

**Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г. С. Сковороди**

«До друку та в світ дозволяю»

проректор з наукової, інноваційної
і міжнародної діяльності
професор С. В. Бережна

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА:
МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ**

Харків – 2022

**Міністерство освіти і науки України
Харківський національний педагогічний університет
імені Г. С. Сковороди**

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА:
МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ**

Навчально-методичний посібник

Харків – 2022

Рецензенти:

Сіра І. Т. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди;

Лукьянова В. А. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри природничих дисциплін Харківського національного університету радіоелектроніки.

Затверджено вченою радою Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди
протокол № 5 від 24.06.2022р.

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

Математика: Множини та операції над ними. Навчально-методичний посібник – Харків, 2022. – 36 с.

Навчально-методичний посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня галузі знань 01 «Освіта/Педагогіка» спеціальності 013 «Початкова освіта» з метою організації самостійної роботи та підготовки до практичних занять з теми «Основні поняття теорії множин» курсу математики.

Навчально-методичний посібник надає здобувачам вищої освіти можливість усвідомити сутність та практично опрацювати основні поняття теорії множин, що є теоретичною основою всіх основних понять курсу математики початкової школи.

Видано за рахунок авторів

©Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди

© Іонова О. М.

© Титаренко Л. І.

© Масюк О. М.

© Білецька С. А.

Вступ

Даний навчально-методичний посібник призначений для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня навчання зі спеціальності 013 «Початкова освіта» з метою організації самостійної роботи та підготовки до практичних занять з теми курсу математики «Основні поняття теорії множин» (поняття про множину та способи її задання; операції над множинами та їх властивості).

Навчально-методичний посібник надає студентам можливість усвідомити сутність та практично опрацювати основні поняття теорії множин, що є теоретичною основою всіх основних понять курсу математики початкової школи.

Навчально-методичний посібник охоплює весь програмний матеріал вивчення теми і розрахований на 8 годин практичних занять. Кожне заняття передбачає попередню самостійну роботу студента. Самостійна робота – основа навчальної діяльності студента – є обов'язковою умовою свідомого засвоєння знань з математики. На самому практичному занятті викладач виступає в ролі консультанта, тому мета кожного практичного заняття – це узагальнення та систематизація знань студента з кожної конкретної теми.

Тематика практичних занять відповідає Програмі навчальної дисципліни “Математика”.

Теми практичних занять (8 год.):

Заняття 1. Способи задання множин. Відношення рівності множин та відношення включення. - 2 год.

Заняття 2. Операції над множинами: Переріз та об'єднання. – 2 год.

Заняття 3. Операції над множинами: Різниця множин. Доповнення підмножини до множини. Задачі на правило суми. – 2 год.

Заняття 4. Операції над множинами: Розбиття множини. Декартів добуток. – 2 год.

Для попередньої самостійної роботи студентів рекомендована основна й додаткова література у загальному списку до всіх занять теми, а також теми рефератів, рекомендовані для більш глибокого опрацювання матеріалу.

Тема: «Основні поняття теорії множин»

Заняття 1. Способи задання множин. Відношення рівності множин та відношення включення.

Мета заняття: сформувати у студентів уявлення про множину, підмножину, універсальну множину, способи задання множин, види множин, розкрити сутність відношення включення та його властивості. Навчити застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Хід заняття:

I. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [3, С.25-33; 4, С.5-14; 5, С.5-14; 6, С.8-16; 7, С.61-73] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання завдань.

Питання для самоконтролю.

1. Розкрити сутність поняття “множина”.
2. Числові множини та їх позначення.
3. Які множини називаються скінченними (нескінченними) ?
4. Що таке порожня множина ?
5. Що таке потужність множини, як вона позначається ?
6. Назвати способи задання множин.
7. Дати означення поняття “підмножина”.
8. Яке відношення називається відношенням включення ?
9. Назвати властивості включення.
10. Які множини називаються рівними ?
11. Які множини називаються рівнопотужними ?
12. Способи запису, позначення та зображення числових множин.

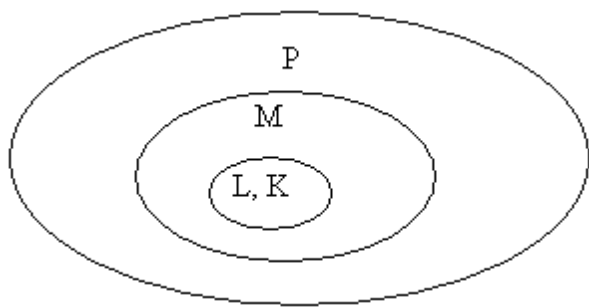
II. Практична частина

Приклад 1. Записати множину A , елементами якої є натуральні дільники числа 24, використовуючи символічні записи характеристичної властивості та перелік елементів.

Розв'язання. Множину A задано описом характеристичної властивості “бути натуральним дільником числа 24”, запишемо це так: $A = \{x \mid 24 \div x, x \in \mathbb{N}\}$.

Натуральними дільниками числа 24 є числа 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24. Записати це можна так: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$.

Приклад 2. Побудуйте діаграму Ейлера – Венна для множин K , L , P і M , якщо: K – множина квадратів; L – множина ромбів з прямими кутами; M – множина прямокутників; P – множина паралелограмів.



Мал.1

Розв'язання. За означенням, квадрат це ромб з прямими кутами або прямокутник з рівними суміжними сторонами, а прямокутник це паралелограм. Тому діаграму можна зобразити так (мал.1). Отже множина K і L збігаються, інакше $K \subseteq L$ і $L \subseteq K$, то $K = L$, а $K \subset M$ і $M \subset P$, то $K \subset P$.

Завдання для студентів:

№ 1. Запишіть множину K , елементами якої є натуральні числа, менші 8, використовуючи символічні записи характеристичної властивості та перелік елементів множини. Чи вірно, що $5 \in K$, $8 \in K$, $0 \in K$?

№ 2. Дано множини: $A = \{a, e, \epsilon, i, o, y, u, \text{и}, \text{ю}, \text{я}\}$; $B = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Укажіть характеристичну властивість для кожної з них.

№ 3. Покажіть на координатній прямій множину точок, координати яких: а) менше 5; б) більше 5; в) не більше 5; д) не менше 5.

№ 4. Дані числа 19 ; $\sqrt{7}$; 0 ; -27 ; $5,4$; $\frac{3}{7}$. Які з них належать множині: а) цілих чисел; б) цілих невід'ємних чисел; в) раціональних чисел; г) дійсних чисел?

№ 5. Покажіть на координатній прямій множину X , якщо:

- | | |
|---|--|
| 1) $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -3 < x < 8\}$ | 6) $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 4\}$ |
| 2) $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ | 7) $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 6\}$ |
| 3) $X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x \leq 2\}$ | 8) $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq -8\}$ |
| 4) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x \leq 4\}$ | 9) $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 8\}$ |
| 5) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x < 0\}$ | 10) $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x < 8\}$ |

№ 6. Задайте числову множину описом характеристичної властивості:

- | | | |
|----------------------------|------------------------|----------------------|
| 1) $X = [-3; 5]$ | 4) $X = [-2; +\infty)$ | 7) $X = \{3; 5\}$ |
| 2) $X = (0; 6)$ | 5) $X = (-\infty; 8]$ | 8) $X = [4; 9)$ |
| 3) $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ | 6) $X = (-12; 8]$ | 9) $X = (0; \infty)$ |

№ 7. Задайте двома способами множини точок координатної прямої (мал. 2).

№ 8. Прочитайте подані висловлення та вкажіть серед них істинні:

- а) $3 \in (3; 12]$; б) $-0,2 \in [-0,3; 0]$; в) $0 \in (-\infty; 0]$; г) $5 \in (6; +\infty)$;
 д) $75 \in \mathbb{Q}$; е) $6,4 \in \mathbb{Z}$; ж) $-7 \in \mathbb{N}$; з) $-0,3 \in \mathbb{Z}$.

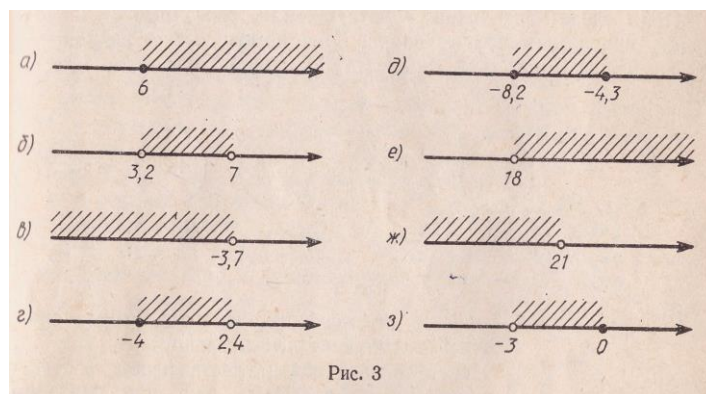


Рис. 3

Мал.2

№ 9. Встановіть, в якому відношенні знаходяться множини A і B , якщо: $A = \{a, b, c, d\}$, а множина B така: а) $B = \{k, l, m\}$; б) $B = \{b, c, e, f, k\}$; в) $B = \{d, f, c, b, a\}$; г) $B = \{b, d\}$.

№10. Встановіть, в якому відношенні знаходяться множини A і B , якщо: 1) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$;

2) $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, B - множина чисел першого десятка;

3) A - множина двоцифрових натуральних чисел, B - множина парних двоцифрових чисел;

4) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; 5) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$.

