

**Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г. С. Сковороди**

«До друку та в світ дозволяю»

**проректор з наукової, інноваційної
і міжнародної діяльності
професор С. В. Бережна**

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА І

Харків – 2022

**Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г. С. Сковороди**

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА
ЧАСТИНА І**

Навчальний посібник

Харків – 2022

УДК 510.21(075.8)

Рецензенти:

Сіра І. Т. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди;

Лукьянова В. А. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих дисциплін Харківського національного університету радіоелектроніки.

Затверджено вченою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди
протокол № 5 від 24.06.2022р.

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

Математика. Частина І. Навчальний посібник – Харків, 2022. – 106 с.

Навчальний посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня галузі знань 01 «Освіта/Педагогіка» спеціальності 013 «Початкова освіта». До посібника включено теоретичний матеріал чотирьох розділів початкового курсу математики: “Множини та операції над ними”, “Елементи математичної логіки”, “Бінарні відповідності та відношення”, “Числові вирази, рівняння та нерівності”.

Навчальний посібник надає здобувачам вищої освіти можливість усвідомити сутність та практично опрацювати основні поняття теоретичних основ початкового курсу математики.

Видано за рахунок авторів

©Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди

© Іонова О. М.

© Титаренко Л. І.

© Масюк О. М.

© Білецька С. А.

ВСТУП

Зазначений навчальний посібник рекомендований для здобувачів вищої педагогічної освіти рівня «бакалавр» на факультеті початкового навчання педагогічних ЗВО.

Відповідно до навчальної програми посібник містить 4 розділи: “Множини та операції над ними”, “Елементи математичної логіки”, “Бінарні відповідності та відношення”, “Числові вирази, рівняння та нерівності”.

У першому розділі поряд з висвітленням основних понять теорії множин значна увага приділяється використанню цього матеріалу у формуванні поняття натурального числа, а також пропонується теоретичне обґрунтування ряду вправ і завдань з підручників математики для початкових класів, що дозволяє студентам пов'язати вивчену тему з курсом математики в школі.

Основні закони комбінаторики і типи комбінаторних задач введені в розділ “Множини та операції над ними” на основі теорії скінченних множин. До уваги студентів запропоновано ряд комбінаторних задач з їх детальним аналізом.

Матеріали другого розділу дозволяють студентам досконало оволодіти теоретичними положеннями і структурою математичних тверджень, озброїтись багажем знань, що дасть можливість впливати на розвиток логічного мислення школярів.

У розділі “Бінарні відповідності та відношення” увага спрямована на ознайомлення з основними положеннями теми і на виявлення теоретичної основи таких понять, як “рівність”, “нерівність”, “більше-менше”, які формуються у початкових класах.

Матеріали останнього розділу дають можливість студентам поглибити і узагальнити уявлення про функції, рівняння, нерівності, ознайомитися з поняттям алгоритму та алгоритмічним підходом до розв'язання рівнянь і нерівностей.

Навчальний посібник буде корисний студентам денної та заочної форм навчання факультету початкового навчання в їх самостійній роботі із зазначених розділів курсу математики: він не тільки дає можливість краще зрозуміти запропонований курс, але усвідомити теоретичну основу елементарних математичних понять, що формуються у початковій школі.

Розділ I. МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

§1. ПОНЯТТЯ ПРО МНОЖИНУ

Поняття про множину є основним у шкільному курсі математики і широко в ньому використовується. Формування таких важливих понять, як натуральне число, дії додавання, множення, віднімання, ділення натуральних чисел, їх властивості у початковому курсі математики здійснюється на теоретико-множинній основі. Тому потрібно з'ясувати, що таке “множина”, відрізнити множину будь-яких предметів від просто купи цих предметів і т.ін.

Поняття “множина” є основним неозначуваним поняттям математики. Пояснимо це прикладами. Можна говорити про множину учнів у деякому класі, про множину планет у всесвіті, про множину голосних букв українського алфавіту. Слово “множина” в математиці вживається замість таких слів, як “клас”, “набір”, “збірка”, слів, що характеризують деяку сукупність, до того ж ця сукупність може містити лише один предмет, або й жодного. Наприклад: множина коренів рівняння $x-3=0$ є одноелементна множина $\{3\}$; множина голосних букв у слові “гай” також має один елемент $\{а\}$. Прикладом порожньої множини може бути множина людей на Сонці.

Засновник теорії множин, видатний німецький математик Георг Кантор (1845-1918), під множиною розумів “сукупність явищ, предметів, фактів, мислимих як одне ціле”.

Об’єкт будь-якої природи (люди, будинки, книги, числа, геометричні фігури тощо), що утворюють множину, називаються її **елементами**. Для запису різних висловлювань про множини та їх елементів прийнята така символіка: множини позначаються великими літерами латинського алфавіту, їх елементи — малими, слово “належить” замінюють символом $\in$. Запис “ $a \in A$ ” читають так: “об’єкт a є елементом множини A ”, або “об’єкт a належить множині A ”. Якщо множина A складається з елементів $a, в, с$, то записують це так: $A=\{a, в, с\}$. Для деяких числових множин введені спеціальні позначення:

N - множина натуральних чисел;

Z - множина цілих чисел;

Z_+ - множина цілих додатніх чисел;

Z_- - множина цілих від’ємних чисел;

Q - множина раціональних чисел;

R - множина дійсних чисел.

У школі предметом вивчення є такі множини: N ; Q_+ ; Q_- ; R .

Множини можуть містити як скінченну кількість елементів, так і нескінченну. Так, множини предметів, з якими працюють у школі, скінченна. Множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ — скінченна, тому що корені даного рівняння $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ складають множину $A = \{2; 3\}$. Прикладами нескінченних множин можуть бути: множина натуральних чисел, множина геометричних фігур тощо.

У 1 класі початкової школи за допомогою скінченних множин формується поняття “натуральне число”. Тому край важливо розуміти, що означає термін “множина задана”, вміти задавати множину переліком її елементів або вказівкою характеристичної властивості.

Множина вважається заданою, якщо про будь-який об’єкт можна сказати: належить він чи ні цій множині. Запис $P(x)$ означає, що елемент множини x має властивість P і позначають це так: $M = \{x \mid P(x)\}$.

Наприклад:

а) $A = \{x \mid x \in N \quad x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

б) $B = \{x \mid x \in R\}$.

в) $C = \{x \mid x - \text{мешканці Землі}\}$.

г) $D = \{x \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$;

д) $M = \{x \mid x - 5 = 0\} = \{5\}$.

Багато задач, що розв’язуються при вивченні математики, пов’язані із знаходженням множини, характеристична властивість елементів якої відома. Розглянемо декілька прикладів, в яких потрібно перелічити елементи множини або зобразити їх на числовій вісі

а) $E = \{x \mid x \in N \quad -1 < x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

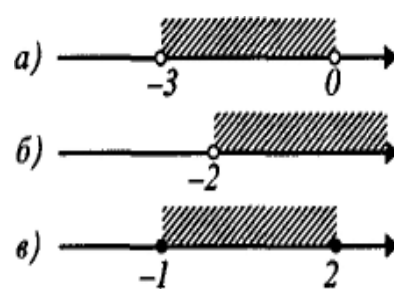
б) $A = \{x \mid x \in R, -3 < x < 0\}$ (мал.1а)

в) $B = \{x \mid x \in R, x > -2\}$ (мал.1б)

г) $C = \{x \mid x \in R, -1 \leq x \leq 2\}$ (мал.1в)

д) $T = \{x \mid x \in Z, x^2 = 2\} = \emptyset$

е) $M = \{x \mid 5x - 7 = 3(x - 7)\} = \{-7\}$.

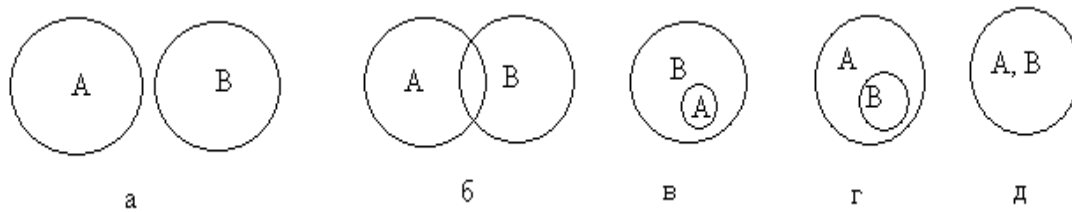


Мал.1

Означення. Дві скінченних множини A і B вважаються **рівними**, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Наприклад, множини $A = \{a \mid a^2 - 4 = 0\}$ і $B = \{-2; 2\}$ є рівними, тобто $A = B$, тому що обидві множини складаються з чисел 2 і -2.

Поняття рівності скінченних множин лежить у основі формування поняття конкретного натурального числа. Корисно знати, що наочне зображення множин називають **кругами Ейлера** або **діаграмами**

Ейлера-Венна (Леонард Ейлер (1707-1783)—швейцарський математик, член Петербурзької Академії наук; Джон Венн (1834-1923)—англійський математик). Співвідношення між елементами двох множин за допомогою кругів Ейлера можна зобразити так (мал. 2):



Мал.2

Вчитель початкових класів має розуміти, що натуральне число, як й усі математичні поняття, виникло з практичної діяльності людини. Так, у глибоку давнину, щоб поділити порівну, потрібно було вміти порівнювати скінченні множини, потім для порівняння множин стали використовувати множини-посередники (пальці, камінці, зарубки, вузлики). Цей процес абстрагування зумовив виникнення загального уявлення про число. Потім числа стали розміщувати в один ряд, додаючи кожного разу по одному елементу. Так виникло поняття “натуральний ряд чисел”. Термін “натуральне число” вперше використав римський вчений Боецій (475-524 рр. до н.е.).

Тому, розглядаючи, наприклад, число 3 як $2+1$, ми формуємо не поняття натурального числа 3, а його склад. Для формування ж поняття



мал.3

характеристика є однаковою для цих множин?”.

Потім, звертаючи увагу на те, що кількість елементів у цих множинах однакова, вводиться абстрактне число 3.

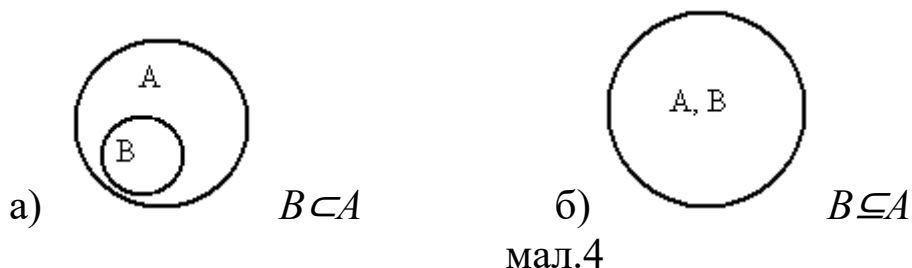
Без числа нуль неможливо уявити сучасної письмової та усної нумерації, тому це число, яке не є натуральним, вводиться в 1 класі. Оскільки натуральне число у початкових класах вводиться як потужність скінченної множини, то з'являється можливість формувати поняття числа нуль як потужність порожньої множини. Наприклад, показуючи учням порожню вазу, можна запитати: “Скільки у вазі фруктів?” і сказати, що в такому випадку ми одержуємо число нуль.

Корисно знати, що сучасна позиційна десяткова система числення була створена в Індії на початку нашої ери, а торгівці з арабських та азійських країн поширили її Європою у XII-XIII ст.. Слов'яни почали користуватися позиційною системою числення у XVII-XVIII століттях.

З усіх чисел пізніше за всі було введено число нуль. Важливим досягненням індійської науки було введення особливого знака для позначення цього числа. З введенням цифри нуль десяткова система запису чисел була остаточно сформована. Оскільки історично введення числа нуль було найскладнішим, то природно, що й у методичному плані формування уявлення про число 0 у 1 класі є досить складним завданням. Тут вчителю допоможе поняття множини, потрібно добрати достатньо велику кількість дидактичних прикладів різноманітних способів задання порожніх множин.

§2. ВІДНОШЕННЯ ВКЛЮЧЕННЯ

Відношення включення є теоретичною основою низки питань шкільного курсу математики. Множина **В включена** в множину А, якщо кожний елемент множини В належить і множині А ($B \subseteq A$). Необхідно відрізняти два випадки включення (мал.4).



Звідси випливають основні властивості включення:

- 1) $A \subseteq A$; 2) $\emptyset \subseteq A$;
- 3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (транзитивність);
- 4) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$ (принцип об'ємності множини).

З властивості 4) випливає один зі способів доведення рівності двох множин: якщо доведено, що будь-який елемент множини В є елементом множини А і будь-який елемент А є елементом множини В, то $A = B$.

Якщо $B \subset A$ (мал.4а), то говорять, що В є **підмножиною** множини А. Поняттям підмножини ми користуємось постійно, виділяючи частини різних сукупностей предметів і понять. Так, наприклад, в українській мові розглядаємо різні підмножини множини всіх слів у реченні. У географії та історії вивчаємо різні підмножини множин всіх країн, міст і т.ін. Широко використовується поняття підмножини в

математиці. Так, наприклад, множина чисел першого десятка є підмножиною множини натуральних чисел, яку в свою чергу можна розглядати як підмножину множини всіх цілих чисел. Множина ромбів, квадратів, прямокутників – це різні підмножини множини паралелограмів.

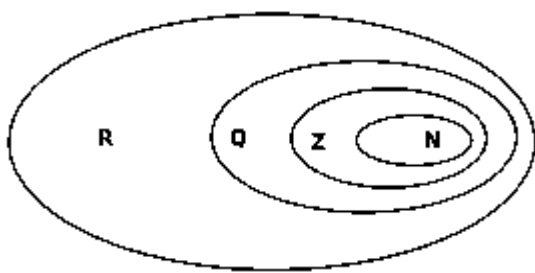
Поняття «множина» і «підмножина» дозволяють уточнити деякі геометричні поняття. Найважливішим поняттям геометрії є поняття геометричної фігури, яке визначається через поняття “точка” і “множина”. *Геометричною фігурою* називається будь-яка непорожня множина точок. Оскільки множина може складатися лише з одного елемента, тому окремо взята точка також є геометричною фігурою, як і будь-яка скінченна множина точок. Отже, відрізок, промінь, пряма, трикутник, куля, куб і т.ін. - все це геометричні фігури.

Часто буває так, що розглядаємо підмножини однієї й тієї ж множини U . Така множина називається **універсальною множиною**. Так, для учнів 1 класу універсальною множиною чисел є числа першого десятка, потім двох десятків і т.д.

Поняття включення широко використовується в школі. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. При розв’язанні будь-якого рівняння (нерівності) зазвичай дане рівняння (нерівність) замінюємо іншим, еквівалентним. Тут дуже важливо стежити за тим, щоб множини коренів вихідного рівняння (нерівності) та одержаного збігалися, тобто щоб виконувались тотожні перетворення (які не призводять ні до втрати, ні до виникнення зайвих коренів).

Приклад 2. Відношення включення є теоретичною основою методики вивчення числових множин (мал.5). Розглянемо історичну



мал.5

схему розвитку поняття про число:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Існуюча у шкільній практиці методика поширення поняття про число має такі недоліки:

- 1) учні не завжди розуміють відношення між різними класами чисел;
- 2) не розуміють основної ідеї необхідності поширення відомої їм числової множини;
- 3) мають поверхневе уявлення про порядкову і алгебраїчну структуру даної числової множини, оскільки зазвичай предметом

вивчення в школі є самі числа як об'єкти, а не структура числової множини, яка визначається відношенням порядку і введеними операціями.

Нагадаємо, що побудова поширеної числової множини має задовільняти таким умовам. Нехай множина B поширюється до множини A , тоді 1) $B \subset A$; 2) усі операції та властивості операцій, що виконуються у множині B , повинні виконуватися у множині A ; 3) у множині A виконується операція, яка не може виконуватися у множині B (мал.5); 4) множина A повинна бути мінімальною серед усіх можливих розширень множини B , що цілком задовольняє перші три вимоги.

Найважливішим моментом процесу поширення поняття про число у шкільному навчанні є розкриття основної його мети: з'ясування питання навіщо нам потрібні нові числа.

Отже, відношення включення дозволяє визначити спільну для всіх класів школи схему введення нових чисел, що дозволяє здійснити принцип наступності у навчанні математики дітей молодшого і середнього віку:

1. Повторити операції відомої учням універсальної числової множини та її властивості.

2. На спеціально підібраних задачах показати недостатність відомої їм універсальної числової множини.

3. У процесі аналізу цих задач ввести нові числа.

Так, наприклад, перед введенням у 2 класі поняття частки та дробу потрібно спочатку узагальнити знання учнів про відому їм універсальну числову множину — множину натуральних чисел: можливість виконання операції додавання і множення; додавання нуля і множення на 1; переставна (комутативна), сполучна (асоціативна), розподільна (дистрибутивна) властивості цих операцій. Потім можна запропонувати розв'язати таку задачу: *«У хлопчика 12 яблук. Він пригостив трьох своїх товаришів, дав кожному однакову кількість яблук. Скільки яблук одержав кожний? А як бути, якщо у хлопчика лише одне яблуко?»* При розв'язанні цієї задачі формується розуміння про необхідність введення нових чисел. Таким чином, ми йдемо шляхом доповнення відомої учням універсальної множини новими числами, у результаті чого утворюється нова числова множина. Цим самим від класу до класу школи маємо змогу показати як математика розвиває й вдосконалює свій апарат під впливом потреб практики і науки, тобто здійснюється діалектичний підхід до вивчення числових множин.

§3. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Над множинами виконуються такі операції: об'єднання, переріз, різниця, розбиття, декартів добуток. Всі ці операції мають велике значення у шкільному курсі математики. Тому студент повинен вміти не лише давати означення, але й на діаграмах Ейлера-Венна ілюструвати їх, показати за їх допомогою теоретичну основу арифметичних дій додавання, віднімання, множення і ділення натуральних чисел.

Нагадаємо ці означення і покажемо їх роль у початковому курсі математики.

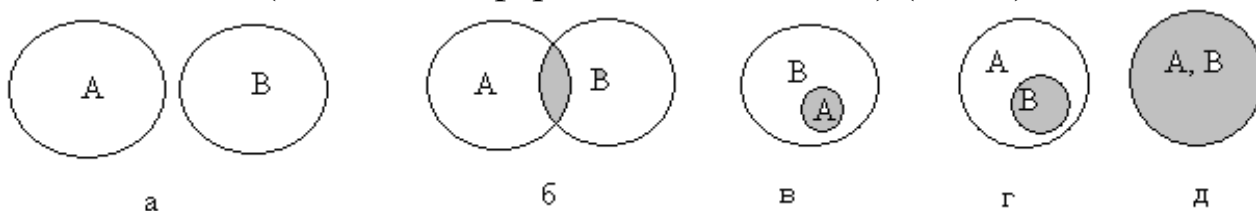
1. Переріз множин.

Нехай задані множини $A=\{a, c, d\}$ і $B=\{c, d, e\}$. Утворимо нову множину P , що складається з усіх елементів, які належать одночасно і множині A , і множині B : $P=\{c, d\}$. Ця множина P називається перерізом множин A і B .

Перерізом двох множин A і B називається така множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать одночасно кожній із множин A і B (мал.6).

Переріз множин A і B позначають так: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

За допомогою діаграм Ейлера-Венна проілюструємо переріз множин A і B (показано зафарбованою областю) (мал.6):



Мал.6

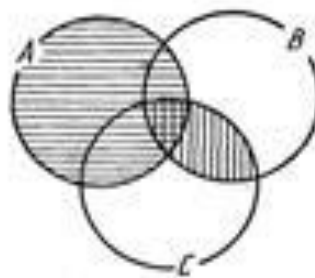
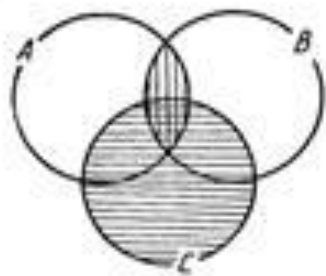
Операція перерізу множин має такі **властивості**:

1. Переріз множин комутативний: $A \cap B = B \cap A$ (переставний закон)
2. Переріз множин асоціативний $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (сполучний закон). Наочно ця властивість ілюструється за допомогою діаграми Ейлера-Венна (мал.7).

3. Якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A$

Дійсно, якщо A - підмножина множини B , то елементи, що належать одночасно і множині A і множині B , є елементи множини A (мал.6в).

4. Для кожної множини A маємо: $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap U = A$. Ці рівності випливають із властивості 3, тому що $A \subset A$ і $\emptyset \subset A$.



$$(A \cap B) \cap C \quad A \cap (B \cap C)$$

(подвійна штриховка) (подвійна штриховка)

мал.7

Операція перерізу множин є підґрунтям розв'язання різноманітних задач.

Приклад 1. А - множина простих чисел, В - множина додатних парних чисел. Тоді $A \cap B = \{2\}$.

Приклад 2. С - множина ромбів, D - множина прямокутників. Тоді $C \cap D$ - множина квадратів.

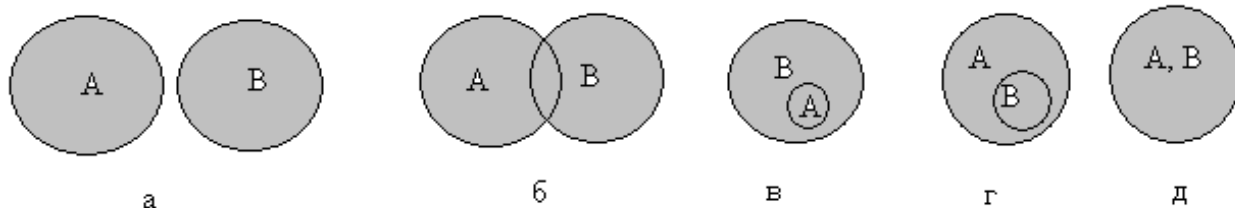
2.Об'єднання множин.

Об'єднанням двох множин А і В називається множина, яка складається з елементів, що належать хоча б одній з множин А або В.

Оскільки кожний елемент х з нової множини має властивість “ $x \in A$ або $x \in B$ ”, то означення об'єднання двох множин можна записати так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Проілюструємо знаходження об'єднання множин на кругах Ейлера-Венна (зафарбовані області) (мал.8)



Мал.8

Кількість елементів множини А називається **потужністю множини** А і позначається $m(A)$.

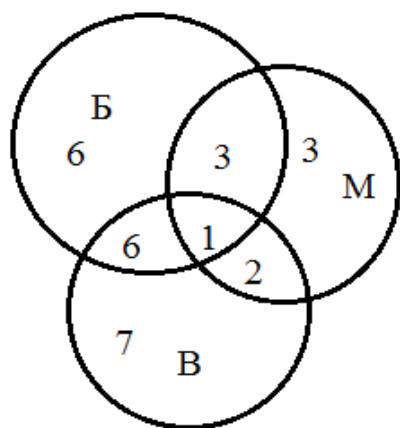
Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай А - множина парних чисел; В - множина непарних чисел. Тоді $N=A \cup B$ - множина натуральних чисел.

Приклад 2. Нехай А - множина учнів деякого класу, що відвідують волейбольну секцію, а В - множина учнів того ж класу, що

відвідують математичний гурток. Тоді у множину $A \cup B$ увійдуть ті учні, які відвідують волейбольну секцію або математичний гурток. Серед них можуть бути такі, що відвідують лише волейбольну секцію, або лише математичний гурток, і можуть бути ті, що відвідують і волейбольну секцію, і математичний гурток.

Приклад 3. Кожен студент групи бере участь в одному з гуртків: біологічному (Б), математичному (М), валеологічному (В).



Мал.9

Скільки студентів у групі, якщо в біологічному гуртку - 16, математичному - 9, у валеологічному - 16, біологією і математикою займаються 4 студента, математикою і валеологією - 3, біологією і валеологією - 7, а у всіх трьох гуртках - 1 студент?

Розв'язання: Розв'яжемо задачу за допомогою кругів Ейлера-Венна (мал.9):

$$m(\Gamma) = (6+3+7) + (6+3+2) + 1 = 16+11+1=28(\text{ст.})$$

Відповідь: 28 студентів.

Операція об'єднання множин має такі **властивості**:

1. Комутативний закон $A \cup B = B \cup A$

2. Асоціативний закон $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ця властивість дає можливість записати вираз без дужок і одержати об'єднання будь-якої кількості множин.

3. Якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$.

4. Для будь-якої множини A мають місце рівності:

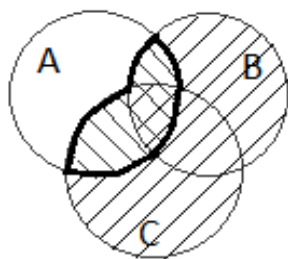
$$A \cup A = A; \quad A \cup \emptyset = A; \quad A \cup U = U$$

5. Для будь-яких множин A, B, C мають місце дистрибутивні (розподільні) закони, що пов'язують операції перерізу і об'єднання:

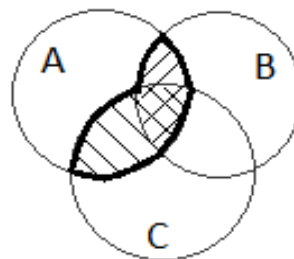
а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Властивості дистрибутивності ілюструються на діаграмах Ейлера-Венна. Так, на мал.10 наведені діаграми, що відповідають лівій і правій частині співвідношення а). На мал.10а штриховкою позначено множину $B \cup C$. Уся область, обведена жирною лінією, зображує множину $A \cap (B \cup C)$. На мал.10б штриховкою показано множину $A \cap B$ і множину $A \cap C$. Область, що обведена жирною лінією, зображує множину $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Порівняння одержаних областей дозволяє зробити висновок про те, що множини $A \cap (B \cup C)$ і $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ рівні, тому що складаються з одних й тих самих елементів.



а) $A \cap (B \cup C)$



б) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Мал.10

Теоретичною основою операції додавання натуральних чисел є операція об'єднання двох множин, які не перетинаються (мал. 8а).

Зазвичай навіть учні старших класів на запитання: “Що таке алгебраїчна операція?” відповідають, що алгебраїчна операція - це дія, тобто у відповіді має місце тавтологія. А зміст алгебраїчної операції полягає у тому, що ми маємо відображення множини A^2 в A . Наприклад, парі натуральних чисел (2; 3) при операції додавання відповідає натуральне число 5.

Якщо чітко виділити при вивченні у 1 класі теми “Додавання” теоретико-множинний підхід, то можна не лише сформулювати правильне уявлення про алгебраїчну операцію на прикладі додавання натуральних чисел, а й підкреслити різницю між операцією додавання і безпосереднім виконанням додавання. На жаль, багато вчителів при розв’язанні задачі “На гілці сиділо 2 птахи і прилетіло ще 2. Скільки птахів стало?” міркують з учнями так: “Було 2 птахи, потім прилетів один птах; їх стало 3, а потім прилетів другий птах; їх стало 4. Отже, $2+2 = (2+1)+1 = 4$ ”. При такому підході фактично розглядається не операція додавання, а саме виконання додавання прилічуванням по одному.

При формуванні у молодших школярів уявлення про алгебраїчну операцію на прикладі операції додавання натуральних чисел важливо показати, що дві різні множини замінюються третьою множиною.

Цю роботу можна провести так. Вчитель викликає до дошки Петра і Олю, дає Петрові, наприклад, 2 яблука, а Олі 3 груші. Потім пропонує скласти їх у кошик і запитує: “Скільки фруктів у кошику?” Таким чином, чітко показано, що є дві різні множини (яблука і груші), а одержали нову, третю множину (фрукти). Лише після цього правомірно поставити запитання: “Як же порахувати, скільки фруктів у кошику?”

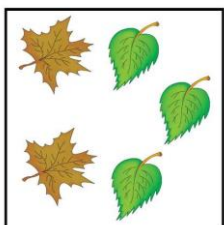
На цьому ж прикладі можна сформувати в учнів правильне уявлення про комутативну (переставну) властивість додавання. У цьому випадку спочатку на предметних діях показати учням істинність цієї властивості. Нехай, наприклад, вчитель викликав до дошки Петра і Олю, дав Петрові 2 яблука і Олі 3 груші; діти підраховували, скільки всього фруктів. Потім вчитель запропонував Олі і Петрові помінятися місцями і задає запитання: “Скільки всього у Олі і Петра фруктів?”. Учні переконуються, що фруктів стільки ж, скільки їх було у першому випадку. Лише після таких задач доцільно переходити до знаходження суми чисел, наприклад $3+2$ і $2+3$.

Справедливість асоціативного (сполучного) закону додавання також рекомендуємо виявити за допомогою предметних дій, використовуючи відповідний закон об'єднання множин $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Покажемо на прикладі, як це можна зробити. До дошки викликаються Петро, Оля і Таня. Петро одержав 2 квадрати, Оля - 3 круги, Таня - 1 трикутник. Вчитель пропонує порахувати, скільки геометричних фігур одержали діти. Учні пропонують різні варіанти. Серед них потрібно вибрати і підкреслити (шляхом різних групувань Петра, Олі і Тані) два варіанти: а) Петро і Оля, потім Таня; б) Петро і (Оля і Таня). Діти переконуються, що результати будуть однакові.

Якщо, після такої роботи вчитель запропонує знайти суми чисел $(2+3)+1$ і $2+(3+1)$, то у другому випадку, навіть не виконуючи дій, учні дадуть правильну відповідь.

У підручниках з математики для 1-2 класів початкової школи є багато різних завдань, які дають можливість формувати в учнів розуміння сутності операції об'єднання і перерізу множин, що, у свою чергу, сприяє формуванню важливих математичних понять. Наведемо приклади.



$$2+3=5$$

Об'єднання. Задача 1 (1 клас). Валя зібрав 2 кленових листочки і 3 липових. Скільки всього листочків зібрав хлопчик?

Задача 2 (1 клас). Колгосп відправив до міста 8 машин з огірками і 2 машини з помідорами. Скільки машин з овочами відправив колгосп?

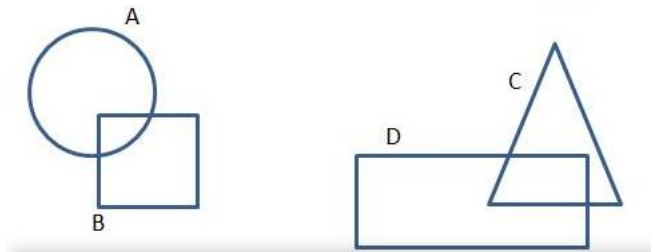
Задача 3 (2 клас). Мама дала Саші 7 абрикосів, 4 сливи, 1 яблуко. Скільки фруктів дала мама хлопчикові?

Задача 4 (2 клас). Діти заготували для птахів 5 кг насіння липи, 7 кг проса, а горобини стільки, скільки насіння липи і проса разом. Скільки горобини заготували діти?

Задача 5 (2 клас). На першому уроці праці використали 18 аркушів червоного паперу і 2 аркуші зеленого паперу, а на другому - 20 аркушів білого паперу. Скільки аркушів паперу використали на двох уроках?

Переріз. Задача 1 (1 клас).

Зафарбуй спільну частину трикутника і прямокутника; круга і квадрата ?



