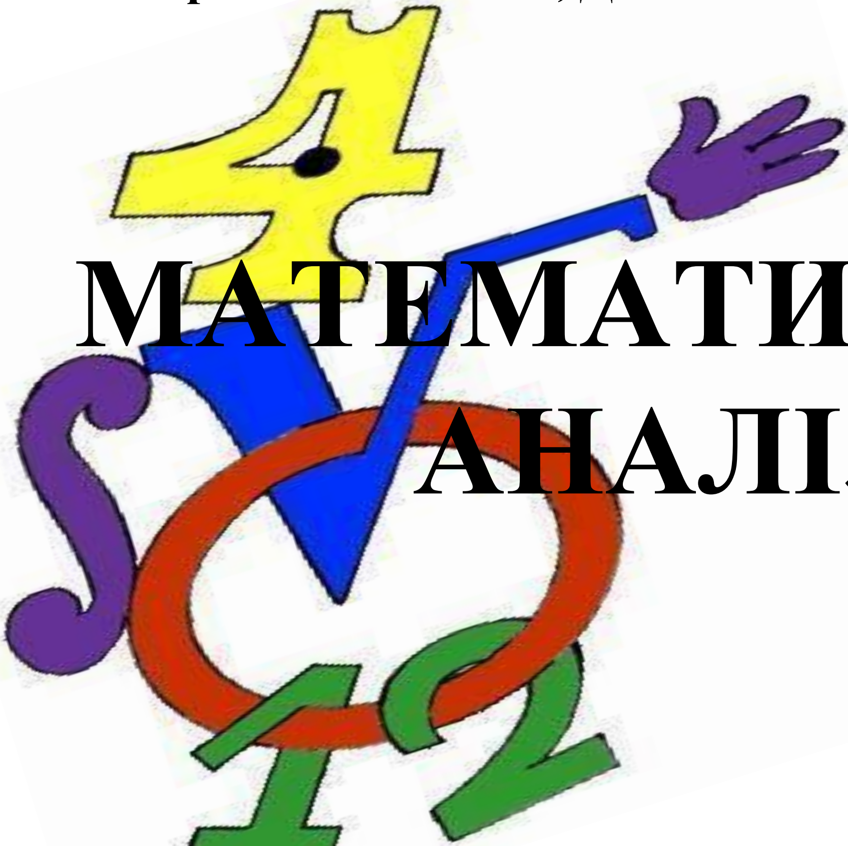
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ Г.С.СКОВОРОДИ

Жерновникова О.А., Дейніченко Т.І., Чібісов О.Д.



МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Практикум для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності «014 Середня освіта (математика)»

Харків
2021

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний педагогічний університет

імені Г.С. Сковороди

Жерновникова О.А., Дейніченко Т.І., Чібісов О.Д.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Практикум для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності «014 Середня освіта (математика)»

Харків

2021

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ж60

Укладачі: Жерновникова О.А., Дейніченко Т.І., Чібісов О.Д.

Рецензенти:

Чібісов Д.В. – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна;

Водолаженко А.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики ХНПУ імені Г.С.Сковороди.

Математичний аналіз : практикум для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності «014 Середня освіта (математика)» Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди. Харків, 2021. 96 с.

У посібнику представлено навчальні матеріали для проведення практичних занять та організації самостійної роботи з математичного аналізу здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності «014 Середня освіта (математика) ХНПУ імені Г.С. Сковороди. Посібник містить методичні розробки практичних занять з курсу, що передбачають завдання для актуалізації й систематизації знань здобувачів, задачі для самостійного розв'язування, індивідуальні навчально-дослідні завдання, наведено приклади їх розв'язування.

Посібник може використовуватись як у навчальному процесі педагогічного ЗВО у вивченні математичного аналізу, так і для самоосвіти бакалаврантів.

Затверджено редакційно-видавничою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди
протокол № 11 від 22.11.2021 р.

Видано за рахунок авторів

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Шановний студенте! Ви отримали навчальний посібник з математичного аналізу, за яким Ви будете працювати на практичних заняттях в аудиторії, вдома, виконуючи самостійну роботу та готуючись до аудиторних занять. Він стане Вашим надійним помічником у засвоєнні нового матеріалу, його закріпленні та систематизації, а також у підготовці до виконання контрольних, індивідуальних робіт та складанні іспиту.

Посібник складається з трьох основних блоків та має таку структуру: перший блок «Актуалізація знань з теми» надає можливості опанувати та повторити теоретичний матеріал з теми, самостійно скласти опорний конспект, перевірити рівень своїх знань шляхом виконання тестових завдань (навчальна робота за першим блоком самостійно виконується вдома); другий блок «Вчимося розв'язувати завдання» надає можливість ознайомитися з прикладами розв'язаних завдань з теми (навчальна робота за другим блоком виконується в аудиторії та самостійно); третій блок «Контроль і рефлексія» допоможе Вам якісно підготуватися до перевірки знань та умінь, яка відбудеться у виконанні індивідуальної роботи, модульного контролю; підсумкова рефлексія надасть Вам можливість ще раз зануритися в тему, над якою працювали.

Бажаємо Вам успіхів у вивченні математичного аналізу!

РОЗДІЛ 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 1

ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Перевіряємо готовність до практичного заняття

1.1 Заповніть правий стовпчик таблиці 1

Таблиця 1

Таблиця основних інтегралів

$\int 0dx$	
$\int dx$	
$\int x^n dx \quad (n \neq -1)$	
$\int \frac{dx}{x} \quad (x \neq 0)$	
$\int a^x dx \quad (a > 0, a \neq 1)$	
$\int e^x dx$	
$\int \cos x dx$	
$\int chx dx$	
$\int \sin x dx$	
$\int shx dx$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	
$\int \frac{dx}{ch^2 x}$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	
$\int \frac{dx}{sh^2 x}$	
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	
$\int \frac{dx}{\cos x}$	
$\int \frac{dx}{\sin x}$	

1.2 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int x^3 dx$

А	Б	В	Г
$\frac{x^4}{4}+C$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^3}{4}+C$	x^4+C

1.3 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \sqrt[3]{x^2}dx$

А	Б	В	Г
$\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}$	$\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}+C$	$\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5}+C$	$\frac{3x\sqrt{x^2}}{5}+C$

1.4 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

А	Б	В	Г
$\sqrt{x}dx+C$	$2\sqrt{2}dx+C$	$2\sqrt{x}dx+C$	$2\sqrt{x}dx$

1.5 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \frac{4}{x^n}dx$

А	Б	В	Г
$\frac{4}{n}x^{1-n}+C$	$\frac{1}{1-n}x^{1-n}+C$	$\frac{4}{1-n}x^{1-n}$	$\frac{4}{1-n}x^{1-n}+C$

1.6 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \frac{6}{x^2}dx$

А	Б	В	Г
$-\frac{6}{x}+C$	$\frac{6}{x}+C$	$-\frac{x}{6}+C$	$-\frac{6}{x}$

1.7 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \sqrt[n]{x^m}dx$

А	Б	В	Г
$x\sqrt[n]{x^m}+C$	$\frac{n}{m}x\sqrt[n]{x^m}+C$	$\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m}+C$	$\frac{n}{m+n}x\sqrt{x^m}+C$

1.8 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}dx$

А	Б	В	Г
$\sqrt[7]{x^2}+C$	$14\sqrt{x^2}+C$	$14\sqrt[7]{x^2}+C$	$14\sqrt[7]{x}+C$

1.9 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int (ax^2+bx+c)dx$

А	Б	В	Г
$\frac{ax}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$	$\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$	$\frac{ax^3}{3}+\frac{bx}{2}+cx+C$	$\frac{ax^3}{3}+\frac{x^2}{2}+cx+C$

1.10 Обчислити усно інтеграл і вказати відповідь: $\int \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

А	Б	В	Г
$5\sqrt[3]{x}+C$	$15\sqrt[3]{x}+C$	$15\sqrt{x}+C$	$15\sqrt[3]{x}$

Вчимося розв'язувати типові задачі:

1.11 Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}dx$

Розв’язання:

1. Для обчислення інтеграла, слід розділити многочлен чисельника на знаменник. Якщо це виконати, отримаємо:

2. Використовуючи таблицю основних інтегралів, обчислюємо невизначений інтеграл:

3. Зводимо подібні (якщо є), виносимо спільний множник за дужки і записуємо загальний розв’язок рівняння:

Відповідь: $\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14}x^4-\frac{9}{8}x^2+5\sqrt[3]{x}-\frac{21}{5}x+9\right)+C$

1.12 Обчислити невизначений інтеграл: $\int\left(x^2+5\right)^7 2xdx$

Розв’язання:

1. Обчислення інтеграла від заданої функції шукається за допомогою формули $\int u^n u'dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq 1)$. Але перш ніж її застосовувати, потрібно розміркувати, яку з функцій, що стоїть під інтегралом, слід прирівняти до u та чи є під інтегралом множник, який дорівнює u'. Напишіть це:

2. Після правильних міркувань використовуємо вказану формулу та проводимо обчислення:

Відповідь: $\frac{\left(x^2+5\right)^8}{8}+C$

1.13 Обчислити невизначений інтеграл: $\int\sin^3 x\cos xdx$

Розв’язання:

1. Підінтегральна функція має вигляд $u^n u'$. Дійсно, якщо $u=\sin x$, то $u'=\cos x$, $n=3$. Тому використовуємо формулу $\int u^n u'dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq 1)$.

Відповідь: $\frac{\sin^4 x}{4}+C$

1.14 Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{x^2dx}{\left(4x^3+9\right)^4}$

Розв'язання:

1. Представимо підінтегральну функцію у вигляді $\left(4x^3+9\right)^{-4}x^2$. Після цього запишіть чому дорівнює u, u' та n:

2. Для того, щоб підінтегральна функція прийняла вигляд $u^n u'$, її слід домножити на 12:

3. Виносимо за знак інтегралу $\frac{1}{12}$ та отримуємо:

Відповідь: $-\frac{1}{36}\frac{1}{\left(4x^3+9\right)^3}+C$

1.15 Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx$

Розв'язання:

1. Перше, що робимо, записуємо, чому дорівнює u та u'. Якщо $u=3-\sin^2 x$, тоді чому дорівнює u':

2. Переписавши підінтегральну функцію, використовуємо для обчислення формулу $\int \frac{u'dx}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C$, оскільки чисельник другого дробу є похідною функції, яка стоїть в знаменнику під квадратним коренем:

3. Виносимо за знак інтегралу $-\frac{1}{2}\cdot 2$ та проводимо до кінця обчислення:

Відповідь: $-\sqrt{3-\sin^2 x}+C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.16 -1.25 обчислити невизначений інтеграл:

1.16 $\int \left(2x^2+7\right)^3 xdx$ *Відповідь:* $\frac{1}{16}\left(2x^2+7\right)^4+C$

1.17 $\int \sqrt[3]{x^3+8}\cdot x^2dx$

Відповідь: $\dfrac{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3+8}}{4}+C$

1.18 $\int \sqrt{x^2+6}\cdot 2xdx$

Відповідь: $\dfrac{2}{3}(x^2+6)\sqrt{x^2+6}+C$

1.19 $\int \dfrac{\ln x}{x}dx$

Відповідь: $\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$

1.20 $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx$

Відповідь: $-2\sqrt{5+\cos x}+C$

1.21 $\int \dfrac{2x}{x^2+5}dx$

Відповідь: $\ln(x^2+5)+C$

1.22 $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx$

Відповідь: $-\ln|1+\cos x|+C$

1.23 $\int \dfrac{x}{1-x^2}dx$

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}\ln|1-x^2+C|$

1.24 $\int \frac{x^2}{4+3x^3}dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{9}\ln\left|4+3x^3\right|+C$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 2

ІНТЕГРУВАННЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ТА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЙ

Перевіряємо готовність до практичного заняття

1.1 Заповніть правий стовпчик таблиці 2

Таблиця 2

Таблиця основних інтегралів

$\int \frac{dx}{1+x^2}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	
$\int chxdx$	
$\int shxdx$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	

1.2 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int a^u u' dx$

А	Б	В	Г
$\frac{a^u}{\ln a}+C$	$\frac{a}{\ln a}+C$	$\frac{a^u}{\ln u}+C$	$\frac{a^u}{\ln a}$

1.3 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int e^u u' dx$

А	Б	В	Г
$e \ +C$	e^u+C	ue^u+C	$u^e e^u+C$

1.4 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int a^x dx$

А	Б	В	Г
$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\frac{a}{\ln a}+C$	$\frac{a^x}{a}+C$	$\frac{a^x}{\ln x}+C$

1.5 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int e^x dx$

А	Б	В	Г
xe^x+C	$e \ +C$	e^x	e^x+C

Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int \sin u \cdot u' dx$

А	Б	В	Г
$\cos u + C$	$-\sin u + C$	$-\cos u + C$	$\sin u + C$

1.6 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int \cos u \cdot u' dx$

А	Б	В	Г
$-\sin u + C$	$\cos u + C$	$\sin u + C$	$-\cos u + C$

1.7 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int tgu \cdot u' dx$

А	Б	В	Г
$-\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int tgu \cdot u' dx$	$-\lvert\cos u\rvert + C$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$

1.8 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int ctgu \cdot u' dx$

А	Б	В	Г
$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$-\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\lvert\sin u\rvert + C$	$\ln\lvert\sin u\rvert + C$

1.9Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx$

А	Б	В	Г
$\lvert\sin u\rvert + C$	$tgu + C$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$ctgu + C$

1.10 Серед варіантів відповідей виберіть продовження вказаної формули інтегрування функції: $\int \frac{u'}{\sin^2 u} dx$

А	Б	В	Г
$tgu + C$	$ctgu + C$	$-ctgu + C$	$\lvert\sin u\rvert + C$

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.11 Обчислити невизначений інтеграл: $\int 3^x dx$

Розв'язання:

1. Це дуже простий приклад, для його розв'язку використовуємо формулу (напишіть продовження формули) $\int a^x dx$**=?** :

2. Розуміючи, що з написаної формули $a = 3$, інтегруємо дану функцію:

Відповідь: $\frac{3^x}{\ln 3} + C$

1.12 Обчислити невизначений інтеграл: $\int 4^{-x}\,dx$

Розв'язання:

1. Як бачимо, попередню формулу до даного прикладу застосувати не можемо. Тому використовуємо формулу $\int a^u u' dx$ **= ?** (продовження напишіть самостійно до формули):

2. Переписавши підінтегральну функцію, і записавши $a = 4$ та $u = -x$, обчислюємо невизначений інтеграл:

Відповідь: $-\frac{4^{-x}}{\ln 4} + C$

1.13 Обчислити невизначений інтеграл: $\int 2^{3x}\,dx$

Розв'язання:

1. Перш ніж використовувати формулу $\int a^u u' dx$ **= ?** (продовження напишіть самостійно до формули), виконаємо перетворення. Помножимо та розділимо підінтегральну функцію на 3:

2. Після виконаних перетворень, застосовуємо вказану формулу та проводимо обчислення:

Відповідь: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} + C$

1.14 Обчислити невизначений інтеграл: $\int a^{kx}\,dx$

Розв'язання:

1. При обчисленні даного інтегралу бачимо, що підінтегральна функція не містить u'. Тоді переписуємо підінтегральну функцію, помноживши на k та $\frac{1}{k}$:

2. Тоді використовуємо формулу $\int a^u u' dx =$ **?** (продовження напишіть самостійно до формули):

Відповідь: $\frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$

1.15 Обчислити невизначений інтеграл: $\int e^{\cos x} \sin x dx$

Розв'язання:

1. Запишіть чому дорівнюють u та u':

2. Бачимо, що в підінтегральній функції не вистачає множника -1, після цього використовуємо формулу $\int e^u u' dx =$ **?** (продовження напишіть самостійно до формули):

Відповідь: $-e^{\cos x} + C$

1.16 Обчислити невизначений інтеграл: $\int 7^{x^2} x dx$

Розв'язання:

1. Підбираємо число, на яке можна домножити та розділити підінтегральну функцію, щоб запис відповідав одній із формул, що використовуються на занятті:

2. Використовуємо формулу $\int a^u u' dx =$ **?** (продовження напишіть самостійно до формули) та обчислюємо інтеграл:

Відповідь: $\frac{1}{2} \frac{7^{x^2}}{\ln 7} + C$

1.17 Обчислити невизначений інтеграл: $\int 2^{tgx} \sec^2 x dx$

Розв'язання:

1. Насамперед запишіть, чому з підінтегральної функції дорівнюють u та u':

2. Використовуємо формулу $\int a^u u' dx =$ **?** (продовження напишіть самостійно до формули) та обчислюємо інтеграл:

Відповідь: $\frac{2^{tgx}}{\ln 2}+C$

1.18 Обчислити невизначений інтеграл: $e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$

Розв'язання:

1. Запишіть, чому дорівнюють u та u':

2. Помножимо та поділимо підінтегральну функцію на (-1) та для знаходження інтегралу використаємо формулу $\int e^u u'dx=?$ (праву частину формули допишіть самостійно) :

Відповідь: $-e^{\frac{1}{x}}+C$

1.19 Обчислити невизначений інтеграл: $\int\sin 2xdx$

Розв'язання:

1. Запишіть, чому дорівнюють u та u':

2. Помножимо та поділимо підінтегральну функцію на 2. Для знаходження інтегралу використаємо формулу $\int\sin u\cdot u'dx=?$ (праву частину формули запишіть самостійно):

Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.21 -1.30 обчислити невизначений інтеграл:

1.21 $\int e^{kx}dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{k}e^{kx}+C$

1.22 $\int 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ *Відповідь:* $2 \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$

1.23 $\int e^{x^3} x^2 dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{3} e^{x^3} + C$

1.24 $\int e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)dx$ *Відповідь:* $-e^{-(x^3+x+1)} + C$

1.25 $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

1.26 $\int \cos 3x dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{3}\sin 3x + C$

1.27 $\int tg 5x dx$ *Відповідь:* $-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

1.28 $\int ctg 4x dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{4}\ln|\sin 4x| + C$

1.29 $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx$ *Відповідь:* $\frac{1}{3} tg 3x + C$

1.30 $\int \frac{1}{\sin^2 4x}dx$ *Відповідь:* $-\frac{1}{4}ctg4x + C$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 3

ЗАМІНА ЗМІННОЇ У НЕВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ (МЕТОД ПІДСТАНОВКИ). ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Вчимося розв'язувати типові задачі на знаходження інтегралу, де застосовується метод першого правила підстановки

1.1 Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ за допомогою підстановки $x = \frac{a}{t}$

Розв'язання:

1. Застосовуємо перше правило підстановки, в якому незалежну змінну заміняють формулою $x = \varphi(z)$, де $\varphi(z)$ - диференційована функція. Відразу знаходимо, що $dx = -\frac{a}{t^2}dt$ і робимо перетворення підінтегральної функції:

2. Переходимо до змінної x, тобто з підстановки $x = \frac{a}{t}$ виражаємо t через x та завершуємо інтегрування:

Відповідь: $\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C$

1.2 Обчислити невизначений інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2 dx}$ за допомогою підстановки $x = a\sin t$ (тригонометрична підстановка):

Розв'язання:

1. З підстановки $x = a\sin t$ виразити, чому дорівнює dx і на основі цього записати, чому дорівнює $\sqrt{a^2 - x^2}$:

2. Повертаємося знову до змінної x, таким чином, що з підстановки $x = a\sin t$, виражаємо t, $\sin t$, $\cos t$:

3. Записуємо остаточний вигляд знайденого інтегралу: :

Відповідь: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

Вчимося розв'язувати типові задачі на знаходження інтегралу, де застосовується метод другого правила підстановки

1.3 Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$, використовуючи заміну $\sqrt{x^2 - a^2} = z$:

Розв'язання:

1. Даний інтеграл обчислювався нами в завданні 1.1. Але обчислимо вказаний інтеграл, використовуючи нову заміну z, тобто $x^2 - a^2 = z^2$. Запишіть чому, використовуючи вказану заміну, дорівнює x^2, $2xdx$ та xdx:

2. Поділимо обидві частини рівності на x^2 та замінюємо в правій частині рівності x^2 на $a^2 + z^2$:

3. Переходимо до змінної x та отримуємо кінцевий результат:

Відповідь: $\frac{1`}{a} arctg\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$

1.4 Обчислити невизначений інтеграл $\int \frac{ds}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ за допомогою підстановки $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$:

Розв'язання:

1. Робимо підстановку та отримуємо $a^2 - x^2 = t^2(a - x)^2$, скоротивши дану рівність на $a - x$, маємо $a + x = t^2(a - x)$; виразимо з останньої рівності x, dx, $\sqrt{a^2 - x^2}$:

2. Підставляємо та отримуємо кінцевий вигляд інтегралу:

Відповідь: $2arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C$

Вчимося розв'язувати типові задачі на знаходження інтегралу, де застосовується метод інтегрування частинами

1.5 Обчислити невизначений інтеграл: $\int xe^{x}dx$

Розв'язання:

1. Для обчислення інтегралу використовуємо формулу $\int udv=uv-\int vdu$, застосовуючи її, запишемо, яка функція прирівнюється до u та що відноситься до dv (не забуваємо, що в склад диференціалу dv має обов'язково увійти диференціал незалежної змінної):

2. Шукаємо диференціал du, використовуючи запис u:

3. Використовуючи dv, визначити інтегрування функції v:

4. Знаходимо кінцеве значення інтнгралу:

Відповідь: $e^{x}(x-1)+C$

1.6 Обчислити невизначений інтеграл: $\int \ln xdx$

Розв'язання:

1. Для обчислення інтегралу використовуємо формулу $\int udv=uv-\int vdu$ та запишемо, чому дорівнюють значення u, du, dv та v:

2. Записавши значення функцій, проводимо інтегрування частинами:

Відповідь: $x\ln x-x+C$

Вчимося розв'язувати типові задачі на знаходження інтегралу, де застосовується метод інтегрування частинами декілька разів

1.7 Обчислити невизначений інтеграл: $\int (\ln)^2 dx$

Розв'язання:

1. Для обчислення інтегралу використовуємо формулу $\int udv = uv - \int vdu$ та інтегрування частинами застосовуємо двічі, тобто перший раз записуємо чому дорівнюють значення u, du, dv та v:

2. Другий раз записуємо, використовуючи перший запис, чому дорівнюють значення u, du, dv та v:

3. Підставляємо двічі проінтегровані функції методом інтегрування частинами та записуємо обчислення :

Відповідь: $x\ln x(\ln x - 2) + 2x + C$

1.8 Обчислити невизначений інтеграл: $\int e^{ax} \cos bx dx$

Розв'язання:

Для обчислення інтегралу використовуємо формулу $\int udv = uv - \int vdu$ та інтегрування частинами застосовуємо двічі, тобто перший раз записуємо, чому дорівнюють значення u, du, dv та v:

2. Другий раз записуємо, використовуючи перший запис, чому дорівнюють значення u, du, dv та v:

3. Провівши двічі інтегрування частинами, побачили, що це привело до початкового інтегралу. Тому розкриємо дужки в правій частині, а початковий інтеграл позначимо I :

4. Таким чином, отримали рівняння з невідомим I. Значення з невідомим перенесемо вліво та знайдемо його із звичайного рівняння:

Відповідь: $I = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.9 -1.18 обчислити невизначений інтеграл:

1.9 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ за допомогою підстановки $x = a(1-t)$ (перше правило підстановки)

Відповідь: $\pm \operatorname{arccos} t + C$

1.10 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ за допомогою підстановки $x = ctgt$ (перше правило підстановки)

Відповідь: $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C$

1.11 $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x + 2 + 3}}$ за допомогою підстановки $\sqrt{x+2} = t$ (друге правило підстановки)

Відповідь: $2\left[\sqrt{x+2} - 3\ln\left|\sqrt{x+2} + 3\right|\right] + C$

1.12 $\dfrac{dx}{3+4\sin^2 x}$ за допомогою підстановки $ctgx=u$ (друге правило підстановки)

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{21}}arcctg\left(\sqrt{\dfrac{3}{7}}ctgx\right)+C$

1.13 $\int x\sin x dx$ (інтегрування частинами)

Відповідь: $-x\cos x+\sin x+C$

1.14 $\int arctgxdx$ (інтегрування частинами)

Відповідь: $xarctgx-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

1.15 $\int\sqrt[8]{x}(\ln x)^2 dx$ (інтегрування частинами декілька разів)

Відповідь: $\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2-\dfrac{3}{2}\ln x+\dfrac{9}{8}\right]+C$

1.16 $\int(\arcsin x)^2 dx$ (інтегрування частинами декілька разів)

Відповідь: $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$

1.17 $\int \frac{\cos 2x}{e^{3x}}dx$ (інтегрування частинами декілька разів)

Відповідь: $\frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{13e^{3x}}$

1.18 $\int \sin(\ln x)dx$ (інтегрування частинами декілька разів)

Відповідь: $\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 4

РОЗКЛАДАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ НА НАЙПРОСТІШІ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Розкласти раціональні дроби на найпростіші $\frac{x^2 + 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$

Розв'язання:

Перший спосіб

1. Використаємо спосіб невизначених коефіцієнтів, де загальний вигляд розкладання матиме такий вид: $\frac{x^2 + 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} + \frac{A_4}{x-4}$, помножимо обидві частини цієї нерівності на знаменник лівої частини та отримаємо:

2. В правій частині рівності помножимо двочлени та отримаємо:

3. Рівність, яку отримали, перепишемо по-іншому, розмістивши многочлени в праві частині в порядку спадання степенів x:

4. Порівнюючи коефіцієнти з однаковими степенями x в лівій і правій частинах останньої рівності, отримуємо систему чотирьох рівнянь першої степені з чотирма невідомими:

5. Розв'язуємо систему рівнянь та отримуємо значення коефіцієнтів A_1, A_2, A_3, A_4:

Відповідь: $-\frac{1}{12(x-1)}-\frac{2}{5(x-2)}+\frac{1}{140(x+3)}+\frac{10}{21(x-4)}$

Розв'язання:

Другий спосіб

1. Використовуємо спосіб задання часних значень. Після того, як розклали дріб, отримали $\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+3}+\frac{A_4}{x-4}$. Помноживши обидві частини цієї нерівності на знаменник лівої частини, отримали:

$$x^2+2x-4=A_1(x-2)(x+3)(x-4)+A_2(x-1)(x+3)(x-4)+A_3(x-1)(x-2)(x-4)+$$
$$+A_4(x-1)(x-2)(x+3)$$

Оскільки дана рівність – тотожність, то вона зберігається при будь-якому значенні x. Будемо задавати такі значення x, щоб у правій частині всі члени, перетворювалися в нуль. Такими значеннями є корені знаменника, тобто значення $x=1$, $x=2$, $x=-3$, $x=4$.

При $x=1$ в правій частині останньої рівності всі доданки, окрім першого, перетворяться в нуль, а ліва частина рівності дорівнює (-1). Маємо:
$-1=A_1(1-2)(1+3)(1-4)$

$-1=12A_1;\qquad A_1=-\frac{1}{12}$.

Обчислюємо коефіцієнт A_2, при $x=2$:

2. Обчислюємо коефіцієнт A_3, при $x=-3$:

3. Обчислюємо коефіцієнт A_4, при $x=4$:

4. Запишемо загальний вигляд шуканих коефіцієнтів :

Відповідь: $-\dfrac{1}{12(x-1)}-\dfrac{2}{5(x-2)}+\dfrac{1}{140(x+3)}+\dfrac{10}{21(x-4)}$

1.2 Розкласти раціональні дроби на найпростіші $\dfrac{x^2}{1-x^4}$

Розв'язання:

1. Розпишемо знаменник дробу:

2. На основі розписаного запишемо рівність та позначимо коефіцієнти A_1, A_2, A_3, A_4:

3. Як і в попередніх прикладах, помножимо ліву та праву частини рівності на $1-x^4$ та отримаємо тотожність:

4. Шукаємо невідомі коефіцієнти A_1, A_2, A_3, A_4, при $x=1$ і т.д.:

5. Отже, записуємо загальний вигляд нашого дробу зі знайденими коефіцієнтами:

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.3 -1.6 розкласти раціональні дроби на найпростіші:

1.3 $\dfrac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}$

Відповідь: $\dfrac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}=\dfrac{-3}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{x-5}$

1.4 $\dfrac{1}{x^3+1}$

Відповідь: $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$

1.5 $\dfrac{1}{x^4+1}$

Відповідь:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2x}+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2x}+1}$$

1.6 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$

Відповідь:

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2+x^2}$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 5

ІНТЕГРУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

1.1 Заповніть правий стовпчик таблиці 3

Таблиця 3

Формули інтегрування найпростіших раціональних дробів

Підінтегральний дріб	*Формула інтегрування даного дробу*
$\int \frac{A}{x-a}$	
$\int \frac{A}{(x-a)^n}$	
$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$	
$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$	

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.2 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x-3}$:

Розв'язання:

1. Для знаходження інтегралу використовуємо формулу $\int \frac{A}{x-a}$ **=?** (напишіть продовження формули):

Відповідь: $\ln|x-3|+C$

1.3 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$:

Розв'язання:

1. Для знаходження інтегралу використовуємо формулу $\int \frac{A}{(x-a)^n}$ **=?** (напишіть продовження формули), $n=3$:

Відповідь: $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+C$

1.4 Знайти інтегал $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$:

Розв'язання:

1. Для знаходження інтегралу використовуємо формулу $\int \frac{A}{(x-a)^n}$ **=?** (напишіть продовження формули). Але за умовою правил інтегрування даної формули чисельник дробу, який стоїть перед інтегралом, має дорівнювати похідній від основи степеня знаменника, тому зробіть перетворення дробу:

2.Виконавши перетворення, використовуючи формулу, обчислюємо інтеграл:

Відповідь: $-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x-1)^3} + C$

1.5 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14}$

Розв'язання:

1. Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу:

2. Зробивши перетворення дробу, бачимо, що для знаходження інтегралу використаємо формулу $\int \frac{u'}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$, зазначаємо, що $u = x + 2$; $a^2 = 10$; $u' = 1$; $a = \sqrt{10}$:

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{10}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{10}} + C$

1.6 Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - x + 14}$

Розв'язання:

1. Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу:

2. Зробивши перетворення дробу, бачимо, що для знаходження інтегралу слід використати формулу $\int \frac{u'}{u^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$, записуємо чому дорівнюють: u ; a^2; u'; a:

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{55}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{55}} + C$

Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{5x^2+7x+11}$

Розв'язання:

1. Оскільки коефіцієнт при x^2 в знаменнику не дорівнює одиниці, його слід винести за дужки:

2. Виділяємо повний квадрат у знаменнику дробу:

3. Зробивши перетворення дробу, бачимо, що для знаходження інтегралу використаємо формулу $\int \frac{u'}{u^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$, записуємо. чому дорівнюють: u ; a^2; u'; a:

Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{171}} arctg \frac{10x+7}{\sqrt{171}} + C$

1.7 Знайти інтеграл $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}$

Розв'язання:

1. Робимо перетворення дробу, виділяємо в чисельнику з $3x+4$ похідну знаменника, яка дорівнює $2x+7$ (оскільки чисельник є похідною знаменника), але щоб величина чисельника при цьому не змінилася:

2. Застосовуючи формули $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$ для першого дробу та $\int \frac{u'}{u^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$ для другого, обчислюємо інтеграл :

Відповідь: $\frac{3}{2} \ln\left(x^2+7x+14\right) - \frac{13}{\sqrt{7}} arctg \frac{2x+7}{\sqrt{7}} + C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.9 -1.16 проінтегрувати найпростіші раціональні дроби:

1.9 $\int \frac{dx}{2x-1}$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right|+C$

1.10 $\int \frac{dx}{(x+3)^5}$ *Відповідь:* $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)^4}+C$

1.11 $\int \frac{dx}{x^2+3x+6}$ *Відповідь:* $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C$

1.12 $\int \frac{dx}{x^2-7x+14}$ *Відповідь:* $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x-7}{\sqrt{7}}+C$

1.13 $\int \frac{dx}{4x^2+x+5}$ *Відповідь:* $\frac{2}{\sqrt{79}}arctg\frac{8x+1}{\sqrt{79}}+C$

1.14 $\int \frac{2x-3}{x^2+x+5}$

Відповідь:
$\ln\left(x^2+x+5\right)-\frac{8}{\sqrt{19}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 6

ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Обчислити інтеграл $\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$:

Розв'язання:

1. Перш ніж приступити до інтегрування, переконуємося, що дріб правильний і нескоротний. У нашому випадку, дріб неправильний, оскільки степінь чисельника (третя) вища за степінь знаменника (друга). Тому виділяємо цілу частину дробу, поділивши чисельник на знаменник:

2. Записуємо інтеграл, який отримали. Розпочинаємо інтегрування раціонального дробу (цілу частину дробу проінтегрували і залишили, поки інтегруватимемо сам дріб). Маємо правильний нескоротний раціональний підінтегральний дріб $\int \frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}$, який розкладаємо за допомогою коефіцієнтів та шукаємо ці коефіцієнти:

3. Визначили коефіцієнти та записуємо весь дріб разом з цілою частиною та проводимо повне інтегрування:

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C$

1.2 Обчислити інтеграл $\int\frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$:

Розв'язання:

1. Перш за все, розкладаємо знаменник на множники:

2. Шукаємо невідомі коефіцієнти:

3. Інтегруємо раціональний дріб:

Відповідь: $\ln\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9}+C$

1.3 Обчислити інтеграл $\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)}dx$:

Розв'язання:

1. Дріб правильний та нескоротний, тому записуємо його у вигляді $\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)}dx=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}$ та визначаємо його коефіцієнти A,B,C,D,E:

2. Оскільки коефіцієнтів 5, робимо перевірку знайдених значень коефіцієнтів:

3. Якщо перевірка пройшла успішно, інтегруємо раціональний дріб:

Відпвідь: $-\dfrac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\dfrac{13}{27}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|+C$

1.4 Обчислити інтеграл $\int\dfrac{xdx}{1+x^3}$:

Розв'язання:

1. Розкладемо на множники знаменник:

2. Оскільки корені тричлена $1-x+x^2$ комплексні, то дріб матиме вигляд $\dfrac{x}{1+x^3}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{Bx+C}{1-x+x^2}$. Шукаємо коефіцієнти:

3. Інтегруємо раціональну функцію:

Відповідь: $-\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.5 -1.9 проінтегрувати раціональні дроби:

1.5 $\int\dfrac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx$

Відповідь: $\ln\dfrac{(x-2)\sqrt[15]{(x+3)^{11}}\sqrt[10]{x-2}}{\sqrt[6]{x^5}}$

1.6 $\int\dfrac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$

Відповідь:

$\dfrac{x^2}{2}+6x+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(x^2+5)^{10}}{(x-1)^2}+\dfrac{95}{3\sqrt{5}}arctg\dfrac{x}{\sqrt{5}}+C$

1.7 $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}dx$

Відповідь:

$$\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)}-\frac{7}{2000}arctg\frac{x}{2}+C$$

1.8 $\int \frac{x^5}{(3+2x^2)^3}dx$

Відповідь:

$$\frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{3}{2}\cdot\frac{(9+8x^2)}{(3+2x^2)^2}\right]+C$$

1.9 $\int \frac{x^7}{(5+4x^2)^4}dx$

Відповідь:

$$\frac{1}{512}\left[\ln(5+4x^3)+\frac{1375+2700x^2+1440x}{6(5+4x^2)^3}\right]+C$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7

ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

1.1 Заповніть правий стовпчик таблиці 4

Таблиця 4

Формули добутку тригонометричних функцій

Функція	*Формула добутку тригонометричної функції*
$\sin kx \cos lx$	
$\cos kx \cos lx$	
$\sin kx \sin lx$	

1.2 Заповніть правий стовпчик таблиці 5

Таблиця 5

Формули знаходження первісних тригонометричних функцій

Підінтегральна функція	*Формула знаходження первісної тригонометричної функції*
$\int \sin nx dx$	
$\int \cos nx dx$	
$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	
$\int \frac{dx}{\sin x}$	
$\int \frac{dx}{\cos x}$	

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.3 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \sin 6x \cos 7x dx$:

Розв'язання:

1. Замінюємо добуток, використовуючи формулу $\sin kx \cos lx$=? (напишіть продовження формули):

2. Інтегруємо тригонометричну функцію:

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C$

1.4 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \sin 2x \sin 5x$:

Розв'язання:

1. Замінюємо добуток, використовуючи формулу $\sin kx \sin lx = ?$ (напишіть продовження формули):

2. Інтегруємо тригонометричну функцію:

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C$

1.5 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx$:

Розв'язання:

1. Замінюємо добуток $\sin 2x \cos 5x$, використовуючи формулу $\sin kx \cos lx = ?$ (напишіть продовження формули):

2. Отриманий результат множимо на $\sin 9x$:

3. Отриману тригонометричну функцію розписуємо за формулою $\sin kx \sin lx = ?$ (напишіть продовження формули):

4. Інтегруємо дану тригонометричну функцію:

Відповідь: $\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 12x}{12} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 16x}{16}\right) + C$

1.6 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \sin^3 x dx$:

Розв'язання:

1. Розкладемо на множники функцію та використаємо основну тригонометричну тотожність:

2. Зробимо заміну $\cos x = z$ та обчислимо інтеграл:

3. Повертаємося до попередньої змінної та отримуємо кінцевий результат:

Відповідь: $-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$

1.7 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \cos^5 x dx$:

Розв'язання:

1. Виділимо першу степінь косинуса та отримаємо:

2. Зробимо заміну: $\sin x = z$, $\cos x dx = z$ та отримаємо:

3. Повертаємося до початкової змінної, тобто заміняємо z на $\sin x$ та маємо:

Відповідь: $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$

1.8 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \cos^2 x dx$:

Розв'язання:

1. Для обчислення використовуємо формулу $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$:

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

1.9 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \sin^4 x\cos^4 x dx$:

Розв'язання:

1. Використовуючи тригонометричні формули та формули скороченого множення, зробимо перетворення функції :

2. Застосовуючи формулу $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, проводимо обчислення інтегралу :

Відповідь: $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$

1.10 Знайти інтеграл від тригонометричної функції $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$:

Розв'язання:

1. Застосовуємо універсальну тригонометричну заміну $tg\frac{x}{2}=z$, $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ та записуємо:

2. Повертаємося до початкової змінної, замінюємо $z=tg\frac{x}{2}$:

Відповідь: $-\frac{1}{8}ctg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2}+C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.11 -1.20 проінтегрувати тригонометричну функцію:

1.11 $\int \cos 3x\cos 9x dx$

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{12}\sin 12x\right)+C$

1.12 $\int \sin x\cos 2x\cos 3x dx$

Відповідь: $-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 6x}{24}+C$

1.13 $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$

Відповідь:

$$\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 8x}{32}+C$$

1.14 $\int \sin\frac{3}{4}x\cos\frac{x}{4}dx$

Відповідь: $-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+\cos x\right)+C$

1.15 $\int \sin^7 x dx$

Відповідь:

$$-\left(\cos x-\cos^3 x+\frac{3}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x\right)+C$$

1.16 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

Відповідь: $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$

1.17 $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$

Відповідь: $\frac{1}{3}\sec^3 x-2\sec x-\cos x+C$

1.18 $\int \cos^4 xdx$

Відповідь: $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$

1.19 $\sin^2 x\cos^2 xdx$

Відповідь: $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$

1.20 $\int \frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$

Відповідь:

$\frac{5}{7}\left[\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+3\ln\left(7+tg^2\frac{x}{2}\right)\right]+\frac{12}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{7}}tg\frac{x}{2}\right)+C$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 8

ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЇ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$:

Розв'язання:

1. Перепишемо даний інтеграл $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} dx$, найменшим кратним знаменників дробів степенів є 6, тому введемо наступну змінну $x = y^6$, $dx = 6y^5 dy$ і по-новому перепишемо інтеграл:

2. Отримаємо підінтегральну раціональну функцію, в якій виділяємо цілу частину та після того інтегруємо її:

3. Повертаємося до змінної x та записуємо кінцевий результат:

Відповідь: $6\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right] + C$

1.2 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}} dx$:

Розв'язання:

1. Переписуємо інтеграл так, як у попередньому прикладі та вводимо заміну $x - 1 = y^2$, $x = y^2 + 1$, $dx = 2ydy$ та отримуємо інтеграл від раціональної функції:

2. Повертаємося до змінної x та записуємо кінцевий результат:

Відповідь: $2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{9}(x-1)^4 + \frac{4}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1) + 1\right] + C$

1.3 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} - \sqrt{3+2x}}$:

Розв'язання:

1. Як і в попередніх прикладах приходимо до спільного знаменника в дробах після їх перетворень:

2. Вводимо заміну $3+2x=y^6$, $x=\dfrac{y^6-3}{2}$, $dx=\dfrac{6y^5dy}{2}=3y^5dy$ та отримуємо:

3. Повертаємося до змінної x та записуємо кінцевий результат:

Відповідь: $3\left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{3+2x}}+\sqrt[6]{3+2x}+\ln\left|\sqrt[6]{3+2x}-1\right|\right)+C$

1.4 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int\sqrt{\dfrac{5-3x}{4+7x}}dx$:

Розв'язання:

1. Вводимо заміну $\dfrac{5-3x}{4+7x}=y^2$, з якої виведемо x та dx:

2. Підставляємо введену заміну та шукаємо інтеграл методом інтегрування частинами $u=y$, $du=dy$, $dv=\dfrac{y}{\left(7y^2+3\right)^2}dy$, $v=-\dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{1}{7y^2+3}$:

3. Повертаємося до змінної x та записуємо кінцевий результат:

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\dfrac{47\sqrt{21}}{147}arctg\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}\sqrt{\dfrac{5-3x}{4+7x}}\right)+C$

1.5 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}$:

Розв'язання:

1. Маємо справу з інтегралом виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Винесемо під коренем інтегралу 2 за дужки та у виразі, що лишився виділимо повний квадрат:

2. Для знаходження інтегралу використаємо формулу $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$:

3. Записуємо кінцевий вигляд шуканого інтегралу:

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4x+3+2\sqrt{2(2x^2+3x+7)}+C\right|$

1.6 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$:

Розв'язання:

1. Маємо справу з інтегралом виду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Винесемо під коренем інтегралу 3 за дужки та у виразі, що лишився, виділимо повний квадрат:

2. Виділивши повний квадрат, застосовуємо формулу $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \arcsin\frac{u}{a} + C$:

3. Записуємо кінцевий вигляд шуканого інтегралу:

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-7}{\sqrt{109}}+C$

1.7 Знайти інтеграл від ірраціональної функції $\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}$:

Розв'язання:

1. Вводимо заміну $x = 3tgy$, $dx = 3\sec^2 y dy$ та інтегруємо вираз:

2. Для того, щоб повернутися до змінної x, знайдемо $\sin y$ через x та запишемо кінцевий результат інтегрування:

Відповідь: $\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.8 -1.17 проінтегрувати ірраціональну функцію:

1.8 $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

Відповідь: $\ln\frac{x}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6} + C$

1.9 $\int \frac{x^2 dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$

Відповідь:
$\frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left[\frac{1}{3}(5x+2) - 4 - \frac{4}{5x+2}\right] + C$

1.10 $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2}dx$

Відповідь:

$$-\frac{\sqrt{3x+4}}{x}+\frac{3}{4}\ln\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\sqrt{3x+4}+2}+C$$

1.11 $\int \frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx$

Відповідь:

$$(x-15)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-9\ln\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-3}}+C$$

1.12 $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$

Відповідь:

$$\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|14x+5+2\sqrt{7\left(7x^2+5x+4\right)}+C\right|$$

1.13 $\int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}dx$

Відповідь:

$$\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-\frac{47}{5\sqrt{5}}\ln\left|10x+8+2\sqrt{5\left(5x^2+8x+1\right)}+C\right|$$

1.14 $\int \frac{dx}{\left(x^2-5\right)\sqrt{x^2-5}}$

Відповідь: $-\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ . ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Обчислити визначений інтеграл $\int_a^b e^x dx$:

Розв'язання:

1. За формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ проводимо обчислення:

Відповідь: $e^b - e^a$

1.2 Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$:

Розв'язання:

1. Зробимо заміну: $x = \cos\alpha$. Границі інтегрування $x = 0$; $0 = \cos\alpha$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$x = 1$; $1 = \cos\alpha$; $\alpha = 0$

Нова заміна змінюється на відрізку (вкажіть):

2. Приводимо інтеграл до виду:

Відповідь: $\frac{\pi}{2} - 1$

1.3 Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$:

Розв'язання:

1. Для знаходження інтегралу застосовуємо формулу інтегрування частинами $\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$, де $u = \arcsin x$, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $dv = dx$, $v = x$:

2. За формулою Ньютона-Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ проводимо обчислення:

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} - 1$

1.4 Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 x \cdot arctgx dx$:

Розв'язання:

1. Як і в попередньому прикладі використовуємо формулу інтегрування частинами для знаходження інтегралу, запишемо, чому дорівнюють u, du, dv, v:

2. За формулою Ньютона-Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ проводимо обчислення:

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4} - 1$

Розв'язати самостійно

У завданнях 1.5 -1.18 обчисліть визначений інтеграл:

1.5 $\int\limits_a^b \dfrac{1}{x} dx$ *Відповідь:* $\ln\dfrac{b}{a}$

1.6 $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ *Відповідь:* $\dfrac{\pi^2}{4}$