№ 11. Зазначте: у якому відношенні знаходяться множини A і B , зобразіть їх за допомогою кругів Ейлера, якщо:

а) A — множина парних чисел, B — множина чисел, кратних 7;

б) A — множина непарних одноцифрових чисел, B — множина парних одноцифрових чисел;

в) A — множина парних чисел, B — множина чисел, кратних 4;

г) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівнобедрених трикутників;

д) A — множина прямокутників з рівними сторонами, B — множина квадратів.

№12. Які з даних пар множин пов'язані між собою відношенням включення? Намалюйте їх на числовій прямій:

1) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x > 3\}$, $B = \{y | y \in \mathbb{N}, y > 2\}$;

2) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 4\}$, $B = \{y | y \in \mathbb{R}, 1 \leq y < 2\}$;

3) $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$, $B = \{y | y \in \mathbb{R}, y \leq 4\}$;

4) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 5\}$, $B = \{y | y \in \mathbb{R}, 1 < y \leq 5\}$.

№13. Дана множина $C = \{213, 45, 324, 732, 136\}$. Утворіть підмножину множини C , що складається з чисел, які: а) діляться на 3; б) діляться на 9; в) не діляться на 4; г) діляться на 5.

№ 14. A — множина прямокутників, D — множина квадратів. Доведіть, що множина D є підмножиною множини A , і проілюструйте дані

множини за допомогою кругів Ейлера.

№ 15. A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників, C – множина квадратів. Доведіть, що $B \subset A$ і $C \subset B$. Проілюструйте дані множини за допомогою кругів Ейлера.

№ 16. Покажіть, використовуючи круги Ейлера, що якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

№17. Покажіть за допомогою кругів Ейлера-Венна множини A , B і C , якщо: а) $A \subset C$, $B \subset C$, $A \cap B = \emptyset$; б) $A \subset C$, $B \subset C$, $A \cap B \neq \emptyset$; в) $A \subset C$, $B \subset C$, $C = A \cup B$.

№ 18. A – множина натуральних чисел, менших 20; B , C , D і E – підмножини множини A , такі, що B складається з чисел, кратних 6, C – з чисел, кратних 2, D – з чисел, кратних 3, E – з чисел, кратних 2 і 3 одночасно. Назвіть елементи множин A , B , C , D і E та вкажіть серед них рівні множини.

№ 19. M – множина натуральних розв'язків нерівності $2 \leq x \leq 7$, K – множина натуральних розв'язків нерівності $1 < x \leq 6$. Які з поданих висловлень істинні: а) $M \subset K$; б) $K \subset M$; в) $M = K$?

№20. Виписати пари рівних множин:

- 1) $A = \{\phi; \psi; \chi\}$, $B = \{\psi; \phi; \chi\}$;
- 2) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{I; II; III\}$;
- 3) $A = \mathbb{N}$, B - множина натуральних чисел першого мільона;
- 4) $A = [2; 3]$, $B = \{2; 3\}$;
- 5) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 10\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z}, 2 < y < 10\}$;
- 6) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 5\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}, -3 < y < 5\}$;
- 7) $A = (-2; 3]$, $B = (-2; 3)$.

№21. Виписати пари рівнопотужних множин:

- 1) $A = \{a; b; c\}$, $B = \{b; c; a\}$;
- 2) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{I; II; III\}$;
- 3) $A = \{2; 1; \{2; 8\}; 8\}$, $B = \{1; 2; 8\}$;
- 4) $A = \mathbb{N}$, B - множина усіх парних чисел;
- 5) $A = [1; 2]$, $B = [2; 3]$;
- 6) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 5\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}, 2 < y \leq 5\}$.

№ 12. Доведіть, що $A = B$, якщо: а) A – множина двоцифрових чисел, кратних 9, B – множина двоцифрових чисел, сума цифр яких кратна 9; б) A – множина натуральних чисел, запис яких закінчується нулем, B – множина натуральних чисел, кратних 10.

III. Огляд теоретичних питань.

Поняття про множину.

Поняття “множина” є основним (неозначуваним, первісним) поняттям математики і широко використовується в математиці.

Людина завжди була оточена різноманітними множинами: множина рослин, тварин, множина різних звуків, частин власного тіла тощо. Слово «множина» в математиці вживається замість таких слів, як «група», «клас», «набір», «збірка», тобто слів, що характеризують деяку сукупність предметів, до того ж у даній сукупності може бути тільки один предмет, а може не бути й жодного. Наприклад: множина букв у слові «математика»; множина зірок на небі, множина дітей у дитячому садочку.

Основоположник теорії множини Георг Кантор (друга половина XIX ст.) під множиною мав на увазі «сукупність явищ, предметів, фактів, мислимих як одне ціле».

Об’єкти будь-якої природи (люди, будинки, книги, числа, геометричні фігури і т.ін.), що складають множину, називаються її елементами. Для запису прийнята така символіка: множини позначаються великими буквами латинського алфавіту, їх елементи – малими, слово «належать» замінюють символом $\in$. Запис « $a \in A$ » - «об’єкт a є елементом множини A », або «об’єкт a належить множині A ».

Якщо множина A складається з елементів a, b, c , то можна записати так: $A = \{a; b; c\}$.

У курсі математики для числових множин, введені спеціальні позначення: N – множина натуральних чисел;

N_0 – множина цілих невід’ємних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

R – множина дійсних чисел.

Множини можуть містити як будь-яку кількість елементів. У залежності від кількості елементів виділяють такі види множин — **скінченні** та **нескінченні**. Так, множина студентів у групі – скінченна; множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ – скінченна, тому що корені даного рівняння $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ складають множину $\{2, 3\}$. Приклади нескінченної множини: всі числові множини, множина геометричних фігур тощо.

Крім скінченних і нескінченних множин в математиці дуже часто користуються поняттями **одноелементна** множина і **порожня** множина. Множина голосних у слові «кіт» має один елемент $\{i\}$,

тобто є одноелементною. Множина людей на Сонці – приклад порожньої множини. Порожня множина позначається знаком $\emptyset$.

Способи задання множин.

Множина вважається заданою, якщо про будь-який об'єкт можна сказати, належить він чи ні цій множині.

Множина може бути заданою:

1) *Безпосереднім переліком елементів* (порядок слідування елементів у множині не має значення.)

Множина букв у слові «математика»: $A = \{м; а; т; е; и; к\}$.

Множина коренів рівняння: $x^3 - 16x = 0$: $B = \{0; -3; 3\}$.

Шляхом перелічування елементів можна задати лише скінченну множину, у якій можна визначити кількість елементів. Така множина може бути охарактеризована числом. Число показує кількість елементів або кількість груп у множині. Тоді вважають, що число позначає *потужність множини*. Потужність множини позначається символом — **$m(A)$** . Так, $m(A) = 6$, оскільки слово «математика» можна записати за допомогою 6 букв, а $m(B) = 3$, рівняння $x^3 - 16x = 0$ має три корені: $B = \{0; -4; 4\}$. Але існують такі множини, елементи яких, внаслідок невизначеності, перерахувати не можна. Наприклад, кількість (як множина) людей на планеті Земля, кількість (як сукупність) всіх атомів у природі. Також не можна перелічити елементи числових множин. Тому, в цьому випадку користуються іншим способом задання множини, а саме:

2) *Метод вказівки (опису) характеристичної властивості елементів множини*, такої властивості, яка належить елементам даної множини і тільки їм. Запис $P(x)$ означає, що елемент множини X має властивість P .

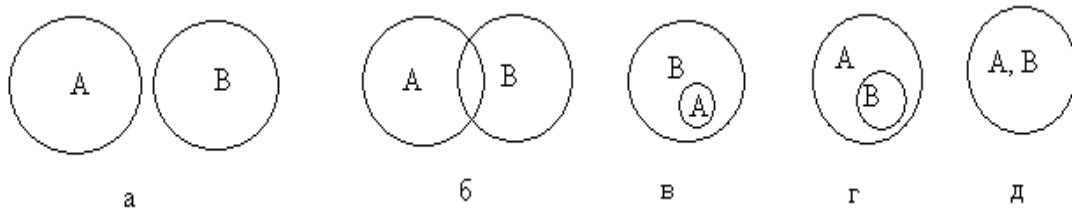
Множину M , всі елементи якої мають властивість P , позначають так: $M = \{x / P(x)\}$.

Наприклад: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 6\} = \{3; 4; 5; 6\}$; $B = \{x \mid x - \text{жителі Землі}\}$; $C = \{x \mid x^2 + 2 = 0\} = \emptyset$.

3) *Графічний спосіб* – наочне зображення множин називають кругами або діаграмами Ейлера-Венна (Леонард Ейлер (1707–1783р.р.) – швейцарський математик, член Петербурзької Академії наук; Джон Венн (1834–1923р.р.) – англійський математик).

Оскільки геометричною фігурою називається будь-яка не порожня множина точок, то для того, щоб відобразити множини і відношення між ними, малюють геометричні фігури, які знаходяться між собою в цих відношеннях. Такі зображення множини називається

діаграмою Ейлера-Венна. Дві множини можна розмістити так:



Відношення включення. Підмножини.

Часто доводиться розглядати множини, утворені частиною елементів іншої множини. Наприклад, елементи множини $B = \{1, 2, 4, 8\}$ – дільники числа 8 є також елементами множини $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, елементи якої – це дільники числа 24.

В такому разі вважають, що множина B є підмножиною множини A .

Підмножиною множини A називається така множина B , кожен елемент якої належить A .

Позначимо це так: $B \subset A$ – « B включається в A » (або $A \supset B$ – « A включається в B »). Знак $\subseteq$ називають знаком нестрогого включення, коли множини A і B збігаються, тобто $A = B$.



Правильною або власною підмножиною B множини A називається не порожня її підмножина, що відрізняється від множини A .

Записується це так: $B \subset A$ і називається знаком *строого включення* і означає, що множина A містить усі елементи множини B та ще якісь інші елементи. Наприклад, множина ромбів є підмножиною множини паралелограмів.