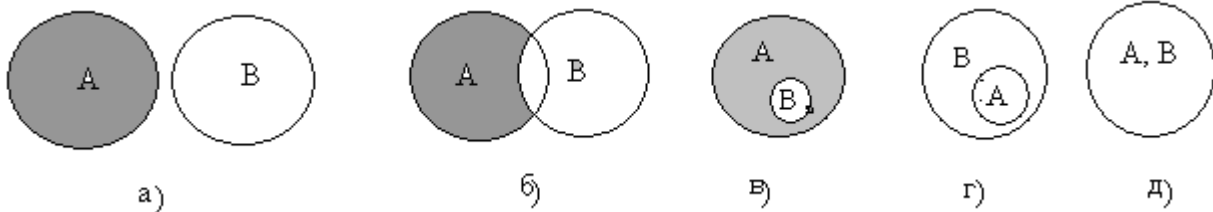
3.Різниця множин

Теоретичною основою операції віднімання натуральних чисел є операція над множинами, яка називається різницею.

Різницею двох множин A і B називається множина, елементи якої належать множині A і не належать множині B :

$$A \setminus B = C = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Різниця множин A і B на діаграмах Ейлера-Венна має вид заштрихованої області (мал.11)



Мал.11

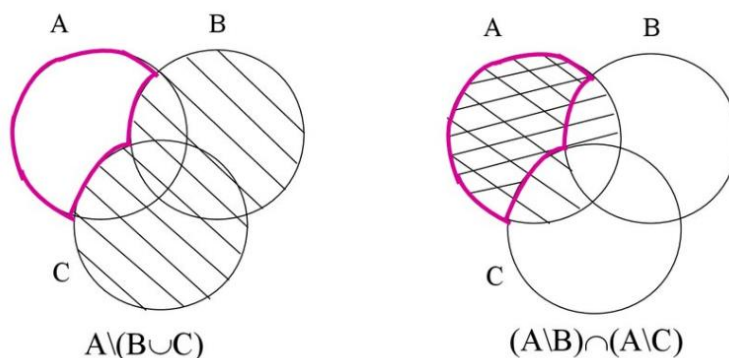
Потрібно зауважити, що $A \setminus B \neq B \setminus A$. Ця рівність існує лише за умови, якщо $A=B$: $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$.

Для будь-яких множин A , B , C справедливі такі рівності, що пов'язують різницю множин з іншими операціями над множинами:

а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

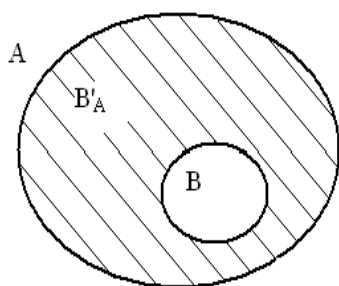
б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Ці рівності можна проілюструвати на діаграмах Ейлера-Венна і довести на основі виконання операцій над множинами. Наприклад, істинність властивості (б), наведеної вище, доведена на мал.12.



мал.12

Велике значення у початковому курсі математики має випадок, коли множина B є підмножиною множини A . У цьому випадку множина



мал.13

всіх елементів з множини A , що не належать множині B , називають **доповненням до підмножини B** до множини A і позначають B'_A . На мал.13 це заштрихована область. На діаграмі Ейлера-Венна видно, що множині B'_A належать усі точки множини A , які не належать B , тобто

$$B'_A = A \setminus B.$$

Розглянемо на прикладі, як знаходити множину B'_A . Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Щоб знайти множину B'_A , потрібно з множини A вилучити всі елементи, що належать множині B . Ті елементи, що залишились, і складають множину $B'_A = \{1, 3, 5, 7\}$. Говорять, що множину B'_A можна знайти, якщо з множини A відняти множину B .

Часто у шкільному курсі математики множини A , B , C (чисел, точок, фігур, функцій) є підмножинами деякої більш широкої множини U , яку приймають за основну або універсальну.

Приклади. 1) Для 1 класу основною множиною є множина натуральних чисел N .

2) У геометрії вивчають трапеції, паралелограми, ромби, прямокутники, квадрати. У цьому випадку універсальною множиною буде множина всіх чотирикутників.

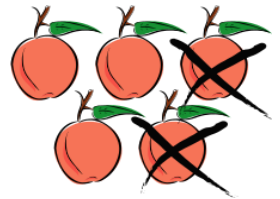
3) При розгляді різних відрізків натурального ряду чисел під універсальною множиною розуміється множина всіх дійсних чисел.

Основні **властивості доповнення**:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $B \cup B'_A = A$ | 2. $B \cap B'_A = \emptyset$ |
| 3. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | 4. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |

Корисно знати, що рівності (3) і (4) відомі під назвою *законів де Моргана* (шотландський математик, 1806-1871).

Вчитель, формуючи в учнів 1 класу за допомогою предметних дій уявлення про операцію «віднімання» натуральних чисел, має показати, що із даної множини вилучають другу множину і одержують третю множину, тобто має у своїй роботі виходити з означення доповнення множини В до множини А: А - перша множина, В- друга множина, V'_A - третя множина (мал.13).



Розглянемо на прикладі, як можна організувати таку роботу.

Вчитель пропонує розв'язати задачу, підкреслюючи, про які три множини йде мова. «В вазі лежить 5 фруктів: яблука і груші. Оля взяла всі яблука - 3. Скільки груш залишилось?» Діти перелічують кількість груш і записують: $5-3=2$. Лише після неодноразового виконання такого виду робіт можна приступати до формування поняття про операцію віднімання як дії, протилежної додаванню.

Наведемо приклади з підручника математики для 1-2 класів початкової школи:

Задача 1 (1 клас) У класі 10 хлопчиків і дівчат. Всі дівчата вийшли з класу. У класі залишилось 4 хлопчики. Скільки було дівчат ?

Задача 2. У сплаві олова і міді масою 13 кг входить 7 кг олова. Скільки кілограмів міді у сплаві?

Задача 3. З 80 кг винограду одержали 20 кг ізюму. Скільки кілограмів води випарилось під час сушки винограду?

4. Розбиття множини

Розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, є теоретичною основою ділення на рівні частини та на вміщення, класифікації, родо-видових означень. Розглянемо зміст цієї операції на конкретних прикладах.

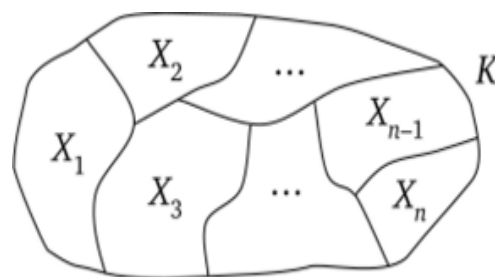
Приклад 1. Нехай маємо множину М - множину трикутників. Виділимо з М підмножину А з властивістю «мати прямий кут», підмножину В з властивістю «мати гострі кути», підмножину С з властивістю «мати тупий кут». Одержимо А - прямокутні трикутники, В - гострокутні трикутники, С - тупокутні трикутники. Ці множини мають такі властивості:

$$1) M=A \cup B \cup C; \quad 2) A \cap B = \emptyset; \quad A \cap C = \emptyset; \quad B \cap C = \emptyset.$$

Приклад 2. Нехай Х - множина учнів деякої школи. Між елементами цієї множини існують багато різних відношень: «бути однокласником», «бути спортсменом», «бути сусідом» тощо.

Розглянемо відношення «бути однокласником». Виділимо з множини X учня x і разом з ним його однокласників. Потім у множині X візьмемо другого учня y , який не є однокласником x , і знов виділимо однокласників y . В результаті одержимо другий клас учнів і т.д. Таким чином можна розділити усіх учнів за класами, кожен учень попаде лише в один клас.

Позначимо X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 множини учнів кожного класу даної школи, тоді множину всіх учнів школи можна позначити: $K = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$. При цьому ніякі дві множини із X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 не мають спільних елементів, інакше кажучи, попарно не перетинаються, і ніяка з цих множин не є порожньою (мал.14).



мал.14

Розбиття множини X на підмножини, що попарно не перетинаються, або класи визначається такими умовами:

1. Всі підмножини, що утворюють розбиття, не порожні.
2. Будь-які дві підмножини не перетинаються.
3. Об'єднання всіх підмножин є дана множина X .

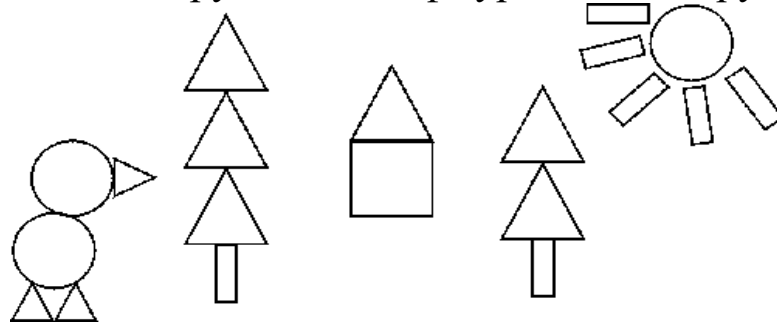
Розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, лежить в основі різноманітних **класифікацій**. Поняття «клас» та його синоніми «тип», «родина», «рід», «вид», «сорт» широко вживаються у всіх галузях нашої діяльності.

У початковому курсі математики явно не вводиться поняття розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, але розбивати множину на класи доводиться часто. Так, наприклад, множину всіх натуральних чисел розбиваємо на підмножини парних і непарних чисел; на одноцифрові, двоцифрові, трицифрові і т.д. Множину всіх кутів розбиваємо на 3 класи: гострі, тупі, прямі. Множину всіх багатокутників - на трикутники, чотирикутники і т.д. Виконуємо класифікацію рослин і тварин. І завжди при розбитті множини на класи потрібно обов'язково дотримуватися умов розбиття, котрі виділили раніше.

Після класифікації можна перейти до означень. Наприклад, розбивши множину чотирикутників на клас, в якому сторони попарно паралельні, і клас, в якому ця властивість відсутня, одержимо таке означення паралелограма: «Чотирикутник (рід, вся множина), у якому сторони попарно паралельні (видова відзнака, клас), називається паралелограмом».

Наведемо приклади з підручників математики 1-2 класу початкової школи, з допомогою яких можна формувати уявлення про розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються:

Задача 1. Скільки всього фігур на малюнку? (мал.15) Які групи можна утворити з цих фігур за ознакою форми? Скільки груп можна утворити за ознакою кольору? Скільки фігур в кожній групі?

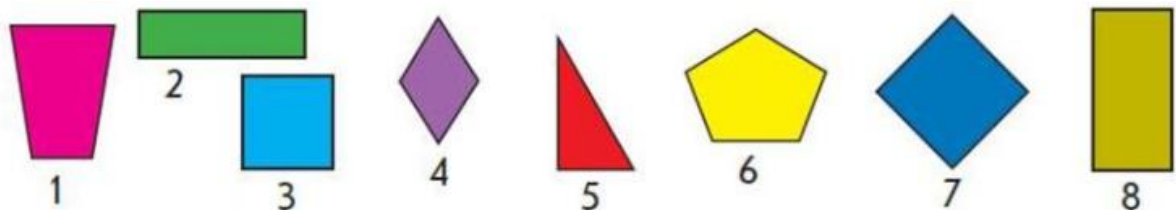


мал.15

Задача 2. Які фігури на малюнку не будуть багатокутниками?

Задача 3. Назви кожен багатокутник на малюнку. Скільки чотирикутників на малюнку? (мал.15)

Задача 4. Якими цифрами позначені на малюнку прямокутники? (мал.16)



мал.16

Задача 5. Запишіть, якими цифрами позначені на малюнку трикутники і чотирикутники.

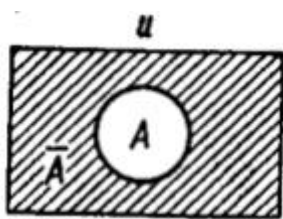
З шкільної практики відомо, що учні досить часто роблять помилки в означеннях. І якщо навіть під керівництвом вчителя вони виправили помилку, немає гарантії, що наступного разу вони цієї помилки не повторять. Основна причина такого становища у тому, що вчитель при формуванні конкретних означень не завжди спирається на визначення розбиття. Помилки, що виникають у формуванні означень, виникають тому, що порушена яка-небудь з вимог до розбиття множини на підмножини. Тому студенту необхідно вміти безпомилково виконувати операцію розбиття. Він має розуміти, що поділ трикутників на різносторонні, рівносторонні і рівнобедрені не правильне, тому що у перерізі множин рівнобедрених і рівносторонніх трикутників одержимо множину рівнобедрених трикутників; а речення

«Учні і футболісти, набувайте знання!» з цієї ж причини логічно неграмотне.

Зупинимося на розбитті множини за допомогою однієї або двох властивостей.

а) *Розбиття множини на класи за допомогою однієї властивості.*

Операції об'єднання і перерізу множин є основою для поняття розбиття множини на класи. Нехай універсальна множина U - множина всіх трикутників. За допомогою властивості «мати прямий кут» виділимо підмножину A – прямокутних трикутників (тобто елементів з U , що мають цю властивість) і підмножину $\bar{A}$ - непрямокутних трикутників (тобто елементів з U , що не мають цієї властивості).

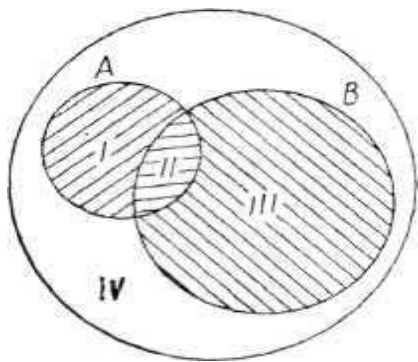


мал.17

Ці дві підмножини універсальної множини U не перетинаються $A \cap \bar{A} = \emptyset$, та їх об'єднання складе множину U , тобто $A \cup \bar{A} = U$. Отже, властивість «мати прямий кут» визначає розбиття множин U на два класи: A і $\bar{A}$ (мал.17)

б) *Розбиття множини на класи за допомогою двох властивостей.*

Нехай універсальна множина $Y=N$ - множина всіх натуральних чисел. З множини N виділимо A - підмножину чисел, кратних 3, і B - підмножину натуральних чисел, кратних 4. Побудуємо круги Ейлера-Венна для всіх множин і установимо, на скільки областей, що



мал.18

перетинаються, розіб'ється множина $Y=N$. Оскільки A і B - підмножини множини N , то круги, що зображають A і B , будуть знаходитися усередині універсальної множини $Y=N$ (мал.18). Множини A і B перетинаються, і множина $Y=N$ розбилась на 4 області, що попарно не перетинаються:

область I - множина натуральних чисел, кратних 3 і не кратних 4;

область II - множина натуральних чисел, кратних 3 і 4 одночасно;

область III - множина натуральних чисел, кратних 4 і не кратних 3;

область IV - множина натуральних чисел, не кратних ні 3, ні 4.

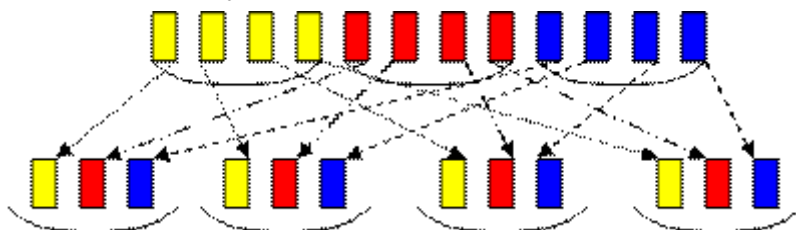
У розглянутому прикладі класифікація натуральних чисел була виконана за допомогою двох властивостей: «бути кратним 3» і «бути кратним 4».

В окремих випадках деякі з областей (I-IV) можуть виявитися порожніми. Тоді одержимо розбиття множини U на 3 класи.

Як вже говорилося раніше, операція розбиття є теоретичною основою арифметичної дії ділення, сутність якої у початковому курсі математики розкривається за допомогою двох простих задач: ділення на рівні частини і ділення на вміщення.

Розглянемо ці задачі:

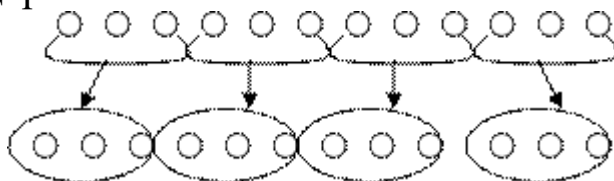
Задача 1. 12 зошитів потрібно роздати 4 учням порівну. По скільки зошитів одержить кожен учень?



мал.19

Тут множину зошитів розбивають на 4 підмножин, що не перетинаються (мал.19). Потрібно знайти, скільки елементів має кожна підмножина. Це задача на ділення на рівні частини.

Задача 2. 12 зошитів потрібно роздати учням по 3 зошити кожному. Скільки учнів одержать зошити?



мал.20

Тут множину зошитів розбивають на рівнопотужні підмножини, що не перетинаються, і які мають по 3 елементи. Потрібно знайти кількість таких підмножин. Це задача на ділення на вміщення.

Звернемо увагу, що у першій задачі ми знаходимо кількість елементів у підмножині, а у другій задачі ми знаходили кількість підмножин. Тобто, у запису « $a \cdot b = c$ » ми за добутком « c » знаходимо у першому випадку « a », у другому випадку - « b ». Працюючи з цими задачами, вчитель підводить учнів до розуміння операції ділення як дії, оберненої до дії множення.

5. Кортж. Декартів добуток множин.

Часто в математиці нас цікавить не тільки множина різних цифр, за допомогою яких записано число, наприклад: 133211, тобто множина $\{1;2;3\}$, але й весь набір цифр, що взяті у певній послідовності і використані у запису даного числа. Порядок розташування цифр у цьому запису має значення, тому що кожна з розрядних одиниць, що входить в запис числа 133211, має різне значення: перша, рахуючи

справа наліво, свідчить про те, що число має одну одиницю, друга - що в числі у другому розряді є один десяток, третя - що в числі у розряді сотень дві одиниці і т.д.

Візьмемо будь-який елемент a_1 з множини X_1 , потім елемент a_2 з множини X_2 , елемент a_n з множини X_n . Вибрані елементи розмістимо по порядку: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ми одержимо упорядковану n -ку елементів вибраних з множин $X_1, X_2, \dots, X_n$, або «*кортеж*». Число n називають *довжиною кортежу*, а елементи $a_1, a_2, \dots, a_n$ – його *компонентами*, до того ж a_1 називають першою компонентою, a_2 - другою компонентою, a_n - n -ю компонентою.

Множини $X_1, X_2, \dots, X_n$ можуть мати спільні елементи, або збігатися одна з одною. Наприклад, слово «мама» можна розглядати як кортеж довжиною 4, складений з елементів множини $A = \{x \mid x - \text{буква алфавіту}\}$. Кожне речення також можна розглядати як кортеж, кожний елемент якого, у свою чергу, є кортеж. Наприклад, «сьогодні гарна погода» є кортеж довжиною 3.

У математиці прикладом кортежу може служити набір цифр, що входять у десятковий запис будь-якого числа. Цей кортеж складається з цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причому цифри можуть повторюватися, а при перестановці цифр можна одержати інше число. Отже, кортеж цифр числа 112231 має вигляд: $(1, 1, 2, 2, 3, 1)$.

Два кортежі $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ називають *рівними*, якщо вони мають однакову довжину, тобто $n=m$, і кожна компонента першого кортежу дорівнює компоненті другого кортежу з тим же номером. Наприклад, кортежі (a, b, c) і (a, b, c) - рівні, а кортежі (a, b, c) і (b, a, c) не рівні, також не рівні кортежі (a, b, c) і (a, b, c, d) .

У початковій школі поняття кортежу в явному вигляді не вводиться, але вживається, тому що з цим поняттям пов'язано розв'язання деяких завдань. Наприклад, учні розв'язують завдання: «Скількома цифрами записане число 1000001? Скільки серед них різних?» Відповіді на запитання такі: для запису числа 1000001 потрібно сім цифр; серед них лише дві різні 0 і 1. За цією відповіддю ми бачимо знайомі поняття кортежу і множини. Дійсно, число 1000001 – це кортеж цифр $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ довжиною 7. Кількість різних цифр числа - це множина цифр, за допомогою яких це число записано, тобто множина $\{1; 0\}$.

Розглянемо приклад. Використовуючи цифри 2, 0, 7, записати: а) три одноцифрові числа; б) чотири двоцифрових числа; в) одне шестицифрове число.

Розв'язання завдання зводиться до запису різних кортежів цифрами 2, 0, 7: а) довжини 1; б) довжини 2; в) довжини 6. До того ж, у випадках б) і в) не розглядаються кортежі, перша компонента яких є 0, тому що ні двоцифрове, ані шестицифрове число не можуть починатися з нуля.

Розв'язання: а) кортежі (2); (0); (7) - це числа 0, 2 і 7;

б) кортежі (2,0); (2,7); (7,2); (7,0) - це числа 20, 27, 72, 70 або числа: 20, 22, 72, 77 або числа: 22, 70, 27, 72 і т.д.

в) кортежі: (2, 7, 7, 7, 0, 2); (7, 7, 7, 7, 7, 7); (2, 0, 0, 0, 0, 0), тобто - це числа 277702, 777777, 200000 і т.д.

У шкільному курсі математики часто зустрічається кортеж довжини 2, котрий носить назву “*упорядкована пара*”. З поняттям пари учні зустрічаються при позначенні координат точки у прямокутній системі координат. Наприклад, точка на координатній площині задана двома числами $A(2; 3)$, де $x=2$; $y=3$.

Працюючи з десятковим записом чисел, де використовується позиційна система, учні спостерігають, як змінюється значення цифри у залежності від її місця у числі. Так, наприклад, $27 \neq 72$, $365 \neq 635$ і т.д. Вчителю початкових класів корисно знати, що в 9 класі у курсі геометрії учні стикаються з розкладанням вектора за координатами, в результаті чого одержують кортеж довжини 3.

Елементи декартового добутку двох скінченних множин зручно розташовувати у вигляді таблиці, де по вертикалі розміщують елементи множин X , а по горизонталі - елементи множини Y , а елементи множини $X \times Y$ записують на перетині відповідних рядків та стовпців (мал.21). Наприклад, у таблиці на мал.21 записані елементи декартового добутку множин $X=\{a, b, c\}$ і $Y=\{4, 5\}$.

Учитель стикається з табличним записом декартового добутку двох множин, коли заповнює класний журнал, складає графік чергування тощо.

$X \backslash Y$	4	5
a	(a, 4)	(a, 5)
b	(b, 4)	(b, 5)
c	(c, 4)	(c, 5)

мал.21

Використовуючи поняття кортежу, можна визначити поняття декартового добутку трьох, чотирьох та n-множин

Нехай задані n множин: $A_1, A_2, \dots, A_n$. З елементів цих множин утворимо кортежі довжини n, перша компонента яких належить множині A_1 , друга - множині $A_2, \dots$ n-а компонента – множині A_n . Множину таких кортежів називають **декартовим добутком** множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ і позначають $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Наприклад, декартів добуток множин $A_1 = \{1, 2\}; A_2 = \{3, 4\}, A_3 = \{5, 6, 7\}$ має вигляд: $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1,3,5); (1,2,6); (1,4,5); (1,4,6); (1,4,7); (2,3,5); (2,3,6); (2,3,7); (2,3,7); (2,4,5); (2,4,6); (2,4,7)\}$.

Декартів добуток множин має такі **властивості** (дистрибутивні закони):

$$1) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

$$2) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Учителю початкових класів важливо знати ці властивості, тому що за їх допомогою одержують правила множення числа на суму і суми на число (друга властивість).

Отже, якщо, розв'язуючи з учнями завдання, наприклад, таке: “З даних цифр скласти різні двоцифрові числа”, учитель акцентує увагу на місце, яке займає цифра у числі ($27 \neq 72$), то тим самим він здійснює у пропедевтичному плані підготовку учнів до сприйняття понять: метод координат, функція та її графік, вектор.

§4 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1. Поняття комбінаторної задачі

Комбінаторикою називається область математики, у якій розглядаються різні задачі, пов'язані з різноманітними комбінаціями, утвореними з заданих об'єктів і підпорядкованих певним умовам. Комбінаторні задачі, за своєю сутністю, вивчають скінченні множини, їх підмножини і кортежі, а також їх відображення. Тому комбінаторику включають в теорію скінченних множин.

Комбінаторика як розділ математики сформувалась у XVI столітті. У той час у житті привілейованих верхів суспільства значне місце займали азартні ігри - у карти, у кості, були поширені різноманітні лотереї. Спочатку комбінаторні задачі торкалися лише азартних ігор. Наприклад, скількома способами можна викинути дане число очок, кидаючи 2, 3 і т.д. костей, або скількома способами можна здати двох королів у картковій грі та т.ін. При цьому виникали цікаві задачі для

математиків, тим більше, що вже почала розвиватися теорія ймовірностей.

Теорію комбінаторних задач у XVII столітті займалися видатні французькі математики Б. Паскаль і П.Ферма, пізніше Я. Бернуллі, В. Лейбніц, Л. Ейлер. Сьогодні комбінаторні задачі розв'язуються для потреб транспорту, планування виробництва, реалізації продукції, розподілення прибутків, декодування шифрів, давніх мов та т.ін.

У шкільному курсі математики широко практикується розв'язування різноманітних комбінаторних задач. У початкових класах учні зустрічаються з найпростішими комбінаторними задачами. Однак, вчитель початкових класів повинен мати чітке уявлення про комбінаторику, основні її правила, розбиратися у різних видах і типах комбінаторних задач, тому що в них використовуються основні поняття теорії множин.

2. Правила суми і добутку

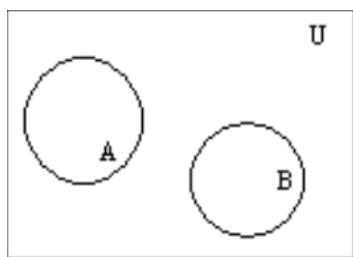
Розв'язання багатьох комбінаторних задач ґрунтується на двох простих правилах, які є загальними правилами комбінаторики і називаються правилами суми і добутку.

Для формулювання цих правил використовуються такі поняття теорії множин, як потужність множини. **Потужністю скінченної множини** A називається численність множини A або, іншими словами, кількість елементів цієї множини і позначають як $m(A)$, де A - задана множина.

А) Правило суми дозволяє розв'язувати комбінаторні задачі, в яких потрібно знайти число елементів в об'єднанні скінченних множин.

Оскільки множини можуть перетинатися між собою (тобто мати спільні елементи) і не перетинатися між собою (не мати спільних елементів), то студенти мають познайомитися з двома типами комбінаторних задач: задачі на знаходження кількості елементів у об'єднанні множин, що не перетинаються та на знаходження числа елементів у об'єднанні множин, які перетинаються.

Розглянемо перший тип задач.



мал.22

Якщо множина A містить a елементів, а множина B містить b елементів, і ці множини не перетинаються (мал.22), то об'єднання $A \cup B$ містить $a+b$ елементів:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) = a + b \quad (1)$$

Це твердження в комбінаториці називають **правилом суми без перетину**. Воно є справедливим

для будь-якої кількості множин, що не перетинаються і беруть участь у об'єднанні.

Розглянемо використання цього правила на конкретному прикладі.

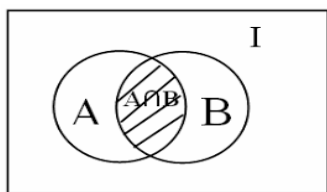
Задача 1. Студенту запропонували вибрати тему дипломної роботи. Скільки варіантів вибору теми у нього є, якщо запропоновано 5 тем з педагогіки, 3 - з математики і 2-з психології?

Розв'язання. Вибір теми з педагогіки можна здійснити 5 способами, тобто $m(P)=5$, вибір теми з математики можна здійснити 3 способами, тобто $m(M)=3$, а вибір теми з психології - 2 способами, тобто $m(R)=2$. Загальна кількість варіантів теми дипломної роботи буде дорівнювати сумі варіантів з кожного предмета, тобто

$$m(P \cup M \cup R) = m(P) + m(M) + m(R) = 5 + 3 + 2 = 10.$$

Розглянемо другий тип задач, при розв'язуванні яких використовується правило суми.

Розглянемо об'єднання двох множин A і B , що перетинаються (мал.23). Згадаємо, що, за означенням операції об'єднання, в нову



множину $C=A \cup B$ спільні для множини A і B елементи входять лише один раз, тоді як при додаванні елементів множин A і B вони входять в суму двічі. Тому при підрахунку кількості елементів множин, що перетинаються, з загальної

мал.23 суми кількості елементів кожної множин $m(A)$ і $m(B)$ потрібно відняти кількість елементів перерізу $m(A \cap B)$.

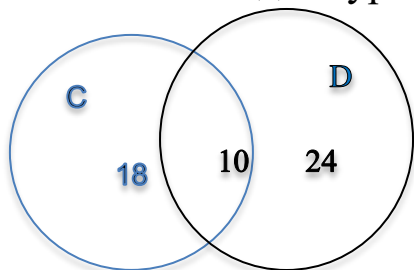
Кількість елементів об'єднання двох множин, що перетинаються, дорівнює сумі кількості елементів у кожній з них, зменшеній на кількість елементів перерізу цих множин:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) \quad (2)$$

Це твердження носить назву **правила суми для двох множин**.

Розглянемо використання цього правила на прикладі.

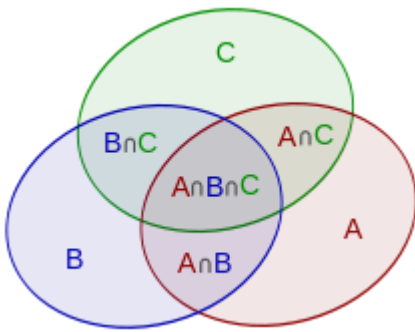
Задача 2. Скільки учнів у класі, якщо всі учні записалися до двох гуртків: до драматичного - 18, до спортивного - 24, причому 10 учнів записалися в обидва гуртки?



Розв'язання. Оскільки 10 учнів відвідують два гуртки, то при обчисленні кількості учнів у спортивному і драматичному гуртках їх порахували двічі (мал.24). Кількість учнів у класі $m(K)=m(C \cup D)$ буде дорівнювати сумі учнів,

що займаються у кожному з гуртків, зменшеній на кількість учнів, що відвідують обидва гуртки. Якщо в драматичному гуртку займається 18 учнів ($m(D)=18$), у спортивному гуртку – 24 учня ($m(C)=24$), а в обох гуртках займається 10 учнів ($m(C \cap D)=10$), то $m(K)=m(C \cup D)=m(C)+m(D)-m(C \cap D)=24+18-10=32$ (учня).

Відповідь: 32 учня в класі.



мал.25

Правило суми виконується й для більшої кількості множин, які перетинаються. Наприклад, **правило суми для трьох множин:**

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) \quad (3)$$

Справедливість формули підтверджується за допомогою кругів Ейлера-Венна (мал.25).

Потрібно відмітити, що на практиці зустрічаються задачі, в яких використовується обидва правила. Так, наприклад, розглянемо таку задачу.

Задача 3. Скільки учнів у класі, якщо спортивний гурток відвідує 15 учнів, драматичний - 18, обидва гуртки - 7 учнів, а 10 учнів ні в одному з них не беруть участі ?

Розв'язання. Загальна кількість учнів складається з двох множин, що не перетинаються: множини учнів, що відвідує гуртки $C \cup D$, і множини учнів, що не відвідують гуртки R . Кількість учнів останньої множини відома з умови задачі $m(R)=10$, а кількість учнів, що відвідує гуртки, потрібно знайти, використовуючи правило суми, як було показано у задачі 2: $m(C \cup D)=m(C)+m(D)-m(C \cap D)=15+18-7=26$ (учнів).