1.7 $\int_1^e \ln^2 x dx$ *Відповідь:* $e-2$

1.8 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$ *Відповідь:* $\frac{15}{256}-\frac{\ln 2}{64}$

1.9 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x tg^2 x dx$ *Відповідь:* $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Обчислити площу, обмежену синусоїдою $y=\sin x$ та віссю $0x$ на відрізку $[0;\pi]$

Розв'язання:

1. На відрізку $[0;\pi]$ функція $y=\sin x$ зберігає знак і тому застосовуємо формулу для обчислення площі плоскої фігури $S=\int_a^b y dx$ та проводимо обчислення:

Відповідь: 2*кв.од.*

1.2 Обчислити площу, обмежену прямою $x=4$, кривою $y=3x^2-6x$ та віссю $0x$ на відрізку $[0;4]$:

Розв'язання:

1. Перш за все, будуємо графік функції:

2. Оскільки графік функції – парабола, знаходиться з двох сторін осі $0x$, то шукана площа складатиметься з двох частин: та, що знаходиться під віссю і та, що над нею і тому основна формула матиме запис $S=-S_1+S_2$ відрізок інтегрування $[0;4]$ розділяється на два: $[0;2]$ та $[2;4]$:

Відповідь: 24*кв.од.*

1.3 Обчислити площу, обмежену віссю $0x$ та лініями $y=(x+2)^2$ та $y=4-x$:

Розв'язання:

1. Будуємо графіки функцій, це є парабола та пряма. Шукаємо відрізок інтегрування:

2. Знайдений проміжок розподіляємо на дві частини, тому що шукану площу фігури розбиває вісь $0y$ та використовуючи формулу $S=S_1+S_2$ шукаємо площу фігури:

Відповідь: $10\frac{2}{3}$*кв.од.*

1.4 Обчислити площу, обмежену кардіоїдою $r=2a(1-\cos\varphi)$.

Розв'язання:

1. Крива відноситься до класу епіциклоїд та є траєкторією точки, яка лежить на радіусі a. Запишіть як змінюється полярний кут φ (це і буде шуканий проміжок):

2. Шукаємо площу фігури, скориставшись формулою обчислення площі, яка обмежена кривою, заданою полярним рівнянням $r = f(\varphi)$ $S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\varphi$:

Відповідь: $6\pi a^2$ *кв.од.*

1.5 Обчислити площу, обмежену лемніскатою Бернуллі, що визначається рівнянням $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$:

Розв'язання:

1. Лемніската – це геометричне місце точок, добуток відстаней кожної з яких від двох фіксованих точок (фокусів) – стала величина. Її рівняння в прямокутних координатах $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0$. Прослідкуємо, як зміниться кут φ та знайдемо відрізок інтегрування:

2. Скористаємося формулою для знаходження площі фігури з попередньої задачі:

Відповідь: $\left(a\sqrt{2}\right)^2$ *кв.од.*

Розв'язати самостійно

1.5 Обчислити площу, обмежену віссю $0x$ та кривою $y = x^3 - 8x^2 + 11x - 6$

Відповідь: $\frac{1}{2}$ *кв.од.*

1.6 Обчислити площу, обмежену параболами $y = 2px$ та $x^2 = 2py$.

Відповідь: $\frac{4}{3}p^2$ *кв.од.*

1.7 Обчислити площу, обмежену ланцюговою лінією, яка визначається рівнянням $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, осями координат та прямою $x = a$, $a > 0$.

Відповідь: $a^2 sh1$ *кв.од.*

1.8 Обчислити площу, яка знаходиться між кривими $y = \frac{8}{4+x^2}$ і $y = \frac{x^2}{4}$

Відповідь: $2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$ *кв.од.*

1.9 Обчислити площу, обмежену спіраллю Архімеда $r = a\varphi$ та двома радіус-векторами, які відповідають полярним кутам φ_1 та φ_2 $\varphi_1 < \varphi_2$

Відповідь: $8\pi^3 a^2$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ . ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛУ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\delta}\left(x^3+y^3\right)dxdy$, якщо область (δ) обмежена лініями $y=\frac{1}{2}x$, $y=x$, $x=4$. Цей інтеграл обчислити, змінивши порядок інтегрування:

Розв'язання:

1. Перш за все, слід зробити малюнок, на якому показуємо область (δ). Контур цієї області перетинається будь-якою прямою, паралельною осі $0y$ в двох точках:

2. Скористаємося для обчислення формулою $\iint\limits_{\delta} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, тут в повторному інтегралі внутрішнє інтегрування проводиться по зміній y, а зовнішнє – по x. Скориставшись даною підказкою, визначаємо і границі інтегрування:

3. Обчислимо то й же подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування проводиться по змінній x, а зовнішнє – по y :

Відповідь: $\frac{47}{64}x^4$, $\frac{752}{5}$

1.2 Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\delta} r^2 \sin\varphi dr d\varphi$, область (δ) обмежена лініями $r = R$ та $r = 2R\sin\varphi$.

Розв'язання:

1. Виконаємо малюнок, на якому побачимо, як змінюється кут φ:

2. Знайдемо значення кута φ з системи двох рівнянь $\left.\begin{array}{l} r = R \\ r = 2R\sin\varphi \end{array}\right\}$:

3. Знайдемо границі інтегрування, використовуючи знайдені значення кута φ:

4. Для обчислення подвійного інтегралу в полярних координатах, скористаємося формулою $\iint\limits_{\delta} F(r,\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr$:

Відповідь: $\frac{1}{3}R^3\left(8\sin^3\varphi - 1\right)$; $\frac{R^3}{12}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right)$

1.3 Обчислити площу фігури, обмежену лініями: $2x - y = 0(AB)$; $2x - y - 7 = 0(DC)$; $x - 4y + 7 = 0(AD)$; $x - 4y + 14 = 0(BC)$:

Розв'язання:

1. Зробивши малюнок , побачили, що наша фігура – паралелограм, його вершини знаходять в точках $A(1,2)$; $B(2,4)$; $D(5,3)$; $C(6,5)$:

2. Тому область інтегруваня розіб'ємо на три частини та обчислимо кожен подвійний інтеграл, вказавши границі інтегрування, саму ж площу вирахуємо за формулою $S=\iint\limits_{\delta} dxdy$:

Відповідь:

1.4 Обчислити площу фігури, обмежену лініями: $(x-a)^2+y^2=a^2$ та $x^2+(y-a)^2=a^2$:

Розв'язання:

1. Лінії – це кола з центрами в точках $(a,0)$ та $(0,a)$ (малюємо малюнок). Якщо розкрити дужки, то рівняння запишуться так: $x^2+y^2-2ax=0$

$$x^2+y^2-2ay=0$$

Перепишемо ці рівняння, так щоб вони містили полярні координати:

2. Скориставшись формулою $S=\iint\limits_{\delta} rdrd\varphi$, обчислюємо площу (Підказка: площа складається з двох рівних частин):

Відповідь: $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$*кв.од.*

Розв'язати самостійно

1.5 Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_{\delta}\frac{y^3}{x^2}dxdy$, якщо область (δ) обмежену лініями $y=\frac{1}{3}x$, $y=\sqrt{x}$, $x=1$. Цей інтеграл також обчислити, змінивши порядок інтегрування:

Відповідь: $\frac{121}{486}$

1.6 Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_{\delta} r^3 dr d\varphi$, область (δ) обмежена полярною віссю та кривою $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ з додатковою умовою: полярний кут $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi$ *;* $\frac{1}{32}\pi a^4$

1.7 Обчислити площу фігури, обмежену лініями: $x = \frac{y^2 + b^2}{2b}$; $x = \frac{y^2 + b^2}{2a}$

Відповідь: $\frac{2}{3}(a-b)\sqrt{ab}$*кв.од.*

1.8 Обчислити площу фігури, обмежену лініями: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ та $x^2 + y^2 - ax = 0$ *Відповідь:* $\frac{3}{4}\pi a^2$*кв.од.*

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТА ПОВЕРХОНЬ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛУ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Обчислити об'єм тіла , обмеженого поверхнями: $1) z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$; $2) x=c$; $3) x=d$; $(c<d)$; $4) y=e$; $5) y=f$; $(e<f)$ $6) z=0$

Розв'язання:

1. Встановимо, як називаються поверхні, які обмежують тіло:

2. Малюємо рисунок:

3. Об'єм тіла обчислюємо за формулою $V=\iint\limits_{\delta} z\,dx\,dy$, але спочатку в робочу формулу підставимо значення z з рівняння поверхні:

4. Обчислюємо об'єм:

Відповідь: $V=(d-c)\int\limits_{e}^{f}\left(\dfrac{d^2+cd+c^2}{3a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dy$

1.2 Обчислити об'єм тіла , обмежeного поверхнями: $z=4x^2+2y^2+1$; $x+y-3=0$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

Розв'язання:

1. Встановимо, як називаються поверхні, які обмежують тіло:

2. Малюємо рисунок:

3. Об'єм тіла обчислюємо за формулою $V = \iint_{\delta} z dxdy$, але спочатку в робочу формулу підставимо значення z з рівняння поверхні:

4. Перетворюємо подвійний інтеграл в повторний:

4. Обчислюємо об'єм:

Відповідь: 45 *куб.од.*

1.3 Обчислити площу тієї частини поверхні $ay = x^2 + z^2$, яка знаходиться в першій октанті та обмежена площиною $y = 2a$.

Розв'язання:

1. Спроектуємо площу, яку обчислюємо, на площину $x0z$, а потім - на площину $x0y$:

2. Використовуючи дану проекцію, маємо два рівняння $\left. \begin{array}{l} ay = x^2 + z^2 \\ y = 2a \end{array} \right\}$:

3. Визначаємо частинні похідні $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial y}{\partial z}$, для того щоб обчислити площу за формулою $S = \iint\limits_{\delta_{x0z}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz$:

4. У робочу формулу підставляємо значення та обчислюємо площу :

Відповідь: $\frac{3}{12}\pi a^2$ *кв.од.*

Розв'язати самостійно

1.4 Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$; $x + y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Відповідь: 45*куб.од.*

1.5 Обчислити об’єм тіла, обмеженого трьовісьним еліпсом:

Відповідь: $V=\frac{4}{3}\pi a^3$

1.6 Знайти площу поверхні, яку вирізає на сфері $x^2+y^2+z^2=a^2$ циліндр $x^2+y^2-ay=0$

Відповідь: $S=2a^2(\pi-2)$*кв.од.*

Контроль і рефлексія

ІНДЗ за темою «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

ІНДЗ складається з восьми завдань: 6 завдань по невизначеному інтегралу та 2 – з теми визначеного інтегралу. Номер свого варіанту ІНДЗ студент обирає згідно свого порядкового номеру в журналі навчальних занять. Виконується ІНДЗ в окремо заведеному зошиті.