Будь-яка множина має дві невласні підмножини: саму себе і порожню множину: $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$.

Всі останні - власні підмножини.

Наприклад: Задана множина $A = \{m, n, p\}$.

Невласні підмножини: $\{m, n, p\}$, $\emptyset$; власні підмножини: $\{m\}$, $\{n\}$, $\{p\}$, $\{m, n\}$, $\{n, p\}$, $\{m, p\}$.

Кількість усіх підмножин n -елементної множини дорівнює 2^n . Таким чином, для множини $A = \{m, n, p\}$, де $n = 3$ число підмножин буде $2^3 = 8$.

Відношення включення для множин має такі властивості:

- 1) $A \subseteq A$ – кожна множина є підмножиною сама собі - рефлексивність;
- 2) $\emptyset \subseteq A$ – порожня множина завжди є підмножиною будь-якої множини;
- 3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ – транзитивність.
- 4) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A=B$ – принцип об'ємності - антисиметричність.

Із принципу об'ємності витікає один із способів доведення рівності двох множин: якщо доведено, що будь-який елемент множини B є елементом множини A , і будь-який елемент множини A є елементом множини B , то $A=B$.

Дві множини A і B називаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли вони містять ті ж самі елементи, тобто коли кожен елемент множини A є також елементом множини B і навпаки.

Із означення видно, що дві рівні множини є по суті однією і тією ж самою множиною.

Безпосередньо з означення рівності множин випливають властивості, які є теоретичною основою відповідних властивостей рівності натуральних чисел.

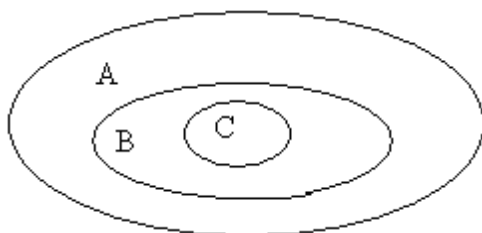
1. $A = A$ – будь-яка множина рівна сама собі - рефлексивність.
2. якщо $A = B$, то $B = A$ – симетричність.
3. якщо $A = B$, і $B = C$, то $A = C$ - транзитивність.

Таким чином, запис $B \subseteq A$ тотожний запису $A = B$.

Поняття «підмножина» вживається дуже часто, коли виділяють частини різноманітних сукупностей предметів і понять.

Широко використовується поняття підмножини в математиці. Наприклад, множина чисел першого десятка є підмножиною множини натуральних чисел, яку в свою чергу можна розглядати як підмножину множини всіх цілих чисел. Множина ромбів є підмножиною паралелограмів.

Відношення включення досить зручно ілюструвати наочно за допомогою діаграм Ейлера-Венна.



Наприклад, діаграма Ейлера–Венна відношення включення для множин A , B , C , якщо A – множина трикутників, B – множина рівнобедрених трикутників, C – множина рівносторонніх трикутників (мал.3).

$C \subset B$ і $B \subset A$, то $C \subset A$ – властивість транзитивності відношення включення.

Взаємооднозначний зв'язок між точками прямої та дійсними числами дозволяє зображувати на координатній прямій різні підмножини множини $\mathbf{R}$. Якщо a і b — різні дійсні числа ($a < b$), то запис і зображення цих підмножин може бути такою:

Подмножество	Обозначение	Изображение на координатной прямой
$\{x/x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$	$]a, b[$	
$\{x/x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x/x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b[$	
$\{x/x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}$	$]a, b]$	
$\{x/x \in \mathbf{R}, x \geq a\}$	$[a, +\infty[$	

Продолжение

Подмножество	Обозначение	Изображение на координатной прямой
$\{x/x \in \mathbf{R}, x > a\}$	$]a, +\infty[$	
$\{x/x \in \mathbf{R}, x \leq a\}$	$]-\infty, a]$	
$\{x/x \in \mathbf{R}, x < a\}$	$]-\infty, a[$	

Рис. 1

Заняття 2. Операції над множинами. Переріз та об'єднання.

Мета заняття: сформулювати у студентів уявлення про операції об'єднання та перерізу множин, розглянути їх властивості, навчити застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Хід заняття:

I. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [3, С.33-36; 4, С. 11-14; 5, С.11-14; 6, С.16-21; 7, С.66, С.73-80] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Питання для самоконтролю.

1. Яка операція над множинами називається об'єднанням множин ?

2. Як позначають операцію об'єднання множин ?
3. Як можна зобразити за допомогою кругів Ейлера-Венна об'єднання множин ?
4. Назвати властивості операції об'єднання множин.
5. Яка операція над множинами називається перерізом множин ?
6. Як позначають операцію перерізу множин ?
7. Як можна зобразити за допомогою кругів Ейлера-Венна переріз множин ?
8. Назвати властивості операції перерізу множин.

III. *Практична частина*

Приклад 1. Задано множини $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ і $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$. Знайти об'єднання множин A і B .

Розв'язання: $P = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – елементи у множині записуємо тільки один раз.

Приклад 2. Задано множини $A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ і $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$. Знайти переріз множин A і B .

Розв'язання: $P = A \cap B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$.

Приклад 3. Нехай C – множина ромбів; D – множина прямокутників. Які фігури утворюють переріз цих множин?

Розв'язання: Ромбом називається паралелограм у якого всі сторони рівні. Ромб з прямими кутами – це квадрат.

Прямокутник - це паралелограм у якого всі кути прямі. Прямокутник з рівними сторонами – квадрат.

Отже, $C \cap D$ – множина квадратів.

Завдання для студентів :

№ 1. Знайдіть переріз та об'єднання множини $C = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ і множини D , якщо: а) $D = \{12, 14, 18, 20, 22, 24\}$; б) $D = \{14, 16, 18, 20\}$; в) $D = \{3, 4, 5, 6\}$; г) $D = C$.

№2. Нехай задані множини A , B , C . Знайти $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, якщо:

- 1) $A = \{2; 3; 8; 9\}$, $B = \{16; 18; 20\}$, $C = N$;
- 2) $A = N$, $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $C = \{3; 5; 7\}$;
- 3) $A = Z$, $B = \{2; 4; 6\}$, $C = N$;
- 4) $A = \{20\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $C = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$;
- 5) $A = Z$, $B = N$, $C = Q$;

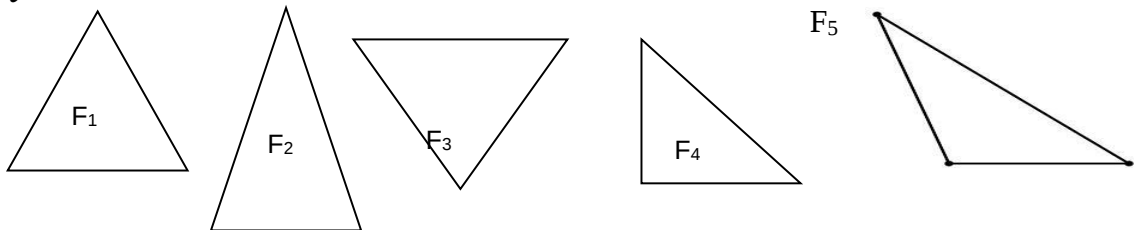
№ 3. Назвіть елементи, що належать перерізу множини букв в слові «математика» і множини букв в слові «граматика». З яких елементів складається об'єднання заданих множин ?

№ 4. P – множина натуральних дільників числа 18, Q – множина натуральних дільників числа 24. Вкажіть характеристичну властивість елементів перерізу множин P і Q та назвіть його елементи.

№ 5. Знайдіть переріз і об'єднання множин K і M , якщо K – множина двоцифрових чисел, M – множина непарних чисел. Правильно чи ні, що: а) $21 \in K \cap M$; б) $32 \notin K \cap M$; в) $32 \in K \cup M$; г) $7 \in K \cap M$; д) $7 \in K \cup M$; е) $135 \notin K \cup M$?

№ 6. Знайдіть переріз та об'єднання множин $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, f, k\}$, $C = \{b, c, d\}$. Правильно чи ні, що: а) $c \in A \cap B \cap C$; б) $e \in A \cup B \cup C$?

№ 7. C – множина рівнобедрених трикутників, D – множина рівносторонніх трикутників. Які з трикутників, зображених на мал.4, містяться у перерізі множин C і D ? Правильно чи ні стверджувати, що трикутник F_4 не належить об'єднанню даних множин ?



Мал.4

№ 8. Знайдіть переріз та об'єднання множин:

- а) $[8; 15]$ і $[9; 20]$; г) $(-\infty; 3]$ і $(-2; +\infty)$;
 б) $(-1; 1]$ і $[-1; 0)$; д) $(-2; 1]$ і $[-2; 0)$;
 в) $(2; +\infty)$ і $[-4; 3]$; е) $[0; 2]$ і $[1; 3)$.

№ 9. Побудуйте круги Ейлера для множин A , B і C та вкажіть характеристичну властивість елементів множини $A \cap B \cap C$, якщо:

- а) A – множина правильних багатокутників, B – множина трикутників, C – множина чотирикутників;
 б) A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників, C – множина чотирикутників;
 в) A – множина прямокутних трикутників, B – множина рівнобедрених трикутників, C – множина рівносторонніх трикутників;
 г) A – множина прямокутних трикутників, B – множина рівнобедрених трикутників, C – множина трикутників;

У кожному з випадків виділіть на малюнку область, що зображує множину $A \cap B \cap C$, і накресліть фігуру, яка належить цій множині.

№ 10. Задані множини: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, f, k\}$, $C = \{b, c, d, f, m\}$. Назвіть елементи множини $K = (A \cup B) \cap C$ і $P = A \cup B \cap C$. Міститься

чи ні елемент m у множині K , а елемент f у множині P ?