Після знаходження $m(C \cup D)$ задача зводиться до першого типу комбінаторних задач: $m(K)=m(C \cup D \cup R)=m(C \cup D)+m(R)=26+10=36$ (учнів).

Відповідь: 36 учнів в класі.

Б) Правило добутку дозволяє розв'язувати комбінаторні задачі, в яких потрібно знайти число елементів декартового добутку. При розв'язанні такого класу комбінаторних задач виділяють задачі двох типів. В задачах першого типу вибір наступних компонент в кортежах декартового добутку не залежить від зробленого вибору попередніх компонент.

При створенні комбінацій з двох елементів на заданих множинах X і Y діє **правило добутку**: якщо відомо, що перший елемент кортежу можна вибрати k -способами, а другий p -способами, то пару елементів

можна вибрати $k \cdot p$ способами, причому вибір другого елемента не залежить від вибору першого, тобто число способів вибору кожного елемента дорівнює кількості елементів у множині.

За цим правилом кількість упорядкованих пар, які можна скласти з елементів множини X ($m(X)=k$) і елементів множини Y ($m(Y)=p$), дорівнює $k \cdot p$, тобто дорівнює добутку потужності множини X на потужність множини Y : $m(X \times Y) = m(X) \cdot m(Y) = k \cdot p$ (4)

Справедливе й більш загальне твердження для множин:

$$m(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) = m(X_1) \cdot m(X_2) \cdot \dots \cdot m(X_n) \quad (5)$$

Студенти мають звернути увагу, що за допомогою правил (4) і (5) розв'язуються комбінаторні задачі, в яких вибір числа елементів множини X_i не залежить від вибору елементів в інших множинах X_n ($i \neq n$).

Задача 4. Скільки двоцифрових чисел можна утворити, якщо першу цифру вибирати з множини $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а другу з множини $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Розв'язання. Оскільки у множині X дев'ять елементів, то першу цифру числа можна вибрати дев'ятьма способами, а в множині Y - десять елементів, то другу цифру можна вибрати - десятьма способами. Всього двоцифрових чисел буде: $m(X \times Y) = m(X) \cdot m(Y) = 9 \cdot 10 = 90$ (чисел).

Відповідь: 90 чисел.

Розглянемо більш складну задачу.

Іноді зустрічаються задачі на знаходження елементів декартового добутку, але при цьому вибір попереднього компонента кортежу обмежує число варіантів вибору наступного компонента. Тоді використовується **загальне правило добутку**. Воно стверджує, що упорядковану пару елементів $\langle x, y \rangle$ можна обрати $k \cdot p$ способами, але при цьому k - число способів вибору компонента x , а p - число способів вибору компонента y після того, як x вже вибрано.

Застосуємо це правило для розв'язання задач.

Задача 5. Скільки можна утворити двоцифрових чисел, без повторення у них цифр, якщо першу цифру вибирати з множини $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а другу – з множини $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Розв'язання. Першу цифру можна вибирати 9-ма способами, вибір другої цифри за умовою обмежується вибором першої, для неї кількість варіантів вибору буде на одиницю менше, ніж кількість елементів у множині Y , тобто ми будемо її обирати з 8-ми елементів множини

(відкинули з множини B цифру, яка повторюється). Усього двоцифрових чисел без повторень цифр буде:

$$m(X) \cdot (m(Y) - 1) = 9 \cdot (9-1) = 9 \cdot 8 = 72$$

3. Види комбінаторних задач

Розміщення

До розміщень належить великий клас комбінаторних задач, які пов'язані із знаходженням числа кортежів довжини k , що складаються з елементів n -елементної множини X .

а) Розглянемо випадок, коли в умові задачі зазначено, що в кортежі допустимі компоненти, які повторюються. Розв'язання такого типу задач тотожний тому, що ми будемо шукати число кортежів у декартовому добутку виду:

$$X \times X \times \dots \times X = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_k \in X\}$$

За правилом добутку число елементів такого декартового добутку дорівнює: $m(X \times X \times \dots \times X) = m(X) \cdot m(X) \cdot \dots \cdot m(X) = n^k$, де $m(X) = n$, $n > k$.

У комбінаториці прийнято кортеж довжини k , складений з елементів n -елементної множини X , називати розміщенням з повтореннями з n елементів по k елементів, а число таких кортежів позначати $\overline{A}_n^k$:

$$\overline{A}_n^k = n^k \quad (6)$$

Задача 6. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр, які складають множину $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Розв'язання. Чотирицифрове число уявляє собою кортеж довжиною 4. І розв'язання задачі зводиться до знаходження числа таких кортежів, складених з будь-яких 9-ти цифр від 1 до 9, причому повторення цифр допускається.

За формулою: $\overline{A}_n^k = \overline{A}_9^4 = 9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$

Відповідь: 6561 чисел.

б) Розглянемо випадок, коли в умові задачі вказано, що всі компоненти кортежу повинні бути різними і повторення не допускається.

Знаходження числа кортежів довжини k , утворених з k -елементів n -елементної множини X , з обмеженнями з вибору елементів виконується за загальним правилом добутку:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad (7)$$

тобто число розміщень без повторень дорівнює добутку k послідовних натуральних множників, найбільший з яких є n .

Якщо пригадати **поняття упорядкованої множини** як множини, елементи якої закріплені на певних місцях та пронумеровані, то очевидно, що упорядкована множина і кортеж без повторень – це одне і те ж. Скористаємося цим і будемо називати розміщенням без повторень з n елементів по k елементів упорядковані k -елементні множини, які складені з елементів n -елементної множини X , а число їх будемо позначати так: A_n^k

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad (8)$$

Цю формулу можна переписати по-іншому, якщо розділити і помножити її ліву частину на добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)$:

$$A_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k) \dots 321}{123 \dots (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (9)$$

Відомо, що добуток перших n натуральних чисел в математиці називають ***n*-факторіалом** і позначають $n!$

Задача 7. У змаганні беруть участь 15 команд. Скільки існує способів розподілення 3 призових місць між командами?

Розв'язання. На перше місце претендують всі 15 команд. Якщо I місце зайнято, то на II залишається 14 претендентів. Після розподілення II місця на III залишається 13 претендентів. Тобто число кортежів довжини 3, де вибір компоненти залежить від вибору попередньої, можна знайти за загальним правилом добутку (7) або (8):

$$A_n^k = A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730.$$

Або число розміщень без повторень з 15 елементів по 3 елемента можна одержати, скориставшись формулою (9):

$$A_n^k = A_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$$

Переставлення

Розглянемо ще один великий клас комбінаторних задач, в яких визначається, скільки варіантів упорядкованих n -елементних множин або кортежів довжини n можна скласти із заданих n елементів.

а) Розглянемо випадок, коли у задачах цього класу вказано, що серед заданих n елементів немає повторень.

В комбінаториці ***переставленням з n елементів без повторень*** називають упорядковану n -елементну множину або кортеж довжиною n , в якому немає елементів, що повторюються. Загальне число переставлень без повторень, які можна скласти із заданих елементів, позначають символом P_n .

Очевидно, що перестановка з n елементів є розміщення з n елементів по n елементів:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

або, користуючись поняттям факторіала: $P_n = n!$ (10)

Тому в комбінаторних задачах зазначеного класу число варіантів упорядкованих n -елементних множин, які можна скласти із заданих n елементів, серед яких немає повторень, визначається як переставлення з n елементів без повторень за формулою (10).

Наведемо приклад.

Задача 8. Скільки переставлень можна зробити з букв слова “вчитель”?

Розв’язання. Букви у слові “вчитель” утворюють набір з 7 елементів, серед яких немає повторень. Тому число кортежів довжини 7 можна знайти за формулою (10): $P_n = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

б) Розглянемо випадок, коли з умови комбінаторної задачі випливає, що серед набору заданих n елементів є повторення, тобто, що $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, де n_1 - число однакових елементів першого роду, n_2 - число однакових елементів другого роду і т.д. Наприклад, хоровод дівчат в однакових спідницях: n_1 - число дівчат у червоних спідницях, n_2 - число дівчат в жовтих спідницях і т.д.

Загальна кількість переставлень $P_n = n! = (n_1 + n_2 + \dots + n_k)!$ Але оскільки у наборі є однакові елементи, то їх переставлення між собою не будуть вносити у кортежі зміни. Переставляючи між собою елементи першого роду, число яких n_1 , ми одержимо $n_1!$ однакових кортежів, другого роду - $n_2!$ і т.д. Із загальної кількості кортежів з повтореннями потрібно виключити однакові, число яких $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ Позначивши **число переставлень з повтореннями** символом $\overline{P}_n$, одержимо:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (11)$$

Розглянемо таку задачу.

Задача 9. Скільки різних кольорових комбінацій можна утворити, якщо на сцені знаходяться дівчатка, серед яких 3 в червоних спідницях, 2 - в жовтих, 2 - в зелених?

Розв’язання. Заданий набір з 7 елементів, серед яких є повторення. Застосуємо формулу (11) і знайдемо кількість переставлень з повтореннями:

$$\overline{P}_7 = \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{1234567}{1231212} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210.$$

Комбінації

Розглянемо ще один клас комбінаторних задач, в яких визначається, скільки підмножин, що містять по k елементів кожна, можна скласти з n елементів даної множини X .

Такі неупорядковані підмножини називають **комбінаціями без повторень** з n елементів по k , а їх число назначають C_n^k

Знайдемо число таких підмножин. Якщо задана n -елементна множина X , то число всіляких упорядкованих k -елементних підмножин задається розміщеннями без повторень: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Але, з іншого боку, якщо ми маємо C_n^k неупорядкованих k -елементних множин, кожна з яких можна упорядкувати $k!$ способами, число яких дорівнює числу переставлень $P_k = k!$, то добуток $C_n^k \cdot P_k$ й дасть нам число всіляких упорядкованих k -елементних множин, тобто число розміщень A_n^k . Отже,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k \Leftrightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (12)$$

Комбінацій з повторенням не існує, тому що комбінація, за означенням, являє собою неупорядковану множину, наявність в якій повторень не допускається.

Задача 10. Потрібно вибрати журі з 5 чоловік. Скільки різних складів журі можна запропонувати, якщо є 10 кандидатур?

Розв'язання. З 10-елементної множини потрібно скласти 5-елементні підмножини, причому порядок елементів усередині кожної підмножини не має значення. Отже, потрібно визначити число комбінацій C_{10}^5 за формулою (12): $C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!5!} = 252$

Розділ II. МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ ТА ЇХ СТРУКТУРА

§1. МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ

Будь-яке міркування уявляє собою ланцюжок речень, що впливають одне з одного за певними правилами. Вміти міркувати повинна кожна людина. Будь-яка дисципліна, що вивчається у школі, спирається на логіку міркувань. Тому вчитель повинен вчити дітей розмірковувати з першого дня перебування їх у школі.

Якщо розглядати математичні поняття, то не зважаючи на свою абстрактність, вони відображають властивості і закономірності навколишнього світу. Для того, щоб вчитель початкових класів зміг правильно формувати математичні уявлення і поняття, він повинен знати, що поняття про предмет або про деякий факт у нашій свідомості формується в результаті узагальнення предметів, явищ, фактів, що сприймаються. Тому на першому етапі ознайомлення з будь-яким поняттям спочатку потрібно за допомогою досить великої кількості предметів сформувані у учнів відповідне *уявлення*. Потім, під час виявлення і підкреслення суттєвих ознак і властивостей реальних предметів, відбувається у свідомості дітей об'єднання окремих предметів, явищ, фактів у класи та формування відповідних понять. Наприклад, давати молоко є необхідною ознакою, без якої немає поняття “корова”, але якою володіють й інші тварини. Тому потрібно виділити таку ознаку, за допомогою якої це поняття відрізняється від інших (достатня ознака). *Поняття* відображає загальні та суттєві ознаки реальних предметів, тобто такі ознаки, які є необхідною належністю предметів певного роду і відрізняють їх від предметів іншого роду.

Поняття розкривається через його об'єм і зміст.

Об'єм поняття - це та множина елементів, яка підпорядкована даному поняттю.

Зміст поняття розкривається в означенні, в якому вказується за допомогою переліку ознаки цього поняття. Але спосіб визначення предмета за допомогою переліку всіх його ознак складний, а інколи і неможливий, тому що певний предмет може мати багато ознак. Тому застосовується такий спосіб: означуване поняття підводиться під інше, більш загальне, якому дане поняття підпорядковане, потім вказуються ті ознаки, які характерні тільки для означуваного поняття. Такий спосіб визначення поняття називається *означення через найближчий рід та*

видову відмінність. При цьому потрібно мати на увазі, що означення повинне включати незалежні одна від одної ознаки. Наприклад, в означенні паралелограма як чотирикутника з попарно паралельними сторонами “чотирикутник” - це найближчий рід, “сторони попарно паралельні” - це видова відмінність від інших чотирикутників. Крім того, паралелограм має й інші характеристичні властивості, які можна довести: протилежні сторони рівні, діагоналі в точці перетину діляться навпіл, діагональ розділяє на два рівних трикутники та інші.

Отже, при визначенні будь-яких понять фактично має місце операція розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються. Тому, формуючи в учнів поняття, потрібно чітко стежити за дотриманням усіх трьох умов розбиття, інакше поняття може бути сформоване неправильно.

Щоб дати певному поняттю означення, треба спочатку вказати множину, елементи якої мають родові властивості, а потім перелічити властивості, за допомогою яких ця множина розбивається на підмножини, що попарно не перетинаються. Так, наприклад, розглянемо *означення кореня рівняння*. Коренем рівняння називають ті значення змінної з області визначення рівняння, при яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність. Тут область визначення даного рівняння розбивається на дві підмножини, що не перетинаються. Одна з них складається з чисел, при яких рівняння перетворюється в правильну числову рівність, а друга складається з чисел, при яких рівняння перетворюється в хибну числову рівність.

При логічній побудові будь-якої математичної дисципліни завжди вводяться деякі поняття, яким не надається безпосередніх означень. Такі поняття називаються *основними*. Наприклад, при визначенні паралельних прямих ми користуємося такими поняттями, як точка, пряма, площа. Якщо у математиці такі поняття вводяться формально, то в шкільному курсі математики вчитель повинен обов'язково використовувати конкретні об'єкти, які викликали би в учнів відповідні уявлення. Наприклад, абстрактне поняття про натуральне число 2 можна сформулювати, розглядаючи з дітьми різні двоелементні множини (два олівця, дві іграшки, дві груші тощо), після чого запитати: “А що ж є однаковим у цих різних множинах?”

Особливо обережно потрібно підходити до формування у початкових класах геометричних уявлень. Так, наприклад, в одній із шкіл вчителька, щоб продемонструвати коло, вирізала з круга кільце шириною 1 см. Тим самим в учнів сформувалось хибне уявлення про

те, що геометричні лінії мають товщину. Це уявлення може надовго загальмувати розуміння учнями курсу геометрії.

Не можна забувати і про те, що в початкових класах в основному формуються уявлення про найважливіші математичні поняття, які у старших класах будуть визначені. Наприклад, поняття про алгебраїчну операцію, про функцію, про рівняння і нерівність та їх розв'язки, про геометричні фігури, про величини тощо.

При вивченні будь-якої математичної дисципліни весь її зміст приводиться у чітку логічну систему. Будь-який факт потребує доведення, тобто повинен бути виведений на основі правил і законів логіки з інших вже відомих знань.

Математичне твердження, правильність якого потребує доведення, називають **теоремою**. Доведення будь-якої теореми спирається на раніше доведені теореми і означення. Очевидно, що в основу повинні бути покладені деякі твердження, що приймаються без доведення. Вони називаються **аксіомами**, і в них говориться про властивості основних понять, про співвідношення між ними. Наприклад, в аксіомі “На площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше, ніж одну пряму, паралельну даній”, говориться про одну з властивостей прямої і точки.

До сукупності всіх аксіом, що лежить в основі будь-якої науки, висуваються певні вимоги: несуперечливість, незалежність, повнота. Майбутній вчитель повинен розуміти, що у шкільному курсі математики всі ці вимоги виконати не можна, тому що їх виконання приведе до його формалізації. Тому, чітко дотримуючись вимоги несуперечливості системи аксіом шкільному курсу геометрії, всі автори підручників (А.П. Кисильов, А.Н. Колмогоров, А.В. Погорєлов та ін.), порушують дві інші вимоги.

У будь-якій теоремі можна виділити три частини: пояснювальну, умову і висновок. Наприклад, в теоремі про властивості кутів рівнобедреного трикутника «Якщо трикутник рівнобедрений, то кути при основі рівні» пояснювальна частина – трикутник (про які фігури, явища, факти, предмети іде мова); умова – рівнобедрений трикутник (що дано); висновок – кути при основі рівні (що потрібно довести).

§2. ВИСЛОВЛЕННЯ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Знайомство з мовою математичної логіки та деякими її методами допоможе студенту набути навичок правильних міркувань і чітких

формулювань, вміння доводити теореми та знаходити помилки в міркуваннях, виробити загальний підхід при розв'язанні різних рівнянь та нерівностей.

Поняття “висловлення” - первісне. Під **висловленням** розуміють стверджувальне речення, яке містить певну інформацію про щось і відносно якого можна сказати: істинне воно чи хибне.

Наведемо декілька прикладів.

1. Речення “Математика – найцікавіший предмет” не є висловленням, тому що не має загальної думки про його істинність або хибність.

2. “ $a \cdot b = 8$ ” не є висловленням тому, що не зазначено, яке число позначено буквою a , а яке – буквою b .

3. “Київ - столиця України” - істинне висловлення.

4. “ $2 > 5$ ” - хибне висловлення.

Позначають висловлення великими латинськими буквами. Наприклад, висловлення A : “Дніпро впадає в Чорне море”

У звичайній мові з простих речень за допомогою різних сполучників “і”, “але”, “щоб”, “тому що”, “якщо”, “або” утворюються складні речення. Якщо всі ці сполучення проаналізувати, то їх можна поділити на 5 груп. Таким чином, існує 5 операцій над висловленнями. Розглянемо їх.

1. Заперечення висловлення

(утворюється за допомогою частки “не”, “ні”, сполучення “не можна”).

Ця операція позначається горизонтальною рисою, що ставиться над висловленням: $\bar{A}$. Наприклад, для висловлення A : “Мені два роки” запереченням висловлення A буде висловлення $\bar{A}$: “Мені не два роки”.

Очевидно, якщо висловлення A істинне, то його заперечення $\bar{A}$ хибне і навпаки. Це твердження можна записати у вигляді **таблиці істинності**:

Властивості заперечення висловлення

1) $A \equiv A$ – закон тотожності

2) $\bar{\bar{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.

Наприклад, A : «Іде дощ»

$\bar{A}$: «Не вірно, що не іде дощ», «іде дощ»

Цей закон можна довести за допомогою таблиці істинності висловлення:

A	$\bar{A}$
і	х
х	і

A	$\bar{A}$	$\overline{\bar{A}}$
i	x	i
x	i	x

2. Кон'юнкція висловлень $A \wedge B$.

(утворюється за допомогою сполучення “і”)

Кон'юнкцією двох висловлень A і B називається таке складене висловлення $A \wedge B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення істинні, тобто:

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	x	x
x	i	x
x	x	x

Розглянемо два висловлення. A : “У паралелограмі протилежні сторони паралельні” та B : “У паралелограмі протилежні сторони рівні”. Їх кон'юнкція $A \wedge B$: “У паралелограмі протилежні сторони паралельні і рівні” істинна тільки тоді, коли обидва висловлення істинні, тобто виконуються одночасно.

Зміст цієї операції можна формувати у початкових класах при підкреслюванні необхідності виконання двох і більше властивостей. Наприклад, для життя рослин необхідно три умови: сонце, повітря і вода. Для прямокутника - наявність чотирьох прямих кутів.

Подвійна числова нерівність – це кон'юнкція двох висловлень. Наприклад, $3 < 8 < 11$ - істинна подвійна нерівність, тому що елементарні висловлення, з яких складається дане складене висловлення істинні: A : “ $3 < 8$ ” - і, B : “ $8 < 11$ ” - і

Властивості кон'юнкції висловлень

- 1) комутативний (переставний) закон: $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- 2) асоціативний (сполучний) закон: $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
- 3) закон несуперечності: $A \wedge \bar{A} \equiv 0$ (тотожньо хибна формула).

Висловлення не може бути одночасно істинним і хибним. Доведемо це за допомогою таблиці істинності:

A	$\bar{A}$	$A \wedge \bar{A}$
i	x	x
x	i	x

3. Диз'юнкція висловлень $A \vee B$.

(утворюється за допомогою сполучення “або”).

Диз'юнкцією двох висловлень A і B називається таке складене висловлення $A \vee B$, яке істинне тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з висловлень A або B істинне, тобто:

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	x	i
x	i	i
x	x	x

З висловленнями A : “цього літа я буду відпочивати в Єгипті” та B : “цього літа я буду відпочивати на дачі” складемо їх диз'юнкцію $A \vee B$: “цього літа я буду відпочивати в Єгипті або на дачі”. Вона істинна тоді, коли істинне хоча б одне з висловлень A або B .

У звичайному житті сполучення «або» застосовується у різних значеннях: з'єднувальному та у роз'єднувальному. У з'єднувальному сенсі сполучення «або» застосовується для утворення диз'юнкції висловлень. З цієї точки зору нестрога нерівність “ $2 \leq 5$ ” є диз'юнкцією двох елементарних висловлень A : “ $2 < 5$ ” або B : “ $4 = 5$ ”. Висловлення “ $2 \leq 5$ ” істинне, тому що істинним є висловлення: A : “ $2 < 5$ ”.

У роз'єднувальному сенсі сполучення «або» використовується, коли складне висловлення вважається істинним, коли істинне тільки одне висловлення, що до нього входить («або..або...», «чи то..., чи то...»).

Примітка. У розмовній мові в складні речення об'єднуються такі прості речення, які пов'язані між собою змістом. У математиці виконання такої умови не обов'язкове. Так, наприклад, про людину, яка у мовленні порушує мову, говорять: “На городі бузина, а в Києві дядько”. З точки зору мови – це нісенітниця, а в математичній логіці -

це істинне висловлення, тому що одне з тверджень може бути істинним: або в городі росте бузина, або в Києві живе дядько (диз'юнкція).

Відома зі школи нестрога числова нерівність – це диз'юнкція двох висловлень. Наприклад, $2 \geq 7$ - істинна нестрога нерівність, оскільки $A: "12 > 7"$ - і, $B: "12 = 7"$ - х.

Властивості диз'юнкції висловлень

1) комутативний (переставний) закон: $A \vee B \equiv B \vee A$

2) асоціативний (сполучний) закон: $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

3) закон виключення третього («третього не дано»): $A \vee \bar{A} \equiv 1$ (тотожно істинна формула). Доведемо її за допомогою таблиці істинності:

A	$\bar{A}$	$A \vee \bar{A}$
і	х	і
х	і	і

4) Закони де Моргана: $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$; $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

5) Дистрибутивний закон: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;
 $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

4. Імплікація висловлень $A \Rightarrow B$.

(утворюється за допомогою сполучень “якщо, то.....”)

Імплікацією двох висловлень A і B називається висловлення $A \Rightarrow B$, яка буде хибним тоді і тільки тоді, коли перше висловлення істинне, а друге хибне:

A	B	$A \Rightarrow B$
і	і	і
і	х	х
х	і	і
х	х	і

Це найпідступніша операція, тому що її зміст часто розходиться з життєвим змістом. Висловлення A є посиленням (умовою) для наслідку - висловлення B (висновок). З шкільного курсу математики відомо, що висловлення виду “якщо A , то B ” є теоремою, яку потрібно довести. Якщо учень зміг її довести, то це перший порядок таблиці, а не зміг - другий.

Математичний зміст імплікації висловлень значно глибший. Розглянемо приклади імплікацій.

1. Директор видав наказ: “Якщо робітники перевиконають план, вони одержать премію” ($i \Rightarrow i$). Але якщо робітники не виконають план, то їм можуть дати премію (за щось інше) - $x \Rightarrow i$ (третій рядок таблиці), а можуть і не дати премії - $x \Rightarrow x$ (четвертий рядок таблиці). У всіх випадках з робітниками вчинять справедливо. І лише в одному випадку – якщо робітники перевиконають план, а премію вони не одержать – $i \Rightarrow x$ - буде порушено наказ директора.

2. “Якщо кожний доданок ділиться на 3, то сума ділиться на 3.” Але відомі випадки, коли кожний доданок не ділиться на 3, а сума ділиться на 3 (наприклад, $5+4=9$) або не ділиться на 3 (наприклад, $7+4=11$).

3. “Якщо багатокутник правильний, то навколо нього можна описати коло”. Але навколо будь-якого трикутника можна описати коло, а навколо ромба не можна описати коло.

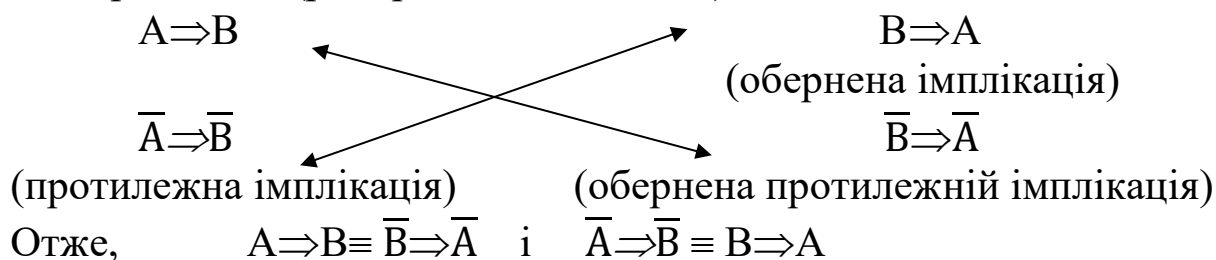
Отже, при імплікації умова і висновок не завжди пов'язані між собою за змістом.

Властивості імплікації висловлень

На властивостях імплікації будуються усі умовиводи, що дозволяють виводити одні твердження з інших та складають сутність будь-якого логічного міркування.

1) закон тотожності: $A \Rightarrow A$ («якщо A , то A ») – «Якщо Земля обертається, то вона обертається».

2) імплікація не має властивості симетричності, тобто, з імплікації $A \Rightarrow B$ не завжди слідує істинність імплікації $B \Rightarrow A$. Для імплікації діє закон контрапозиції (рокировка висловлень):



5. Еквіваленція висловлень $A \Leftrightarrow B$.

(утворюється за допомогою сполучень “..... тільки тоді, коли.....”).

Еквіваленцією висловлень A і B називається таке висловлення $A \Leftrightarrow B$, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення будуть істинні або хибні:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
i	i	i
i	x	x
x	i	x
x	x	i

Розглянемо два висловлення A : “Я не спізнюсь на роботу” і B : “Поїду на таксі”. Їх еквіваленція $A \Leftrightarrow B$: “Я не спізнюся на роботу тільки тоді, коли поїду на таксі” - істинна тоді, коли обидва висловлення істинні або хибні (“Я спізнюся на роботу тільки тоді, коли не поїду на таксі”). Тобто зміст сполучення “ A тільки тоді, коли B ” є взаємозамінність висловлень одне одним.

§3. ПРЕДИКАТИ ТА МНОЖИНИ ЇХ ІСТИННОСТІ

Розглянемо декілька висловлень і визначимо їх істинність:

“1 є просте число” - x,

“2 є просте число”- i,

“3 є просте число”- i,

“4 є просте число”- x і т.д.

В усіх цих висловленнях мова йде про властивість чисел “бути простим числом”. Всі ці висловлення можна замінити реченням зі змінною “x є просте число”. Це речення не буде висловленням тому, що про нього не можна сказати істинне воно, чи хибне. Його називають висловлювальною формулою, або предикатом. Наприклад, речення “Поет x написав поему “Руслан та Людмила”, “ $x + y = 3$ ”, “Число a ділиться на 3” – це предикати тому, що після підстановки замість x прізвища поета, або замість x і y , замість змінної a будь-яких чисел, дістанемо істинне або хибне висловлення.

Отже, якщо стверджувальне речення містить хоча б одну змінну і перетворюється у висловлення при підстановці замість змінних їх значень, то його називають **предикатом** або логічною функцією.

У залежності від кількості змінних, що входять до твердження, відрізняють одномісні, двомісні, тримісні і т.д. предикати, які позначають відповідно так: $A(x)$, $B(x,y)$, $C(x,y,z)$ і т.д. Наприклад, $x < 5$ – одномісний предикат, а $x + y = 5$ – двомісний предикат.

Якщо розглядати рівняння і нерівності як предикати, то виникає необхідність у введенні термінів “область визначення предиката” і “множина істинності предиката”.

Розглянемо рівняння $x+3=7$. В нього замість x можна підставити будь-яке дійсне число, але лише при $x=4$ воно перетворюється в істинне висловлення.

Таким чином, під **областю визначення предиката** ми будемо розуміти множину, елементи якої можна підставити у предикат, а під **множиною істинності предиката** - підмножину цієї множини, елементи якої при підстановці у предикат перетворюють його в істинне висловлення.

Таким чином, між областю визначення предиката та двоелементною множиною $\{i, x\}$ встановлюється функціональне відношення: кожному елементу з області визначення відповідає не більше одного елемента з множини $\{i, x\}$. Тому можна дати інше означення предиката: предикатом називається **логічна функція** однієї або декількох змінних.

Звернемо увагу на те, що коли діти у 1 класі шляхом добору знаходять число, яке потрібно підставити у віконце у запису $\square + 3 = 7$, то тим самим у них формується уявлення про рівняння як предикат, про його область визначення та множину істинності. Ці уявлення розвиваються від класу до класу і в 7 класі вводиться поняття “рівняння”, “область визначення”, “корені рівняння”, які широко використовуються до 11 класу включно.

Однією з поважних причин недостатніх навичок у випускників шкіл у розв'язанні різних рівнянь та нерівностей є те, що в них не виробляється загальний підхід до виконання тотожних перетворень, що існує багато окремих прийомів і способів, на яких і будується в основному шкільне навчання.

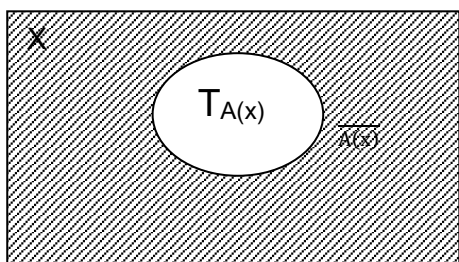
Елементи математичної логіки, зокрема, операції над предикатами, дають змогу здійснити загальний підхід у навчанні розв'язувати рівняння та нерівності. Як й у будь-якій мові за допомогою різних сполучень і зв'язок можна з простих речень утворювати складні. Так з різних висловлень (предикатів) за допомогою сентенційних зв'язок можна одержати складні висловлення (предикати). З цією метою виділяють п'ять зв'язок: «ні» або «не», «або», «якщо..., то...», «...тільки тоді, коли...».

Через те, що висловлення - це частковий випадок предиката, то над предикатами виконуються ті самі операції, що й над висловленнями, їх зміст і таблиці істинності не змінюються.

1. Заперечення предиката $\overline{A(x)}$

Позначимо предикат $A(x)$, тоді його заперечення буде: $\overline{A(x)}$. Якщо $A(x)$ - істинне, то $\overline{A(x)}$ - хибне і навпаки.

