\frac{3}{5}$. ➤

15. Знайти довжину вектора $\vec{a}=\vec{x}-2\vec{y}$, якщо $|\vec{x}|=1$, $|\vec{y}|=2$, кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

➤ Маємо $\langle\vec{a}\vec{a}\rangle=|\vec{a}|^2$. Звідси $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$. Тому

$$|\vec{a}|=|\vec{x}-2\vec{y}|=\sqrt{(\vec{x}-2\vec{y})^2}=\sqrt{\vec{x}^2-4\vec{x}\vec{y}+4\vec{y}^2}=\sqrt{|\vec{x}|^2-4|\vec{x}||\vec{y}|\cos\frac{\pi}{3}+4|\vec{y}|^2}=$$

$$=\sqrt{1-4\cdot 2\frac{1}{2}+16}=\sqrt{13}.$$

➤

2.3.2. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символами $\vec{c}=\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ або $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ і визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $c = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (п. 2.1.3.).

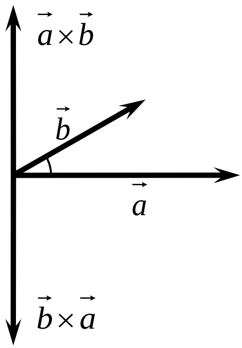

Рис. 2.12

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. *Антикомутативність* множення:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right),$$

тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a}\times\vec{b}$ і $\vec{b}\times\vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійка векторів $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\right)$ і $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{b}\times\vec{a}\right)$ протилежної орієнтації (рис. 2.12).

2. *Асоціативність відносно скалярного множника* λ:

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right); \vec{a}\times\lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

3. *Дистрибутивність відносно додавання векторів*:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам’ятати, що воно некомутативне: при переставлянні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

Геометричні властивості векторного добутку

1. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

2. Модуль $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (2.35)$$

3. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0, \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},$$

$$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}, \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}, \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}, \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}.$$

Приклад 16. Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=4$, $\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\frac{\pi}{2}$.

➤ $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=$

$=-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\vec{a}\times\vec{b}=-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$; $\left|-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\frac{\pi}{2}=5\cdot3\cdot4\cdot1=60$ ➤

Вираз векторного добутку через координати

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$. Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.36)$$

Використовуючи теорему 8.1 про розклад визначника, маємо

$$\vec{a}\times\vec{b}==\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (2.37)$$

Приклад 17. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1;2;0)$, $B(0;-2;1)$, $C(-1;0;2)$.

➤ Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=(-1;-4;1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-2;2)$ і за формулою (2.36)

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k},$$

то за формулою (2.35) площа $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=3\sqrt{2}$. ➤

2.3.3. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a}\times\vec{b}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Перший з цих добутків відповідає множенню скаляра $\vec{a}\cdot\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і не розглядається. Те саме стосується добутків $\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$ та $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$.

Результатом другого добутку є вектор $\vec{d}$, який називається *подвійним векторним* або *векторно-векторним добутком* даних трьох векторів і розглядається в наступному пункті 2.3.4.

Останній з наведених добутків $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ – це скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$; тобто число, яке називають ***мішаним добутком*** векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Цей добуток має чіткий геометричний зміст і широко використовується в задачах.

Властивості мішаного добутку

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то він змінить знак, наприклад:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

2. При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$$

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна поміняти місцями:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

4. Модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:

$$S=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (2.38)$$

5. Якщо мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатний, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву.

6. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.

<u>Зауваження.</u> Властивості 4-6 виражають геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.

Вираз векторного добутку через координати

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задано координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Координати вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначаються за формулою (2.37):

$$\vec{a} \times \vec{b} == \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (8.30) отримаємо:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2.39)$$

Приклади. 18. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;-1;0)$, $B(5;5;3)$, $C(3;2;-2)$ і $D(4;1;2)$.

◄ Відомо, що об'єм тетраедра V_{ABCD}, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. То за формулою (2.37) маємо $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (3;6;3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;3;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (2;2;2)$.