III. Огляд теоретичних питань.

Операції над множинами.

Над множинами виконуються такі операції, які дають можливість одержати нову множину із двох або більше даних. Всі ці операції широко використовуються в шкільному курсі математики, а саме: об'єднання, переріз, різниця, розбиття множини на підмножини, декартів добуток. Розглянемо кожну з цих операцій.

Об'єднання множин.

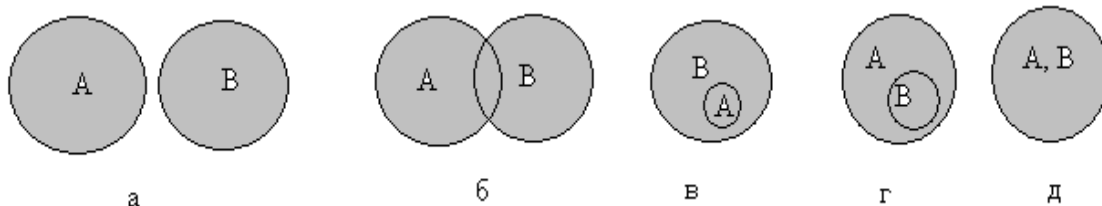
При розв'язанні ряду практичних і теоретичних задач доводиться об'єднувати дві або кілька множин в одну. Наприклад, чотири групи студентів I курсу об'єднуються в одну для проведення лекційних занять.

Або, якщо позначити через A множину парних чисел першого десятка $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, а через B – множину непарних чисел цього десятка $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, то, об'єднавши ці дві множини, дістанемо множину натуральних чисел першого десятка, елементи якої дістанемо, приєднавши до елементів однієї з цих множин усі елементи другої в будь-якому порядку.

Об'єднанням двох множин A і B називається множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із множин A , або B . Об'єднання позначається так:

$$P = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$$

Проілюструємо об'єднання на кругах Ейлера-Венна.



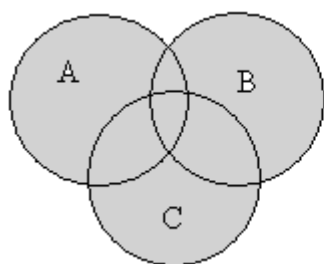
Із означення видно, що коли елемент x належить об'єднанню множин A і B , тобто $x \in A \cup B$, то або $x \in A$, або $x \in B$, або одночасно $x \in A$ і $x \in B$.

Властивості операції об'єднання.

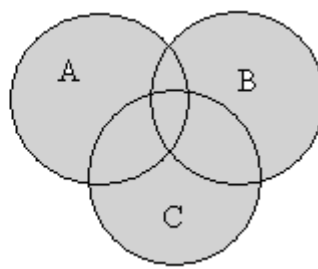
1. Комутативний (переставний) закон : $A \cup B = B \cup A$ (1)

2. Асоціативний (сполучний) закон : $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (2)

Ця властивість дає змогу записати вираз без дужок і одержати об'єднання будь-якої кількості множин.



$$(A \cup B) \cup C$$



$$A \cup (B \cup C)$$

Для того, щоб дві множини були рівні, необхідно і достатньо, щоб будь-який елемент x , що належить першій множині, належав також і другій множині і навпаки.

3. Якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$ (3)

4. Для будь-якої множини A мають місце рівності : (висновок з (3))

- ✓ $A \cup A = A$, тому що $A \subset A$;
- ✓ $A \cup \emptyset = A$, тому що $\emptyset \subset A$;
- ✓ $A \cup Y = Y$, тому що $A \subset Y$;

Теоретичною основою дії додавання натуральних чисел є операція об'єднання множин, які не мають спільних елементів (випадок a).

Формуючи у дітей уявлення про операцію «додавання» натуральних чисел за допомогою предметних дій, педагог повинен показати, що задану множину об'єднують з другою множиною, яка не має спільних елементів з першою, і одержують третю множину. Отже, слід виходити з означення об'єднання множини

Наприклад. На столі знаходяться коробка, а поруч — трикутниками і квадрати. Педагог просить дитину покласти у коробку спочатку трикутники а потім квадрати. Тепер у коробці знаходяться геометричні фігури. Ці дії дозволяють дітям усвідомити сутність понять: перший доданок (трикутники), другий доданок (квадрати) та сума (геометричні фігури).

Переріз множин.

У деяких задачах теоретичного і практичного змісту виникає потреба знаходити спільну частину даних множин або, як її називають, переріз даних множин.

Нехай $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ – множина дільників числа 18.

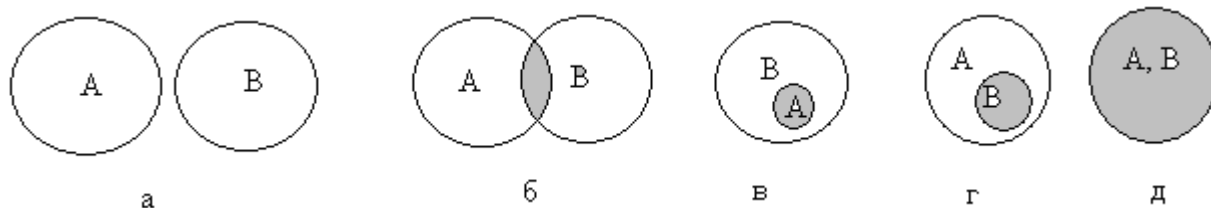
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ – множина дільників числа 24.

Ці множини мають спільні елементи – спільні дільники чисел 18 і 24, які утворюють множину $\{1, 2, 3, 6\}$, яка і називається *перерізом* множин A і B .

Перерізом двох множин A і B називається множина, яка

містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин одночасно і позначається $P = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

За допомогою діаграм Ейлера-Венна проілюструємо переріз:



- а) $A \cap B = \emptyset$ б) $A \cap B \neq \emptyset$ в) $A \subset B$, то $A \cap B = A$
 г) $B \subset A$, то $A \cap B = B$ д) $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A \cap B = A = B$

Цілком зрозуміло, що множина, яка є перерізом, наприклад, трьох множин A, B, C містить усі ті елементи, що належать кожній із цих множин.

Операція перерізу має **властивості**:

1. Комутативний (переставний) закон: $A \cap B = B \cap A$ (1)
2. Асоціативний (сполучний) закон: $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (2)
3. Якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A$
 Якщо $B \subset A$, то $A \cap B = B$
4. Для будь-якої множини A мають місце рівності (висновок з (3)):

$$A \cap A = A, \quad \text{тому що } A \subset A;$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad \text{тому що } \emptyset \subset A;$$

$$A \cap Y = A, \quad \text{тому що } A \subset Y.$$

Операція перерізу множин лежить в основі розв'язання різних задач, а також використовується для означень в курсі геометрії.

Заняття 3. Операції над множинами: Різниця множин. Доповнення підмножини до множини. Задачі на правило суми.

Мета заняття: сформулювати у студентів уявлення про різницю множин, доповнення підмножини до множини, розглянути їх властивості, навчити розв'язувати задачі на правило суми.

Хід заняття:

I. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [3, С.33-36; 4, С.14-18; 5, С.11-16; 6, С.21-28; 7, С.66, С.73-80] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Питання для самоконтролю.

1. Яка операція над множинами називається різницею множин ?
2. Як позначають різницю множин ?
3. Як можна зобразити за допомогою кругів Ейлера-Венна різницю

множин ?

4. Назвати властивості різниці множин.
5. Яка операція над множинами називається доповненням підмножини до множини ? За якої умови виконується ця операція ?
6. Як позначають доповнення підмножини до множини ?
7. Як можна зобразити за допомогою кругів Ейлера-Венна доповнення підмножини до множини ?
8. Назвати властивості доповнення підмножини до множини.

II. Практична частина

Приклад 1. Задано множини: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $B = \{2, 4, 5, 6\}$. Знайти різницю множин $A \setminus B$ і $B \setminus A$.

Розв'язання: За означенням, різницею двох множин A і B називається множина, елементи якої належать множині A і не належать множині B . Отже, $A \setminus B = \{1, 3\}$, $B \setminus A = \{6\}$.

Приклад 2. Задано множини $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ і $B = \{2, 4, 6\}$. Знайти доповнення підмножини B до множини A .

Розв'язання: Бачимо, що $B \subset A$. Щоб знайти множину B'_A треба із множини A вилучити всі елементи, що належать підмножині B , тобто щоб знайти B'_A треба із множини A вилучити множину B : $B'_A = A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$.

Приклад 3. N – універсальна множина, A – множина парних чисел. Знайти A'_N

Розв'язання: Запишемо задані множини за допомогою переліку елементів: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Щоб знайти A'_N треба із множини N вилучити множину A :

$A'_N = N \setminus A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

Приклад 4. В класі 40 учнів. З них 26 грають в баскетбол, 25 — займаються плаванням, 27 — ходять на лижах, при цьому одночасно плаванням і баскетболом займаються 15 учнів, баскетболом і лижами — 16, плаванням і лижами — 18. Один учень звільнений від фізкультурних занять. Скільки учнів займаються вказаними видами спорту? Скільки учнів займаються тільки одним видом спорту?