Нехай на множині X заданий предикат $A(x)$. Якщо позначити область істинності предиката $A(x)$ як $T_{A(x)}$, а область істинності предиката $\overline{A(x)}$ як $T_{\overline{A(x)}}$ то за діаграмою Ейлера-Венна (мал.26) можна



Мал.26

знайти $T_{\overline{A(x)}}$ як доповнення множини істинності предиката $A(x)$ до універсальної множини X :

$$T_{\overline{A(x)}} = (T_{A(x)})'_x$$

Приклад. На множині $X = \{10, 15, 20, 25, 30\}$ заданий предикат $A(x)$: «число x закінчується

5». Знайти множину істинності заперечення цього предиката.

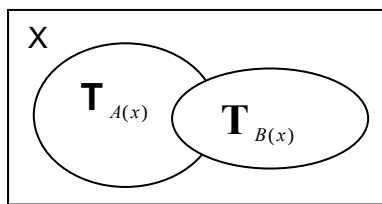
Розв'язання: Сформулюємо заперечення даного предиката:

$\overline{A(x)}$: «число x **не** закінчується 5». Тож, $T_{\overline{A(x)}} = \{10, 20, 30\}$.

Відповідь: $\{10, 20, 30\}$.

2. Кон'юнкція предикатів $A(x) \wedge B(x)$

На множині X (область визначення) задані предикати $A(x)$ і $B(x)$.



мал.27

Їх кон'юнкція - це виконання обох предикатів одночасно (мал.27). Тож, при кон'юнкції предикатів $A(x) \wedge B(x)$ їхні області істинності перетинаються:

$$T_{A(x) \wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)}$$

Приклад. На множині $X = \{10, 15, 16, 18, 20, 35\}$ задані предикати $A(x)$: «число x - парне» і $B(x)$: «число x - ділиться на 5». Знайти множину істинності кон'юнкції цих предикатів $A(x) \wedge B(x)$.

Розв'язання: Сформулюємо кон'юнкцію предикатів $A(x) \wedge B(x)$: «число x парне і ділиться на 5». Тож, $T_{A(x) \wedge B(x)} = \{10, 20\}$.

Інший спосіб розв'язання завдання - скористатися формулою:

$$T_{A(x) \wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)}$$

Для цього спочатку потрібно знайти множину істинності кожного з заданих предикатів, а потім виконати над ними операцію перерізу множин $T_{A(x)}$ і $T_{B(x)}$.

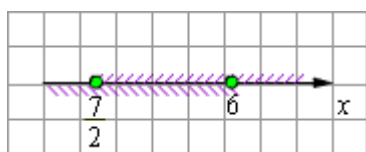
$$T_{A(x)} = \{10, 16, 18, 20\}$$

$$T_{B(x)} = \{10, 15, 20, 35\}$$

$$T_{A(x) \wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)} = \{10, 20\}.$$

Відповідь: $\{10, 20\}$.

З кон'юнкцією предикатів маємо справу при розв'язанні систем рівнянь та нерівностей. Наприклад:

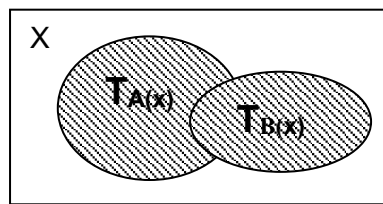


$$\begin{cases} 7x - 42 \leq 0, \\ 2x - 7 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x > \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(\frac{7}{2}, 6\right]$.

3. Диз'юнкція предикатів $A(x) \vee B(x)$

На множині X (область визначення) задані предикати $A(x)$ і $B(x)$. Їх диз'юнкція – це виконання предиката $A(x)$ або $B(x)$ (мал.28). Тож,



при диз'юнкції предикатів $A(x) \vee B(x)$ їхні області істинності об'єднуються:

$$T_{A(x) \vee B(x)} = T_{A(x)} \cup T_{B(x)}$$

Приклад. На множині $X = \{10, 15, 16, 18, 20, 35\}$ задані предикати $A(x)$: «число x - парне» і

$B(x)$: «число x - ділиться на 5». Знайти множину істинності диз'юнкції цих предикатів $A(x) \vee B(x)$.

Розв'язання: Сформулюємо диз'юнкцію предикатів $A(x) \vee B(x)$: «число x парне **або** ділиться на 5». Тож, $T_{A(x) \vee B(x)} = \{10, 15, 16, 18, 20, 35\} = X$.

Інший спосіб розв'язання завдання - скористатися формулою:

$$T_{A(x) \vee B(x)} = T_{A(x)} \cup T_{B(x)}$$

Для цього спочатку потрібно знайти множину істинності кожного з заданих предикатів, а потім виконати над ними операцію об'єднання множин $T_{A(x)}$ і $T_{B(x)}$.

$$T_{A(x)} = \{10, 16, 18, 20\}$$

$$T_{B(x)} = \{10, 15, 20, 35\}$$

$$T_{A(x) \vee B(x)} = T_{A(x)} \cup T_{B(x)} = \{10, 15, 16, 18, 20, 35\} = X.$$

Відповідь: $\{10, 15, 16, 18, 20, 35\} = X$.

З диз'юнкцією предикатів маємо справу при розв'язанні сукупностей рівнянь та нерівностей. Наприклад:

Відповідь: $x \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 3x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

4. Імплікація предикатів $A(x) \Rightarrow B(x)$

Нехай на множині X задані предикати $A(x)$ і $B(x)$. Імплікація предикатів $A(x) \Rightarrow B(x)$ буде істинною, коли $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$. При цьому предикат $B(x)$ називають **логічним наслідком** предиката $A(x)$. Або предикат $A(x)$ є **достатньою умовою** для предиката $B(x)$, а $B(x)$ є **необхідною умовою** для $A(x)$.

Отже, для визначення, який предикат є достатньою умовою для другого, потрібно визначити їх області істинності і з'ясувати їх взаємне розміщення. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. З'ясуйте чи істинне твердження: «Якщо число x ділиться на 4, то воно ділиться й на 2».

Розв'язання: Це твердження є імплікацією. Виділимо елементарні предикати і з'ясуємо її істинність.

$A(x)$: «число x ділиться на 4» $T_{A(x)} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$

$B(x)$: «число x ділиться на 2» $T_{B(x)} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots\}$

$T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$, тому імплікація $A(x) \Rightarrow B(x)$ є істинною.

Відповідь: твердження істинне.

Тепер дану імплікацію сформулюємо за допомогою слів «достатньо» і «необхідно»:

- 1) «Для того, щоб число ділилося на 2 **достатньо**, щоб воно ділилося на 4» (Для того, щоб $B(x)$ достатньо $A(x)$)
- 2) «Для того, щоб число ділилося на 4 **необхідно**, щоб воно ділилося на 2» (Для того, щоб $A(x)$ необхідно $B(x)$)

Отже, даний складний предикат буде істинним тому, що область істинності першого предиката $A(x)$: «Число x ділиться на 4» є підмножиною області істинності другого предиката $B(x)$: «Число x ділиться на 2». У цьому випадку говорять, що другий предикат $B(x)$ логічно впливає з першого $A(x)$, або що $A(x)$ - є достатньою умовою для $B(x)$, $B(x)$ - необхідна умова для $A(x)$.

Приклад 2. Сформулювати висловлення A : «рівність чисельника дроби 0 достатньо для того, щоб весь дріб дорівнював 0» зі словом «слідує».

Розв'язання: Виділимо елементарні висловлення:

В: «чисельник дробу дорівнює 0»

С: «дріб дорівнює 0»

За умовою достатності буде вірною така імплікація: $V \Rightarrow C$.

Відповідь: А: «Якщо чисельник дробу дорівнює 0, то й дріб дорівнює 0».

Приклад 3. Вставити пропущене слово: «необхідно» або «достатньо» або «необхідно і достатньо»: «для того, щоб $a \cdot b = 0$, ..., щоб $a = 0$ »

Розв'язання: Запишемо елементарні висловлення: А: « $a \cdot b = 0$ » і В: « $a = 0$ »

Буде істинним висловлення: «Якщо $a = 0$, то $a \cdot b = 0$ », тобто імплікація $V \Rightarrow A$, тому умова В є достатньою для А.

Відповідь: «Для того, щоб $a \cdot b = 0$, достатньо, щоб $a = 0$ »

У формальній логіці множина істинності предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ розглядається як об'єднання множин істинності предикати В(х) із доповненням множини істинності предикати А(х) до множини Х:

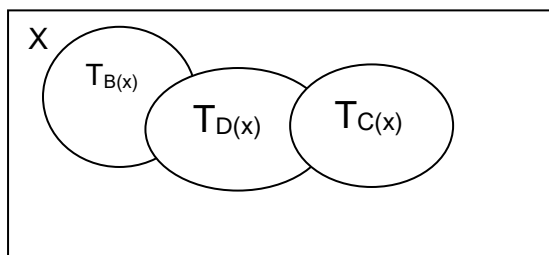
$$T_{A(x) \Rightarrow B(x)} = (T_{A(x)})'_X \cup T_{B(x)}$$

Приклад 4. Знайти множину істинності предиката $V(x) \wedge C(x) \vee D(x)$, якщо предикати В(х): «х-непарне число», С(х): «х-парне число», D(х): «х кратне 5» задані на множині $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

Розв'язання: Запишемо множини істинності кожного з предикатів:

$$T_{V(x)} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad T_{C(x)} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad T_{D(x)} = \{5, 10\}$$

Зобразимо ці множини за допомогою кругів Ейлера-Венна (мал.29).



Мал.29

Виконаємо операції над цими множинами, відповідно до логічних операцій:

$$T_{V(x) \wedge C(x) \vee D(x)} = T_{V(x)} \cap T_{C(x)} \cup T_{D(x)} = \emptyset \cup T_{D(x)} = T_{D(x)} = \{5, 10\}$$

Відповідь: $\{5, 10\}$

Приклад 5. Знайти множину складеного предиката $A(x) \vee C(x) \Rightarrow \overline{B(x)}$, якщо предикати А(х): «х- натуральне число», В(х): «х – складене число», С(х): «х кратне 5» задані на множині $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$

Розв'язання: Запишемо множини істинності кожного з предикатів:

$$T_{A(x)} = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \quad T_{V(x)} = \{4, 6, 8, 9, 10\} \quad T_{C(x)} = \{0, 5, 10\}$$

Виконаємо операції над цими множинами відповідно до логічних операцій над предикатами: $T_{A(x) \vee C(x)} = T_{A(x)} \cup T_{C(x)} = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \cup \{0, 5, 10\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$

$$T_{\overline{B(x)}} = (T_{B(x)})'_X = X \setminus T_{B(x)} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$T_{A(x) \vee C(x) \Rightarrow \overline{B(x)}} = (T_{A(x) \vee C(x)})'_X \cup T_{\overline{B(x)}} = \{-2, -1\} \cup \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$$

Відповідь: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$

Імплікація широко використовується у геометрії, тому що будь-яка теорема - це імплікація.

Дуже часто при розв'язанні рівнянь і нерівностей потрібно виконати імплікаційне перетворення - це означає, що в зв'язку з розширенням області істинності вихідного предиката можуть з'явитися сторонні корені, тому обов'язково потрібна перевірка, щоб відсіяти сторонні корені.

Приклад 6. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{x^2 + 6}$.

Знайдемо його область визначення. За означенням арифметичного кореня маємо:
$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 6 \geq 0 \end{cases}$$

Отже, якщо дане рівняння замінити рівнянням $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 6$, то можуть з'явитися сторонні корені.

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{x^2 + 6} \quad x^2 + 2x + 2 = x^2 + 6$$

Розв'язуючи одержане рівняння, отримаємо його множину істинності: $x=2$. Але, оскільки маємо імплікацію предикатів, потрібно виконати перевірку: $\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 2} = \sqrt{2^2 + 6}$, $\sqrt{10} = \sqrt{10}$ - істинне висловлення.

Відповідь: $x=2$

Еквіваленція предикатів $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

У випадку еквіваленції предикати $A(x)$ і $B(x)$ взаємозамінні, множини їх істинності збігаються, тобто $T_{A(x)} = T_{B(x)}$, а самі предикати називаються еквівалентними і кожен з них виражає і достатню і необхідну умову для іншого предиката. Інакше кажучи, кожен з них логічно впливає з іншого.

Приклад. На множині натуральних чисел N задані предикати $A(x)$: «число x ділиться на 10» і $B(x)$: «десятковий запис числа x закінчується 0». Чи еквівалентні (рівносильні) ці предикати?

Розв'язання: Знайдемо множини істинності даних предикатів:

$$T_{A(x)} = \{10, 20, 30, 40, \dots\}$$

$$T_{B(x)} = \{10, 20, 30, 40, \dots\}$$

Отже, $T_{A(x)} = T_{B(x)}$, тому $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Відповідь: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$: «число x ділиться на 10 тоді і тільки тоді, коли його десятковий запис закінчується 0» або «Для того, щоб натуральне число x ділилося на 10 **необхідно і достатньо**, щоб його десятковий запис закінчувався 0».

З еквіваленцією ми зустрічаємось, коли маємо справу з теоремою, яка має собі обернену. Звертаємо увагу на те, що в цьому випадку нам однаково, яка з них є прямою, а яка є оберненою, оскільки вони є еквівалентними предикатами.

Еквіваленція предикатів широко використовується при розв'язанні рівнянь та нерівностей. Дійсно, наша задача полягає в тому, щоб у ході розв'язання рівняння (нерівності) замінити його за допомогою тотожних перетворень більш простим еквівалентним рівнянням (нерівністю).

Приклад. Розв'язати рівняння: $x^2 - 5x + 8 = x^2 - 10x + 28$

Розв'язання: $(x^2 - 5x + 8 = x^2 - 10x + 28) \Leftrightarrow (x^2 - 5x - x^2 + 10x = 28 - 8) \Leftrightarrow (5x = 20) \Leftrightarrow (x=4)$.

Відповідь: $x=4$.

Потрібно розуміти, що оскільки виконувалися еквівалентні перетворення, то ні втрати коренів, ні одержання сторонніх коренів не відбулося. Тому робити перевірку не потрібно.

У початкових класах перевірка правильності виконання розв'язання прикладів або рівнянь проводиться для того, щоб навчити учнів здійснювати самоконтроль. У старших класах мета перевірки інша: у випадку появи сторонніх коренів, їх потрібно виключити з відповіді. Тому учні старших класів повинні знати, в результаті яких перетворень даного рівняння (нерівності) можуть з'явитися сторонні корені. Лише в цьому випадку перевірка є частиною розв'язку.

§ 4. ТЕОРЕМА ТА ЇЇ БУДОВА. ДОВЕДЕННЯ.

Під **теоремою** розуміють твердження, істинність якого потрібно довести, тобто обґрунтувати, логічно вивести з вже відомих фактів. Будь-яка теорема складається з пояснювальної частини, умови і висновку. У пояснювальній частині описуються об'єкти, про які йде мова в теоремі. *Умова теореми* являє собою $A(x)$ - предикат, заданий на даній множини X , а *висновок теореми* - предикат $B(x)$, заданий на тій же множині X , істинність якого потрібно довести. Наприклад, у теоремі “Якщо в чотирикутнику діагоналі в точці перетину діляться навпіл, то даний чотирикутник - паралелограм”, пояснювальною частиною є

множина чотирикутників; умовою є “діагоналі в точці перетину діляться навпіл”; висновком є “даний чотирикутник - паралелограм”.

Отже, теорема являє собою імплікацію предикатів $A(x) \Rightarrow B(x)$, яка перетворюється в істинне висловлення при всіх $x \in X$. У цьому випадку говорять, що предикат $A(x)$ є достатньою умовою для предиката $B(x)$, а $B(x)$ є необхідною умовою $A(x)$.

$(\forall x \in X) [A(x) \Rightarrow B(x)]$ – запис істинної теореми.

З прямої теореми можна одержати ще три теореми:

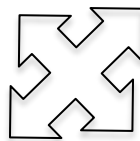
Пряма теорема $(A(x) \Rightarrow B(x))$

Якщо $A(x)$, то $B(x)$

Теорема, протилежна даній

$(\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$

Немає $A(x)$, то немає $B(x)$



Обернена теорема $(B(x) \Rightarrow A(x))$

Якщо $B(x)$, то є $A(x)$

Теорема, протилежна оберненій

$(\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$

Немає $B(x)$, то немає $A(x)$

З'ясуємо залежність між ними, для чого розглянемо конкретний **приклад**. Нехай $A(x)$ - “кожний доданок ділиться на 3”; $B(x)$ - “сума ділиться на 3”. Тоді імплікація $A(x) \Rightarrow B(x)$: “якщо кожний доданок ділиться на 3”, то і сума ділиться на 3” є істинною (це доводиться в курсі алгебри).

З'ясуємо, чи буде з істинності даної імплікації предикатів впливати істинність імплікації $B(x) \Rightarrow A(x)$: “якщо сума ділиться на 3, то і кожен доданок ділиться на 3”, тобто істинність оберненої теореми. Очевидно, що вона хибна (наприклад, нехай розглянемо висловлення “ $9=5+4$ ”, яке одержали в цього предиката. Як бачимо, сума ділиться на 3, а кожний доданок - ні).

Хибною є й імплікація $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$: “Якщо кожен з доданків не ділиться на 3, то і сума не ділиться на 3” (випадок “ $5+4=9$ ”). Але імплікація $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$: “Якщо сума не ділиться на 3, то кожний доданок не ділиться на 3” є істинною.

Отже, розглянутий приклад дозволяє зробити висновок, що пряма теорема і теорема, протилежна оберненій, еквівалентні. Аналогічно обернена і теорема, протилежна прямій, еквівалентні.

Спираючись на залежність між цими чотирма видами теорем, можна розглянути умовиводи, які найбільш часто зустрічаються в школі. При цьому треба мати на увазі, що учні, правильно формулюючи теорему, часто порушують логіку її застосування, тобто використовують умовиводи, які не гарантують істинності висновку. Незважаючи на те, що висновок може бути правильним, застосовувати його у міркуваннях не можна.

Нехай, наприклад, теорема має вигляд $A(x) \Rightarrow B(x)$, учень, пов'язуючи цей предикат із своєю умовою, одержує висновки:

Умовиводи, що гарантують істинність висновку

1.
$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x); A(x)}{B(x)}$$
2.
$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x); \overline{B(x)}}{\overline{A(x)}}$$
3.
$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x); B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$$

Умовиводи, що не гарантують істинність висновку

1.
$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x); B(x)}{A(x)}$$
2.
$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x); \overline{A(x)}}{\overline{B(x)}}$$
3.
$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x); C(x) \Rightarrow A(x)}{B(x) \Rightarrow C(x)}$$

Наведемо **приклад умовиводів**; з'ясуємо, чи гарантують вони істинність висновку. Для цього потрібно виділити структуру речення, виділивши окремі предикати.

1. *Якщо $x=3$, то $x^3=27$.*

Відомо, що $x^3 \neq 27$, значить $x \neq 3$. Тут ми маємо предикати: $A(x)$: “ $x=3$ ”; $B(x)$: “ $x^3=27$ ”; $\overline{B(x)}$: “ $x^3 \neq 27$ ”; $\overline{A(x)}$: “ $x \neq 3$ ”, які пов'язані між собою такою схемою:
$$\frac{A(x)B(x); \overline{B(x)}}{\overline{A(x)}}$$
, що гарантує істинність висновку.

2. *Якщо $x=3$, то $x^3=27$.*

Відомо, що $x \neq 3$, тоді $x^3 \neq 27$. Тут предикати пов'язані схемою:
$$\frac{A(x)B(x); \overline{A(x)}}{\overline{B(x)}}$$
, яка не гарантує істинність висновку. Тому, незважаючи на те, що відповідь правильна, так міркувати не можна.

Для того щоб, показати, чому, не зважаючи на правильний висновок, міркувати так не можна, розглянемо такий **приклад**:

3. *Якщо $x=2$, то $x^2=4$.*

Відомо, що $x \neq 2$, тоді $x^2 \neq 4$. Тут схема та ж, що й у прикладі 2, але висновок неправильний.

4. *Якщо $x=1$, то $(x-1) \cdot (x-2) = 0$.*

Відомо що, $x \neq 1$, тоді $(x-1) \cdot (x-2) \neq 0$.

5. *Всі ромби – паралелограми; всі квадрати – ромби, тоді всі паралелограми – квадрати.*

Тут ми маємо такі предикати: $A(x)$: “всі ромби”; $B(x)$: “всі паралелограми”; $C(x)$: “всі квадрати”, які пов'язані такою схемою:
$$\frac{A(x)B(x); C(x)A(x)}{B(x)C(x)}$$
, що не гарантує істинність висновку.

Потрібно мати на увазі, якщо предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$ є істинним, то в цьому випадку предикат $A(x)$ виражає достатню умову для предиката $B(x)$, а предикат $B(x)$ є необхідною умовою для предиката $A(x)$.

У випадку еквіваленції $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ кожний з предикатів $A(x)$ і $B(x)$ виражає як достатню, так й необхідну умову, тобто предикати $A(x)$ і $B(x)$ є взаємозамінними. Тому, якщо теорема має обернену, то яка з них пряма, а яка обернена – не має значення.

Майбутній вчитель початкових класів має знати, що в школі, в основному, крім наведених вище умовиводів, широко використовуються такі **методи доведень**:

1) *Умовивід за неповною індукцією*, який дозволяє висунути гіпотезу (що дуже важливо), істинність якої ще потрібно довести. Цей метод широко використовується в початкових класах. Оскільки учням властиве прагнення переходити від одного або декількох окремих положень до загального висновку і вважати свої міркування обґрунтованими, то важливо сформулювати в них уміння критично ставитися до таких умовиводів та наводити конкретні приклади для спростування тверджень.

2) *Метод контрприкладу* полягає в тому, що підбирається хоча б один приклад, який спростовує даний умовивід. Наприклад, умовивід “Якщо $a > b$, то $a^2 > b^2$ ” неправильний, оскільки якщо $a = -2$, $b = -3$, то з того, що $-2 > -3$ не слідує, що $4 < 9$.

Учні початкових класів мають опанувати цим методом.

Якщо ж навести контрприклад дуже складно (або неможливо), то виникає питання про те, як довести чи спростувати умовивід, який було сформульовано на підставі неповної індукції. У цьому випадку в школі широко застосовуються такі методи:

3) *Метод повної індукції*, тобто перебір всіх можливих випадків. Наприклад, для доведення істинності умовиводу: “Для будь-якого x $|x| \geq x$ ” потрібно розглянути два випадки, які охоплюють всі варіанти:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \geq x \end{array} \right. \text{ (істинне)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x \geq x \end{array} \right. \text{ (істинне)}$$

Цей метод дуже часто зустрічається в шкільному курсі математики. За його допомогою доводяться теореми: про сторону, що лежить проти більшого кута; про вписаний кут; теорема синусів і т.ін. А в курсі алгебри - при розгляді степенів з натуральним показником; від'ємним показником; показником - нуль; дробовим показником. Вже

в 7 класі ряд задач на аксіому “Якщо точка X лежить між точками A і B , то $AB=AX+XB$ ” розв'язується методом повної індукції.

4) *Метод математичної індукції*, який добре показаний в темі “Аксіоматична побудова множини натуральних чисел”, на жаль, зараз виключений із шкільної програми.

5) *Метод доведення від супротивного*, який також широко застосовується в школі. Цей метод полягає в тому, що замість даної теореми формулюється протилежна оберненій, еквівалентна даній, яка й доводиться. Наприклад, потрібно довести, що $\sqrt{3}$ - ірраціональне число. Ми припускаємо, що воно раціональне, і в ході доведення приходимо до суперечності, тобто замість умовиводу $A(x) \Rightarrow B(x)$ доводиться умовивід $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

Розділ III. ВІДПОВІДНОСТІ

§1. БІНАРНІ ВІДПОВІДНОСТІ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ ДВОХ МНОЖИН

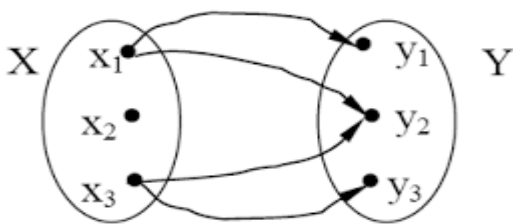
Для глибокого розуміння завдань навчання математики у початкових класах майбутньому вчителю необхідно вміти встановлювати та виділяти зв'язки між основними поняттями теоретичних основ початкового курсу математики та курсу методики навчання математики у початкових класів.

Традиційно у межах теоретико-множинного підходу головну увагу спрямовують на усвідомлення поняття натурального числа як потужності скінчених еквівалентних множин та операцій над множинами як теоретичної основи арифметичних дій. У розділі “Відповідності” буде показано, що не менш важливим є встановлення теоретичної основи понять “дорівнює”, “більше”, “менше”, які вводяться у початкових класах.

Вивчаючи відношення між множинами і операції над ними, ми нехтували природою елементів, що складають ці множини, та тими зв'язками, які можуть існувати між цими елементами. Наприклад, на множині чисел: “дорівнює”, “не дорівнює”, “ділиться”, “не ділиться”, “менше”, “більше”, і т.п.; на множині прямих: “перетинаються”, “паралельні”, “перпендикулярні” і т.п.; між учнями класу: за зростом - “вище”, “нижче”; за віком - “старший”, “молодший”.

Взаємозв'язок між елементами двох множин у математиці прийнято виражати за допомогою двомісного предиката $R(x, y)$ і називати **бінарною відповідністю** (“бінарний” від латинського слова “bis”, що означає “двічі”).

Один з шляхів формального визначення математичного поняття «бінарна відповідність R » полягає в ототожненні цього поняття з



мал.30

трійкою множини X , Y , G , де X і Y - вихідні множини із заданим набором елементів $x \in X$ і $y \in Y$, а G - підмножина декартового добутку $G \subseteq X \times Y$, причому кожний елемент множини G , тобто кожна упорядкована пара виду (x, y) , забезпечує істинність двомісного предиката R , який прийнято позначати $R(x, y)$ або xRy .

Множину G ($G \subseteq X \times Y = \{(x, y) \mid xRy - \text{істинне}\}$) називають **графіком відповідності** R , множину X - **областю відправлення** відповідності, множину Y - **областю прибуття** відповідності. Наприклад, на мал. 30 відповідність R встановлено між множиною $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ - область відправлення та множиною $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ - область прибуття. Графік даної відповідності утворюють пари: $G = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_3, y_2), (x_3, y_3)\}$

Приклад 1. Встановимо бінарну відповідність між елементами множин $X = \{2, 3, 5, 7\}$ та $Y = \{4, 21, 25\}$ за допомогою двомісного предиката $xRy \equiv \text{”число } x \text{ є дільником числа } y\text{”}$, де $x \in X$, $y \in Y$. Це твердження буде істинним не для всіх пар чисел (x, y) , які можна утворити з елементів множин X і Y , тобто не для всіх упорядкованих пар декартового добутку $X \times Y$. Наочно це можна показати за допомогою таблиці:

$x \backslash y$	4	21	25
2	i	x	x
3	x	i	x
5	x	x	i
7	x	i	x

Неважко помітити, що розглянута відповідність виділяє з усього декартового добутку $X \times Y$ підмножину G :

$$G = \{(2, 4), (3, 21), (5, 25), (7, 21)\}.$$

Цей набір упорядкованих пар є графіком відповідності.

Множина перших компонент в парах (x, y) графіка утворює **область визначення** відповідності R . Множина других компонент у парах графіка G утворює **множину значень** відповідності R .

Слід особливо підкреслити, що оскільки бінарні відповідності задаються двомісними предикатами, то над ними виконуються всі логічні операції, які виконують над предикатами, а над їх графіками, що являють собою множини упорядкованих пар, - операції над множинами.

Способи задання графіка бінарних відповідностей

Тісний зв'язок поняття бінарної відповідності з декартовим добутком визначив і способи задання його графіка.

1. Аналітичний спосіб.

Як у випадку скінченних, так і нескінченних множин X і Y , графік G бінарної відповідності R можна задати за допомогою формули xRy , що встановлює аналітичний зв'язок між елементами множин X і Y :

$$G = \{(x,y) \mid xRy - \text{істинне}\}$$

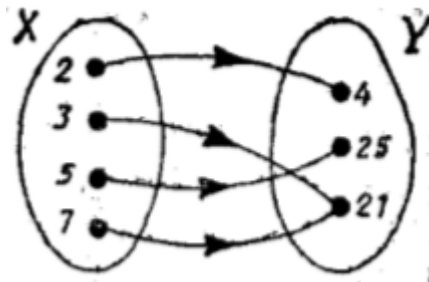
або за допомогою прямого переліку пар (для скінченних множин X і Y), яка у розглянутому вище прикладі 1.

2. Табличний спосіб.

Якщо множини X та Y скінченні, то іноді доцільно задати множину G у вигляді таблиці, як у наведеному вище прикладі 1.

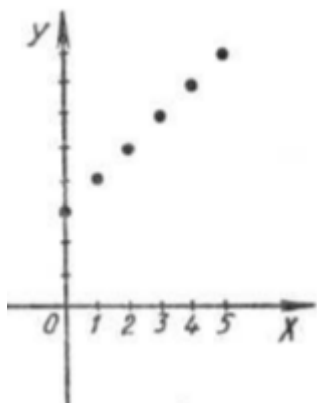
3. Спосіб орієнтованих графів.

Для наочності задання графіків бінарних відповідностей, встановлених між скінченними множинами X і Y , можна здійснювати за допомогою спеціальних креслень - орієнтованих графів, в яких множини зображуються у вигляді кругів Ейлера, елементи - точками, а графік G відповідності R - набором стрілок, що виходять з однієї точки в іншу. Наприклад, побудуємо граф для графіка G , який визначили у прикладі 1 (мал.31). Стрілками з'єднуються точки-елементи множин, для яких xRy - істинне ($x \in X, y \in Y$).



4. Графічний спосіб.

Якщо множини X і Y - числові множини, то зручніше графік бінарних відповідностей зображати як точки у прямокутній системі координат, де по вісі абсцис відкладається числова множина X , а по вісі ординат - числова множина Y . Наприклад, графік бінарної відповідності $xRy \equiv$ "число x менше числа y на 3", де $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, де $x \in X, y \in Y$, зображено на мал. 32.



Мал.32

мал.31

§2. ОСНОВНІ ТИПИ ВІДПОВІДНОСТЕЙ

При вивченні різних відповідностей, які зустрічаються в математиці між множинами математичних об'єктів або в житті між оточуючими нас множинами об'єктів, було помічено, що графіки деяких відповідностей збігаються, доповнюють один одного і т.ін. Це

дало змогу виділити сукупності відповідностей, графіки яких мають певні особливості.

1. **Повною відповідністю** називають відповідність R між множинами X і Y , якщо її графік G збігається з усім декартовим добутком множин X і Y , тобто $G = X \times Y$.

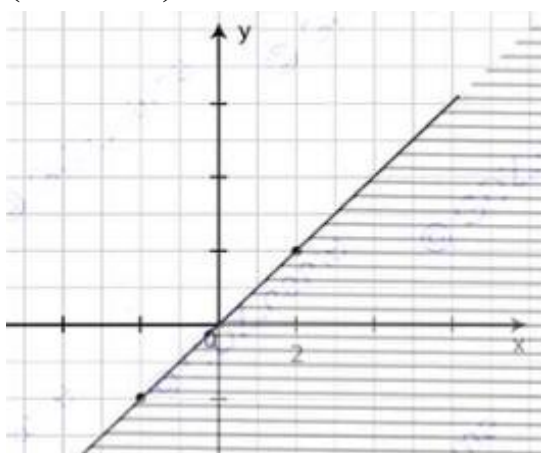
Приклад 2. Якщо $X = \{2, 4, 6\}$, $Y = \{7, 11, 13\}$ і $xRy \equiv "x < y"$, то $G = \{(2, 7), (2, 11), (2, 13), (4, 7), (4, 11), (4, 13), (6, 7), (6, 11), (6, 13)\} = X \times Y$, тому що для всіх пар декартового добутку xRy - істинне.