Приклади розв'язування типових завдань ІНДЗ

1. Невизначений інтеграл

1.1. Інтегрування розкладанням

Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі, або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

$$\int\frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x+C.$$

1.2. Метод інтегрування частинами

Якщо функції *u*(*x*) та *v*(*x*) мають неперервні похідні, то: $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v du.$

$$\int x^2 e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$

1.3. Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Якщо *f*(*x*) — неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \left| \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5dt; \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

1.4. Інтегрування раціональних функцій

Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.
2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.
3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

$$\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx = \left| \begin{array}{l|l} x^4+2x & x^3+8 \\ \cline{2-2} - & x \\ \underline{x^4+8x} & \\ -6x & \end{array} \right. \quad \frac{x^4+2x}{x^3+8} = x - \frac{6x}{x^3+8};$$

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} =$$

$$= \frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8} \Rightarrow 6x = A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + 4A + 2C;$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+B \\ x^1 & 6=-2A+2B+C \\ x^0 & 0=4A+2C \\ \multicolumn{2}{l}{x=-2 \Rightarrow -12=12A} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=2 \end{array}\right| = \int\left(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\left|\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

1.5. Інтегрування тригонометричних функцій

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^3 x\cdot\sin x}{\cos^2 x\cdot\sin x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=\left|\begin{array}{l} \cos x=t \\ \sin xdx=-dt \end{array}\right|=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C\,.$$

1.6. Інтегрування ірраціональних функцій

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{array}{l} x=t^{12}, 12=HCK(2,3,4) \\ dx=12t^{11}dt; t=\sqrt[12]{x} \end{array}\right|=\int\frac{t^6\cdot 12t^{11}dt}{t^8-t^3}=$$

$$=12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1}=12\int\frac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1}=12\int\left(t^4\left(t^5+1\right)+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C\,.$$

2. Визначений інтеграл

2.1. Метод підстановки у визначеному інтегралі

$$\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\ln|t+1|)\Big|_2^3=2(3-\ln 4-(2-\ln 3))=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

2.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ \cos 2x dx = dv, \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| = \left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0\cdot\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Варіант 1

1.1. $\int \frac{1\cdot dx}{x^2\left(1+x^2\right)}$

1.2. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$

1.3. $\int \left(1+x^2\right)^{10} x dx.$

1.4. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$

1.5. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

1.6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

2.1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

2.2. $\int_1^e x\ln x dx$

Варіант 2

1.1. $\int \frac{\sqrt{x}+x^2e^x-1}{x^2} dx$

1.2. $\int x\sin x dx.$

1.3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

1.4. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$

1.5. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx.$

1.6. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$

2.1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x\cos x dx.$

2.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx.$

Варіант 3

1.1. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$

1.2. $\int x\cos 2x dx.$

1.3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

1.4. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}.$

1.5. $\int \sin^3 x\cos^3 x dx.$

1.6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx.$

2.1. $\int_0^1 \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x} dx.$

2.2. $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$

Варіант 4

1.1. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx$

1.2. $\int xe^{-x} dx.$

1.3. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

1.4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$

1.5. $\int (1-\sin 2x)^2 dx.$

1.6. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$

2.1. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

2.2. $\int_1^e x^2\ln x dx.$

Варіант 5

1.1. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

1.2. $\int x5^x dx.$

1.3. $\int \frac{dx}{e^x + 1}.$

1.4. $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$

1.5. $\int \cos^4 x dx.$

1.6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

2.1. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$

2.2. $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx.$

Варіант 6

1.1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

1.2. $\int \arcsin x dx.$

1.3. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}.$

1.4. $\int \frac{xdx}{x^4 - 3x^2 + 2}.$

1.5. $\int \cos^7 x dx.$

1.6. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$

2.1. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

2.2. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$

Варіант 7

1.1. $\int \frac{x}{x-1} dx$

1.2. $\int \operatorname{arcctg} x dx.$

1.3. $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}.$

1.4. $\int \frac{x^4 dx}{(x+2)(x^2-1)}.$

1.5. $\int \cos^4 x dx.$

1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}.$

2.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx.$

2.2. $\int_1^2 (2-x) e^{\frac{x}{2}} dx.$

Варіант 8

1.1. $\int \frac{x^2}{x+2} dx$

1.2. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$

1.3. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$

1.4. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

1.5. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx.$

1.6. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$

2.1. $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

2.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx.$

Варіант 9

1.1. $\int \frac{x^3}{x+1} dx$

1.2. $\int x^2 e^{3x} dx.$

1.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}.$

1.4. $\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx.$

1.5. $\int (1 + 2\cos x)^2 dx.$

1.6. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$

2.1. $\int_2^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$

2.2. $\int_1^{e-1} \ln(x+1) dx.$

Варіант 10

1.1. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$

1.2. $\int x \cos^2 x dx.$

1.3. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}.$

1.4. $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$

1.5. $\int \cos^2 5x dx.$

1.6. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2}\right)}.$

2.1. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}.$

2.2. $\int_1^e x^2 \ln x dx.$

РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 13

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ. ОБЛАСТЬ ІСНУВАННЯ ФУНКЦІЇ. ПОВНИЙ ПРИРІСТ ТА ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Знайти область існування функції $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$:

Розв'язання:

1. Перепишемо дану функцію, щоб задовольнялася нерівність $x^2 + y^2 \le 4$:

2. Визначаємо точки функції, які лежать всередині кола та на його границі, тобто точки, в яких вона визначена:

1.2 Знайти область існування функції $u = \ln \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$:

Розв'язання:

1. Перевіряємо виконання умови $\dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$:

2. Розглянемо два випадки існування функції $x > 0$, $x < 0$:

1.3 Знайти частинні похідні функцій $u = x^2 + 3xy + 4y^2$:

Розв'язання:

1. Функція u – функція двох незалежних змінних – x та y. При визначенні частинної похідної функції u за незалежною змінною x друга змінна має розглядатися як величина стала, тому $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$, оскільки похідна по x від

$4y^2$ дорівнює нулю, як похідна від сталої величини. Шукаємо тепер частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial y}$:

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + 8y$

1.4 Знайти частинні похідні функцій $u = \sin(3x + 5y - 4z)$:

Розв'язання:

1. Функція u – функція трьох незалежних змінних: x, y, z. Шукаємо $\frac{\partial u}{\partial x}$ $y = const$, $z = const$:

2. Шукаємо $\frac{\partial u}{\partial y}$ $x = const$, $z = const$:

3. Шукаємо $\frac{\partial u}{\partial z}$ $x = const$, $y = const$:

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos(3x + 5y - 4z)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 5\cos(3x + 5y - 4z)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -4\cos(3x + 5y - 4z)$

1.5 Знайти частинні похідні функцій $u = e^{\frac{x}{y}}$:

Розв'язання:

1. Функція u – функція двох незалежних змінних – x та y. *Шукаємо* $\frac{\partial u}{\partial x}$, знаючи, що $\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}$:

2. *Шукаємо* $\frac{\partial u}{\partial y}$, знаючи, що $\left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}$:

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$

1.6 Знайти повний приріст Δu та повний диференціал du функції $u(x,y)=3x^2+xy-y^2+1$:

Розв'язання:

1. Застосовуючи формулу $\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)$, робимо підстановку даних:

2. Записуємо, чому дорівнює $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$:

3. Отже, обчислюємо повний приріст Δu :

1.7 Знайти повний диференціал функції $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$:

Розв'язання:

1. Перш ніж шукати повний диференціал, знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

2.Повний диференціал функції обчислюємо за формулою $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$:

Відповідь: $dz=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\left(x+\sqrt{y^2+x^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}dy$

Розв'язати самостійно

1.8 Знайти область існування функції $z=\ln(x-y)$:

Відповідь: область визначення функції - напівплощина, яка лежить під прямою $y = x$

1.9 Знайти область визначення функції $u = \ln x + \ln y$:

Відповідь: перший квадрант ($x > 0$, $y > 0$*), до того ж* $0x$ *та* $0y$ *виключаються.*

1.10 Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$:

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$

1.11 Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $z = x^n + y^n$:

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = ny^{n-1}$

1.12 Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial y}$ функції $z = \cos(ax + by)$:

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = -a\sin(ax+by)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -b\sin(ax+by)$

1.13 Знайти повний диференціал функції $z = \frac{ay-bx}{by-ax}$:

Відповідь: $dz = \frac{(b^2-a^2)(xdy-ydx)}{(by-ax)^2}$

1.14 Знайти повний диференціал функції $z = arctg\frac{y}{x}$:

Відповідь: $dz = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

1.15 Знайти повний диференціал функції $z = x\sin y + y\sin x$:

Відповідь: $dz = (\sin y + y\cos x)dx + (x\cos y + \sin x)dy$

1.16 Знайти повний диференціал функції $u = x + ye^{\frac{x}{y}}$:

Відповідь: $du = \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 14

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ ВІД ОДНІЄЇ ЧИ ДЕКІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$, $v = 3x^2$, $w = x^4$

Розв'язання:

1. Перш ніж шукати повну похідну, шукаємо $\frac{\partial z}{\partial u}$; $\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial w}$; $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial w}{\partial x}$, які входять в основну формулу:

2. Підставляємо знайдені величини в основну формулу $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}$:

3. Винесемо в правій частині за дужки $\cos(3u + 2v - 4w)$ та замінимо під знаком косинуса u, v та w їх виразами через x, та отримаємо кінцеву відповідь:

Відповідь: $\frac{dz}{dx} = \left(18x^2 + 12x - 16x^3\right)\cos\left(6x^3 + 6x^2 - 4x^4\right)$

1.2 Знайти повну похідну функції $u = e^{ax}(y - z)$; $y = a\sin x$; $z = \cos x$:

Розв'язання:

1. Перш ніж шукати повну похідну, шукаємо $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dz}{dx}$, які входять в основну формулу:

2. Підставляємо знайдені величини в основну формулу $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$:

Відповідь: $e^{ax}\left(a^2+1\right)\sin x$

1.3 Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, а $u=x\cos y$ та $v=y\sin x$:

Розв'язання:

1. Перш ніж шукати повну похідну, шукаємо $\frac{\partial z}{\partial u};\frac{\partial z}{\partial v};\ \frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial v}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial v}{\partial y}$, які входять в основну формулу:

2. Підставляємо знайдені величини в основну формулу $\left.\begin{matrix}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{matrix}\right\}$:

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x}\left(x\cos^2 y+y^2\sin x\cos x\right)$;

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x^2\cos^2 y+y^2\sin^2 x}\left(y\sin^2 x-x^2\sin y\cos y\right)$

1.4 Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=arctg\frac{u}{v}$, а $u=x\sin y$ та $v=x\cos y$:

Розв'язання:

1. Перш ніж шукати повну похідну, шукаємо $\frac{\partial z}{\partial u}$; $\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial y}$, які входять в основну формулу:

2. Підставляємо знайдені величини в основну формулу $\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}$:

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Розв'язати самостійно

1.5 Знайти повну похідну $\frac{du}{dt}$ функції $u=\sin\frac{x}{y}$; де $x=e^t$; $y=t^2$

Відповідь: $\frac{du}{dt}=(t-2)\cdot\frac{e^t}{t^3}\cdot\cos\frac{e^t}{t^2}$

1.6 Знайти повну похідну $\frac{du}{dx}$ функції $u=v^2+vy$; де $v=\ln x$; $y=e^x$

Відповідь: $\frac{du}{dx}=\frac{2v+y}{x}+ve^{x}$

1.7 Визначити $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial w}$, якщо $u=\ln\cos\frac{xy}{\sqrt{z}}$, де $x=tvw;\ y=e^{\frac{t}{v}};\ z=\sqrt{\frac{tv}{w}}$

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial t}=-tg\frac{xy}{\sqrt{z}}\left(\frac{yvw}{\sqrt{z}}+\frac{xe^{\frac{t}{v}}}{v\sqrt{z}}-\frac{xyv}{4z\sqrt{z}\sqrt{tvw}}\right)$

1.8 Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=f(u,v)$, а $u=x^2+y^2$; $v=xy$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+y\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=2y\frac{\partial z}{\partial u}+x\frac{\partial z}{\partial v}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 15

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Знайти частинні похідні третього порядку функції $z=x^4+3x^3y-4x^2y^2+5xy^3-y^4$:

Розв'язання:

1. Шукаємо похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

2. Похідна по x від $\frac{\partial z}{\partial x}$ обчислюється так $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 18xy - 8y^2$, якщо ж $\frac{\partial z}{\partial x}$ продиференціювати по y, то отримаємо $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 - 16xy + 15y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8x^2 + 30xy - 12y^2$. Диференціюємо тепер по x похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$:

3. Студент має бачити різницю в позначеннях $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ означає, що від функції z спочатку була взята похідна по x, а результат був продиференційований по y, а символ $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ показує, що від функції z була спочатку обчислена похідна по y, а отриманий результат продиференційований по x. Отже, ці похідні відрізняються одна від одної порядком, за яким відбулося диференціювання. Знову диференціюємо останні похідні по x та по y:

4. Порівняємо отримані результати:

Відповідь: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18x - 16y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = 18x - 16y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -16x + 30y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$

1.2 Обчислити похідну $\frac{\partial^3 z}{\partial z \partial y \partial z}$, функції $u = \sin(xyz)$:

Розв'язання:

1. Обчислюємо $\frac{\partial u}{\partial x}$:

2. Обчислюємо $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$:

3. Шукаємо $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$:

Відповідь: $(1 - x^2 y^2 z^2)\cos xyz - 3xyz\sin(xyz)$

1.3 Знайти $d^2 z$ функції $z = x^2 y^2$:

Розв'язання:

1. Знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

2. Підставляємо знайдені похідні у формулу $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$:

3. :

Відповідь: $2y^2 dx^2 + 8xydxdy + 2x^2 dy^2$

1.4 Знайти диференціал третього порядку $d^3 z$ функції $z = \cos(x + 2y^2)$:

Розв'язання:

1. Шукаємо похідні першого порядку:

2. Шукаємо похідні другого порядку:

3. Шукаємо похідні третього порядку:

4. Підставляємо похідні третього порядку у формулу $d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$ та проводимо обчислення:

Відповідь:

$$\sin\left(x + 2y^2\right)dx^3 + 3 \cdot 4y\sin\left(x + 2y^2\right)dx^2dy + 3\left[-4\cos\left(x + 2y^2\right) + 16y^2\sin\left(x + 2y^2\right)\right]dxdy^2 +$$
$$+\left[-48y\cos\left(x + 2y^2\right) + 64y^3\sin\left(x + 2y^2\right)\right]dy^3$$

Розв'язати самостійно

1.5 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = xy$**:**

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.6 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{ax + by}$**:**

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2e^{ax+by}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = abe^{ax+by}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b^2e^{ax+by}$

1.7 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$**:**

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4\frac{xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$

1.8 Обчислити $d^2 z$ функції $z = x^3 y^3$

Відповідь: $d^2 z = 6xy^3 dx^2 + 18x^2 y^2 dxdy + 6x^3 y dy^2$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 16

ПОХІДНА ФУНКЦІЙ ЗА ЗАДАНИМ НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ ФУНКЦІЇ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Скалярне поле отримано функцією $V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. Знайти поверхні рівня цього поля:

Розв'язання:

1. Поверхня рівня має рівняння $f(x, y, z) = c$, застосовуючи його до даної функції, отримаємо:

2. Записуємо кінцеву відповідь та вказуємо, до якого сімейства відноситься дана поверхня рівня і чому:

Відповідь: сімейство концентричних сфер

1.2 Знайти похідну функції $f(x,y)=x^3-y^3$ в точці $M(1,1)$ у напрямі $\bar{l}$, кут якого дорівнює $\alpha=60^0$ з додатнім напрямом осі $0x$:

Розв'язання:

1. Робоча формула похідної від функції, яка має свій напрям $\frac{\partial t}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(l,x)+\frac{\partial t}{\partial y}\cos(l,y)+\frac{\partial t}{\partial z}\cos(l,z)$, тому обчислюємо значення $\cos$ для x, y, z:

2. Знаходимо $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$:

3. Знаючи координати точки M, робимо підстановку в робочу формулу :

Відповідь: $\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$

1.3 Знайти $|gradu|$ направляючі косинуси градієнта в точці $A(x_0,y_0,z_0)$, якщо функція $u=\frac{1}{r}$, де $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

Розв'язання:

1. Перш ніж скористатися робочою формулою $|gradu|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$,

слід знайти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, враховуючи те, що $u=\frac{1}{r}$:

2. Робимо підстановку знайдених значень у робочу формулу:

3. Направляючі косинуси знайдемо за формулою $\cos(\bar{a}, x) = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{(grad\frac{1}{r})_x}{\left|grad\frac{1}{r}\right|}$ (по y та z) також проведемо обчислення:

Відповідь: $|gradu| = \frac{1}{r^2}$, $\cos(\bar{a}, x) = -\frac{x}{r^5}$, $\cos(\bar{a}, y) = -\frac{y}{r^5}$, $\cos(\bar{a}, z) = -\frac{z}{r^5}$, $r = r_0\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$

Розв'язати самостійно

1.4 Знайти поверхню рівня скалярного поля $v = arctg\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$:

Відповідь: $z^2 = tg^2c(x^2 + y^2)$

1.5 Знайти похідну функції $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ в точці $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ у напрямі $\bar{l}$, кут якого дорівнює α з додатнім напрямом осі $0x$. Знайти також градієнт цієї функції, його модуль та направляючі косинуси:

Відповідь: $|gradf| = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.6 Знайти похідну функції $f(x,y,z)=x^2y^2+x^2z^2+y^2z$ у точці $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},-\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ у напрямі $\bar{l}$, який утворює з осями прямокутну систему координат $0x$, $0y$, $0z$ з відповідними кутами α,β,γ, градієнт цієї функції, його модуль та направляючі косинуси:

Відповідь: $|gradf|=\sqrt{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 17

ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Дослідити на екстремум функцію $z=2x^3+2y^3-36xy+430$:

Розв'язання:

1. Перш за все визначаємо $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

2. Шукаємо значення x та y, прирівнявши знайдені значення похідних до нуля і таким чином отримали систему з двох рівнянь:

3. Знайдемо числа, які шукають за формулами $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для того, щоб обчислити $\Delta=AC-B^2$:

4. Записуємо екстремуми функцій та пояснюємо відповідь:

Відповідь: $z_{\min} = -2$

1.2 Дослідити на екстремум функцію $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$:

Розв'язання:

1. Перш за все, визначаємо $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

2. Шукаємо значення x та y, прирівнявши знайдені значення похідних до нуля, і таким чином, отримали систему з двох рівнянь:

3. Знайдемо числа, які шукають за формулами $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для того, щоб обчислити $\Delta = AC - B^2$:

4. Записуємо екстремуми функцій та пояснюємо відповідь:

Відповідь: $z_{\min} = -82$, $z_{\max} = 82$

1.3 Дослідити на екстремум функцію $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$:

Розв'язання:

1. У цьому випадку маємо справу з трьома змінними. Шукаємо, як завжди $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$:

2. Шукаємо значення x , y та z, прирівнявши знайдені значення похідних до нуля, і таким чином, отримали систему з трьох рівнянь:

3. Шукаємо диференціал другого порядку:

4. Записуємо екстремуми функцій та пояснюємо відповідь:

Відповідь: $u_{\min} = -2$.

Розв'язати самостійно

1.4 Дослідити на екстремум функцію $z = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{y^2}{2} - 4x - 5y$:

Відповідь: екстеруму немає.

1.5 Дослідити на екстремум функцію $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$:

Відповідь: $z_{\min} = -8$

1.6 Дослідити на екстремум функцію $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$:

Відповідь: $u_{\min} = -\dfrac{4}{3}$

Контроль і рефлексія

ІНДЗ за темою «ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ»

ІНДЗ складається з п'яти завдань: 3 завдань з теми «**Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків**» та 2 – з теми «***Дослідження функції двох змінних***». Номер свого варіанту ІНДЗ студент обирає згідно свого порядкового номеру в журналі навчальних занять. Виконується ІНДЗ в окремо заведеному зошиті.

Приклади розв'язків типових завдань ІНДЗ

1.Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

1.1.1. - 1.1.2 Знайти повний диференціал першого порядку функції двох змінних:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

● **Знайдемо** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **і** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$**.**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

1.2. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = f(x;y)$**, якщо** $z = \sin x \cdot \sin y$.

● $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$

отже, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,$

2. Дослідження функції двох змінних

Алгоритм дослідження функції $z=f(x;y)$ **на екстремум**

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ **та** $\frac{\partial z}{\partial y}$**.**

2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x}=0$**,** $\frac{\partial z}{\partial y}=0$**.**

3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$**,** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$**,** $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$**.**

4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.

5.Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ **і зробити висновки, якщо:**

1) $AC-B^2>0$ **і** $A<0$**, тоді** $(x_0;\ y_0)$ **точка максимуму функції** $z=f(x;y)$**;**

2) $AC-B^2>0$ **і** $A>0$**, тоді** $(x_0;\ y_0)$ **точка мінімуму функції** $z=f(x;y)$**;**

3) $AC-B^2<0$**, тоді в точці** $(x_0;y_0)$ **немає екстремуму.**

4) $AC-B^2=0$**, тоді потрібні додаткові дослідження.**

2.1.1. – 2.1.2 Знайти екстремум функції $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$**.**

● **1) Знайдемо частинні похідні першого порядку:**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}.$$

2) Користуючись необхідними умовами, знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases}-\frac{1}{12}y-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0\\ -\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}x+\frac{47}{4}=0\end{cases} \quad \textbf{або} \quad \begin{cases}8x+y=188\\ x+6y=141\end{cases}.$$

Звідси $x=21$**,** $y=20$**.**

Стаціонарна точка $M(21,\ 20)$**.**

3) Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{12}.$$

$$\Delta = AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}>0.$$

Оскільки $A<0$**, то в точці** M **функція має максимум:**

$$z_{\max}=\frac{21}{2}\cdot 20+(47-21-20)\left(\frac{21}{3}+\frac{20}{4}\right)=282.$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0\cdot\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Варіант 1

1.1.1. $u = xy + yz + zx$

1.1.2. $z = (1 + \log_y x)^{10}$

1.2. $f(x; y) = x(1 + y)$

2.1.1. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$

2.1.2. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

Варіант 2

1.1.1. $u = z/x + x/z$

1.1.2. $z = xy\ e^{\sin \pi^2 xy}$

1.2. $f(x; y) = \frac{1}{y} e^{xy}$

2.1.1. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

2.1.2. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Варіант 3

1.1.1. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

1.1.2. $z = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$

1.2. $f(x; y) = y \ln x$

2.1.1. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$

2.1.2. $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$

Варіант 4

1.1.1. $u = y/z + \operatorname{arctg} z/x + \operatorname{arctg} x/z$

1.1.2. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x + y}{xy}\right)^2}$

1.2. $z = \ln(x - y)$

2.1.1. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$

2.1.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$

Варіант 5

1.1.1. $u = \left(x/y\right)^z$

1.1.2. $z = \arcsin \frac{x + y}{xy}$

1.2. $z = \frac{1}{2(x^3 + y^2)}$

2.1.1. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$

2.1.2. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$

Варіант 6

1.1.1. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$

1.1.2. $z = (1 + \log_y x)^{10}$

1.2. $z = x \sin^2 y$

2.1.1. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

2.1.2. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

Варіант 7

1.1.1. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

1.1.2. $z = (1 + \log_y x)^{10}$

1.2. $z = x \sin^2 y$

2.1.1. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

2.1.2. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Варіант 8

1.1.1. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$

1.1.2. $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$

1.2. $z = \sin(4x + 2y)$

2.1.1. $z = x^2 + (y - 1)^2$

2.1.2. $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y)$

Варіант 9

1.1.1. $z = e^{-\frac{x}{y}}$

1.1.2. $z = xy^3 + 3x^4y^5 + 10y^4$

1.2. $z = \sin(x^3 + y^2)$

2.1.1. $z = x^2y^3(6 - x - y)$

2.1.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$

Варіант 10

1.1. 1. $z = xy \ln(x + y)$

1.1.2. $z = (1 + \log_y x)^{10}$

1.2. $z = x \ln(xy)$

2.1.1. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$

2.1.2. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$

РОЗДІЛ III. РЯДИ

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 18

ЧИСЛОВІ РЯДИ

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Записати ряд за його загальним членом $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

Розв'язання:

1. Задаємо значення $n=1$, $n=2$, $n=3$, $\ldots$, та записуємо отриману нескінченну послідовність чисел:

2.Складаємо члени цієї нескінченної послідовності та отримуємо ряд :

Відповідь: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}$

1.2 Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

Розв'язання:

1. Запишіть, чому дорівнює загальний член ряду u_n:

2. Задамо за n цілі додатні значення, розпочинаючи з $n=1$, та отримаємо ряд:

3. Запишемо визначення, за яким побачили, що записаний ряд розходиться:

Відповідь: ряд розходиться

1.3 Чи буде ряд $1+q\cos^2\varphi+q^2\cos^2 2\varphi+q^3\cos^3 3\varphi+\ldots$ сходитися, якщо q задовольняє умова $0<q<1$?