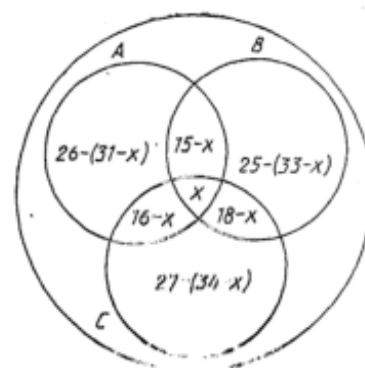


Рис. 19

мал.5

Розв'язання: У задачі розглядаються три множини: множина A — учні, які грають в баскетбол, множина B — учні, які займаються плаванням і множина C — учні, які займаються лижним спортом. За

умовою усі ці три множини попарно перетинаються (див. мал. 5). Позначимо число елементів перерізу даних множин буквою x та визначимо число учнів у кожній з областей, які не перетинаються. Оскільки за умовою задачі в класі 40 учнів, то можна скласти рівняння: $26 + 25 - (33 - x) + (18 - x) + 27 - (34 - x) + 1 = 40$. Звідси одержуємо, що $x = 10$. Отже, всіма вказаними видами спорту займаються 10 учнів, тільки баскетболом — 5 учнів, тільки плаванням — 2 учня, тільки лижами — 3 учня.

Завдання для студентів :

№ 1. Знайдіть різницю множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ і множини B , якщо:
а) $B = \{c, d, e, f, k, l\}$; б) $B = \{a, c, e\}$; в) $B = \{c, a, d, e, b\}$; г) $B = \{k, l, m\}$; д) $B = \{a, b, c, d, e, f, k\}$; е) $B = \emptyset$.

№ 2. Множина A складається з натуральних чисел від 2 до 10, множина B — з натуральних чисел від 5 до 20. Назвіть елементи множин $A \setminus B$ і $B \setminus A$.

№ 3. P — множина двоцифрових чисел, Q — множина парних натуральних чисел. Зобразіть дані множини за допомогою кругів Ейлера, покажіть штрихуванням різницю множин P і Q та вкажіть характеристичну властивість елементів, що належать цій різниці. Правильно чи ні стверджувати, що $P \setminus Q$ містить числа 21; 17?

№ 4. Дана множина $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Запишіть дві підмножини множини X та доповнення цих підмножин до множини X .

№ 5. Сформулюйте характеристичну властивість елементів доповнення підмножини P до множини трикутників, якщо: а) P — множина гострокутних трикутників; б) P — множина рівносторонніх трикутників.

№ 6. Знайдіть доповнення: а) множини парних натуральних чисел до множини N ; б) множини від'ємних чисел до множини Z ; в) множини цілих чисел до множини Q .

№ 7. Доведіть, що для будь-яких множин A і B є правильною рівність:
а) $(A \cup B')' = A' \cap B$; б) $(A' \cup B')' = A \cap B$.

№ 8. Покажіть на координатній прямій множину A та вкажіть характеристичну властивість елементів її доповнення до множини R дійсних чисел, якщо: а) $A = (-\infty; 2]$; б) $A = [2; 5]$; в) $A = (-\infty; -4)$; г) $A = (-7; +\infty)$.

№ 9. Множини A , B і C такі, що $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Намалюйте їх за допомогою кругів Ейлера та покажіть штриховкою області, які

представляють множини $(A \setminus B) \cap C$; $A \setminus B \cap C$; $A \cup (B \setminus C)$; $A \cup B \setminus C$. Для кожного випадку зробіть окреме креслення.

№ 10. P – множина трапецій, Q – множина чотирикутників, що мають прямий кут, M – множина квадратів. Побудуйте круги Ейлера для даних множин та відмітьте штриховкою області, що зображають множини $P \setminus Q \cup M$, $Q \cup M \setminus P$ та $P \cup Q \setminus M$. Для кожного випадку зробіть окреме креслення.

№ 11. Відомо, що A , B і C – підмножини універсальної множини I та $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Побудуйте круги Ейлера для даних множин та відмітьте області, що зображують множини: а) $A \cap B \cap C'$; б) $(A \cup B)' \cap C$; в) $(A' \cup B') \cap C$; г) $A' \cup B \cup C$. Для кожного випадку зробіть окреме креслення.

№12. Дані пари множин. 1) Знайдіть для кожної пари множин універсальну множину; 2) з'ясуйте: чи пов'язані множини відношенням рівності або включення; 3) знайдіть переріз множин; 4) знайдіть різницю першої та другої множин; 5) знайдіть об'єднання множин; 6) знайдіть доповнення до першої множини в об'єднанні обох множин.

1) $A = \{a, б, в, г, д, е\}$, $B = \{a, в, д, ж\}$;

2) $A = \{г, д, е\}$, $B = \{a, в, б\}$;

3) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2\}$;

4) A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників;

5) A – множина рівнобедрених трикутників, B – множина рівносторонніх трикутників.

№13. Множини A , B і C такі, що $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Намалювати їх за допомогою кругів Ейлера та показати штриховкою області, які представляють множини $(A \setminus B) \cap C$; $A \setminus B \cap C$; $A \cup (B \setminus C)$; $A \cup B \setminus C$. Для кожного випадку зробити окреме креслення.

№ 14. A – множина прямокутників, B – множина правильних багатокутників, C – множина трикутників. Побудувати круги Ейлера для даних множин та показати штриховкою області, що зображають множини: а) $A \cap B \cup C$; б) $A' \cap B \cup C$; в) $(A \cup B)' \cap C$. Для кожного випадку зробити окреме креслення.

№15. З 100 учнів, що вивчають англійську та німецьку мови, 85 вивчають англійську мову, 45 – німецьку. Скільки учнів вивчають обидві мови ?

№16. У класі 30 учнів, які відвідують факультативні заняття з фізики і з математики. Відомо, що 10 учнів вивчають обидва предмети, а

математикою займаються 25 учнів. Скільки учнів вивчають тільки фізику ?

№17. На III курсі коледжа всі учні беруть участь у гуртковій роботі: 32 – у математичному гуртку, 22 – у педагогічному гуртку і 24 – у літературному. В математичному і педагогічному гуртках беруть участь 12 учнів, у педагогічному і літературному – 10, у математичному і літературному – 8. Скільки всього учнів на цьому курсі, якщо відомо, що 2 з них беруть участь у всіх трьох гуртках ?

№18. Кожен студент групи бере участь у гуртковій роботі: 12 – у спортивному гуртку, 18 – у науковому і 14 – у музичному. В спортивному і науковому беруть участь 4 студента, у спортивному і музичному – 8, у науковому і музичному – 6, у всіх трьох гуртках – 2 студента. Скільки всього студентів у групі ? Скільки студентів бере участь тільки у спортивному, тільки у науковому, тільки у музичному гуртках ?

№19. Анкети 200 студентів дали такі результати про знання ними іноземної мови: англійську мову знають – 56 студентів, німецьку – 60, французьку – 84 студента. Англійську і німецьку – 16, англійську і французьку – 20, німецьку і французьку – 10, усі три мови – 6. Скільки опитаних студентів не знає жодної з цих мов ? Скільки знає тільки одну з них ?

№20. Приїхало 100 туристів. З них 10 чоловік не знали ні німецької, ні французької мови, 75 чоловік знали німецьку мову і 83 – французьку. Скільки туристів знали обидві мови ?

III. Огляд теоретичних питань

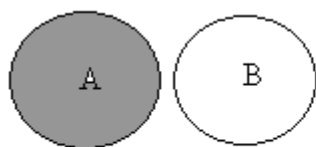
Різниця (віднімання) множин.

Різницею двох множин A і B називається множина, елементи якої належать множині A і не належать множині B .

Позначають різницю так: $P = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$

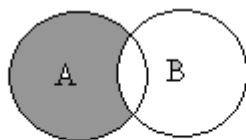
Операцію знаходження різниці двох множин називають відніманням множин.

На діаграмах Ейлера-Венна різниця множин A і B має вид заштрихованої області.



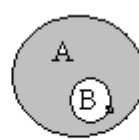
а)

$$A \setminus B = A$$

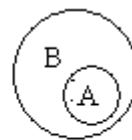


б)

$$A \setminus B \neq \emptyset$$

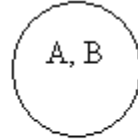


в)



г)

$$A \setminus B = \emptyset$$



д)

Властивості різниці:

1. Різниця не комутативна, тобто $A \setminus B \neq B \setminus A$ (лише в одному випадку $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, якщо $A = B$)

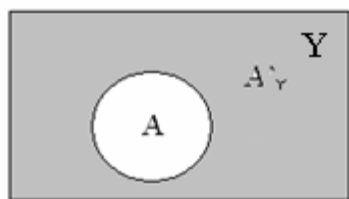
2. Для будь-яких множин A, B, C мають місце такі рівності, які зв'язують віднімання множин з іншими операціями над множинами:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Велике значення в математиці має випадок, коли множина B є підмножиною множини A (на діаграмах Ейлера-Венна випадок в)). У цьому випадку всі елементи з A , що не належать множині B , називають *доповненням підмножини B до множини A* і позначаються B'_A . Бачимо, що множині B'_A належать всі точки множини A , котрі не належать B , тобто $B'_A = A \setminus B$.

Якщо якась множина A є підмножиною універсальної множини Y , то різниця $Y \setminus A$ називається *доповненням підмножини A до Y* і



позначається: $A'_Y = Y \setminus A$

Геометрично будемо позначати універсальну множину у вигляді прямокутника, а її підмножини – у вигляді внутрішніх його кругів.

Властивості доповнення.

$$1. B \cup B'_A = A; \quad A \cup A'_Y = Y.$$

$$2. B \cap B'_A = \emptyset; \quad A \cap A'_Y = \emptyset.$$

3. $(A \cap B)'_Y = A'_Y \cup B'_Y$ - доповнення перерізу двох множин до універсальної множини дорівнює об'єднанню доповнень до кожної з цих множин.

4. $(A \cup B)'_Y = A'_Y \cap B'_Y$ - доповнення об'єднання двох множин до універсальної множини дорівнює перерізу доповнень кожної з цих множин.

Рівності (3) і (4) відомі під назвою законів де Моргана (шотландський математик, 1806 – 1871pp.).