2. **Порожньою відповідністю** між множинами X і Y називають відповідність R , графік якої порожній, тобто $G = \emptyset$.

Приклад 3. Якщо $X = \{2, 4, 6\}$, $Y = \{7, 11, 13\}$ і $xRy \equiv "x > y"$, то $G = \emptyset$, тому що для всього декартового добутку $X \times Y$ xRy - хибне.

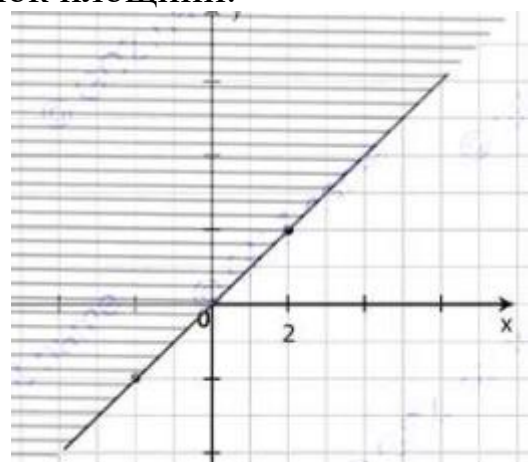
3. Відповідності, що задані між множинами X і Y предикатами xRy і $x\bar{R}y$, називають **протилежними відповідностями**, якщо їх графіки G і $\bar{G}$ не перетинаються ($G \cap \bar{G} = \emptyset$), а їх об'єднання становить усю сукупність пар декартового добутку $X \times Y$, тобто $G \cup \bar{G} = X \times Y$.

Приклад 4. Якщо $X = R$ і $Y = R$, а $xRy \equiv "x \geq y"$, тоді $x\bar{R}y \equiv "x < y"$. G - множина точок площини, що лежать нижче бісектриси $x = y$ і на ній (мал.33а). $\bar{G}$ - множина точок площини, що лежать вище бісектриси $x = y$ (мал.33б). $G \cup \bar{G} = X \times Y$ - множина всіх точок площини.



а

Мал.33



б

4. Відповідності, **оберненою** даній відповідності R , називають відповідність R^{-1} , задану між множинами X і Y двомісним предикатом виду $yR^{-1}x$, який є істинним у тих і тільки тих випадках, коли істинна вихідна відповідність, задана предикатом xRy , тобто коли істинна кон'юнкція предикатів: $xRy \wedge yR^{-1}x = i$ ($x \in X, y \in Y$).

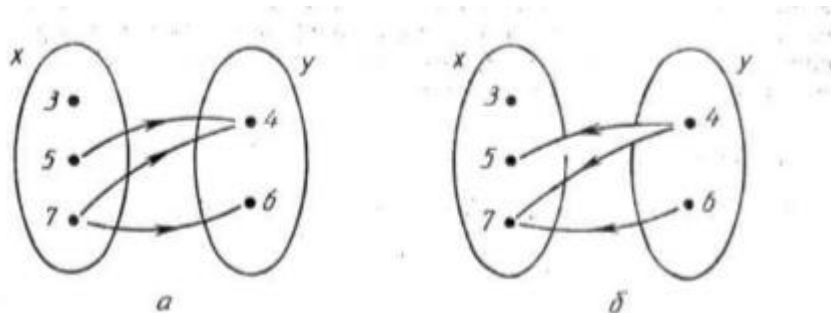
Щоб одержати графік оберненої відповідності $yR^{-1}x$, потрібно у графіку вихідної відповідності R поміняти місцями компоненти у

кожній парі, а щоб побудувати граф, треба змінити напрямок всіх стрілок на обернений.

Приклад 5. Нехай для множин $X=\{3,5,7\}$ та $Y=\{4,6\}$ задана відповідність $xRy: "x>y"$. Побудувати графік і граф оберненої відповідності $yR^{-1}x$.

Розв'язання: Побудуємо графік і граф бінарної відповідності R . Графік $G = \{(5,4),(7,4),(7,6)\}$, а граф - на мал.34а.

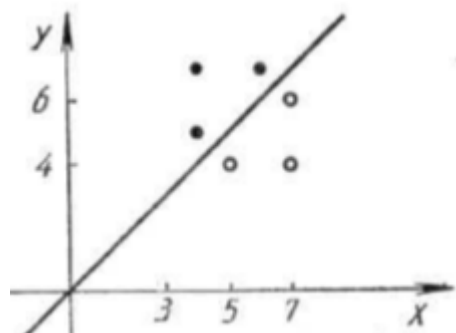
Обернена відповідність між множинами Y і X задається предикатом $yR^{-1}x: "y\leq x"$. Її графік одержуємо зміною місць компонент у парах: $G^{-1}=\{(4,5),(4,7),(6,7)\}$, а граф – зміною напрямку стрілок (мал.34б).



Мал.34

Графіки G і G^{-1} – симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів $y = x$ (мал.35).

Вчителю початкової школи слід звернути увагу на те, що всі відповідності, які зустрічаються в курсі математики початкових класів, можна віднести до одного з зазначених типів відповідностей.



Мал.35

Слід запам'ятати, що **відповідності порядку** (наприклад, " $x<y$ ", " x слідує за y ", " x ділиться на y " і т.д.) мають протилежні відповідності (відповідно " $x>y$ ", " x передуює y ", " x не ділиться на y " і т.д.), а всі **відповідності тотожності** (наприклад, " x дорівнює y ", " x паралельна y " і т.д.) мають обернені відповідності (відповідно " y дорівнює x ", " y паралельна x " і т.д.). Визначення і застосування цих відповідностей має велике практичне значення в роботі вчителя, тому що дає змогу розширяти можливість вправ підручника математики, творчо використовувати запропонований підручником матеріал, формувати у молодших школярів самостійність математичного мислення.

§3. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ ОДНІЄЇ МНОЖИНИ

Розглянемо окремий випадок бінарної відповідності між множинами X і Y , коли ці множини збігаються, тобто $X=Y$. У цьому випадку прийнято говорити про бінарні відношення, тому що мова йде про відношення між елементами всередині однієї і тієї ж множини.

Бінарне відношення R на множині X вважають заданим, якщо названа пара множин X і G , де G - підмножина декартового добутку $X \times X$, кожний елемент якого забезпечує істинність двомісного предиката xRy , де $x \in X$, $y \in Y$, $G \subseteq X \times X = \{(x,y) \mid xRy \text{ - істинне}\}$. До того ж множину G називають *графіком бінарного відношення*, а множину X - *областю задання відношення*.

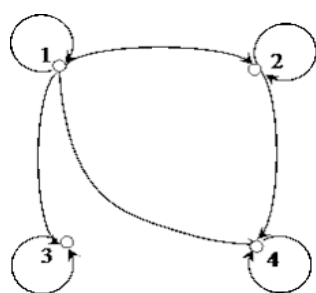
Приклад 1. Знайти графік бінарного відношення $xRy = \text{“}x\text{-дільник } y\text{”}$, заданого на числовій множині $X = \{1,2,3,4\}$.

Розв’язання: Графік цього відношення G - це множина тих пар (x,y) , для яких двомісний предикат $xRy = \text{“}x\text{-дільник } y\text{”}$ перетворюється в істинне висловлення, тобто

$$G = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}.$$

Граф бінарного відношення

Графом бінарного відношення є креслення, на якому точками позначають елементи множини X , а стрілками з'єднують пари точок (x,y) , для яких предикат xRy перетворюється в істинне висловлення. Точки, що зображують елементи множини X , називаються *вершинами графа*, а стрілки – його *ребрами*.



мал.36

Побудуємо граф бінарного відношення, заданого у прикладі 1 (мал.36). Для всіх пар виду (x,y) малюємо стрілку, яка починається і закінчується на одному й тому ж елементі (число є дільником самого себе) - таку стрілку на графі називають *петлею* (мал.37)

Оскільки бінарне відношення є окремим випадком бінарної відповідності, то визначення типів відповідностей переноситься на відношення у множині X .

§4. ВЛАСТИВОСТІ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

Розглянемо властивості бінарних відношень. Нехай на множині X задано деяке відношення R .

1. Бінарне відношення R називають **рефлексивним**, якщо для будь-якого x з X предикат xRy - істинний, тобто елемент x знаходиться у відношенні R з самим собою.

Наприклад, розглядаючи приклад 1, у графіку можна побачити пари виду (x,x) . Предикат «число x є дільником числа x » завжди істинний. Отже, відношення «бути дільником» рефлексивне. Граф рефлексивного відношення містить петлі (мал.37).



2. Бінарне відношення R називають **антирефлексивним**, якщо жоден елемент з множини X не знаходиться у відношенні R з самим собою, тобто xRx - хибне. Наприклад, відношення “пряма x перпендикулярна прямій y ” антирефлексивне, тому що ніяка пряма не перпендикулярна сама собі.

3. Бінарне відношення R називається **симетричним**, якщо має місце одночасна істинність предикатів xRy і yRx , тобто якщо кон'юнкція $xRy \wedge yRx$ істинна.

Наприклад, симетричне відношення паралельності на множині прямих: умова $x \parallel y$ і $y \parallel x$ виконується одночасно. Або відношення R “слово x має спільний корінь із словом y ” на множині іменників. Наприклад, слово “однокурсник” має спільний корінь із словом “курсант”, а слово “курсант” - із словом “однокурсник”.

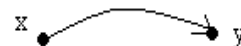


Граф таких бінарних відношень складається з двох елементів, пов'язаних стрілками протилежних напрямків (мал.38).

мал.38

4. Бінарне відношення R називають **асиметричним**, якщо ні для яких елементів x і y з множини X не виконується одночасно істинність предикатів xRy і yRx .

Наприклад, відношення “ $y > x$ ” асиметричне на множині дійсних чисел, тому що ні для кого дійсного числа не виконується одночасно умова: $x > y$ і $y > x$ (якщо $15 > 10$, то $10 > 15$ – хибне висловлення).



Граф такого відношення має стрілки одного напрямку (мал.39).

мал.39

5. Бінарне відношення називають **антисиметричним**, якщо предикати xRy та yRx істинні одночасно в одному єдиному випадку, коли $x=y$. Наприклад, відношеннях R : “число x кратне числу y ” на множині $X=\{3,15\}$. Дійсно, якщо x є кратним y ($15:3$), то y не буде кратним x ($3:15$), симетричне відношення кратності виконуватиметься лише у випадку $x=y$, тобто $15:15$ і $3:3$.

Антисиметричність об'єднує дві властивості: рефлексивність і асиметричність. У зв'язку з цим граф (мал.40) буде комбінацією графів, що зображені на мал. 37 і 39.



мал.40

6. Бінарне відношення R називають **транзитивним**, якщо для будь-яких елементів x, y, z з множини X виконується відношення слідування: $(\forall x)(\forall y)(\forall z) [(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]$.

Наприклад, відношення R “пряма x паралельна прямій y ” на множині прямих. З аксіом паралельності випливає, що: якщо $x \parallel y$ і $y \parallel z$, то $x \parallel z$. Побудуємо граф такого відношення (мал.41).

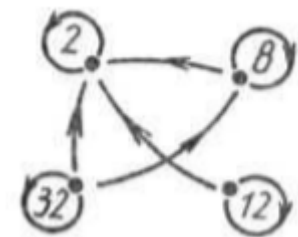


мал.41

7. Бінарне відношення називають **зв'язним**, якщо для нього виконується істинність хоча б одного з предикатів: або xRy , або yRx , або $x=y$.

Приклад 1. Побудувати граф і графік бінарного відношення R , що задане двомісним предикатом xRy : “ $x:y$ ” на множині $X = \{2, 8, 12, 32\}$ та визначити властивості, які має це відношення.

Розв'язання. Графік бінарного відношення R буде містити такі пари $G = \{(2,2), (8,8), (12,12), (32,32), (8,2), (12,2), (32,2), (32,8)\}$, а граф відношення буде мати вигляд (мал. 42):



мал.42

Визначимо властивості даного відношення:

- 1) Відношення xRy - рефлексивне, тому що $x:x$ (перевіримо, $2:2, 8:8, 12:12$).
- 2) Воно антисиметричне, тому що $[x : y \wedge y : x] \Rightarrow (x = y)$.
- 3) Воно транзитивне, тому що $32 : 8 \wedge 8 : 2 \Rightarrow 32 : 2$.
- 4) Воно зв'язне, тому що для будь-якої пари (x, y) виконується або $x:y$, або $y:x$, або $x=y$. Перевіримо це, наприклад, для пари $(2,8)$ дійсно, $2:8$ але $8:2$; для пари $(2,12)$ - $2:12$, але $12:2$, а для пари $(2,2)$ виконується умова $2=2$ і т.д.

§5. ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

За набором властивостей серед бінарних відношень можна виділити дві великі сукупності: відношення еквівалентності і відношення порядку. Розглянемо першу з них.

Відношенням еквівалентності називається бінарне відношення R на множині X , якщо воно має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

Прикладом відношень еквівалентності можуть служити добре відомі з шкільного курсу математики відношення: паралельності на множині прямих (пряма x паралельна прямій y), рівності на множині числових виразів (числовий вираз x дорівнює числовому виразу y) і т. ін. Рекомендуємо самотійно переконатися, що ці відношення мають вказаний набір властивостей і що їх графи мають такий вигляд, як на мал.43.



Такий граф називають повним. Всі точки з множин X попарно зв'язані стрілками двох напрямків і кожна з них має петлю.

мал.43

Відношенню еквівалентності відіграє важливу роль у різних галузях знань. Це обумовлено тим, що за допомогою відношення еквівалентності можна розбити будь-яку універсальну множину об'єктів на підмножини, що попарно не перетинаються, які визначають як класи. Таке розбиття носить назву *класифікації*.

Класифікацію проводять за певними ознаками над об'єктами живої та неживої природи, над абстрактними математичними об'єктами, у повсякденному житті. Замість терміна “клас еквівалентності” використовують поняття “рід”, “вид”, “підвид”, “родина” і т.д.

Найчастіше у початкових класах зустрічаються такі відношення еквівалентності, як “числовий вираз x дорівнює числовому виразу y ” на множині числових виразів; “множина A рівночисельна множині B ” при порівнянні різних предметних множин; “звичайний дріб $\frac{x}{m}$ дорівнює звичайному дробу $\frac{y}{n}$ ” на множині дробів; при вивченні геометричного матеріалу “фігура Φ_x рівновелика фігурі Φ_y ” тощо.

Особливу роль відіграє відношення “бути рівнокількісним” при введенні поняття натурального числа як загальної властивості класу скінченних еквівалентних або рівнокількісних множин. Відношення “бути рівнокількісним” розбиває множину всіх предметних множин на класи еквівалентності за їх кількісною характеристикою – потужністю: K_1 - клас одноелементних множин, K_2 - двоелементних і т.д. Кожному класу K_n ставиться в відповідність певне натуральне число n .

§6. ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ

Крім відношення еквівалентності серед бінарних відношень особливо виділяють відношення порядку.

Слово “порядок” звичне і в повсякденному житті, і в математиці. Ми говоримо про порядок слів у реченні, про порядок цифр у запису числа, про порядок виконання дій у числовому виразі. При цьому надаємо цьому поняттю такий смисл, що елемент множини, яку ми розглядаємо, слідує за певним елементом з цієї ж множини. Керуючись нашим уявленням про порядок, задамо на множині X відношення $R \equiv$ “елемент x слідує за елементом y ” (або обернене відношення “ x передує y ”). Визначимо властивості такого відношення.

а) Відношення R антирефлексивне, тому що елемент x не може слідувати за самим собою.

б) Відношення R асиметричне, тому що якщо елемент x слідує за елементом y , то y не може слідувати за елементом x .

в) Відношення R транзитивне, тому що якщо елемент x слідує за елементом y , а елемент y - за елементом z , то елемент x буде слідувати за елементом z .

Такий же набір властивостей мають і багато інших відношень, наприклад, відношення “ $x > y$ ” на множині дійсних чисел; відношення “людина x вища за людину y ” на множині людей при порівнянні їх за зростом і т.ін. Такі відношення називаються відношеннями строгого порядку.

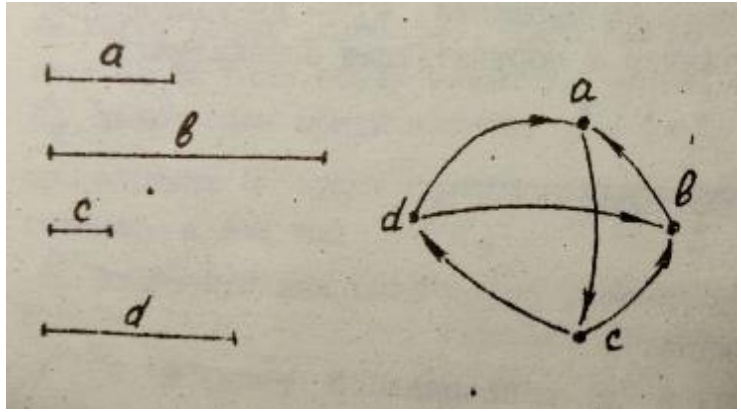
Отже, бінарне відношення R , задане на множині X , називається **відношенням строгого порядку**, якщо воно транзитивне, асиметричне і антирефлексивне.

Слід відзначити, що відношеннями строго порядку будуть також відношення, обернені розглянутим вище. А саме відношення, “ $x < y$ ”, “людина x нижча за людину y ” будуть також мати властивості транзитивності, асиметричності і антирефлексивності.

Побудуємо, наприклад, граф відношення строгого порядку “відрізок x коротше за відрізок y ”, заданого на множині відрізків (мал.44).

Граф цього відношення (мал.44), не має петель, тому що за властивістю антирефлексивності відрізок x не може бути коротше самого себе. Будь-яку пару точок (x, y) з'єднує лише одна стрілка певного напрямку, що свідчить про асиметричність відношення.

Побудований граф (мал.44) дозволяє розмістити елементи заданої множини у певному порядку: $\{e, a, b, d, c\}$, тобто упорядкувати задану множини відрізків за довжиною.



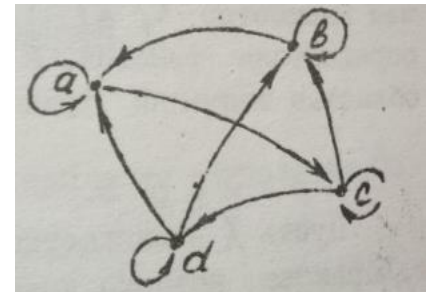
мал.44

Поряд з відношенням строгого порядку ми постійно зустрічаємось з відношенням нестрогого порядку “людина x не вища за людину y ”, “числовий вираз x не перевищує числовий вираз y ”, “ $x \geq y$ ” та т.ін. Такі відношення уявляють собою диз’юнкцію двох відношень: строгого порядку та тотожності (рівності). Наприклад, “ $x \geq y$ ” рівносильно “ $x > y \vee x = y$ ”, а “ $x \leq y$ ” рівносильно “ $x < y \vee x = y$ ”.

Відношення R на множині X називається **відношенням нестрогого порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне. Переконаємося в цьому, побудувавши граф відношення нестрогого порядку на прикладі відношення R : “відрізок x не довший за відрізок y ”, заданого на множині відрізків (мал.44). Це відношення R є диз’юнкцією відношень “відрізок x коротший за відрізок y ” або “відрізок x рівновеликий відрізку y ” і має такі властивості:

- рефлексивність, тому що диз’юнкція буде істинною при істинності одного з висловлень, а саме висловлення “відрізок x рівновеликий самому собі” - істинне;
- антисиметричність, тому що “ x не довший y ” і “ y не довший x ” тільки в тому випадку, коли “ x рівновеликий y ”;
- транзитивність, тому що “ x не довший y ”, а “ y не довший за z ”, то “ x не довший за z ”.

Скористаємося цими властивостями і побудуємо граф відношення R “відрізок x не довший відрізку y ” (мал.45). Побудований граф нагадує граф відношення “відрізок x коротший за відрізок y ” (мал.44), тільки для кожної точки добавлена петля, тому що є властивість рефлексивності.



мал.45

Побудований граф дозволяє розмістити елементи множини у порядку зростання, тобто упорядкувати його, а саме, $X = \{c; a; d; b\}$.

Про множину X , на якій задано відношення порядку (строго або нестрого), говорять, що вона упорядкована відношенням R . Іншими словами, множину X називають **упорядкованою**, якщо для будь-яких двох різних її елементів встановлено правило, за яким один з її елементів вважають попереднім до іншого. Наприклад, множина всіх натуральних чисел може бути упорядкована відношенням " $x < y$ " або " $x:y$ ", а розглянута множина відрізків (мал.44) - відношенням "відрізок x коротший за відрізок y ", так й відношенням "відрізок x не довший за відрізок y ".

§7. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВІДНОШЕННЯ

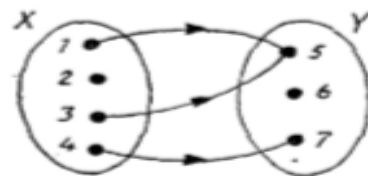
Розглянемо бінарну відповідність між елементами множин $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ та $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задану двомісним предикатом $xRy \equiv "x+y=2"$, де $x \in X$, $y \in Y$. Це твердження буде істинним не для всіх пар чисел (x, y) декартового добутку $X \times Y$. Задана відповідність виділяє з цього декартового добутку $X \times Y$ підмножину $G = \{(-1, 3); (0, 2); (1, 1)\}$, яка називається **графіком відповідності**, множина X - **областю відправлення** відповідності, множина Y - **областю прибуття** відповідності.

Одержали функціональне відношення, оскільки в парі з кожним елементом $x \in X$ знаходиться не більше одного елемента $y \in Y$. Дійсно, для елементів 2 і 3 з множини X немає відповідних елементів у множині Y , а елементам -1, 2, 0 з множини X відповідає лише один елемент з множини Y . У цьому випадку множина $X_1 = \{-1, 0, 1\}$, де $X_1 \subseteq X$, називається **областю визначення функції**, а множина $Y_1 = \{1, 2, 3\}$, де $Y_1 \subseteq Y$ - **областю значень функції**.

Приклад 1. Нехай X - множина учнів 2 класу середньої школи, які мають писати контрольну роботу з математики. Нехай $Y = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ - набір оцінок, які вони можуть одержати.

Нехай X_1 - множина учнів, які писали контрольну роботу, а Y_1 - множина оцінок, які вони одержали. Тоді X - область відправлення функції, X_1 - область визначення функції, Y - область прибуття, Y_1 - область значень функції.

Означення. Функцією називається така відповідність між елементами множин X і Y , при якій кожному елементу множини X відповідає не більше одного елемента множини Y (мал.46)



Мал.46

Функція або функціональна відповідність позначається так: $y=f(x)$, де x називають **аргументом функції**, а y – **значенням функції**.

Розглянемо різні функціональні відношення.

1. Нехай $X_1=X$, тобто область визначення і область відправлення співпали. У цьому випадку говорять, що дана функція є *всюди визначеною*.

В школі зазвичай розглядають всюди визначені функції. В математиці всюди визначену функцію називають відображенням.

Означення. Якщо кожному елементу першої множини відповідає один і тільки один елемент другої множини, то таку відповідність називають **відображенням**.

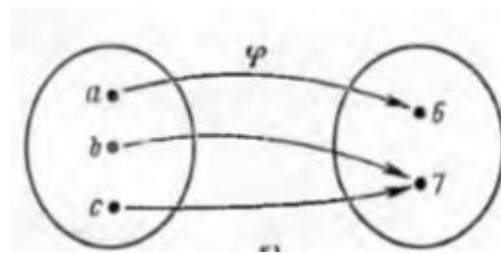
У відображенні виділяють два випадки: $Y_1 \subset Y$ (мал.47а) та $Y_1 = Y$ (мал.47б)



$$X_1=X \quad Y_1 \subset Y$$

а

Мал.47



$$X_1=X \quad Y_1 = Y$$

б

У першому випадку (мал.47а) говорять, що множина X відображається **в** множину Y . У другому випадку (мал.47б) говорять, що множина X відображається **на** множину Y (сюр'єктивне відображення).

Приклад 2. $y = \lg(2-x) + \sqrt{x-5}$, де $x \in \mathbb{R}$ (область відправлення). Знайдемо область визначення цієї функції:

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Ця функція ніде не визначена, тому що $x \in \emptyset$

Приклад 3. $y = \lg(2-x) + \sqrt{x+5}$, де $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Знайдемо область визначення цієї функції:

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow (-5 \leq x < 2) \quad X_1 \subset X$$

Оскільки кожному елементу множини $X=\mathbb{R}$ відповідає не більше одного елемента множини $Y=\mathbb{R}$, то ця відповідальність є функціональною.

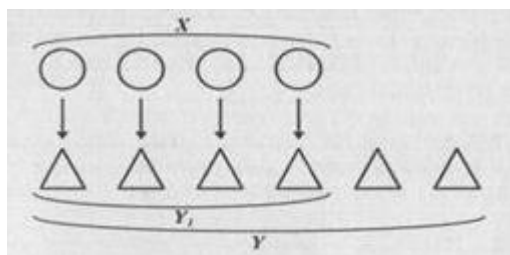
Приклад 4. $y = 2^{x+3}$, де $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Тут $X_1=\mathbb{R}$, тому дана функція є відображенням. Оскільки

$Y_1 = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y > 0\}$, тобто $Y_1 \subset \mathbb{R}$, то це відображення множини X в Y .

Приклад 5. $y = x - 2$, де $x \in \mathbb{R}$.

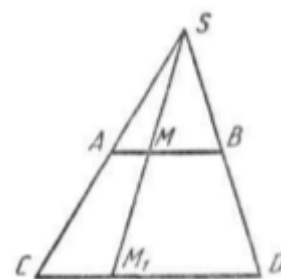
Тут $X_1 = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{R}$, тобто $X_1 = X$, $Y_1 = Y$. Тому це відображення X на Y (або $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$).



Мал.48

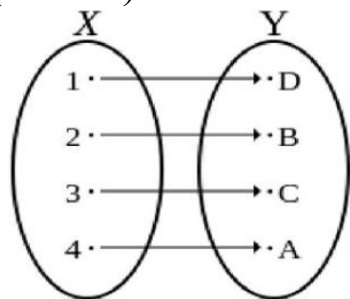
Нехай множина X_1 ($X_1 = X$) відображається в множину Y_1 ($Y_1 \subset Y$) так, що $(\forall x_1)(\forall x_2) [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$, тоді відображення f називають *ін'єктивним* (*взаємно-однозначним відображенням* “в”) (мал.48).

Прикладом ін'єктивного відображення може бути відображення, при якому кожній кожній точці відрізка AB відповідає єдина точка прямої CD (мал.49).



Мал.49

2. Якщо кожному елементу множини X відповідає один і тільки один елемент множини Y , і навпаки, кожному елементу множини Y відповідає один і тільки один елемент множини X , то така відповідність називається *взаємно-однозначною* або *бієктивною* (мал.50).



Мал.50

Отже, для взаємно однозначної відповідності маємо $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ (мал.50). Наприклад, будь-яка неперервна і монотонна функція характеризується взаємно-однозначною відповідністю (наприклад, $y = x - 2$; $y = \frac{3x+2}{7}$).

Рівнопотужні множини

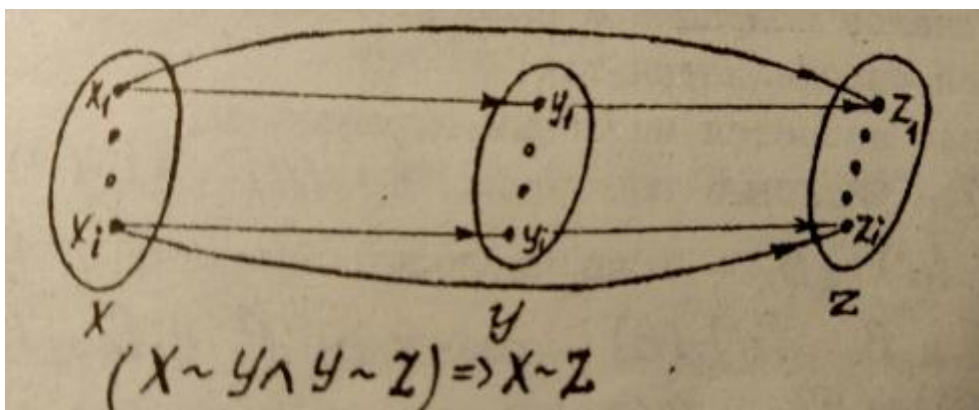
Якщо між елементами двох множин X і Y можна встановити взаємно-однозначну відповідність, то число елементів в них однакове, і такі множини називають *рівнчисельними* або *рівнокількісними* ($X \sim Y$).

Покажемо, що відношення “ X рівнокількісне Y ” є відношенням еквівалентності. Воно має такі властивості:

а) рефлексивність (оскільки кожний елемент $x \in X$ відповідає елементу $x \in X$, то між елементами множин X і X встановлюється взаємно однозначна відповідність, між множинами X і X - бієктивне відображення, $X \sim X$);

б) симетричність (якщо $X \sim Y$, то для кожного елемента x з X є відповідний елемент y з Y і, навпаки. кожному елементу y з Y буде відповідати елемент x з X (при бієктивному відображенні повернули стрілки), то $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$).

в) транзитивність (оскільки при бієктивному відображенні $X \sim Y$ і $Y \sim Z$, кожному елементу x_i з X відповідає певний елемент y_i з Y , а елементу y_i - певний елемент z_i з Z , то бієкція буде встановлена й між множинами X і Z , тому що кожному елементу x_i з X знайдеться відповідний елемент z_i у множині Z (мал.51)



Мал.51

Оскільки відношення “ $X \sim Y$ ” має властивості рефлексивності, симетричності й транзитивності, то воно є відношенням еквівалентності і розбиває сукупність всіх множин на класи еквівалентності, які будуть характеризуватися однаковим числом елементів у множині. Кожному класу еквівалентності можна взаємно однозначно поставити у відповідність певне натуральне число, т.к. поняття “число елементів” виступає як спільна властивість, що характеризує клас еквівалентних або рівнокількісних скінченних множин, що попарно не перетинаються.

Якщо множини нескінченні, то виникає потреба розширити поняття “число елементів множини”, щоб це поняття було характеристикою й нескінченних попарно еквівалентних множин. Таким узагальненням стало поняття “**потужність множини**”, яке було введено основоположником теорії множин Георгом Кантором: $m(A)$ - потужність множини A .

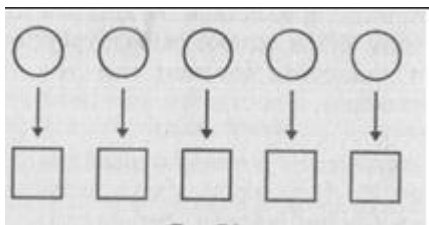
Множини A і B мають одну потужність тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні.

Всі множини, що входять в даний клас еквівалентності, еквівалентні і характеризуються одним і тим же числом елементів, яке

Кантор запропонував називати **кардинальним числом** і позначати як $m(A) = \text{Card}(A)$.

Еквівалентні множини називають ще **рівнопотужними** або рівносілними. Всі вони характеризуються певним кардинальним числом, яке записують за допомогою натурального числа.