За формулою (2.39) дістанемо

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3. \text{►}$$

19. Довести, що точки $A(0;1;2)$, $B(-2;0;-1)$, $C(-1;5;8)$, $D(1;6;11)$ лежать в одній площині.

◄ Точки *A*, *B*, *C*, *D*, лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (-2;-1;-3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;4;6)$, $\overrightarrow{AD} = (1;5;9)$.

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 9\end{vmatrix}=0,$$

то за властивістю 6 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині. ➤

20. Яку трійку утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(-1;0;2)$, $\vec{c}=(1;-2;5)$?

➤ Оскільки мішаний добуток

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=24>0,$$

то за властивістю 5 дані вектори утворюють праву трійку. ➤

2.3.4. ПОДВІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

Подвійним векторним добутком *трьох векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається вектор $\vec{d}$, що дорівнює векторному добутку вектора $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}$, і позначається $\vec{d}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ або $\vec{d}=\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$.

Вектор $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ і вектора $\vec{c}$. Із перпендикулярності вектора $\vec{d}$ до векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ випливає, що $\vec{d}$ лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ також перпендикулярні до векторного добутку $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$.

Теорема 8.5. *Подвійний векторний добуток трьох векторів дорівнює різниці добутків середнього вектора на скалярний добуток мінус добуток того крайнього вектора, який міститься у внутрішніх дужках, на скалярний добуток інших векторів, тобто*

$$\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]=\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{a}\left\langle\vec{c}\vec{b}\right\rangle, \tag{2.40}$$

у загальному випадку

$$\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]=-\left[\vec{c}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right], \tag{2.41}$$

але $\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]\neq\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$.

<u>Зауваження.</u> В інших позначеннях формули (8.38) та (8.39) мають вигляд:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a};\\&\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту не має.

Приклад 21. Довести тотожність $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$, не використовуючи твердження теореми 2.5.

➤ Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином. Вісь *Ox* напрямимо вздовж вектора $\vec{a}$, а вісь *Oy* помістимо в площині $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вважаючи, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку). В такому випадку матимемо:

$$\vec{a}=\left(x_1;0;0\right),\ \vec{b}=\left(x_2;y_2;0\right),\ \vec{c}=\left(x_3;y_3;z_3\right).$$

Знайдемо $\vec{d}$. Маємо

$$\left[\vec{b}\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_2&y_2&0\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=y_2z_3\vec{i}-x_2z_3\vec{j}+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)\vec{k}\ .$$

Отже,

$$\vec{d}=\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&0&0\\y_2z_3&-x_2z_3&x_2y_3-x_3y_2\end{vmatrix}=-\left(x_1x_2y_3-x_1x_3y_2\right)\vec{j}-x_1x_2z_3\vec{k}=$$

$$=\left(0;-\left(x_1x_2y_3-x_1x_3y_2\right);-x_1x_2z_3\right)=\left(0;\left(x_1x_3y_2-x_1x_2y_3\right);-x_1x_2z_3\right).$$

Знайдемо $\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle$. Маємо

$$\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle=x_1x_3;\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle=\left(x_1x_2x_3;\,x_1x_3y_2;\,0\right),$$

$$\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle=x_1x_2;\ \vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle=\left(x_1x_2x_3;\,x_1x_2y_3;\,x_1x_2z_3\right).$$

Звідси

$$\vec{b}\left\langle\vec{a}\vec{c}\right\rangle-\vec{c}\left\langle\vec{a}\vec{b}\right\rangle=\left(0;\left(x_1x_3y_2-x_1x_2y_3\right);-x_1x_2z_3\right),$$

що збігається з виразом для $\vec{d}$. ➤

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ.

1. Що називається проекцією вектора на вісь; кутом між вектором і віссю?

2. Запишіть властивості проекцій та спробуйте їх довести.

3. Що являє собою афінна система координат; її початок, осі, базис?