Розв'язання:

1. Порівняємо даний ряд з геометричним, записавши спочатку його формулу:

2. Порівнюючи, запишемо, що $a=1$, $0 \le \cos^2 n\varphi \le 1$ та $0 \le q^n \cos^{n\varphi} \le q^n$, а отже (записати теорему):

Відповідь: ряд сходиться

1.4 Дослідити ряд $1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots$ за ознакою Даламбера:

Розв'язання:

1. Запишемо ознаку Даламбера:

2. Запишемо, що $u_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, отже u_{n+1} дорівнюватиме:

3. Складемо співвідношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ та проведемо обчислення:

4. Вказуємо, ряд сходиться чи розходиться і чому:

Відповідь: ряд сходиться

1.5 Дослідити ряд $\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\dots$ за інтегральною ознакою Коші:

Розв'язання:

1. Запишемо інтегральну ознаку Коші:

2. Запишемо, що загальний член ряду $u_n = \frac{1}{2^n(3n-1)}$, отже члени ряду можна розглядати як значення функції $f(x)=\frac{1}{2x(3x-1)}$ при значеннях аргументу $n=1,2,3,4,\dots$ Тому перевіряємо, чи виконує ця функція всі вимоги, покладені на неї за інтегральною ознакою Коші:

3. За нижню границю візьмемо $a = 1$ і проведемо обчислення $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x(3x-1)}$:

4. Вказуємо, ряд сходиться чи розходиться і чому:

Відповідь: ряд сходиться

Розв'язати самостійно

1.6 Знайти загальні члени ряду і дослідити його: $1+3+9+27+\ldots$

Відповідь: ряд сходиться

1.7 Дослідити ряд $\sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} + \ldots + \sin\frac{1}{n} + \ldots$

Відповідь: ряд розходиться, оскільки він гармонічний

1.8 Дослідити ряд $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots$ за ознакою Даламбера:

Відповідь: ряд сходиться

1.9 Дослідити ряд $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}$ за ознакою Даламбера:

Відповідь: ряд сходиться

1.10 Дослідити ряд $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots$ за ознакою Коші:

Відповідь: ряд сходиться

1.11 Дослідити ряд $\frac{1}{2\ln^p 2}+\frac{1}{3\ln^p 3}+\frac{1}{4\ln^p 4}+\ldots$ за інтегральною ознакою Коші:

Відповідь: ряд розходиться

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 19

СТЕПЕНЕВИЙ РЯД

Вчимося розв'язувати типові задачі

1.1 Знайти радіус ряду $1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\ldots+3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$, що сходиться чи розходиться, та дослідити його збіжність на кінцях інтервалу:

Розв'язання:

1. Коефіцієнт n-го члену $a_n=3^{n-1}$, запишіть, чому дорівнює коефіцієнт a_{n+1}

2. Запишемо, чому дорівнює співвідношення цих коефіцієнтів та запишемо формулу і обчислимо знаходження L:

3. Отже радіус $R = \dfrac{1}{L} = -$:

4. Вкажемо знайдений інтервал та те, що ряд сходиться чи розходиться:

Відповідь: ряд сходиться

1.2 Розкласти за показником степеня $x-2$ многочлен $f(x) = x^3 + x - 4$, використовуючи формулу Тейлора:

Розв'язання:

1. Запишемо формулу Тейлора для многочленів:

2. Якщо $a = 2$, а $n = 3$, обчислимо $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$ та отримані дані підставимо у робочу формулу:

Відповідь: $x^3 + x - 4 = 6 + 13(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$

1.3 Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \cos^2 x$

Розв'язання:

1. Запишемо, що $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ та розкладемо функцію $\cos 2x$ (формулу запишіть самостійно):

Відповідь: $\cos^2 x = 1 - \dfrac{2x^2}{2!} + \dfrac{8x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

1.4 Розкласти в ряд функцію $f(x)=\frac{1}{1-x}$ та почленним диференціюванням ряду отримати розкладання для функції $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

Розв'язання:

1. Взявши в біноміальному ряді (формулу запишіть самостійно) $m=-1$ та замінивши x на $-x$, отримаємо:

2. Продиференціюємо отриманий ряд:

Відповідь: $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$

Розв'язати самостійно

1.5 Знайти радіус ряду $\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$, що сходиться чи розходиться та дослідити їх збіжність на кінцях інтервалу:

Відповідь: ряд сходиться

1.6 Розкласти за показником степеня $x+1$ многочлен $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x+7$, використовуючи формулу Тейлора:

Відповідь: $f(x)=18-22(x+1)+17(x+1)^2-7(x+1)^3+(x+1)^4$

1.7 Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

Відповідь: $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}=1+3x+5x^2+7x^3+...$

1.8 Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, користуючись біноміальним рядом. Інтегруючи цей ряд, отримати розкладання в ряд Маклорена функцію $f(x)=arctgx$, якщо ця дуга лежить в інтервалі $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$

Відповідь: $arctgx=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+...$

Контроль і рефлексія

ІНДЗ за темою «РЯДИ»

ІНДЗ складається з чотирьох завдань: два з яких за темою «Знакосталі ряди» та два за темою «Функціональні ряди. Степеневі ряди». Номер свого варіанту ІНДЗ студент обирає згідно свого порядкового номеру в журналі навчальних занять. Виконується ІНДЗ в окремо заведеному зошиті.

Приклади розв’язків типових завдань ІНДЗ

1. Знакосталі ряди

1.1. За допомогою ознак порівняння дослідити збіжність рядів:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}.$$

Розв’язання.

Загальний член ряду $u_n=\frac{1}{\ln^2 n}>0,$ отже, ряд знакододатний і до нього можна застосувати ознаку порівняння. Використовуючи нерівність $\ln n<n,$ дістанемо:

$$u_n=\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln n}=\upsilon_n.$$

Вибираємо ряд порівняння: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Цей ряд розбіжний (доведіть), а тому за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ теж розбіжний.

1.2. Дослідити збіжність рядів за допомогою ознаки Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$$

Розв’язання.

Загальний член ряду є відношенням трансцендентних виразів: $u_n=\frac{3^n n!}{n^n}>0$ - ряд знакододатний. Виведемо формулу для $(n+1)$-го члена ряду:

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{3\cdot 3^n n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)}=\frac{3\cdot 3^n\cdot n!}{(n+1)^n}.$$

Визначимо границю відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n\cdot n!}{(n+1)^n}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}=$$
$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

За ознакою Даламбера цей ряд розбіжний.

2. *Функціональні ряди. Степеневі ряди*

2.1. Знайти області збіжностей функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}.$$

Розв’язання.

Побудуємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}.$$

Цей ряд знакододатний. Отже, можна застосувати до нього ознаку Даламбера (при цьому x будемо вважати за деякий параметр):

$$|u_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}; \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}};$$

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{1}{|x-2|}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Даламбера, цей ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>1 \\ x-2>-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1, \end{array}\right.$$

і розбігатись, якщо:

$$\frac{1}{|x-2|} > 1 \Leftrightarrow < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<1 \\ x-2>-1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x=1$ і $x=3$. При $x=1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x=3$ — ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, бо очевидно, що для них не виконується необхідна умова збіжності. Отже, областю збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|x-2|^n}$ буде $x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ \infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

2.2 Знайти області збіжностей степеневих рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}.$$

Розв'язання.

Порівнюючи загальний член даного ряду $u_n(x) = \frac{nx^n}{5^n}$ із загальним членом стандартного степеневого ряду $a_n x^n$, встановлюємо, що даний ряд є степеневим із коефіцієнтом $a_n = \frac{n}{5^n}$.

Знаходимо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n5^{n+1}}{5^n(n+1)} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-5;\ 5)$ — інтервал збіжності ряду.

На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm 5$, маємо розбіжні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, для яких, як очевидно, не виконується необхідна умова збіжності. Отже, $x \in (-5;\ 5)$ є областю збіжності даного степеневого ряду.

Варіант 1

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1.2. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

2.1. $1+x+x^2+x^3+\ldots$

2.2. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots$

Варіант 2

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n!}$.

2.1. $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^{2n}}}$.

Варіант 3

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

2.1. $2x+6x^2+\ldots+n(n+1)x^n+\ldots$

2.2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n+7^n}$.

Варіант 4

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}n\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$.

Варіант 5

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

2.2. $1+\frac{2x}{\sqrt{5}\cdot 5}+\frac{4x^2}{\sqrt{9}\cdot 5^2}+\frac{8x^3}{\sqrt{13}\cdot 5^3}+\ldots$

Варіант 6

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

1.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

2.2. $1-\frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}}+\ldots$

Варіант 7

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

1.2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

Варіант 8

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n n!}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Варіант 9

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n+4^n}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{\left(n^2\right)^n}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

2.2. $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+\ldots$

Варіант 10

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3+2^n}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}5^{n^2}x^{n^2}$.

2.2. $\frac{2x-3}{1}-\frac{(2x-3)^2}{3}+\frac{(2x-3)^3}{5}-\ldots$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К.Г Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. Вид. 2-ге, перероб. і доп. К.: КНЕУ, 2002. 606 с.

2. Жерновникова О.А. Робочий зошит з математичного аналізу. Навчально-методичний посібник. Харків, 2013. 98 с.

3. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Частина 1. /Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. К.: Вища школа, 2002. 462 с.

4. Математичний аналіз у задачах і прикладах. Частина 2. /Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. К.: Вища школа, 2002. 470 с.

5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах К.: Вища школа, 1994. 454 с.

Навчальне видання

Оксана Анатоліївна ЖЕРНОВНИКОВА
Тамара Іванівна ДЕЙНІЧЕНКО
Олександр Дмитрович ЧІБІСОВ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

практикум для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності «014 Середня освіта (математика)» Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Відповідальний за випуск: Жерновникова О.А.

Підписано до друку. Формат 60x84 1/8. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний.Умов. друк. арк. 6,2 .

Замовленя № . Тираж 100 прим. Ціна договірна.