У початкових класах взаємо однозначна відповідність широко використовується для формування понять “дорівнює”, “не дорівнює”. За зображенням різноманітних множин на малюнках в підручниках математики дітям пропонують утворити пари (мал.52)

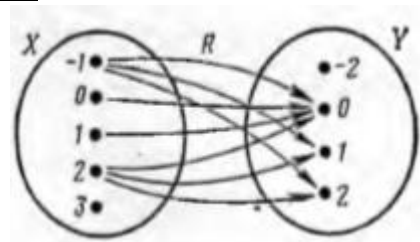


Мал.52

Якщо кожний предмет з множини X має свою пару в множині Y , то кількість елементів в множині X дорівнює кількості елементів в множині Y і мова йде про рівнопотужні множини.

Вправи для самоконтролю

№1. Визначити області відправлення і прибуття бінарної відповідності R , граф якої зображено на мал. 53.



Мал.53

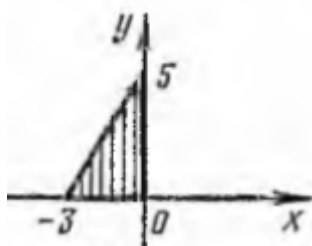
№2. Побудуйте добуток множини $X \times Y$, якщо $X = \{12, 24, 36\}$, $Y = \{1, 2, 4, 6\}$ та знайдіть:

а) графік бінарного відношення $R \equiv "x:y"$,

заданого між вказаними множинами X та Y , і вкажіть тип відношення;

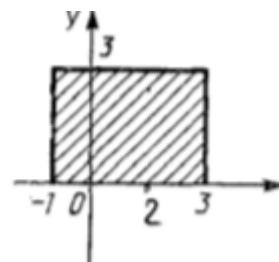
б) побудуйте відношення R^{-1} , обернене відношенню $R \equiv "x:y"$. Знайдіть його графік, область визначення та множину значень. Визначте тип оберненого відношення.

№3. На мал. 54 зображені бінарні відношення R і S , графіки яких позначені штрихованою частиною малюнку. Запишіть обернені бінарні відношення R^{-1} , S^{-1} , а також протилежні відношення $\bar{R}$ і $\bar{S}$ за допомогою нерівностей з двома невідомими. Укажіть їх область визначення і область значень.



R

S



Мал. 54

а

б

№4. Користуючись змістом задач з підручника математики для 1 класу, дайте означення відношенням і об'єктам, зв'язаним цим відношенням. Укажіть протилежні відношення.

а) Богдан накреслив два відрізки. Перший довжиною 9см, а другий 7см. Порівняйте їх.

б) На одній шальці терезів лежить кавун, а на другій – гарбуз і двокілограмова гиля. Що легше - гарбуз чи кавун? Що важче? На скільки кілограмів?



в) У кожної парі чисел запишіть найбільше число: 20 і 10, 17 і 19, 9 і 12, 0 і 10.

№5. Підберіть самостійно з підручників математики для початкових класів приклади, в яких використовується відношення еквівалентності та відношення порядку. Визначить їх властивості. Змініть зміст задач так, щоб для відношення еквівалентності утворилося обернене відношення, а для відношення порядку – протилежне відношення.

№6. Побудуйте граф бінарного відношення xRy " $y = 2x + 1$ ", заданого у множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. З'ясуйте, чи має дане відношення властивості рефлексивності, симетричності, транзитивності.

№7. Визначте властивості бінарних відношень на множині членів вашої родини і вкажіть їх властивості на графі:

а) $xRy \equiv$ "людина x не старіша за людину y "

б) $xQy \equiv$ "людина x вище за ростом за людину y "

№8. Чи можна утворити розбиття множини $X = \{0, 1, 2, \dots, 19, 20\}$ на класи за допомогою бінарного відношення "при діленні на 5 число x має ту ж саме остачу, що й число y "?

№9. З підручників початкової школи підберіть такі вправи, у яких учням пропонується упорядкувати множини за допомогою відношень порядку "більше", "довше", "швидше", "важче". З'ясуйте їх властивості. Визначте, чи є кожне з них відношенням строго або нестрогого порядку.

№10. Які властивості мають наступні відношення у множині цілих чисел Z ? Для відношень еквівалентності графіки відношень побудуйте у прямокутній системі координат:

а) $x + y = 10$

е) $x < 2y$

б) $(x + y) \div 10$

ж) $x + y = 100$

в) $x = y$

з) $(x - y) > 0$

г) $x = 2y$

к) $|x| = |y|$

11. Які з наведених нижче відношень функціональні:

- а) $y = x$ г) $y = ax + b$
б) $y = 2x$ д) $x + y = 10$
в) $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ е) $x \cdot y = 10$

Для всіх відношень $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Чи будуть рівнопотужними множини:

- а) $A = \{x \mid x:2, 0 < x < 20, x \in \mathbb{Z}\}$ і $B = \{x \mid x = 2k, 1 < k < 10, x \in \mathbb{Z}\}$
б) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 5\}$ і $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - 3| \leq 2\}$
в) $A = \{-1, 3\}$ і $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |4 + 3x| - x = |1 + x|\}$

Розділ IV. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ЗНАЧЕННЯ.

РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

§ 1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Числовий вираз являє собою запис, що складається за допомогою чисел, знаків дій та дужок. У загальному вигляді поняття числового виразу визначається так:

1. Кожне число є числовим виразом.

2. Якщо A і B – числові вирази, то $(A)+(B)$; $(A)-(B)$; $(A) \cdot (B)$; $(A):(B)$ – теж є числовими виразами. Вираз $(A)+(B)$ називають сумою A і B , $(A)-(B)$ – різницею A і B , $(A) \cdot (B)$ – добутком та $(A):(B)$ – часткою.

Наприклад, $(27-3):5 + 2$; $208 + 6:4 - 4$.

В математиці користуються такими способами спрощення записів числових виразів:

1) опускають дужки, що містять лише одне число: замість $(5)+(9)$ пишуть $5 + 9$;

2) опускають дужки під час запису суми декількох доданків: замість $((6+8)+9)+12$ пишуть $6+8+9+12$;

3) опускають дужки під час запису добутку декількох множників: замість $(3 \cdot 9) \cdot 14$ пишуть $3 \cdot 9 \cdot 14$;

4) якщо вираз містить декілька операцій додавання та віднімання, які виконуються за порядком їх запису зліва направо, то дужки опускають: наприклад, замість $((8-3)+9) - 11$ пишуть $8-3+9 - 11$. За іншим порядком виконання дій дужки опускати не можна: наприклад, $(7 - (4-2)) + 3 \neq 7 - 4 - 2 + 3$;

5) якщо вираз містить декілька операцій множення і ділення, що виконуються за порядком їх запису зліва направо, то дужки опускаються: наприклад, замість $((27:3) \cdot 2):6$ пишуть $27:3 \cdot 2:6$.

6) Якщо перед дужками, що містять лише операції множення і ділення, стоїть знак «+» або «-», то ці дужки можна опустити: наприклад, замість $28 + ((18:2) \cdot 3)$ пишуть $28 + 18:2 \cdot 3$;

7) домовилися спочатку виконувати дії другого ступеня (множення і ділення), а потім першого ступеня (додавання і віднімання).

Правило 1. Якщо числовий вираз не має дужок, то треба розбити його на частини, відокремлені одна від одної знаками додавання і віднімання, та обчислити значення кожної такої частини, виконуючи операції множення і ділення за порядком зліва направо. Після цього, замінивши кожну частину її значенням, знаходять значення виразу,

виконуючи операції додавання і віднімання за порядком зліва направо. Наприклад, $28:2-18:9+12\cdot4$

$$1) 28:2=14; \quad 2) 18:9=2; \quad 3) 12\cdot4=48; \quad 4) 14-2+48=60.$$

Правило 2. Якщо числовий вираз містить дужки, то потрібно взяти частини виразу, що знаходяться в дужках і не мають інших дужок, знайти їх значення за правилом 1 і замінити одержаним виразом, опустивши дужки. Якщо після цього одержимо вираз без дужок, необхідно обчислити його за правилом 1, інакше – знов застосувати правило 2.

Після виконання дій, які зазначені в запису виразу, одержимо число, яке називають *значенням числового виразу*.

Наприклад, треба обчислити значення виразу, використовуючи правила 1 і 2: $((36:2 - 14) \cdot (42:2 - 14) + 20):2$.

$$\text{Спочатку знаходимо, що: } 36 : 2 - 14 = 18 - 14 = 4$$

$$42 : 2 - 14 = 84 - 14 = 70.$$

Замінімо $36:2-14$ і $42:2-14$ їх значеннями, одержимо:

$$(4\cdot70 + 20):2 = (280 + 20) : 2 = 300:2 = 150.$$

Зазначимо, що не будь-який числовий вираз має значення. Так, наприклад, вирази $12 : (8-2\cdot4)$ та $\sqrt{18 - 25}$ не мають значень на множині дійсних чисел, тому що у першому виразі не можна виконати ділення на нуль, а в другому – добути корінь другого степеня з від’ємного числа.

Якщо значення двох числових виразів збігаються, то говорять, що ці *числові вирази рівні*. Наприклад, дані вирази є рівними: $7+12$ і $2\cdot8+3$; $48:6$ і $13-5$.

Вправи для самоконтролю

№1. Визначити, які із записів є числовими виразами:

$$\text{а) } 8\cdot72 - 5 \quad \text{в) } 38+25 - 44+13$$

$$\text{б) } (45-3)\cdot7 \quad \text{г) } 17 > (3+5)\cdot2$$

№2. Які з даних числових виразів мають значення на множині R:

$$\text{а) } \frac{8,31,2+4,2}{\left(3\frac{3}{5}-2\frac{1}{15}\right)5-7\frac{2}{3}}$$

$$\text{б) } \frac{5,62,1-11,76}{\left(5-3\frac{2}{3}\right)6-7,9}$$

Учні початкових класів починають знайомство з числовими виразами ще в 1 класі. Спочатку це вирази виду: $2+1$; $4-1$; $3-2$ і т.п. Пізніше з’являються більш складні числові вирази, за допомогою яких учні записують розв’язок задач; є завдання на знаходження значень числових виразів або на порівняння числових виразів.

Розглянемо задачу з підручника математики 2 класу.

Задача. На базі було 50 соснових і 30 березових колод. 70 розпиляли на дошки. Скільки колод залишилось на базі?

Для розв'язання задачі складають числовий вираз $(50+39)-70$, в якому вказують, які дії потрібно виконати над даними в задачі числами, а потім виконують дії, тобто дається програма обчислення відповіді. Після виконання цієї програми учні одержують значення числового виразу: $50+30-70 = 10$.

Наведемо приклади з шкільних підручників, які пов'язані з введенням поняття «числовий вираз».

1) Знайти вирази, значення яких дорівнює 47;

$$35+12 \qquad 40 - 10 + 17$$

$$100 - (50 - 30) \qquad 47 + 10 + 1$$

2) Задача. Перша ланка піонерів висадила 14 яблунь, а друга – на 5 яблунь більше. Що можна дізнатися, якщо обчислити числові вирази: $14+5$ та $14+(14+5)$?

3) Склади задачу за виразом: $40 - (23 + 7)$.

4) Запиши вирази і знайди їх значення: а) зменшити 72 на 9; б) збільшити 84 на 8; в) з 48 відняти суму чисел 7 і 6.

5) Запиши числові вирази та обчисли їх значення: а) суму чисел 8 і 16 розділити на 4; б) число 4 помножити на різницю чисел 20 і 12; в) різницю чисел 40 і 12 зменшити у 4 рази.

6) Прочитай вирази і знайди їх значення:

$$10 \cdot (30 - 24) \qquad 8 \cdot (28:7) \qquad (22 + 14):14$$

§2. ЧИСЛОВІ РІВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай є два числових вирази A і B . З'єднаємо їх знаком « $=$ » (знак рівності). Одержимо деяке висловлення, що називається **числовою рівністю**: $A=B$. Це висловлення може бути істинним або хибним. Рівність $A=B$ вважають істинною, якщо обидва вирази мають рівні числові значення. Наприклад, рівність $7+5 = 4 \cdot 3$ – істинна, а рівність $15+12 = 4 \cdot 7$ – хибна. Хибна рівність $6:(2-2) = 5$, тому що вираз $6:(2-2)$ не має сенсу.

Розглянемо **властивості істинних числових рівностей**. Нехай $A=B$ – істинна числова рівність, C – будь-яке дійсне число. Відношення рівності числових виразів має властивості:

1) рефлексивність ($A = A$);

2) симетричність ($A = B$, то $B = A$);

3) транзитивність (якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$).

Отже, відношення «бути рівним» на множині числових виразів є відношенням еквівалентності. Тому множина всіх числових виразів

розбивається на класи еквівалентності, що складаються з виразів, які мають одне і те ж числове значення. Наприклад, в один і той же клас еквівалентності потрапляють вирази $5+1$; $9-3$; $2 \cdot 3$; $12:2$ та ін.— всі вони мають значення 6.

4) монотонність відносно операції додавання: якщо до обох частин істинної числової рівності додати або відняти одне й те ж число або числовий вираз, то знов одержимо істинну числову рівність:

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$$

Наприклад, $14 - 7 = 21:3$ — істинна рівність, тоді $14-7+5 = 21:3+5$ — також істинна рівність, тому що значення числових виразів у правій і лівій частинах рівності однакові: $12 = 12$.

Ця властивість дає можливість переносити числа з однієї частини рівності в іншу з протилежним знаком.

5) монотонність відносно операції множення: якщо обидві частини істинної рівності помножити або поділити на одне і те ж число $C \neq 0$, то одержимо істинну рівність:

$$A = B \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C, C \neq 0;$$

$$A = B \Leftrightarrow A : C = B : C, C \neq 0.$$

Наприклад, $5 \cdot 4 = 28 - 8$ — істинна рівність, тоді $5 \cdot 4 \cdot (-3) = (28-8) \times (-3)$ — істинна рівність, тому що $-60 = -60$.

Над числовими рівностями, як і над будь-якими висловленнями, можна виконувати операції кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, заперечення. Наведемо приклади.

а) Висловлення « $9 + 3 = 12 \wedge 13 \cdot 2 = 26$ » - істинне, тому що істинні висловлення, які входять в кон'юнкцію.

б) Висловлення « $4 + 3 = 6 \vee 7 + 1 = 8$ » - істинне, тому що істинне хоча б одне з висловлень, що входять в диз'юнкцію.

в) Висловлення « $4 + 3 = 6 \Rightarrow 4 + 6 = 11$ » - істинне як імплікація двох хибних числових рівностей.

г) Запереченням висловлення « $7 \cdot 8 = 54$ » є висловлення « $7 \cdot 8 \neq 54$ ». Перше висловлення — хибне, а друге — істинне.

б) Якщо істинні рівності $A=B$ і $C=D$, де A, B, C, D — числові вирази, то за умови, що виконуються відповідні операції, істинні й рівності:

$$A + C = B + D$$

$$A \cdot C = B \cdot D$$

$$A - C = B - D$$

$$A : C = B : D$$

У початкових класах істинні числові рівності називають правильними числовими рівностями, хибні — неправильними. Ці поняття допомагають учням не тільки удосконалювати обчислювальні навички, а й глибше вивчити теоретичний матеріал, пов'язаний з

теорією еквівалентності рівнянь. Здійснюють це при виконанні різних вправ. Наприклад, таких:

1) Які приклади розв'язані неправильно? Постав у цих прикладах дужки так, щоб відповіді були правильними:

$$18 - 3 - 7 = 8$$

$$19 - 13 - 6 = 12$$

$$17 - 3 + 6 = 8$$

$$14 - 5 - 2 = 7$$

2) Знайди приклади, які мають відповідь 25:

$$2 \cdot 9 + 6$$

$$18 : 2 + 11$$

$$3 \cdot 9 - 12$$

$$9 \cdot 4 - 11$$

$$4 \cdot 8 - 7$$

$$18 : 3 + 24$$

3) Встав замість «віконечка» знаки «+» або «-», щоб вийшли правильні рівності:

$$15 \square 3 = 12$$

$$40 \square 8 = 52$$

$$16 \square 9 = 7$$

$$13 \square 5 = 8$$

4) Постав, де треба, дужки так, щоб вийшли правильні рівності:

$$76 - 20 + 5 = 51$$

$$53 - 18 - 15 = 20$$

$$64 + 36 - 75 = 25$$

5) Перевір обчислення, чи правильні такі рівності:

$$8 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = (8 + 7) \cdot 3$$

$$17 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = (17 + 3) \cdot 2$$

§ 3. ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Два числові вирази А і В, з'єднані знаками «менше» (<) або «більше» (>), називають нерівністю $A < B$ або $A > B$.

Нерівність $A < B$ будемо вважати істинною, якщо А і В мають числові значення, причому числове значення виразу А менше числового значення виразу В і числове значення виразу А менше числового виразу В. Наприклад, нерівність $(18 - 3) : 5 < 3 + 4$ істинна, тому що $(18 - 3) : 5$ має значення 3; а $3 + 4$ має значення 7, і $3 < 7$.

Для будь-яких дійсних чисел а і b істинним є одне і лише одне з відношень: $a = b$; $a > b$; $a < b$.

У середній школі надається така ознака відношення «>» і «<» між числами а і b:

1) $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $(a - b)$ – додатне число;

2) $a < b$ тоді і тільки тоді, коли $(a - b)$ – від'ємне число.

Розглянемо ряд *властивостей істинних числових нерівностей* (наприклад, для відношення «бути менше»).

1. Якщо $a < b$, то $b > a$. Дійсно, тому що $a < b$, то $(a - b)$ – від'ємне число, тоді протилежне йому число – $a - b$ – додатне. Звідки $(b - a)$ – додатне число, тобто $b > a$.

2. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$. Дійсно, тому що $a < b$ і $b < c$, то $(a - b)$ і $(b - c)$ – від’ємні числа. Але тоді $(a - b) + (b - c)$ – від’ємне число (як сума двох від’ємних чисел). Звідси $(a - c)$ – від’ємне число. Тому $a < c$.

3. Якщо $a < b$, то для будь-якого «с» $a + c < b + c$ (властивість монотонності відносно додавання). Дійсно, тому що $a < b$, то $(a - b)$ – від’ємне число. Але тоді $(a + c) - (b + c)$ – теж від’ємне число, тому $a + c < b + c$.

Наслідок. З однієї частини нерівності можна переносити доданки в іншу частину, змінюючи при цьому їх знак на протилежний.

4. Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$ (властивість монотонності нерівності відносно множення). Тому що $a < b$, то $(a - b)$ – від’ємне число, тоді $(a - b) \cdot c$ – теж від’ємне число (як добуток від’ємного і додатного чисел), тобто $ac < bc$.

5. Якщо $a < b$ і $c < 0$, то $ac > bc$. Дійсно, тому що $a < b$, $(a - b)$ – від’ємне число, тому $(a - b) \cdot c$ – додатне (як добуток двох від’ємних чисел). Тоді $(ac - bc)$ – додатне число, а значить $ac > bc$.

6. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$. З умови маємо, що $(a - b)$ і $(c - d)$ – від’ємні числа. Але тоді $(a - b) + (c - d)$ – від’ємне число (як сума від’ємних чисел). Звідки $(a + c) - (b + d)$ – теж від’ємне число. Тому $a + c < b + d$.

7. Якщо $a < b$ і $c > d$, то $a - c < b - d$. Оскільки $c > d$, то $-c < -d$ (властивість 5). Маємо $(a - b)$ і $(-c + d)$ – від’ємні числа, тоді $(a - b) + (-c + d)$ – від’ємне число (як сума від’ємних чисел). Звідки $(a - c) - (b - d)$ – теж від’ємне число. Тобто $a - c < b - d$.

8. Якщо a, b, c і d – додатні числа, $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$. Тому що $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$. Аналогічно $cb < bd$. Тоді $ac < bd$ (властивість 4).

Наслідок 1. Нерівність з додатними числами не порушиться, якщо обидві його частини піднести до степеня з одним і тим же натуральним показником. Наприклад: а) $5^2 > 2^2$; б) $\frac{3}{4} < 1$, тому $(\frac{3}{4})^3 < 1^3$.

Наслідок 2. Якщо з обох частин істинної числової нерівності з невід’ємними частинами вилучити арифметичний корінь, то одержимо істинну числову нерівність того ж знака. Наприклад: якщо $4 > 0$, то $2 > 0$.

9. Якщо $a < b$ – істинна числова нерівність, де a і b мають однакові знаки, то істинною є нерівність $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Щоб це довести, достатньо довести, що $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ або $\frac{b-a}{ab}$ – додатне число. Дійсно, за умовою $a < b$, тоді $b - a > 0$, тобто $(b - a)$ – додатне число.

Крім того, $a \cdot b$ – додатне число як добуток чисел з однаковими знаками. Отже, що $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ або $\frac{b-a}{ab}$ – додатне число.

Якщо a, b, c і d – додатні числа, $a < b$ і $c > d$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. Дійсно, якщо $c > d$, то $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$ (властивість 9). Тоді $a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{d}$ (властивість 8), тобто $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. Наприклад, якщо $16 > 8$ і $2 < 4$, то $8 > 2$.

Поряд з відношеннями $a > b$ і $a < b$ розглядають й відношення $a \leq b$ і $a \geq b$. Нерівність $a \leq b$ є диз'юнкцією висловлень $a < b$ і $a = b$ і тому істинна, якщо істинна хоча б одна з них:

$$a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b).$$

Аналогічно $a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$. Наприклад, нерівність $5 \leq 5$ істинна тому, що $5 = 5$. Нерівність $4 \leq 3$ хибна тому, що висловлення $4 < 3$ і $4 = 3$ хибні.

Подвійна нерівність $a < b < c$ є кон'юнкцією нерівностей $a < b$ і $b < c$. Вона істинна лише за умови, що істинні обидві нерівності. Наприклад, подвійна нерівність $5 < 9 < 11$ істинна, тому що істинні нерівності $5 < 9$ і $9 < 11$. А подвійна нерівність $5 < 11 < 9$ – хибна, тому що нерівність $11 < 9$ – хибна.

Кон'юнкція нерівностей $(a \geq b) \wedge (a \leq c)$ є подвійною нерівністю: $b \leq a \leq c$. Аналогічно, $(a > b) \wedge (a \leq c) \Leftrightarrow b < a \leq c$,
 $(a \geq b) \wedge (a < c) \Leftrightarrow b \leq a < c$

Усі розглянуті властивості відношень «менше», «більше» для дійсних чисел переносяться на числові нерівності $A > B$, $C < D$, які є висловленнями, тому над ними можна виконувати логічні операції кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації. Так, нерівність $A \leq B$ є диз'юнкцією $A < B$ і $A = B$: $A \leq B \Leftrightarrow (A < B) \vee (A = B)$

Наприклад, істинно, що $(2 \cdot 4 + 15) \cdot 2 \leq 35 + 19$, оскільки значення виразу $(2 \cdot 4 + 15) \cdot 2 = 46$, а значення виразу $35 + 19 = 54$ і нерівність $46 < 54$ – істинна.

Вираз $A < B < C \Leftrightarrow (A < B) \wedge (B < C)$ – істинний, коли істинні обидві нерівності $A < B$ і $B < C$. Наприклад, істинно, що $16 + 4 < 125 : 5 < 3 \cdot 10$. Дійсно, значення $16 + 4 = 20$; $125 : 5 = 25$; $3 \cdot 10 = 30$. Оскільки $20 < 25$ і $25 < 30$, то подвійна нерівність істинна.

Вправи для самоконтролю

№1. Порівняти значення числових виразів і поставити один із знаків «>» або «<» так, щоб числова нерівність була правильною:

$$32,8 : 0,5 + 17 \text{ і } 53,8 + 12,6 - (17,3 - 4,2)$$

№2. Записати висловлення у вигляді кон'юнкції або диз'юнкції висловлень і знайти їх значення істинності:

а) $-28 \geq 14$

в) $18 \leq 18$

б) $32 < 24 < 48$

г) $33 < 35 \leq 52$

У підручниках математики для початкових класів розглядаються різні вправи, пов'язані з поняттям нерівності. Так, учням 1 класу пропонуються такі вправи:

1) Порівняй числа 7 і 6; 4 і 7; 7 і 5; 6 і 7.

2) У кожній парі чисел назви більше число 15 і 17; 20 і 19; 1 дм і 10 см; 13 см і 1 дм 5 см.

3) Порівняй значення числових виразів:

$$2 \cdot 5 \square 8$$

$$14 - 5 \square 2 \cdot 5$$

$$2 \cdot 7 \square 17$$

$$16 - 8 \square 8 : 2$$

4) Добери число, щоб записи були правильними:

$$2 \cdot 9 > 12 + \square$$

$$16 : 2 > 5 + \square$$

$$3 \cdot 7 < 30 - \square$$

$$18 : 2 < 7 + \square$$

5) Впиши вирази, між якими треба поставити знак «>»:

$$40 - 5 \square 35$$

$$100 - 3 \square 99$$

$$50 - 2 \square 49$$

$$40 - 8 \square 31$$

$$60 - 3 \square 47$$

$$80 - 8 \square 81$$

§ 4. ВИРАЗ ЗІ ЗМІННОЮ, ЙОГО ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ТОТОЖНІСТЬ

Часто зустрічаються вирази, які містять не лише числа, а й букви. Вони називаються **виразами зі змінною**. З такими виразами діти зустрічаються вже з 1 класу, коли мають справу з виразами, що містять «віконце». Наприклад, завдання з «віконечком»: « $\square + 2$ ». Підстав у віконце по черзі числа 1, 2, 3, 4 і обчисли значення виразу». Фактично діти працюють з виразом зі змінною, для якого вказано область визначення (числа 1, 2, 3, 4). Далі замість віконця у виразі з'являється буква. Після підстановки у вираз зі змінною замість змінної її закінчення одержуємо числовий вираз. Якщо він має числове значення, то говорять, що вираз зі змінною визначено при заданих значеннях змінної.

Наведемо декілька прикладів з підручника математики 2 класу.

1) $8+1$

Який доданок не змінюється?

$$8+2$$

Який доданок змінюється?

$$8+3$$

Позначимо другий доданок буквою «а»:

$$\underline{8 + a.}$$

якщо $a = 1$, то $8 + a = 9$;
 якщо $a = 2$, то $8 + a = 10$
 Знайди $8 + a$ при $a = 3$, $a = 4$.

2) Обчисли:

a	$9 + a$	$12 - a$
1	10	
0		
3		

3) Обчисли значення виразу $a : 6$, якщо $a = 42$, $a = 54$, $a = 0$.

4) Знайди значення суми « $a + b$ », якщо $a = 16$, $b = 37$.

5) Задача. У шкільному садку a яблунь, а груш на b менше. Скільки всього яблунь і груш у садку? Запиши задачу виразом і знайди відповідь при $a = 21$, $b = 7$.

У середній школі зустрічаються вирази зі змінними, які містять по декілька змінних. Наприклад, потрібно знайти числове значення виразу $\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^2 - 18a^4b + 2b^5}$ при $a = \frac{1}{3}$, $b = 0,5$.

Перш за все необхідно спростити даний вираз, виконавши тотожні перетворення, а потім підставити значення a і b та знайти числове значення виразу:

$$\frac{a(3a^2 + b^2) - 2b(3a^2 + 2b^2)}{9a^4(a - 2b) - b^4(a - 2b)} = \frac{(3a^2 + b^2)(a - 2b)}{(a - 2b)(9a^4 - b^4)} = \frac{(3a^2 + b^2)}{(3a^2 - b^2)(3a^2 + b^2)} = \frac{1}{3a^2 - b^2}$$

Якщо $a = \frac{1}{3}$, $b = 0,5$, то $= \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12$

Якщо кожену букву у виразі зі змінною замінити її числовим значенням (часто множина значень змінної співпадає з усією множиною дійсних чисел), то одержимо числовий вираз. Якщо він має числове значення, то говорять, що вираз зі змінними визначений при заданих значеннях змінних. А одержане числове значення називають значенням виразу при цих значеннях змінних.

Вираз зі змінною не можна назвати ні висловленням, ні предикатом. Дійсно, про вираз « $x + 8$ » не можна сказати істинний він чи хибний, тому « $x + 8$ » не є висловленням. А після підстановки замість x числових значень одержимо різні числові вирази, значенням яких є деякі числа. Вираз зі змінною позначають так: $f(x)$, $g(x)$ або $A(x)$, $B(x, y)$.

Розглянемо на множині всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ вираз $f(x) = 7x^2 + x - 4$. Яке б дійсне число $x = x_0$ ми не взяли, йому буде відповідати єдине значення числового виразу: $7x_0^2 + x_0 - 4$. Так, при $x = 1$ $f(x) = 4$, а при $x = -5$ $f(x) = 166$.

Вираз $\varphi(y) = 3y(y-9)$ на множині всіх дійсних чисел при $y = 9$ перетворюється на числовий вираз $3 \cdot 9 : (9 - 9)$, який не має значення, тобто при $y = 9$ вираз $3y : (y - 9)$ не має сенсу. При всіх інших значеннях змінної $y \in \mathbb{R}$ вираз $\varphi(y)$ перетворюється на числовий вираз, значення якого існує.

Вираз $f(x) = \sqrt{x - 6}$, заданий на множині всіх дійсних чисел, не має сенсу при значеннях $x < 6$.

Якщо на множині X заданий вираз $f(x)$, то множину значень, які приймає змінна x , щоб вираз $f(x)$ мав сенс, називають **множиною допустимих значень змінної** або **областю визначення даного виразу $f(x)$** .

Так, областю визначення виразу $7x^2 + x - 4$ є множина всіх дійсних чисел, а множиною допустимих значень змінної y у виразі $\frac{3y}{y-9}$ є множина всіх дійсних чисел, крім числа 9; область визначення виразу $\sqrt{x - 6}$ – множина дійсних чисел $x \in [6; +\infty]$.

Якщо вираз містить дві змінні x і y , то область його визначення – множина пар чисел $(x; y)$, при яких цей вираз має сенс. Наприклад, область визначення виразу $\frac{15}{x-y}$ складається з усіх пар чисел $(x; y)$, таких, що $x \neq y$.

Іноді область визначення вказується (наприклад, у прикладі з «віконцем»), іноді визначається за сенсом (наприклад, кількість яблунь і груш, про які йдеться в задачі, може бути тільки натуральним числом). Якщо вираз містить 3 букви, то під його областю визначення розуміють множину упорядкованих трійок, таких, що при підстановці їх одержимо числовий вираз, який має значення. Наприклад, область визначення виразу « $(3a + b) \cdot \sqrt{c}$ » складається з трійок $(a; b; c)$, де $c \geq 0$.

Частіше за все область визначення виразу зі змінною потрібно вміти знаходити. Це неважко зробити, якщо знати певні положення.

Областю визначення виразу з однією змінною $f(x)$ є вся множина дійсних чисел, окрім таких випадків:

1. Нехай вираз зі змінною має вигляд $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, тоді $f(x) \neq 0$.

2. Якщо вираз зі змінною має вигляд $\sqrt{f(x)}$, то $f(x) \geq 0$.

3. Для виразу $\log_{(x)} f(x)$ маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

4. У випадку, коли змінна знаходиться під знаком тангенсу: $\operatorname{tg}(f(x))$, то $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + n$, $n \in \mathbb{Z}$; або під знаком катангенсу $\operatorname{ctg}(f(x))$, то $f(x) \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад. Знайти область визначення виразу $\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \frac{7}{x+2}$. Оскільки змінна знаходиться під знаком кореня парного степеня та у знаменнику, то $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x+2 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \neq -2 \end{array} \right.$

Відповідь: $[1; +\infty)$.