4. Дайте визначення координатам вектора і точки в афінній системі координат. Чому вони дорівнюють?

5. Перелічіть відмінності декартової системи координат від афінної.

6. Як задається декартова прямокутна система на площині?

7. Розкажіть про такі види систем координат як полярна, циліндрична та сферична.

8. Чому дорівнюють координати вектора та його довжина в ДПСК?

9. Напрямні косинуси: визначення та обчислення.

10. Які дії з векторами називаються лінійними? Запишіть формули, за якими в ДПСК вектори додаються, віднімаються та множаться на число.

11. За яких умов вектори вважаються рівними та колінеарними?

12. Як обраховуються координати точки, що ділить відрізок в заданому відношенні?

13. Дайте визначення скалярного добутку векторів. Які алгебраїчні та геометричні властивості він має? В чому полягає геометричний зміст скалярного добутка? Запишіть скалярний добуток через координати векторів, які множаться.

14. Дайте визначення векторного добутку векторів. Які алгебраїчні та геометричні властивості він має? Запишіть векторний добуток через координати векторів, які множаться.

15. Дайте визначення мішаного добутку векторів. Які властивості він має? В чому полягає геометричний зміст мішаного добутка? Запишіть мішаний добуток через координати векторів, які множаться.

16. Який добуток векторів називається подвійним векторним? За якою формулою він обчислюється?

17. Чи є відображенням скалярний, векторний, мішаний, подвійний векторний добутки векторів? Якщо так, то яким законом відображення?

✍ ВПРАВИ.

1. Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – одиничні вектори, що утворюють з даною віссю $\vec{S}$ відповідно кути $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. Знайти проекції на вісь $\vec{S}$ вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

2. Знайти проекцію суми векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 5, \left|\vec{b}\right| = 6, \left|\vec{c}\right| = 8, \left|\vec{d}\right| = 12$, а кути, що утворюють вектори з віссю $\vec{S}$, відповідно дорівнюють $0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{\pi}{3}$.

3. Знайти модуль вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \dfrac{1}{5}\left(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ та його напрямні косинуси.

4. Дано вектори $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $\vec{c} = (2; 0)$. Знайти координати наступних векторів:

1) $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$; **2)** $\dfrac{3\vec{a} - 5\vec{b}}{2}$; **3)** $\dfrac{\vec{c} - 2\vec{b}}{3}$.

5. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні?

6. Переконайтеся, що чотири точки $A = (3; -1; 2)$, $B = (1; 2; -1)$, $C = (-1; 1; -3)$ та $D = (3; -5; 3)$ є вершинами трапеції.

7. Дано координати вершин паралелограма *ABCD*: $A = (2; 2; 2)$, $B = (6; 5; 0)$, $C = (0; 3; 8)$. Знайти координати вершини *D*.

8. Вершини трикутника містяться в точках $A = (2; -1; 3)$, $B = (4; 0; 1)$, $C = (-10; 5; 3)$. Знайти косинус кута $\angle ABC$.

9. У трикутнику з вершинами $A = (5; 4)$, $B = (-1; 2)$, $C = (5; 1)$ проведена медіана AD. Знайти її довжину.

10. Дано трикутник з вершинами $A = (4; 1)$, $B = (7; 5)$, $C = (-4; 7)$ проведена медіана AD. Знайти її довжину.

11. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $120°$, причому $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 4$. Знайти:

1) $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$; **2)** $\vec{a}^{\,2}$; **3)** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; **4)** $\left\langle \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right), \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \right\rangle$.

12. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 4$, знайти довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

13. Дано три вектори $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(-2;4;-3)$, $\vec{c}=(0;2;-1)$. Обчислити:

1) $\langle \vec{a},\vec{b} \rangle$; **2)** $\langle \vec{a},\vec{c} \rangle$; **3)** $\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$; **4)** $\langle (\vec{a}-\vec{b}),(\vec{a}+\vec{b}) \rangle$.