Теоретичною основою дії віднімання натуральних чисел є операція над множинами, котра називається різницею (випадок в) і д).

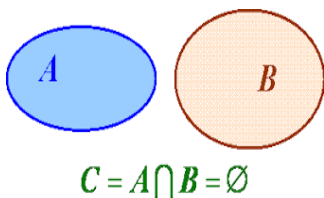
Формуючи у дітей уявлення про операцію «віднімання» натуральних чисел за допомогою предметних дій, педагог повинен показати, що із заданої множини вилучають другу множину, яка є підмножиною першої, і одержують третю множину, доповнення другої множини до першої. Отже, слід виходити з означення

доповнення множини В до множини А, де А - перша множина, В – друга множина, B'_A – третя множина.

Наприклад. На столі знаходиться коробка з геометричними фігурами (трикутники і квадрати). Педагог просить дитину забрати з коробки усі трикутники. Тоді в коробці залишаться лише квадрати. Ці дії дозволяють дітям усвідомити сутність понять: зменшуване (геометричні фігури), від'ємник (трикутники) та різниця (квадрати).

Правила про порядок виконання операцій над множинами: якщо над множинами виконують операції перерізу, об'єднання та віднімання і у виразі відсутні дужки, то спочатку виконують переріз, а потім у порядку слідування об'єднання і віднімання.

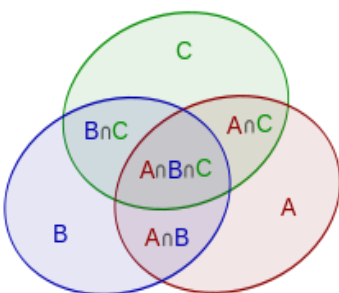
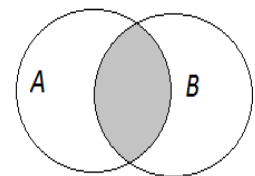
Задачі на правило суми.



Позначимо число елементів скінченної множини А символом $n(A)$, а множини В – символом $n(B)$.

1) Якщо множини А і В не перетинаються, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2) якщо множини А і В перетинаються ($A \cap B \neq \emptyset$), то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



3) для об'єднання трьох множин, які попарно перетинаються достатньо застосувати формулу:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Заняття 4. Операції над множинами: Розбиття множини. Декартів добуток.

Мета заняття: сформувати у студентів уявлення про операцію розбиття множини на підмножини, що попарно не перетинаються, про класифікацію як основу будь-якого розбиття сукупності об'єктів; розглянути Декартів добуток та його властивості, навчити застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Хід заняття:

І. Попередня підготовка:

Вивчити теоретичний матеріал [3, С.33-36, С.38-40; 4, С.14-18, С.79-82; 5, С.11-16, С.19-25; 6, С. 28-38; 7, С.73-80, С.88-94] та уміти застосовувати набуті знання для розв'язання задач.

Питання для самоконтролю:

1. Дати означення класифікації.
2. Назвати умови розбиття множини на класи.
3. Дати означення поняття “кортеж” .
4. Пояснити, що означає “довжина кортежу”.
5. Навести приклади упорядкованої пари.
6. Дати означення декартового добутку.
7. Які існують способи задання декартового добутку ?
8. Дати означення потужності декартового добутку.
9. Як знайти потужність декартового добутку ?
10. Назвати властивості декартового добутку.

II. Практична частина

Приклад 1. Розбити множину цілих невід'ємних чисел на класи за кількістю дільників числа.

Розв'язання: Нехай універсальною множиною є множина цілих невід'ємних чисел N_0 . Візьмемо за основу класифікації властивість, пов'язану з кількістю дільників числа. Визначимо скільки дільників може мати ціле невід'ємне число: один дільник — само себе, два дільника — само себе та 1, більше двох дільників, безліч дільників. Тоді множину чисел N_0 розбивають на 4 підмножини (класи), які попарно не перетинаються:

I - множина чисел, які мають тільки два дільники ($n = 2$, тобто число ділиться на одиницю і само на себе) – прості числа $P \subset N_0$.

II - множина чисел, які мають більше двох дільників ($n > 2$) - складені числа $C \subset N_0$.

III - одноеlementна множина $\{1\}$. Число 1 не належить ні до простих чисел, ні до складених, воно має лише один дільник – само себе - $\{1\} \subset N$.

IV - одноеlementна множина $\{0\}$. Число 0 не належить ні до простих, ні до складених чисел, воно має нескінченну кількість дільників.

Ці чотири підмножини попарно не перетинаються, тобто:

$$P \cap C = \{1\} \cap P = \{1\} \cap C = \{0\} \cap P = \{0\} \cap C = \{0\} \cap \{1\} = \emptyset.$$

Об'єднання цих підмножин дає множину цілих невід'ємних чисел, тобто $P \cup C \cup \{1\} \cup \{0\} = N_0$

Приклад 2. Записати кортеж числа 83048440 та множину цифр, з яких воно складається. Визначити довжину цього кортежу та потужність визначеної множини.

Розв'язання: Кортеж - це упорядкований набір елементів. Кортежем числа 83048440 буде $\langle 8, 3, 0, 4, 8, 4, 4, 0 \rangle$. Довжина

кортежу дорівнює кількості елементів у ньому. Довжина цього кортежу $n = 8$.

$A = \{0, 3, 4, 8\}$ — множина цифр якими воно записано. Потужність цієї множини: $m(A) = 4$.

Приклад 3. Задані множини $A = \{7, 3, 6\}$ $B = \{1, 6\}$. Знайти декартові добутки $A \times B$ і $B \times A$. Результат записати за допомогою переліку пар та таблиці. Визначити їх потужність.

$$A \times B = \{(7, 1), (7, 6), (3, 1), (3, 6), (6, 1), (6, 6)\};$$

$\begin{array}{c} B \\ \backslash \\ A \end{array}$	1	6
7	(7;1)	(7;6)
3	(3;1)	(3;6)
6	(6;1)	(6;6)

$$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$B \times A = \{(1, 7), (6, 7), (1, 3), (6, 3), (1, 6), (6, 6)\};$$

$\begin{array}{c} A \\ \backslash \\ B \end{array}$	7	3	6
1	(1;7)	(1;3)	(1;6)
6	(6;7)	(6;3)	(6;6)

$$m(B \times A) = m(B) \cdot m(A) = 2 \cdot 3 = 6$$

Завдання для студентів :

№ 1. З множини $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ виділіть підмножини A , B і C . З'ясуйте, у якому випадку здійснилося розбиття множини P на класи:

а) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{7, 9\}$;

б) $A = \{5\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 6\}$;

в) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{5, 7, 9\}$;

г) $A = \{1, 3\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{5, 6, 9\}$.

№ 2. Множина A складається з 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; множина B — її підмножина, що складається з чисел, які діляться на 3; множина C — підмножина, що складається з чисел, які при діленні на 3 дають остачу 1; множина D — підмножина, що складається з чисел, які при діленні на 3 дають остачу 2. Чи можна стверджувати, що множина A

розбивається у цьому випадку на підмножини В, С і D, які попарно не перетинаються ?

№ 3. Перевірте, чи виконані умови класифікації, якщо:

- а) множину кутів розбили на гострі, тупі і прямі;
- б) множину звуків російської мови – на голосні та приголосні;
- в) множину учнів школи – на футболістів, хлопчиків та дівчат ?

№ 4. З'ясуйте, у яких випадках класифікація зроблена правильно:

- а) трикутники поділяються на прямокутні, тупокутні й рівнобедрені;
- б) кути поділяються на гострі, прямі й розгорнуті;
- в) цілі числа можна розбити на натуральні, число 0 й від'ємні цілі числа;
- г) дієслова української мови поділяються на дієслова теперішнього, минулого й майбутнього часу;
- д) члени речення бувають головні та другорядні.

№ 5. З множини Т трикутників виділили дві підмножини: Х – підмножина прямокутних трикутників та У – підмножина рівнобедрених трикутників. Побудуйте для даних множин круги Ейлера; встановіть, на скільки областей, що не перетинаються, розбився круг, який зображає множину Т, та усі множини, які зображені цими областями, задайте описом характеристичної властивості. За допомогою скількох властивостей здійснено розбиття множини трикутників на класи ?

№ 6. Розбийте множину чотирикутників на класи:

- а) за однією будь-якою властивістю; б) за двома властивостями. Для кожного випадку побудуйте круги Ейлера-Венна, встановіть кількість областей, що не перетинаються, та які множини відображають ці області.

№ 7. Множини Р - ромбів, Т – трикутників та К – багатокутників, які мають кут 30° , є підмножинами множини М – багатокутників. Побудуйте круги Ейлера для даних множин, встановіть, на скільки областей, що не перетинаються, розбився круг, що зображає множину М, та для усіх множин, що зображені цими областями, вкажіть характеристичну властивість.

№ 8. Запишіть усі двоцифрові числа, цифри десятків яких належать множині $A = \{4, 5, 6\}$, а цифри одиниць – множині $B = \{3, 7\}$.

№ 9. Назвіть елементи, що належать множині $X \times Y$, якщо:

- а) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{k, l\}$; б) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d\}$;
- в) $X = \{a, b, c\}$, $Y = X$; г) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \emptyset$.

№ 10. Дани множини $P = \{1, 2, 3\}$ і $K = \{m, n\}$. Знайдіть усі елементи

декартових добутків $P \times K$ і $K \times P$.

№ 11. Знайдіть декартів добуток множин $A = \{5, 9, 4\}$ і $B = \{7, 8, 6\}$ та виділіть з нього підмножину пар, у яких: а) перша компонента більше другої; б) перша компонента дорівнює 5; в) друга компонента дорівнює 7.