Нам часто доводиться перетворювати вирази зі змінною, тобто замінювати один вираз іншим. При цьому необхідно стежити за тим, щоб область визначення не змінювалась, щоб виконувалися тотожні перетворення.

З курсу середньої школи відомо, що два вирази зі змінною $f(x)$ і $\varphi(x)$ називаються **тотожньо рівними**, якщо вони мають однакові значення при будь-яких допустимих значеннях змінних.

До тотожніх перетворень відносять: формули скороченого множення, приведення спільних доданків, розкладання на множники, розкриття дужок, скорочення дробу на вираз, не рівний нулю при допустимих значеннях букв. Наприклад, вираз $\sqrt{a^2}$ і a при $a \in \mathbb{R}$ не тотожно рівні, хоча їх області визначення однакові, тому що при $a \leq 0$ перший вираз невід'ємний, а другий вираз – від'ємний.

Тотожно рівні вирази утворюють **тотожність**. Наприклад, $(\forall a, b) (a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2)$, $(\forall a, b) (a + 2b - 3a = 2b - 2a)$.

У математиці розглядають тотожності, що містять дві, три і більше змінних. Наведемо тотожності, що виражають основні властивості дій над дійсними числами, тотожності скороченого множення.

$$(\forall a) (\forall b) (a + b = b + a)$$

$$(\forall a) (\forall b) (\forall c) ((a + b) + c = a + (b + c))$$

$$(\forall a) (a + 0 = a)$$

$$(\forall a) (a + (-a) = 0)$$

$$(\forall a) (\forall b) (ab = ba)$$

$$(\forall a) (\forall b) (\forall c) ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)).$$

$$(\forall a) (a \cdot 1 = a)$$

$$(\forall a) (a \cdot 0 = 0)$$

$$(\forall a) (\forall b) (\forall c) ((a + b) \cdot c = ac + bc)$$

$$(\forall a) (\forall b) ((a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2) \text{ і т.д.}$$

Заміну буквеного виразу тотожньо йому рівним називають **тотожнім перетворенням** цього виразу. Будь-який вираз, що містить лише одну змінну і операції додавання, віднімання і множення (цілий раціональний вираз від x), можна тотожно перетворити до виду:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Будь-який вираз від x , що містить додавання, віднімання, множення і ділення, можна тотожно привести до виду:

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$$

У підручнику математики для 3 класу поряд з обчисленням значень виразів при певному значенні змінної дані приклади тотожно рівних виразів. Наприклад, вправи виду:

$$\begin{array}{lll} 1) \text{ Поясни, чому рівні значення виразів при будь-яких значеннях} & & \\ \text{змінної: } a + 15 \text{ і } 16 + a & 15 \cdot (8 \cdot k) \text{ і } 120 \cdot k & \\ 16 \cdot x \text{ і } x \cdot 16 & 3 \cdot (b + 8) \text{ і } 3b + 24 & \end{array}$$

Ці приклади є початковою ланкою в серії завдань на тотожні перетворення в старших класах. Для того, щоб найбільш повно оволодіти поняттям тотожно рівних виразів, пропонуємо такі

Вправи для самоконтролю

№1. Знайди значення виразу, спочатку тотожньо перетворивши його:

$$\frac{1}{2x-2} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2x+2} \text{ при } x = 3.$$

№2. Доведи тотожності:

$$1) (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2;$$

$$2) \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0.$$

№3. При яких значеннях x є тотожностями рівності:

$$1) \frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)} = x + 2$$

$$2) 7x + 5 + \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-8} = 7x + 5.$$

§ 5. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ

Відповідності можуть бути задані на різних множинах, тому і функції як окремий випадок відповідності також можуть мати область визначення і область значення різні множини.

В курсі математики в основному розглядають числові множини.

Означення. Якщо функціональну відповідність встановлено між елементами числових множин, то таку функцію називають **числовою функцією**.

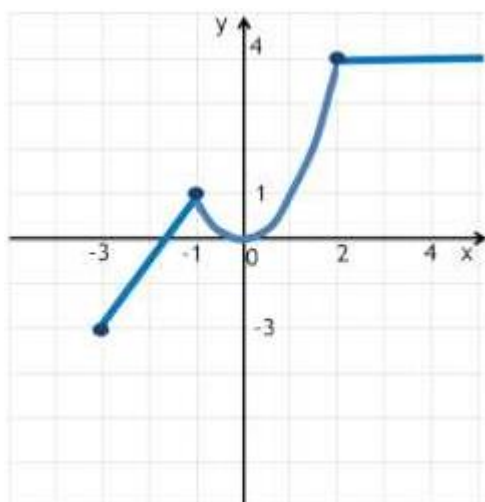
Оскільки числову функцію можна представити як окремий випадок відповістей між елементами двох множин, то й способи її задання ті ж саме, що й для відповістей. Найзручніші способи задання числової функції - аналітичний, графічний і табличний.

Аналітичний спосіб передбачає задання функції формулою, що показує, які операції і в якій послідовності виконуються над аргументом x , щоб знайти значення функції $y = f(x)$. Якщо при цьому не вказана область визначення функції $D(y)$, то це означає, що вона співпадає з областю існування формули. Наприклад, для функції $y = \sqrt{1-x}$ $D(y) = (-\infty; 1]$.

Графічний спосіб задання функції найнаочніший.

Означення. **Графіком функції** $y = f(x)$ називається множина точок $(x; y)$, де $x \in D(y)$, $y = f(x)$.

Найчастіше графік функції $y=f(x)$ являє собою деяку криву у прямокутній системі координат. Наприклад, графік функції, заданої кусочно, наведений на мал.55.



$$y = \begin{cases} 2x+3, & -3 \leq x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 2 \\ 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Табличний спосіб задання функції - це множина упорядкованих пар $(x; y)$, де $x \in D(y)$, $y = f(x)$. На практиці при вивченні будь-якого процесу одержують результати у вигляді пар чисел, які записують у таблицю.

Мал.55

Наприклад, залежність між вартістю купленої тканини та кількістю купленого матеріалу x при постійній ціні за 1 м можна задати за допомогою таблиці:

x	1м	2м	3м	
y	2 грн.	4 грн.	6 грн.	

У початковій школі широко використовується *словесний спосіб* задання функції. Розглянемо, наприклад, задачу: “За книгу й ручку заплатили 38 коп. Скільки коштує ручка, якщо книга коштує а) 36 коп.; б) 30 коп.; в) 15 коп.?” Тут кожному значенню вартості книги відповідає своє значення вартості ручки. Позначимо вартість книги буквою x , а вартість ручки буквою y , одержимо $x+y=38$, або $y = 38-x$.

Часто розглядають три величини, одна з яких дорівнює добутку двох інших. Так, наприклад, в початкових класах зустрічаються такі задачі:

- на рівномірний рух (тут шлях дорівнює добутку швидкості на час руху: $S = V \cdot t$);
- на вартість товару, яка дорівнює добутку його ціни на кількість;
- на знаходження периметру правильного n - кутника по довжині його сторони a : $P=a \cdot n$.

Залежність цих величин можна виразити рівністю: $y = x \cdot z$.

Нехай одна із змінних, наприклад z , постійна. Тоді одержимо функцію $y=kx$. У цьому випадку говорять, що величина x *прямо пропорційна* величині y . Для того, щоб знайти k - **коефіцієнт пропорційності**, достатньо знати одну пару $(x_0; y_0)$ відповідних значень x і y , відмінну від пари $(0;0)$. Наприклад, при постійній швидкості ($V=const$), яка є коефіцієнтом пропорційності, пройдений шлях пропорційний часу руху ($S=V \cdot t$). Тому, щоб знайти швидкість, достатньо знати пройдений шлях і час руху. Так, якщо автобус за 2 год проїхав 100 км, то його швидкість дорівнює $100:2= 50$ (км/год). Тут $y=50x$.

Пряма пропорційність - окремий випадок загального поняття лінійної залежності між величинами. Наприклад, нехай потрібно визначити, на якій відстані від пункту А буде знаходитись через x годин автобус, що вийшов з пункту В зі швидкістю 60 км/год, якщо відстань між пунктами А і В дорівнює 30 км. Шукана відстань буде виражатися формулою $y = 60x+30$. Ця формула є окремим випадком формули $y=kx+b$, яку називають **лінійною функцією**.

Нехай в рівності $y=xz$ змінна y постійна і дорівнює k . Тоді отримаємо функцію $k = xz$, з чого маємо $z = \frac{k}{x}$. У цьому випадку

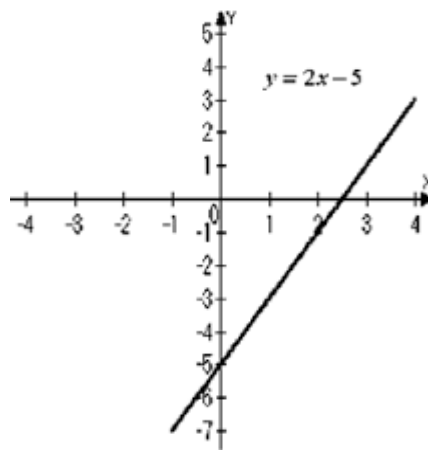
говорять, що величини x і z **обернено пропорційні**, тому що із збільшенням однієї величини в a разів друга величина зменшується у стільки ж разів. Для того, щоб знайти k , достатньо знати одну пару $(x_0; z_0)$ відповідних значень x і z , відмінну від пари $(0; 0)$. Наприклад, при постійній відстані ($S = \text{const}$), яка є коефіцієнтом пропорційності, швидкість обернено пропорційна часу проходження цієї відстані ($V = \frac{S}{t}$). Тому відстань, пройдена, наприклад, за 6 год зі швидкістю 60 км/год, дорівнює $S = 60 \cdot 6 = 360$ км. Цю відстань зі швидкістю 40 км/год буде пройдено за 9 год, а зі швидкістю 90 км/год - за 4 години. Тут $z = \frac{60}{x}$ або $y = \frac{60}{x}$.

Висновки: 1. Якщо дві величини знаходяться **в прямо пропорційній залежності**, то у скільки разів збільшується (зменшується) одна величина, у стільки ж разів збільшується (зменшується) інша величина.

2. Якщо дві величини знаходяться **в обернено пропорційній залежності**, то у скільки разів збільшиться (зменшиться) одна величина, у стільки ж разів зменшиться (збільшиться) інша величина.

При розгляді числових функцій часто використовують одночасно усі способи їх задання, що дозволяє більш докладно вивчати властивості функцій.

Приклад 1. Розглянемо лінійну функцію $y = kx + b$. Її графік є пряма лінія, що відсікає на осі Oy відрізок, рівний “ b ”, і утворює з додатнім напрямком осі Ox кут α , для якого $\text{tg} \alpha = k$. Наприклад, для функції $y = 2x - 5$ $b = -5$, $k = 2$ (мал. 56). Для лінійної функції $D(y) = R$, $E(y) = R$.



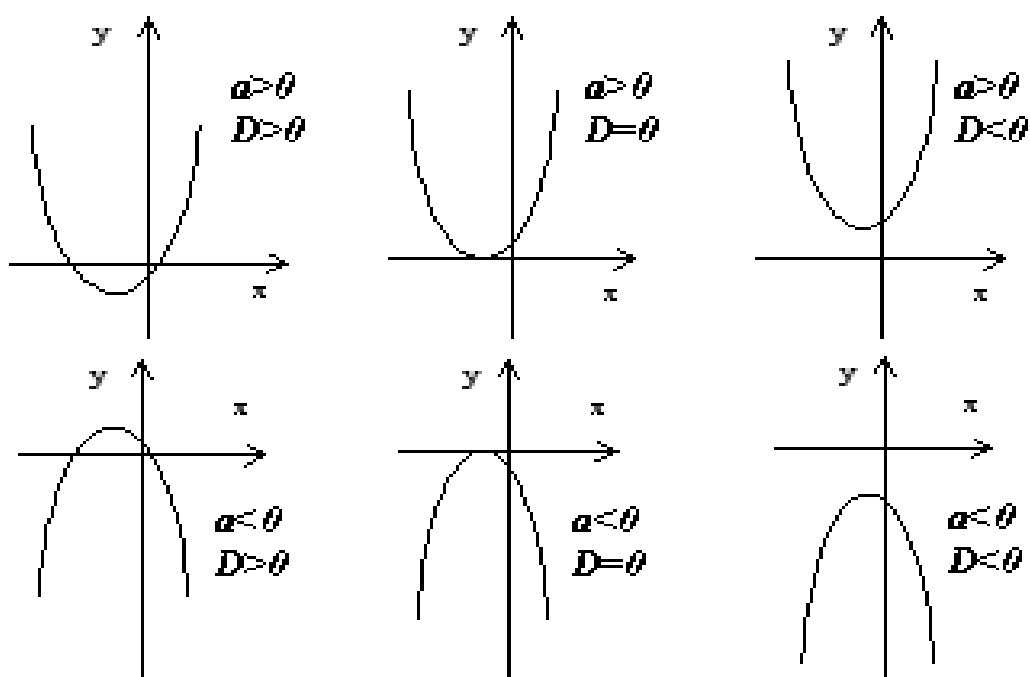
Приклад 2. Розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Її графік являє собою параболу з координатами вершини $(-\frac{b}{2a};$

$\frac{b^2 - 4ac}{4a})$. Якщо $a > 0$, то вітки параболи направлені вгору,

Мал.56

якщо $a < 0$ - униз. Якщо $D = b^2 - 4ac > 0$, то параболою перетинає вісь Ox у двох точках (корні функції), якщо $D = 0$ - в одній точці, а якщо $D < 0$ - не перетинає вісь Ox (немає коренів функції) (мал.57).

$$\text{Корні функції: } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$



Мал.57

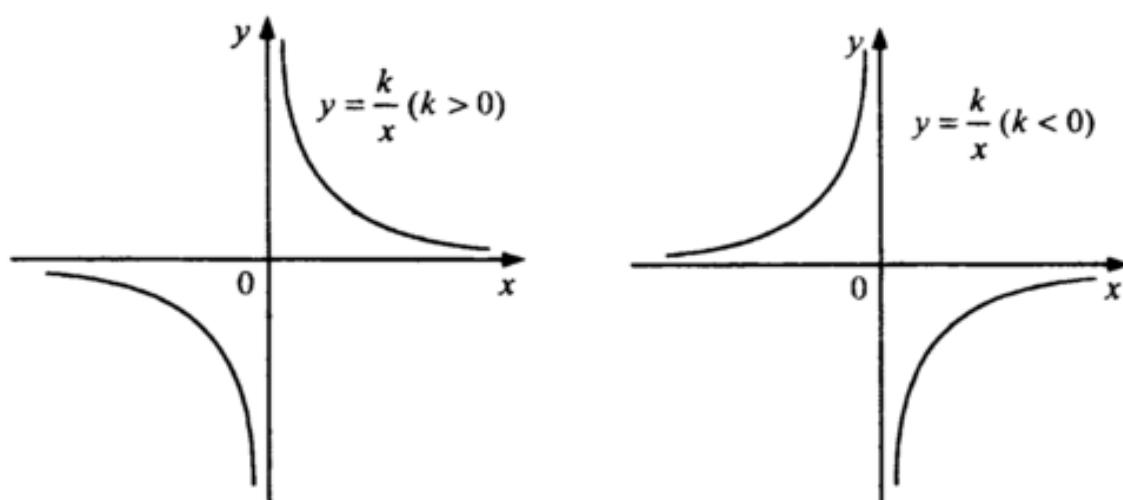
Приклад 3. Розглянемо функцію $y = \frac{k}{x}$.

Очевидно, що $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функція непарна, тому що $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$. Тому графік функції симетричний відносно початку координат. Тому досить розглянути функцію для $x \in (0; +\infty)$.

Нехай $x \rightarrow \infty$, тоді $y \rightarrow 0$; $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$; тому $x=0$ і $y=0$ - асимптоти.

Графік функції проходить через точку $(1; k)$. Побудуємо графік функції для $x \in (0; +\infty)$, використаємо властивість непарності для побудови всього графіка функції (мал. 58).



Мал.58

§6. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

А. Рівняння.

Нехай дані два вирази зі змінною $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які визначені на множині X , тобто $x \in X$.

Означення. *Рівнянням з однією змінною* називають одномісний предикат $f_1(x)=f_2(x)$, де $x \in X$.

Оскільки рівняння - це предикат, то область визначення предиката і множина його істинності є відповідно областю визначення рівняння і множиною розв'язків рівняння, а числа, що входять у цю множину, називають **коренями рівняння**.

При розв'язанні будь-якого рівняння виконуються різні перетворення. При цьому важливо стежити за тим, щоб не звужувалася область визначення та виконувалися тотожні перетворення. Отже, розв'язання будь-якого рівняння потрібно починати із знаходження його області визначення, тобто областей визначення відповідних виразів зі змінною.

Оскільки рівняння - це предикати, то над рівняннями виконуються ті ж операції, що й над предикатами. При цьому, якщо при розв'язанні рівняння мала місце логічна рівносильність, то ні втрата, ні здобування коренів не відбулося, оскільки при еквівалентності предикатів їх множини істинності співпадають. Якщо при розв'язанні рівняння мало місце логічне слідування, то можуть з'явитися сторонні корні, тому що при імплікації предикатів множина істинності першого предиката є підмножиною множини істинності другого предиката.

Теореми про рівносильність рівнянь.

Теорема 1а. Якщо вираз $\varphi(x)$ визначений для всіх значень $x \in X$, то рівняння

$$f_1(x)=f_2(x) \quad \text{і} \quad (1)$$
$$f_1(x)+\varphi(x)=f_2(x)+\varphi(x) \quad (2), \quad \text{рівносильні.}$$

Доведення цієї теореми складається з двох частин.

1. Нехай $x = a$ – корінь рівняння (1). Тоді після підстановки в рівняння (1) замість « x » його значення « a » одержимо за означенням кореня рівняння істинну числову рівність: $f_1(a)=f_2(a)$. Але за властивістю монотонності істинних числових рівностей $f_1(a)+\varphi(a)=f_2(a)+\varphi(a)$ - істинне. Отже, $x = a$, є коренем й рівняння (2).

2. Нехай $x = a$ – корінь рівняння (2). Тоді після підстановки його в рівняння (2) одержимо істинну числову рівність: $f_1(a)+\varphi(a)=f_2(a)+\varphi(a)$. Звідки за властивістю монотонності істинних числових рівностей рівність $f_1(a)=f_2(a)$ - істинна. Отже, $x = a$ є коренем рівняння (1).

Нехай A – множина коренів рівняння (1), а B – множина коренів рівняння (2). Одержали, що $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, тому $A = B$, а значить, рівняння (1) і (2) рівносильні.

Теорема 2а. Якщо вираз $\varphi(x)$ має значення для всіх $x \in X$ і не перетворюється в нуль ні при якому значенні $x \in X$, то рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ (1) і $f_1(x) \cdot \varphi(x) = f_2(x) \cdot \varphi(x)$, де $x \in X$, рівносильні.

Доведення цієї теореми складається з двох частин.

1. Нехай $x=a$ – корінь рівняння (1). Тоді $f_1(a) = f_2(a)$ – істинна числова рівність. Оскільки за умовою $\varphi(a) \neq 0$, то $f_1(a) \cdot \varphi(a) = f_2(a) \cdot \varphi(a)$ – також істинна числова рівність. Отже, за визначенням коренів рівняння $x=a$ – корінь рівняння (2).

2. Нехай $x=a$ – корінь рівняння (2). Тоді $f_1(a) \cdot \varphi(a) = f_2(a) \cdot \varphi(a)$ – істинна числова рівність. Оскільки за умовою $\varphi(a) \neq 0$, то $f_1(a) = f_2(a)$ – за властивістю істинних числових рівностей також істинна числова рівність.

Позначимо буквою A множину коренів рівняння (1), а буквою B – множину коренів рівняння (2). Ми довели, що $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Тому за властивістю відношення включення $A=B$, а значить, рівняння (1) і (2) рівносильні.

Приклад 1. Рівняння $10x-2 = 4$ і $10x-2+3x = 4+3x$ рівносильні за теоремою 1а.

Приклад 2. Рівняння $x-2=3$ і $(x-2)(x^2+1) = 3(x^2+1)$ – рівносильні за теоремою 2а ($x^2+1 > 0$ для будь-якого x)

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{3} + x = 2$.

Розв'язання. $(\frac{x-2}{3} + x = 2) \Leftrightarrow (x-2 + 3x = 6) \Leftrightarrow (4x=8) \Leftrightarrow (x=2)$.

Відповідь: 2

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+1} = \sqrt{4-x}$

Розв'язання. $(\sqrt{2x+1} = \sqrt{4-x}) \Rightarrow (2x+1=4-x) \Leftrightarrow (3x=3) \Leftrightarrow (x=1)$.

Тут можуть з'явитися сторонні корені за рахунок розширення області визначення: $(\sqrt{2x+1} = \sqrt{4-x}) \Leftrightarrow (2x+1=4-x)$. Тому після розв'язання потрібно зробити перевірку: $(\sqrt{2 \cdot 1 + 1} = \sqrt{4 - 1}; \sqrt{3} = \sqrt{3})$

Відповідь: 1.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x+1 = \sqrt{1-x}$

Розв'язання. $(x+1=\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow ((x+1)^2=1-x) \Leftrightarrow (x^2+2x+1=1-x) \Leftrightarrow (x^2+3x=0) \Leftrightarrow (x=0) \vee (x=-3)$. При цих перетвореннях можуть з'явитися сторонні корені не тільки за рахунок розширення області визначення: $\sqrt{1-x}$ замінили

на $1-x$, але й тому, що права частина рівняння невід'ємна (за визначенням арифметичного кореня), а значить, й ліва частина повинна бути невід'ємною ($x+1 \geq 0$). Інакше рівність неможлива. Тому потрібно зробити перевірку:

а) Нехай $x=0$, тоді $0+1=\sqrt{1-0}$; $1=1$ - істинне висловлення.

б) Нехай $x=-3$; тоді $-3+1=\sqrt{1-(-3)}$; $-2=2$ - хибне висловлення.

Відповідь: 0.

Цей приклад можна було розв'язувати по-іншому:

$$x+1 = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ (x+1)^2 = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x=0 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Відповідь: 0.

Отже, при розв'язанні рівняння його треба замінити рівносильним йому рівнянням, тобто таким рівнянням, яке має ту ж область визначення і множину розв'язків. З точки зору предикатів рівносильні рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ і $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ утворюють еквіваленцію, тобто $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Іноді рівняння буває рівносильним кон'юкції або диз'юнкції декількох рівнянь (див.приклад 1).

Зазвичай при розв'язанні будь-якого рівняння його замінюють ланцюжком більш простих рівнянь, рівносильних йому, або кон'юнкцією, або диз'юнкцією більш простих рівносильних йому рівнянь.

У 6 класі учні знайомляться з положеннями, що до обох частин рівняння можна додати одне і те ж число або обидві частини рівняння помножити на будь-яке число, відмінне від нуля. Але ці положення не завжди правильні, коли мова йде не про число, а про вираз із змінною.

Приклад 6. З'ясуйте, чи будуть рівносильними рівняння:

$$x+5=2 \quad (1) \quad \text{і} \quad x+5+\sqrt{x}=2+\sqrt{x} \quad (2).$$

Розв'язання. Рівняння (1) має корінь $x=-3$, а рівняння (2) при $x=-3$ не має сенсу. Ці рівняння не рівносильні, тому що їх області визначення різні: область визначення рівняння (1) $x \in \mathbb{R}$, а рівняння (2) $x \in X = \{x | x \geq 0\}$.

Відповідь: рівняння $x+5=2$ і $x+5+\sqrt{x}=2+\sqrt{x}$ не рівносильні.

Приклад 7. З'ясуйте, чи рівносильні рівняння:

$$x+5=2 \quad (1) \quad \text{і} \quad (x+5)(x-1)=2(x-1) \quad (2).$$

Розв'язання. Области визначення рівнянь (1) і (2) збігаються. Розв'яжемо ці рівняння. 1) $(x+5=2) \Leftrightarrow (x=-3)$.

$$\vee \begin{cases} x > 2 \\ x - 2 + 3x - 5 < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x < 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x < -\frac{4}{3} \vee -1 \leq x \leq 2 \vee 2 < x < \frac{8}{3} \right) \Leftrightarrow \left(x < -\frac{4}{3} \vee -1 \leq x < \frac{8}{3} \right)$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup [-1; \frac{8}{3})$,

Приклад 2. Розв'язати нерівність $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2)(x - 2)(x + 1) < 0$.

Розв'язання. Розкладемо вираз $(x^2 - 5x + 6)$ на множники, одержимо:

$$(x - 2)(x - 3)(x^2 + 2)(x - 2)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2(x - 3)(x^2 + 2)(x + 1) < 0.$$

Тому що $(x - 2)^2 \geq 0$ і $x^2 + 2 > 0$ завжди, то дана нерівність рівносильна такій кон'юнкції:

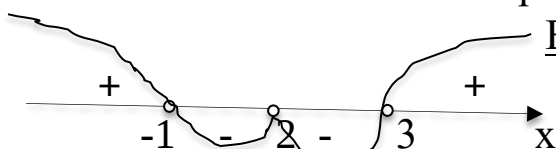
$$\begin{cases} (x - 3)(x + 1) < 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Наша числова вісь (область визначення $x \neq 2$) розіб'ється на проміжки: $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ (мал.60). Виберемо $x \in (3; +\infty)$ – нехай $x = 5$. Після підстановки у вираз $(x - 3)(x + 1)$ числа $x = 5$, одержимо $(5 - 3)(5 + 1) > 0$.



Мал.60

Аналогічно визначимо знак цього виразу на інших проміжках. Нанесемо їх на числову пряму (мал.61) і одержимо відповідь.



Мал.61

Відповідь: $(-1; 2) \cup (2; 3)$.

Вправи для самоконтролю

Розв'язати рівняння та нерівності

№1 а) $\frac{3}{x+1} = \frac{5}{2-x}$

б) $\frac{3}{x+1} \frac{5}{2-x}$

№2 а) $\frac{x+1}{x-1} + 2 = \frac{x-1}{x}$

б) $\frac{x+1}{x-1} + 2 > \frac{x-1}{x}$

№3 а) $\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = 2$

б) $\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} > 2$

№4 а) $|2x + 5| - |3x - 4| = 2x + 2$

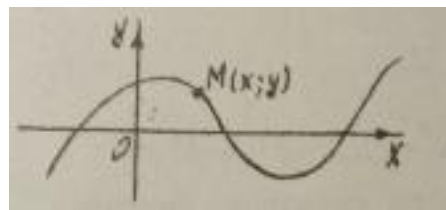
б) $|2x + 5| - |3x - 4| > 2x + 2$

№5 а) $1 + 2|x + 1| = |1 - x|$

б) $1 + 2|x + 1| > |1 - x|$

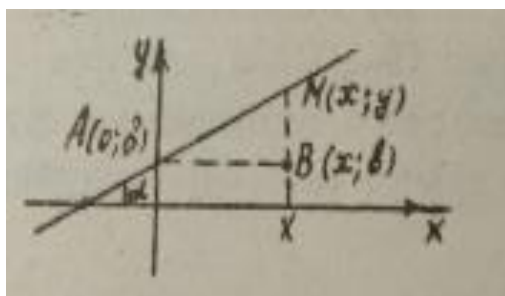
§7. РІВНЯННЯ ЛІНІЇ. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Нехай в координатній площині задана деяка лінія (мал.62). Нехай точка $M(x; y)$ належить цьому графіку. Якщо точка $M(x; y)$ рухається по графіку, то її координати мають знаходитися в певній залежності одна від одної. Ця залежність виражається деяким рівнянням, яке містить дві змінних x і y . Важливо вміти визначати залежність між x і y та записувати її у вигляді рівняння.



Мал.62

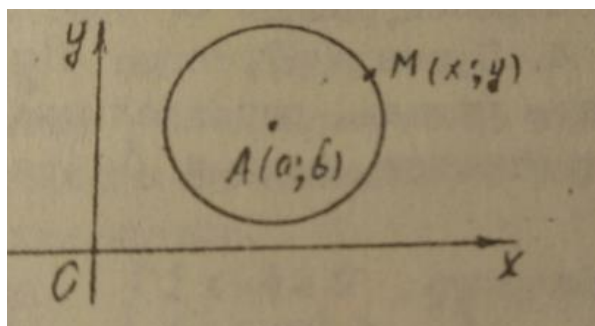
Приклад 1. Задамо рівнянням пряму, яка відсікає від вісі ординат відрізок, рівний b , і проходить під кутом α до додатного напрямку вісі абсцис (мал.63).



Мал.63

За умовою точка A має координати $(0; b)$. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка прямої. Проведемо через точки A і M прямі паралельно вісям координат. Одержимо точку $B(x; b)$. З $\triangle AMB$:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB}$, де $MB = y - b$, $AB = x$. Позначимо $\operatorname{tg} \alpha = k$. Одержимо: $k = \frac{y - b}{x}$, звідки $y = kx + b$. Це рівняння називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k** .



Мал.64

Приклад 2. Складемо рівняння кола з центром в точці $A(a; b)$ і радіусом R (мал. 64). Нехай $M(x; y)$ — довільна точка даного кола. Тоді за означенням кола $AM = R$. Визначимо AM за формулою відстані між двома точками:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}. \text{ Звідси } (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Якщо центр кола збігається з початком координат, тобто з точкою $A(0; 0)$, то рівняння кола має вигляд $x^2 + y^2 = R^2$.

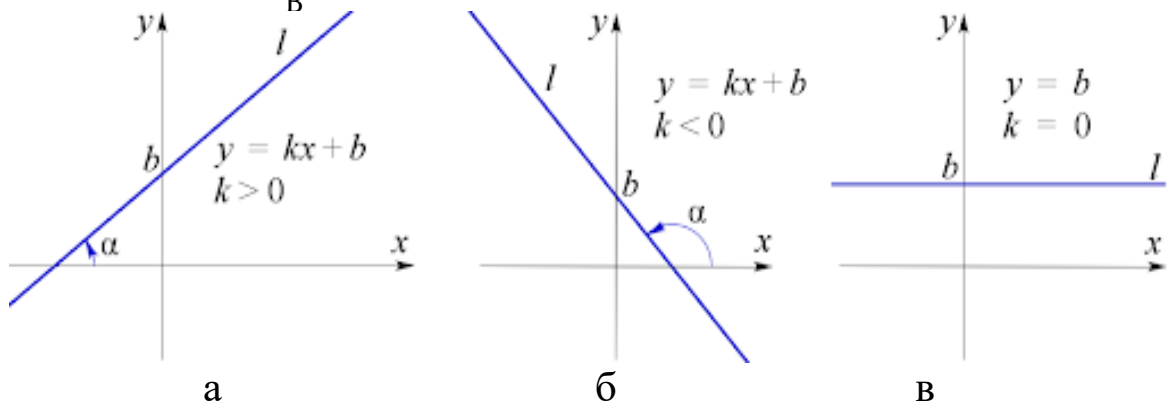
Рівняння, що містять дві змінних, є двомісним предикатом. Упорядкована пара чисел $(a; b)$ називається **розв'язком** цього **рівняння**, якщо при підстановці в рівняння $x = a$ і $y = b$ одержимо істинну числову рівність. Наприклад, пара чисел $(2; -2)$ є одним з розв'язків рівняння $2x - 3y + 2 = 0$.