14. При якому значенні m вектори $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?

15. Дано вершини чотирикутника $A=(1;-2;2)$, $B=(1;4;0)$, $C=(-4;1;1)$, $D=(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

16. Визначити кут між векторами $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

17. Обчислити внутрішні кути трикутника з вершинами $A=(1;2;1)$, $B=(3;-1;7)$, $C=(7;4;-2)$ і переконатися, що цей трикутник рівнобедрений.

18. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ та $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

19. Дано вектори $\vec{a}=(3;0;4)$ і $\vec{b}=(2;-1;-2)$. Знайти:

1) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$; **2)** $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$; **3)** $\text{пр}_{\vec{a}}(2\vec{a}-3\vec{b})$.

20. Дано точки $A=(3;1;0)$, $B=(0;-2;6)$, $C=(3;-2;0)$, $D=(1;-2;4)$. Знайти $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

21. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, знайти довжину вектора $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

22. Дано $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\vec{b}=16$. Знайти $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$.

23. Дано вектори $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(2;1;0)$, $\vec{c}=(3;2;1)$. Знайти $\left|\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right],\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]\right|$.

24. Дано трикутник з вершинами $A=(2;-1;2)$, $B=(1;2;-1)$, $C=(3;2;1)$. Знайти його площу.

25. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

26. Чи будуть компланарними вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}=(2;\,5;\,7),\ \vec{b}=(1;\,1;\,-1),\ \vec{c}=(1;\,2;\,2)$;

2) $\vec{a}=(2;\,3;\,-1),\ \vec{b}=(1;\,-1;\,3),\ \vec{c}=(1;\,9;\,-1)$?

27. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут $30°$. Знаючи, що $|\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=3$, знайти $|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|$.

28. Дано три вектори $\vec{a}=(1;\,-1;\,3)$, $\vec{b}=(-2;\,2;\,1)$, $\vec{c}=(3;\,-2;\,5)$. Знайти $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

29. Дано вектори $\vec{a}=(2;\,-3;\,1)$, $\vec{b}=(-3;\,1;\,2)$, $\vec{c}=(1;\,2;\,3)$. Знайти $\left[\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right]$.

30. Дано вектори $\vec{a}=(3;\,0;\,1)$, $\vec{b}=(2;\,4;\,3)$, $\vec{c}=(-1;\,3;\,2)$, $\vec{d}=(2;\,0;\,1)$. Знайти $\left[\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right]$, $\left\langle\left[\vec{a}\,\vec{b}\right],\left[\vec{b}\,\vec{d}\right]\right\rangle$.

31. Знайти об’єм піраміди, вершини якої розташовані в точках з такими координатами:

1) $A(3;-2;5),\ B(1;3;1),\ C(-1;-1;3),\ D(4;3;4)$;

2) $A(1;-2;-1),\ B(4;4;4),\ C(2;1;-1),\ D(3;0;3)$;

3) $A(6;1;4),\ B(2;-2;-5),\ C(7;1;3),\ D(1;-3;7)$;

32. Знайти координати четвертої вершини піраміди *ABCD*, якщо відомий її об’єм *V* та координати інших трьох вершин.

1) $A(2;1;-1),\ B(3;0;1),\ C(2;-1;3),\ V=2$;

2) $A(1;-2;-1),\ B(4;4;4),\ C(2;1;-1),\ V=5$.

Навчальне видання

Укладач: Сіра Ірина Тихонівна

Вивчення модуля «Векторна алгебра» курсу «Лінійна алгебра та геометрія»

Опорні конспекти лекцій для студентів
математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ
(Навчально-методичний посібник)

Підписано до друку 15.09.17 р. Формат 60х90/16
Гарнітура Times. Папір офсетний.
Обсяг 3,5 ум.друк.арк. Друк ізографічний.
Тираж 50 прим.

Надруковано у друкарні ХНУПС імені Івана Кожедуба
61023, м. Харків, вул. Сумська, 77/79