№12. Знайдіть декартів добуток множин: $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 7\}$ і $K = \{y \mid y \in \mathbb{N}, 4 \leq y < 9\}$. Покажіть його елементи у прямокутній системі координат.

№13. Зобразіть у прямокутній системі координат множину $X \times X$, якщо $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 6\}$. Чи належать цій множині пари: $(-3, 4)$, $(2, 5)$, $(-0, 5)$, $(0, 0)$, $(0, -3)$, $(5, 5)$?

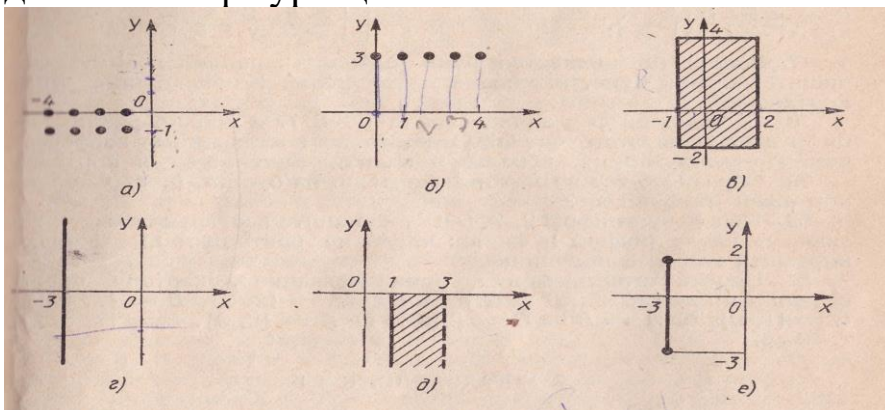
№ 14. Зобразіть на координатній площині елементи декартового добутку множин X і Y , якщо:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ і $Y = \{2, 3, 4\}$; | 5) $X = \{2\}$ і $Y = \mathbb{R}$; |
| 2) $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ і $Y = [2; 4]$; | 6) $X = (-3; 2)$ і $Y = \mathbb{R}$; |
| 3) $X = [-1; 2]$ і $Y = \{2, 3, 4\}$; | 7) $X = \mathbb{R}$ і $Y = [-2; 2]$; |
| 4) $X = [1; 7]$ і $Y = [2; 6]$; | 8) $X = \mathbb{R}$ і $Y = \{-3\}$. |

№15. Знайдіть декартові добутки множин та покажіть їх елементи на координатній площині:

- 1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y < 0\}$;
- 2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = 0\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y > 0\}$;
- 3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = 2\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$;
- 4) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1\}$;
- 5) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$;
- 6) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$;
- 7) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$;
- 8) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$.

№ 16. Фігури, наведені на мал.6, є результатом зображення на координатній площині декартового добутку множин X і Y . Вкажіть для кожної фігури ці множини.



Мал.6

№ 17. З'ясуйте, декартів добуток яких двох множин зображується на координатній площині у вигляді півплощини. Розгляньте усі випадки.

№ 18. Встановіть, декартів добуток яких двох множин зображується на координатній площині у вигляді прямого кута, який утворюється при перетині координатної вісі ОХ та вісі ОУ.

№ 19. На координатній площині побудуйте пряму, яка паралельна вісі ОХ і проходить через точку Р (-2;3). Встановіть, декартів добуток яких двох множин зображується на координатній площині у вигляді цієї прямої.

№ 20. На координатній площині побудуйте пряму, яка паралельна вісі ОУ і проходить через точку Р (-2; 3). Встановіть, декартів добуток яких двох множин зображується на координатній площині у вигляді цієї прямої.

III. Огляд теоретичних питань

Розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються. Класифікація понять.

Будь-яка класифікація (понять, відношень) зводиться до того, що елементи однієї (універсальної) множини за певними характеристичними ознаками розбивають на дві або кілька непорожніх підмножин так, щоб кожен елемент даної множини входив в одну і тільки в одну із підмножин, тобто щоб ці підмножини попарно не перетинались (переріз кожної пари з них був порожньою множиною).

Класифікацію можна зробити по-різному, залежно від того, яку властивість взяти за основу класифікації.

Розглянемо приклади класифікації геометричних понять.

Нехай маємо множину трикутників М. Виділимо із М підмножину А з властивістю: «мати прямий кут», підмножину В з властивістю «мати гострий кут», підмножину С з властивістю «мати тупий кут». Одержимо підмножини:

А – прямокутні трикутники;

В – гострокутні трикутники;

С – тупокутні трикутники.

Ці множини мають такі властивості:

$$1) M = A \cup B \cup C; \quad 2) A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset.$$

Розбиття множини на підмножини, що не перетинаються, є теоретичною основою найрізноманітніших класифікацій. Поняття «клас» і його синоніми «тип», «сім'я», «рід», «вид», «сорт» широко вживаються у всіх галузях нашої діяльності.

Розбиття множини X на підмножини, що попарно не перетинаються, або класи, визначається такими умовами:

- 1) всі підмножини, що утворюють розбиття, не порожні;
- 2) будь-які дві підмножини не перетинаються;
- 3) об'єднання всіх підмножин є дана множина X .

У дошкільному курсі математики явно не вводиться поняття розбиття множини на підмножини, які не перетинаються, але розбивати множину на класи доводиться досить часто: класифікація предметів за кольором, розміром і формою; множину всіх кутів розбивають на 3 класи: гострі тупі, прямі; множину всіх багатокутників – на трикутники, чотирикутники тощо.

Після введення поняття класифікації можна перейти до формування умінь давати означення. Наприклад, розбивши множину чотирикутників на клас, в якому сторони попарно паралельні, і клас, в якому ця властивість відсутня, одержимо таке означення паралелограма: «Чотирикутник (рід, вся множина), у якого сторони попарно паралельні (видова ознака, клас), називається паралелограмом».

Найбільш поширеним є означення через найближчий рід і видову ознаку. Найближчим родовим поняттям для прямокутника буде поняття паралелограма.

Аналогічно вводиться поняття квадрата як прямокутника (родова ознака), у якого всі сторони рівні (видова ознака). Квадрат можна також означити як ромб (рід), у якого кути прямі (видова ознака).

Діти досить часто роблять помилки у формулюванні означень, тому що педагог при формуванні умінь давати конкретні означення не завжди спирається на поняття розбиття і буває порушена яка-небудь із вимог до розбиття множини на підмножини.

Операція *розбиття також є теоретичною основою задач на ділення*, яких у початковій математиці дві: ділення на рівні частини і на вміщення.

Кортеж. Декартів добуток множин.

При розгляді будь-якої множини порядок запису елементів не має значення, тому що у множині елементи можна міняти місцями, але не можна повторювати декілька раз. Множину букв, якими записано слово «дитина» можна записати:

$$A = \{ \text{д, и, т, н, а} \}, \text{ або } A = \{ \text{а, д, и, н, т} \}, \text{ або } A = \{ \text{т, н, и, а, д} \} \dots$$

Щоб відновити написання слова «дитина», множини A

недостатньо, бо необхідно знати не лише букви (елементи множини), але і порядок розміщення і повторення букв. Аналогічно, для запису числа слід знати не лише множину різних цифр, за допомогою яких записано число 132131, тобто $A = \{1, 2, 3\}$, а їх порядок слідування. Таку можливість дає поняття «кортеж».

Розглянемо множини $X_1, X_2, \dots, X_n$. Візьмемо будь-який елемент a_1 із множини X_1 , потім a_2 із множини $X_2, \dots$, елемент a_n із множини X_n . Вибрані елементи розмістимо по порядку: $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Одержимо упорядковану n -ку (пару, трійку, четвірку, тощо) елементів, вибраних із множин $X_1, X_2, \dots, X_n$, або «кортеж» («кортеж» - фр. – «урочиста процесія»). В даному випадку «кортеж» - це «розміщення», або «скінчена послідовність елементів».

Кортежем довжини n називається упорядкований набір n елементів, з яких деякі можуть бути і однаковими.

Елементи $a_1, a_2, \dots, a_n$ називаються *компонентами кортежу*.

Кожне речення можна розглядати як кортеж, складений із слів, які в свою чергу є кортежами різної або однакової довжини, складеними із букв. Наприклад, слово «дитина» має кортеж, довжина якого $n = 6$: $\langle \text{д, и, т, и, н, а} \rangle$, складений із елементів множини $A = \{\text{д, и, т, н, а}\}$.

Два кортежі $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ і $\langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$ називаються *рівними*, якщо вони мають однакову довжину, тобто $n = m$, і кожна компонента першого кортежу дорівнює компоненті другого кортежу з тим же номером. Наприклад, кортежі $\langle a, в, с \rangle$ і $\langle a, в, с \rangle$ рівні, а кортежі $\langle a, в, с \rangle$ і $\langle в, а, с \rangle$ - не рівні, $\langle a, в, с \rangle$ і $\langle a, в, с, d \rangle$ не рівні.

На практиці частіше зустрічаємося з кортежем довжини 2, котрий носить назву «упорядкованої пари».

Упорядкована пара - це два елементи, розміщені в певному порядку, тобто на першому місці – перший елемент (компонента), другий елемент (компонента) - на другому місці.

Дві пари будуть рівними, якщо для (a_1, b_1) і (a_2, b_2) виконується $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$, але $(a_1, b_1) \neq (b_1, a_1)$.

Прямим, або *декартовим добутком* множин A і B називається множина кортежів довжини 2, перша компонента кожного з них належить A множині, а друга – B .

Декартів добуток множин A і B позначається так:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ і } b \in B \}.$$

Наприклад. Задані множини $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b\}$. Знайти

декартів добуток $A \times B$ і $B \times A$.