Кожному рівнянню з двома змінними відповідає множина пар, які є його розв'язками. Пару чисел можна зобразити на координатній площині точкою, яка має відповідні координати. Множина всіх таких точок утворює деяку підмножину точок площини, яка називається **графіком рівняння**.

Рівняння прямої – це рівняння першого степеня з двома невідомими (див. приклад 1). З'ясуємо, графік якої лінії уявляє собою рівняння $Ax + By + C = 0$.

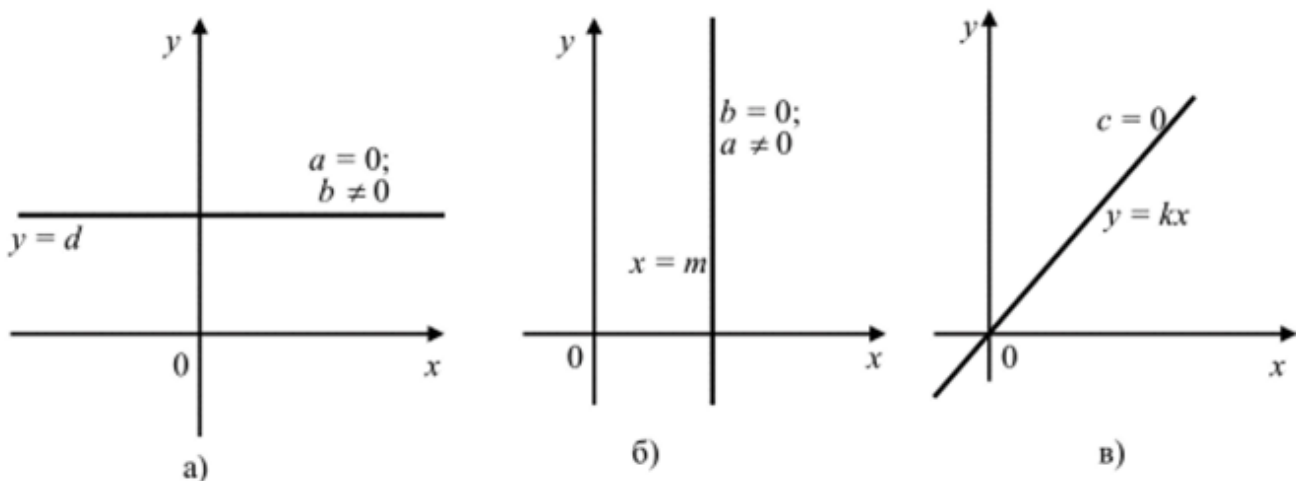
1. Нехай $B \neq 0$, тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, тобто $y = kx + b$.

Отже, графіком даного рівняння є пряма лінія, яка відсікає від вісі ординат відрізок, рівний b , і утворює з додатнім напрямком вісі абсцис кут α , де $\operatorname{tg} \alpha = k = -\frac{A}{B}$ (мал.65а, б)



Мал.65

2. Нехай $C = 0$, тоді $Ax + By = 0$, $y = -\frac{A}{B}x$, тобто $y = kx$. У цьому випадку графіком рівняння є пряма, що проходить через початок координат під кутом α до додатного напрямку вісі абсцис, де $\operatorname{tg} \alpha = k = -\frac{A}{B}$ (мал.66в)



Мал.66

3. Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$, тобто $x = a$. Графіком рівняння є пряма, паралельна вісі ординат, яка відсікає по вісі абсцис відрізок, рівний a (мал. 66б).

4. Нехай $A = 0$, тоді $Bu + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$, тобто $y = b$. Графіком рівняння є пряма, паралельна вісі абсцис, вона відсікає по вісі ординат відрізок, рівний b (мал. 66а).

5. Якщо $A = 0$ і $C = 0$, тоді $y = 0$ і ми маємо вісь абсцис.

6. Якщо $B = 0$ і $C = 0$, тоді $x = 0$, ми маємо вісь ординат.

7. Якщо $A=0$, $B=0$, $C=0$, тоді $0x+0y+0=0$, або $0=0$. Ця рівність істинна при всіх значеннях x і y , тому графік рівняння у даному випадку – вся координатна площина.

8. Якщо $A=0$, $B=0$ і $C \neq 0$, тоді $0x+0y+C=0$ і ми маємо хибне висловлення, тому графік рівняння порожній.

Розглянемо систему двох рівнянь з двома змінними. Фактично ми маємо кон'юнкцію двох предикатів, область істинності якої - пари чисел, що перетворюють в істинне висловлення обидва ці рівняння. Графічно її область істинності є точки перетину графіків цих рівнянь.

Приклад 3. Знайти точки перетину графіків двох рівнянь

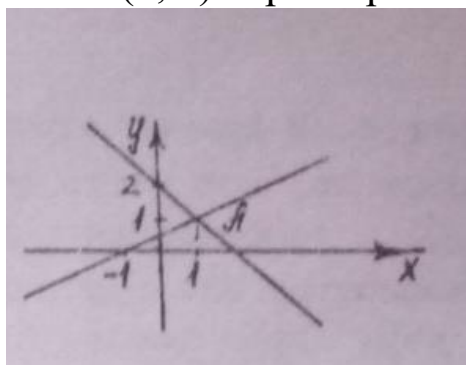
$$x - 2y + 1 = 0 \quad (1) \text{ та}$$

$$x + y - 2 = 0 \quad (2) \text{ двома способами.}$$

$$\text{Розв'язання. а) Розв'яжемо систему рівнянь} \quad \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Від першого рівняння віднімемо друге

рівняння і одержимо: $-2y + 1 - y + 2 = 0 \rightarrow y = 1$. Підставимо значення y в (1) або в (2) рівняння, одержимо: $x - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow x = 1$. Одержана пара чисел $(1; 1)$ перетворює кожне рівняння в істинну числову рівність.



Мал.67

б) Розв'яжемо приклад графічно. Для цього побудуємо графіки рівнянь (1) і (2) і визначимо координати точки їх перетину: $A(1; 1)$ (мал.67).

Відповідь: $(1; 1)$

Нерівність з однією змінною є одномісний предикат. Тому систему таких нерівностей можна розглядати як кон'юнкцію відповідних предикатів, а їх сукупність – як

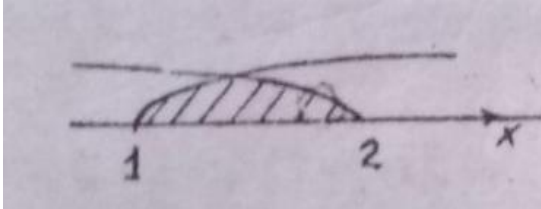
диз'юнкцію цих предикатів. Наприклад, розв'язуючи систему нерівностей $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases}$, одержимо $\begin{cases} x < 2 \\ x > 1, \end{cases}$ тобто $(x < 2) \wedge (x > 1) \Leftrightarrow (1 < x < 2)$ (мал.68).

У школі відповідь зазвичай записується так: $x \in (1; 2)$.

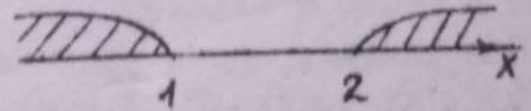
Розв'язуючи сукупність нерівностей з однією змінною одержимо $(2x-4>0) \vee (1-x>0) \Leftrightarrow (x>2) \vee (x<1)$.

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 1-x>0 \end{cases}$$

В школі у цьому випадку відповідь зазвичай записується так:
 $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ (мал.69)

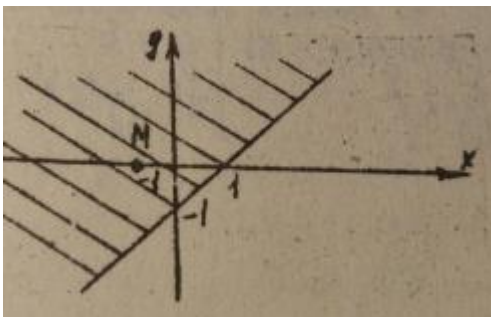


Мал.68



Мал.69

Нерівність з двома змінними є двомісний предикат. Множина його розв'язків є множина всіх пар чисел $(a; b)$, при підстановці яких $(x=a; y=b)$ виходить істинна числова нерівність. Якщо кожній парі цих чисел поставити у відповідність точку $M(x; y)$ на координатній площині, то одержимо множину точок на площині, яка задана цією нерівністю, або графік даної нерівності. Наприклад, щоб побудувати графік нерівності



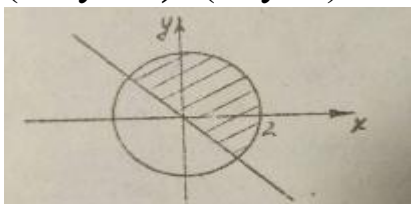
Мал.70

$y > x - 1$, спочатку потрібно побудувати графік рівняння $y = x - 1$, який розіб'є координатну площину на дві півплощини (мал.70). Візьмемо будь-яку точку, наприклад точку $M(-1; 0)$, і підставимо її координати у нерівність, то одержимо істинну або хибку числову нерівність.

У даному випадку при $x = -1$ і $y = 0$ маємо: $0 > -2$. Отже, вся частина площини, якій належить точка $M(-1; 0)$, є графічним розв'язком даної нерівності.

Розглянемо систему нерівностей з двома змінними. Це кон'юнкція двох предикатів. Тому її графічним розв'язком є перетин графічних розв'язків цих нерівностей. Наприклад, систему можна розглядати як кон'юнкцію $(x^2 + y^2 \leq 4) \wedge (x + y > 0)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x + y > 0 \end{cases}$$



Мал.71

Графічним розв'язком нерівності $x^2 + y^2 \leq 4$ є круг з центром у початку координат і радіусом 2. Графічний розв'язок нерівності $x + y > 0$ – це півплощина, що лежить праворуч від прямої $x + y = 0$ (мал. 71)

Вправи для самоконтролю

№1. Знайти рівняння лінії, всі точки якої однаково віддалені від точок А (-2; 1) і В (0; 2).

№2. Знайти рівняння кола, якщо його радіус дорівнює 2, а центр знаходиться у точці А (1; 2).

№3. Розв'язати алгебраїчним і графічним способом системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x + 4y = 1 \\ y = 2 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \end{array}$$

№4. Побудуйте графіки рівнянь:

$$\text{а) } x^2 + y^2 = 4; \quad \text{б) } x - 3y + 2 = 0; \quad \text{в) } 2x - 3 = 0; \quad \text{г) } 3x + 5 = 0; \quad \text{д) } y = 3x - 1.$$

№5. Побудуйте графіки нерівностей:

$$\text{а) } y \leq 2x - 1; \quad \text{б) } x^2 + y^2 > 1; \quad \text{в) } (x - 1)^2 < x^2; \quad \text{г) } x - y > 0; \quad \text{д) } x + 2y - 1 > 0.$$

№6. Розв'язати графічно системи нерівностей:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y < 0 \\ y < 1 \end{cases} & ; \text{б) } \begin{cases} y \geq x \\ x^2 - y^2 - 1 < 0 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 3x - 4y > 0 \\ x + y - 1 < 0 \end{cases} & ; \text{г) } \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 2y + 3 > 0 \end{cases} & ; \text{д) } \begin{cases} 3x < 5 \\ y > 3x - 1 \end{cases} \end{array}$$

.

§8. АЛГОРИТМИ

Слово «алгоритм» походить від імені узбецького математика Хорезмі (арабською мовою ал-Хорезмі), який у IX ст.н.е. винайшов правила чотирьох арифметичних дій над числами у десятковій системі числення. Сукупність цих правил у Європі почали називати «алгоризм». Пізніше це слово перетворилося на «*алгоритм*» і почало позначати точні вказівки, які визначають процес переходу від початкових даних до шуканого результату.

З появою електронно-обчислювальних машин поняття алгоритму набуло широкого вжитку. Основою програми для обчислювальної машини є алгоритм розв'язку певної задачі, тобто точні вказівки на послідовність дій, які потрібно виконати, щоб одержати результат.

Алгоритм – більш загальне поняття, ніж програма; програма для обчислювальної машини – це запис алгоритму розв'язання задачі у вигляді, придатному для певної обчислювальної машини. Звідси випливає, що основна суть процесу розв'язування задач за допомогою програмно-керуючої техніки – це алгоритмізація, тобто складання алгоритмічних вказівок.

Розглянемо **основні властивості алгоритмів.**

1. Дискретність.

Описаний алгоритмом обчислювальний процес повинен розкладатися на послідовні окремі дії. Описи, що виникають при цьому, являють собою послідовність чітко відокремлених одна від одної вказівок, що утворюють переривчасту (дискретну) структуру алгоритмічного процесу – тільки виконавши вимогу однієї вказівки, можна перейти до наступної. Така послідовність дій і складає алгоритмічний процес, а кожна дія називається його кроком.

2. Масовість.

Алгоритм складається не для розв'язання однієї конкретної задачі, але для цілого класу задач даного типу. У найпростішому випадку ця варіативність алгоритму забезпечує можливість використання різних припустимих початкових значень. Але відомий парадокс купи, вказує на розпливчатість терміну «масовість». Суть його можна передати, якщо задати собі ряд запитань і тут же відповісти на них. Один камінець – це купа? Ні. А два камінці? Теж ні? А три? Нарешті ми прийдемо до висновку, що купа не існує, або ми повинні будемо визнати, що є таке число камінців, збільшення якого на одиницю приводить до одержання купи.

Який же зміст потрібно вкладати у термін «масовість»? Очевидно, треба визначити, що для кожного алгоритму існує деякий клас об'єктів і всі вони допустимі як початкові дані. Так, наприклад, для алгоритму додавання цілих невід'ємних цілих чисел такий клас складають всі пари цілих невід'ємних чисел; програма обчислення за формулою $y = \sqrt{x}$ може використовуватися не для кожного значення x , а для всіх $x \geq 0$.

3. Потенційна виконуваність.

Алгоритм, застосований до допустимого початкового даного, якщо за його допомогою можна одержати потрібний результат. Якщо результат одержати не можна, хоча початкове дане й допустиме, то алгоритм до нього не може бути застосований.

Якщо алгоритмічний процес закінчується після скінченного числа кроків, то говорять, що алгоритм застосований до початкового значення і потенційно виконується. Незастосованість алгоритму до допустимого початкового даного полягає в тому, що алгоритмічний процес або ніколи не закінчується (процес нескінченний), або його виконання під час одного із кроків зустрічає перешкоду (при цьому говорять, що він безрезультатно обривається).

$$\begin{array}{r|l} -10,5 & 3 \\ -9 & 3,5 \\ \hline -15 & \\ -15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Для допустимих початкових даних 9 і 37
жимо такий процес:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 37} \\ \underline{90} 0,243243... \\ 74 \\ \underline{160} \\ 148 \\ \underline{120} \\ 111 \\ \underline{9} \end{array}$$

Формулювання алгоритму настільки точне, що повністю визначає його виконавця. Іншими словами, при виконанні алгоритму ніколи не виникає потреба в застосуванні будь-яких рішень, що не передбачені постановкою задачі алгоритму. Цю властивість алгоритмів називають їх *детермінованістю*.

Якщо фіксувати проміжні результати, одержані після кожного кроку, то можна побачити, що при одних і тих же початкових значеннях параметрів, що виникають, однакові; дії, які виконуються на наступних кроках, однозначні незалежно від початкових даних. Така властивість алгоритмічного процесу називається *детермінованістю*. Таким чином, визначеність алгоритму полягає в його однозначності і детермінованості.

Зрозумілість алгоритму для виконавця – це наявність алгоритму, визначає процес виконання алгоритму, який задано у вигляді тексту. «зрозумілість» дозволяє припустити, що не тільки люди, але й машини, машини можуть бути виконавцями алгоритму.

Алгоритми описуються різними способами. Розглянемо деякі з розраховані на людину. Ці прості **способи задання алгоритмів**

дозволяють виявити ті спільні підходи до алгоритмізації, які широко використовуються і при складанні їх для електронно-обчислювальної машини.

а) **Формули.** Математичні формули разом з правилами їх написання являють собою своєрідну алгоритмічну мову. Наприклад, формула $S = \pi R^2$ задає алгоритм обчислення площі круга радіуса R . Формула визначає послідовність дій не зовсім однозначно, як того вимагає поняття алгоритму, але вибір будь-якого порядку дій при виконанні встановлених в математиці правил не позначиться на результаті. Наприклад, можна спочатку знайти R^2 , а потім результат помножити на π , а можна π помножити на R і результат знову помножити на R . Отже, порядок дій за формулою регулюється виконавцем.

Алгоритм, що записано звичайною формулою, належить до деякого класу алгоритмів, які мають назву *лінійних*. Так називаються алгоритми, послідовність операцій яких визначається структурою алгоритму і не залежить від конкретних значень вихідних даних. Але одних лінійних алгоритмів недостатньо для опису найпростіших обчислювальних процесів. Так, наприклад, алгоритм обчислення значення функції вже не є лінійним, тому що в ньому закладена операція вибору однієї з формул в залежності від заданого значення x :

$$y = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ 1 - x, & x \leq 1 \end{cases}$$

б) **Табличний спосіб.** Запис алгоритму обчислення у вигляді таблиці використовується при обчисленні за формулою з операційною реєстрацією проміжних результатів. У цьому випадку розкладання формули на послідовність елементарних дій – це визначення послідовності кроків (вказівок) обчислювального алгоритму.

Таблична форма запису алгоритму особливо зручна тоді, коли потрібно обчислити не одне, а декілька значень одного і того ж виразу для різних значень вхідних величин.

Розглянемо приклад лінійного алгоритмічного процесу. Наприклад, обчислити значення виразу $\frac{5x-2}{4x+4}$ для $x = 2, 3, 4, \dots, 100$.

Бачимо, що послідовність дій для обчислювання будь-якого заданого x не змінюється, тобто знаходження x виконується за певним правилом – алгоритмом. Складемо і запишемо його в табличній формі.

Для цього розіб'ємо процес обчислення на кроки і кожному кроку відведемо рядок (номер рядка записано в дужках) (табл.1).

Таблиця 1

Номер рядка	Зміст рядка	Числові значення рядка				
(1)	x	2	3	4	...	100
(2)	5·(1)	10	15			
(3)	(2)-2	8	13			
(4)	4·(1)	8	12			
(5)	(4)+4	12	16			
(6)	(3):(5)	0,75	0,81			

в) Запис алгоритму за допомогою слів (*словесний*) (мал.72). Достоїнство словесного подання алгоритмів полягає в тому, що таким способом можуть бути описані будь-які алгоритми, у тому числі й обчислювальні.

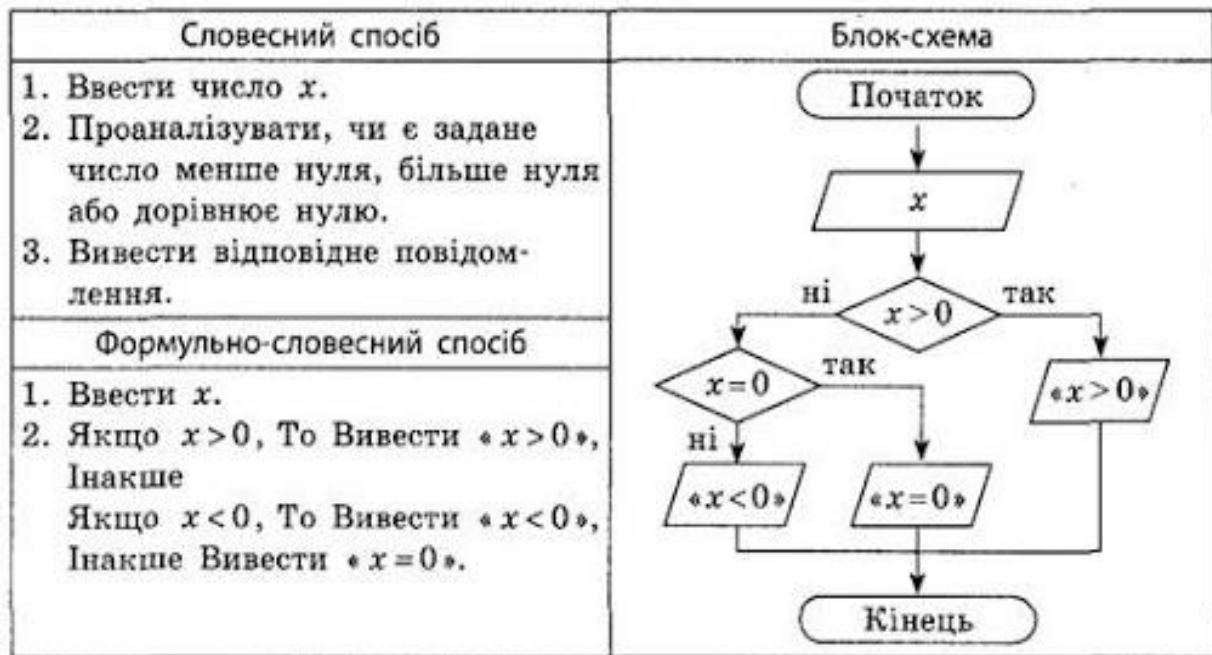
У словесному запису окремі вказівки (кроки) алгоритму зручно нумерувати. Щоб задати обчислювальні дії, будемо вживати знак операції присвоєння «:=», що використовується в офіційній алгоритмічній мові. Зміст цього знаку полягає в тому, що після виконання вказівки «x:=A» (x присвоїти A) змінна приймає значення, що одержали після виконання всіх дій, передбачених формулою A.

При опису нелінійних (розгалужених) алгоритмів використовуємо речення виду: «якщо P, іди до N», де P – умова, яку перевіряємо, а N – номер однієї з вказівок у запису алгоритму. Для безумовного переходу до вказівки із заданим номером використовують вказівки виду «іди до N». Наприклад, запис алгоритму обчислення за формулою $y = \begin{cases} \ln x, x > 1 \\ 1 - x, x \leq 1. \end{cases}$ може мати вигляд:

1. Читай «x».
2. Якщо $x > 1$, іди до п.5
3. $y := 1 - x$
4. Іди до п.6.
5. $y := \ln x$.
6. Запис y.
7. Кінець.

г) *Графічний спосіб* запису (схема алгоритму), який використовується у практиці складання комп'ютерних програм. Схема алгоритму являє собою систему певним чином пов'язаних між собою блоків, що зображуються у вигляді геометричних фігур, і вказують

послідовність виконання дій. Всередині блоків записується їх короткий зміст (мал.72).



Мал.72

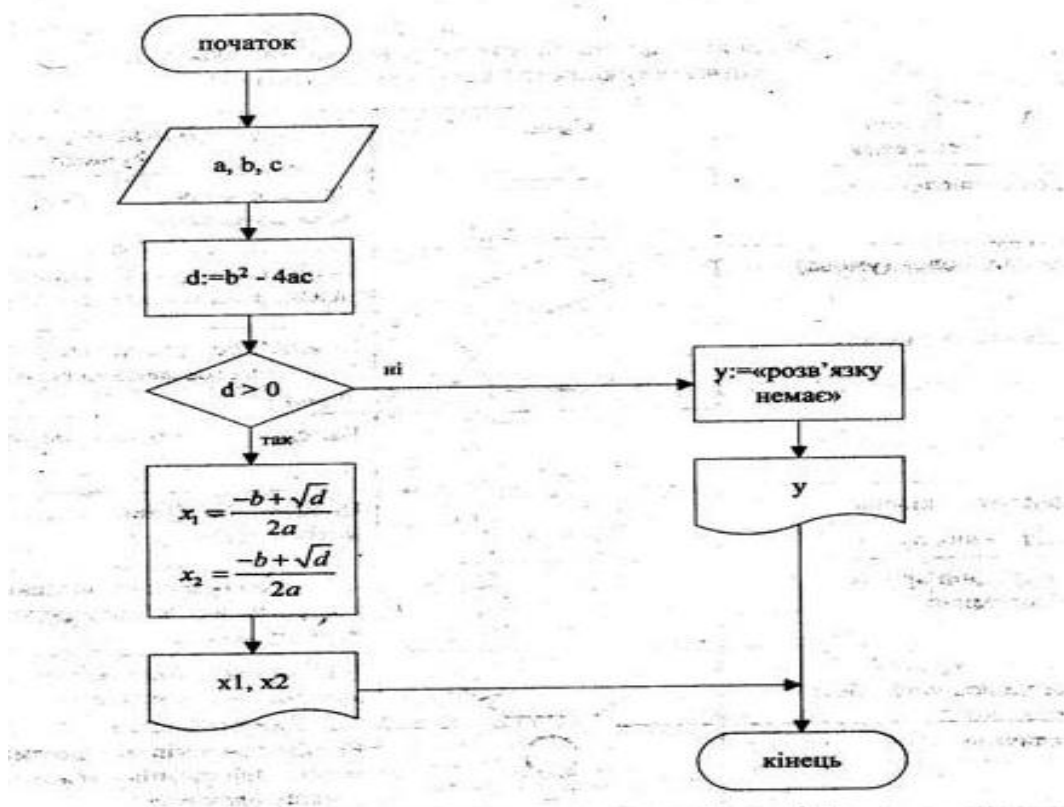
Таблиця 2

Геометричне подання	Призначення оператора	Геометричне подання	Призначення оператора
	Процес (арифметичний оператор)		Розв'язок (умовний оператор)
	Дані (оператори введення-виведення)		Початок-кінець (оператор зупинки або початок блок-схеми)
	Документ (друк на бумагу)		Монітор (виведення на монітор)
	Сортування		Збереження даних
	Пам'ять з послідовним доступом		Пам'ять з прямим доступом

Форма блока визначає тип дії, а текст всередині блоку дає детальне пояснення конкретної дії. Два основних типи вказівок: арифметичні та логічні зображують різні види блоків (таблиця 2).

Арифметична вказівка S не має розгалуження і має завжди один вихід. Логічна вказівка P використовується для організації розгалуження і має два виходи: якщо перевірена умова виконується, то відбувається вихід по стрілці «+», якщо не виконується – по стрілці «-». Логічний елемент відповідає у словесному запису вказівці «якщо».

На мал. 73 наведена схема алгоритму обчислення коренів квадратного рівняння. Схема складається з одного логічного елемента і трьох арифметичних. Зміст вказаних дій, як і умов, що перевіряються, записано в середині відповідних складних блоків. Це розгалужений алгоритмічний процес.



Мал.73

У своїй практичній діяльності людина постійно зустрічається із задачами, для рішення яких потрібне багаторазове повторення однієї і тієї ж дії. Саме для цього і застосовуються **циклічні алгоритми**. Циклічний процес – це процес повторення серії команд стільки разів, скільки потрібно для того, щоб зазначена умова P перестала зберігатися.

До складу циклу входять логічний елемент з перевіркою умови P і функціональний блок S називається тілом цикла, який у найпростішому випадку є звичайним арифметичним елементом. (мал.74)



Мал.74

Як впливає з структури циклічного алгоритму, тіло S може за певних умов виконуватися не один раз після перевірки умови P , а може статися й так, що тіло S не виконується жодного разу. Тут P є умовою продовження циклу (щоразу, коли P істинне, тіло S виконується).

Алгоритми – це надбання науки і техніки. Алгоритм є :

- формою переказу наукових результатів;
- керівництвом до дії при розв'язанні вже вивчених проблем;
- засобом, що дозволяє заощаджувати розумову працю;
- необхідним етапом при автоматизації розв'язання задач;
- засобом, що використовується при дослідженні і вирішенні нових проблем (особливо це стосується математичних алгоритмів);
- одним із способів обґрунтування математики;
- одним із засобів опису складних процесів.

Особливе значення мають алгоритми, що є в математиці, тому що математика пронизує інші науки і її надбання є надбанням усіх наук. Наведемо приклади найбільш відомих математичних алгоритмів.

Із поняттям алгоритму учні знайомляться з 1 класу, коли термін «алгоритм» їм ще не відомий:

1) у 1 класі учні вивчають табличні алгоритми додавання і віднімання натуральних чисел у межах десяти, у 2 класі – табличний алгоритм множення для одноцифрових невід’ємних цілих чисел;

2) у 4 класі правило письмового додавання багатоцифрових чисел, по суті, формулюється на основі алгоритму письмового додавання трицифрових чисел - правилу додавання «стовпчиком». чому передус пояснення випадку: $257+132 = (200+50+7)+(100+20+2) = (50+30) + (7+2) = 300+80+9 = 389$.

Отже, вивчення додавання багатоцифрових чисел у початковому курсі математики можливе лише після того, як будуть засвоєні: таблиця додавання одноцифрових чисел, закони додавання, запис чисел в десятковій системі числення. Після цього можна вводити у загальному вигляді *алгоритм додавання натуральних чисел*, записаних у десятковій системі зчислення:

1. Запиши другий доданок під першим так, щоб відповідні розряди знаходились один під одним.
2. Додай цифри розряду одиниць. Якщо сума менша десяти, запиши її в розряд одиниць відповіді і переходи до наступного розряду (десятків).
3. Якщо сума одиниць більша, або дорівнює десяти, то зображуй її у вигляді $a+b = 10+c$, де c - одноцифрове число, запиши число у розряд одиниць відповіді, а один десяток додай до розряду десятків.
4. Повтори ті ж дії з десятками, потім з сотнями і т.д. Процес завершиться, коли буде виконане додавання старших розрядів. При цьому, якщо їх сума буде дорівнювати або більше десяти, то дописують перед обома доданками нулі, збільшують нуль перед першим доданком на 1 і виконують додавання $1+0=1$.

Аналогічно алгоритми наведені у підручниках для 3 класу при вивченні письмового віднімання, множення і ділення.

Процес навчання учнів алгоритмічному розв’язку задач починається з 1 класу. Побудова алгоритму розв’язання будь-яких задач дуже важка справа, тому учнів знайомлять з більш загальним прийомом розв’язання задач. До логічних операцій, які завжди необхідно провести для того, щоб знайти розв’язання задачі, відносять: вивчення умови задачі, відокремлення відомого від невідомого, виявлення залежностей між ними, з’ясування того, які данні досить знати для розв’язування задачі.

У старших класах результатом розвитку знання алгоритмів додавання, віднімання, множення та ділення натуральних чисел є не менш відомі алгоритми арифметичних дій з додатними десятковими дробами.

Алгоритми - це правила розв'язання систем алгебраїчних лінійних рівнянь, правила диференціювання та інтегрування функцій, що вивчаються у курсі математичного аналізу. Алгоритмами будуть також і багато інших правил для розв'язання різних задач за допомогою циркуля і лінійки, відомі з шкільного курсу геометрії. Цікаво, що деякі задачі на знаходження алгоритму їх розв'язку, виявилися такими, що не підлягають розв'язуванню. До них належать такі геометричні проблеми: задача про квадратуру круга, задача про трисекцію кута, задача про подвоєння куба. Так, наприклад, задача про трисекцію кута формулюється так: знайти метод (алгоритм) ділення довільного кута за допомогою циркуля і лінійки на три рівні частини.

При вивченні курсу математики студенти зустрічаються з такими відомими алгоритмами:

1. Алгоритм Евкліда - алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел.
2. Алгоритм Ератостофена (решето Ератостофена) - спосіб одержання простих чисел, які не перевищують заданого числа n .
3. Алгоритм розкладу числа на прості множники і визначення найменшого кратного двох чисел.

Навчальне видання

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА І

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск: Іонова О.М.

Комп'ютерна верстка: Масюк О.М.

Коректор: Білецька С. А.

Відповідальність за дотримання вимог академічної доброчесності несуть автори

Підписано до друку

Формат

Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний. Ум. друк. арк.

Обл.-вид. арк.

Зам №

Тираж

прим.

Ціна договірна.

Відомості про видавництво