Розв'язання: $A \times B = \{(1, a) (1, b) (2, a) (2, b) (3, a) (3, b)\}$;

$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$.

Число елементів декартового добутку множин $A_1, A_2, \dots, A_k$, що мають відповідно $n_1, n_2, \dots, n_k$ елементів, дорівнює добутку $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Дане твердження можна записати так:

$$m(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = m(A_1) \cdot m(A_2) \cdot \dots \cdot m(A_k).$$

Властивості декартового добутку.

1. З означення видно, що декартів добуток не має переставної властивості (не має комутативності):

$$A \times B \neq B \times A \text{ але } m(A \times B) = m(B \times A)$$

2. Дистрибутивні закони: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

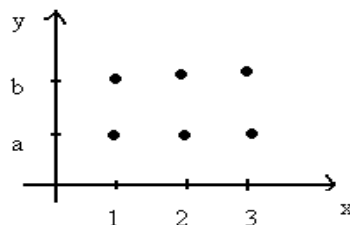
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Декартів добуток задається:

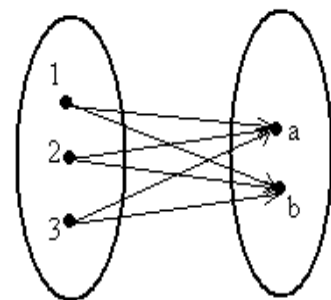
A B	a	b
1	(1, a)	(1, b)
2	(2, a)	(2, b)
3	(3, a)	(3, b)

1) переліком пар: $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

2) у вигляді таблиці (мал.7)



Мал.7



Мал.8

3) графічно на координатній площині (мал.8)

4) за допомогою графа (стрілки вказують зв'язок між компонентами множини A і B) (мал.9).

Додаткові завдання до теми «Основні поняття теорії множин»

№ 1. Встановіть відношення між множинами A, B і C та зобразіть їх за допомогою кругів Ейлера, якщо:

а) A – множина парних натуральних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних 10, C – множина натуральних чисел, кратних 5;

б) A – множина трикутників, B – множина прямокутних трикутників, C – множина гострокутних трикутників;

в) A – множина трикутників з кутом 45° , B – множина рівнобедрених трикутників, C – множина рівносторонніх трикутників;

г) A – множина ромбів, B – множина п'ятикутників, C – множина багатокутників, що містять кут 60° .

№83. Встановіть, в якому відношенні знаходяться множини B і D , якщо:

а) $B = [3; 5]$, $D = [4; 6]$;

в) $B = (-\infty; 0]$, $D = [0; 7]$;

б) $B = (7; +\infty)$, $D = [8; 12]$;

г) $B = (-5; -1)$, $D = (-1; 6)$.

№ 2. Замість трьох крапок поставьте «і» чи «або»:

а) Елемент x належить об'єднанню множин P і Q тоді і тільки тоді, коли він належить множині $P \dots$ множині Q .

б) Елемент x не належить множині $P \cup Q$ тоді і тільки тоді, коли він не належить множині $P \dots$ не належить множині Q .

в) Елемент x належить перерізу множин P і Q тоді і тільки тоді, коли він належить множині $P \dots$ належить множині Q .

г) Елемент x не належить перерізу множин P і Q тоді і тільки тоді, коли він не належить множині $P \dots$ не належить множині Q .

№ 3. Задані множини A і B . Сформулюйте умови, при яких $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cup B \neq \emptyset$, $A \cap B = B$, $A \cup B = B$, якщо:

а) A – множина учнів класу, які відвідають гурток з малювання, B – множина хлопчиків класу;

б) множина дівчат класу, B – множина відмінників класу.

№ 4. C – множина трапецій, D – множина паралелограмів, E – множина чотирикутників, які мають прямий кут. Побудуйте для даних множин круги Ейлера, виділіть штриховкою області, що зображують множини $C \cup D \cup E$ та $C \cap D \cap E$, та задайте кожен з них описом характеристичної властивості. Для кожного випадку зробіть окреме креслення.

№ 5. Множини X та Y є підмножинами універсальної множини, і $X \cap Y \neq \emptyset$. Зобразіть їх за допомогою кругів Ейлера та виділіть штриховкою множину: а) $X' \cap Y'$; б) $X' \cup Y'$; в) $(X \cup Y)'$; г) $(X \cap Y)'$. Для кожного випадку зробіть окреме креслення. Чи є серед цих множин рівні?

№ 6. A – множина одноцифрових чисел, B – множина непарних одноцифрових чисел, C – множина одноцифрових чисел, кратних 3. Зобразіть множини A , B і C за допомогою кругів Ейлера.

Виділіть штриховкою (для кожного випадку зробіть окреме креслення) множину: а) B' ; б) C' ; в) $B' \cap C'$; г) $B' \cup C'$; д) $(B \cap C)'$; е) $(B \cup C)'$. Яка характеристична властивість елементів кожної з цих множин? Чи є серед цих множин рівні?

№ 7. Дані множини: P – множина гострокутних трикутників, Q – множина рівнобедрених трикутників, S – множина рівносторонніх трикутників. Вкажіть характеристичну властивість елементів множин $X = P \cap Q \setminus S$ та $Y = Q' \cap P \cup S$. об'єднанню даних множин? Встановіть, які з трикутників, зображені на малюнку 3, належать множині X , а які – множині Y .

№ 8. T – множина багатокутників, які мають прямий кут, P – множина квадратів, M – множина трикутників. Накресліть дві фігури, які належать множині $X = P \cup (M \setminus T)$.

№ 9. A – множина паралелограмів, B – множина трикутників, C – множина багатокутників з кутом 60° . Накресліть дві фігури, які належать множині $X = A \cap C \cup B$, та дві фігури, які належать множині $Y = (C \setminus A) \setminus B$.

№ 10. Встановіть, чи є правильними такі класифікації:

- а) натуральні числа поділяються на одноцифрові, двоцифрові та трицифрові;
- б) паралелограми можуть бути прямокутниками, квадратами і ромбами;
- в) трикутники бувають рівносторонніми і нерівносторонніми;
- г) чотирикутники поділяються на паралелограми і трапеції.

№ 11. На координатній площині зобразіть елементи декартового добутку множин X і Y , якщо: а) $X = \mathbb{R}$, $Y = \{3\}$; б) $X = \mathbb{R}$, $Y = [-3; 3]$; в) $X = [0; \infty)$, $Y = (-\infty; 0]$

№ 12. А координатній площині побудуйте фігуру F , якщо:

- | | |
|--|---|
| а) $F = \{(x, y) \mid x=2, y \in \mathbb{R}\};$ | г) $F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \leq -3\};$ |
| б) $F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = -3\};$ | д) $F = \{(x, y) \mid x = 2, y \in \mathbb{R}\};$ |
| в) $F = \{(x, y) \mid x \geq 2, y \in \mathbb{R}\};$ | е) $F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = 3\}.$ |

Література

Основна

1. Боровик В.Н., Вивальнюк Л.М., Мурач М.М., Соколенко О.И. Курс математики: навч.посіб. Київ: Вища школа, 1995. 392с.
2. Кухар В.М., Білий Б.М. Теоретичні основи початкового курсу математики. Київ: Вища школа, 1987. 318с.
3. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М. и др. Математика: учеб.пособ. Москва: Просвещение, 1977. 350с.
4. Задачник-практикум по математике: пособие для студентов-заочников факультетов подготовки учителей начальных классов пединститут / Под ред. Н.Я.Виленкина. Москва: Просвещение, 1977.185с.
5. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике: учеб. пособ. Москва:Просвещение, 1985. 184 с.
6. Левшин М.М., Лодатко Є.О. Математика: навч.посіб. В 3-х ч. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2012. Ч.І. 264с.
7. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики: учеб. пособие. Москва:Просвещение, 1988. 320 с..

Додаткова

- 1.Вивальнюк Л. М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи : навч.посіб. Київ: Вища школа, 1988. 270 с.
2. Зуб О. М., Коберник Г.І., Нещадим А.Ф. Математика : посіб. для студ. пед. факультетів. Київ. : Науковий світ, 2000. 417 с.
3. Математика. Ч.1: навч.посіб./ Під ред. В.Д.Рябчинської. Харків, 1989. 23 с.
4. Рябчинская В.Д., Ионова Е.Н, Курбаров С.Г. Натуральные числа и операции над ними : метод.реком. Харьков, 1992. 24 с.
- 5.Рябчинська В.Д., Іонова О.М, Карпова В.О., Курбаров С.Г. Організація самостійної роботи з математики при вивченні теми: «Цілі невід’ємні числа»: метод.реком. Харків, 1994. 23 с.
- 6.Рябчинська В.Д., Фещенко Т.І., Захарова Г.М. Натуральні числа, алгебраїчні операції, методика їх формування. Ч.І: метод.реком. Харків, 1991. 30с.
- 7.Рябчинская В.Д., Гусева Т.К., Карпова В.А. Общие математические понятия: метод.реком. Харьков, 1989. 47 с.
9. Рябчинська В.Д., Любченко А.Г. Організація самостійної роботи з математики при вивченні тем: «Множини» і «Математичні твердження»: метод.реком. Харків, 1990. 25 с.

Навчальне видання

Іонова О. М., Титаренко Л. І., Масюк О. М., Білецька С. А.

**МАТЕМАТИКА:
МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ**

Навчально-методичний посібник

Відповідальний за випуск: Іонова О.М.

Комп'ютерна верстка: Масюк О.М.

Коректор: Білецька С. А.

Відповідальність за дотримання вимог академічної доброчесності несуть автори

Підписано до друку	Формат	Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк офсетний. Ум. друк. арк.		
Обл.-вид. арк.	Зам №	Тираж прим. Ціна договірна.

Відомості про видавництво